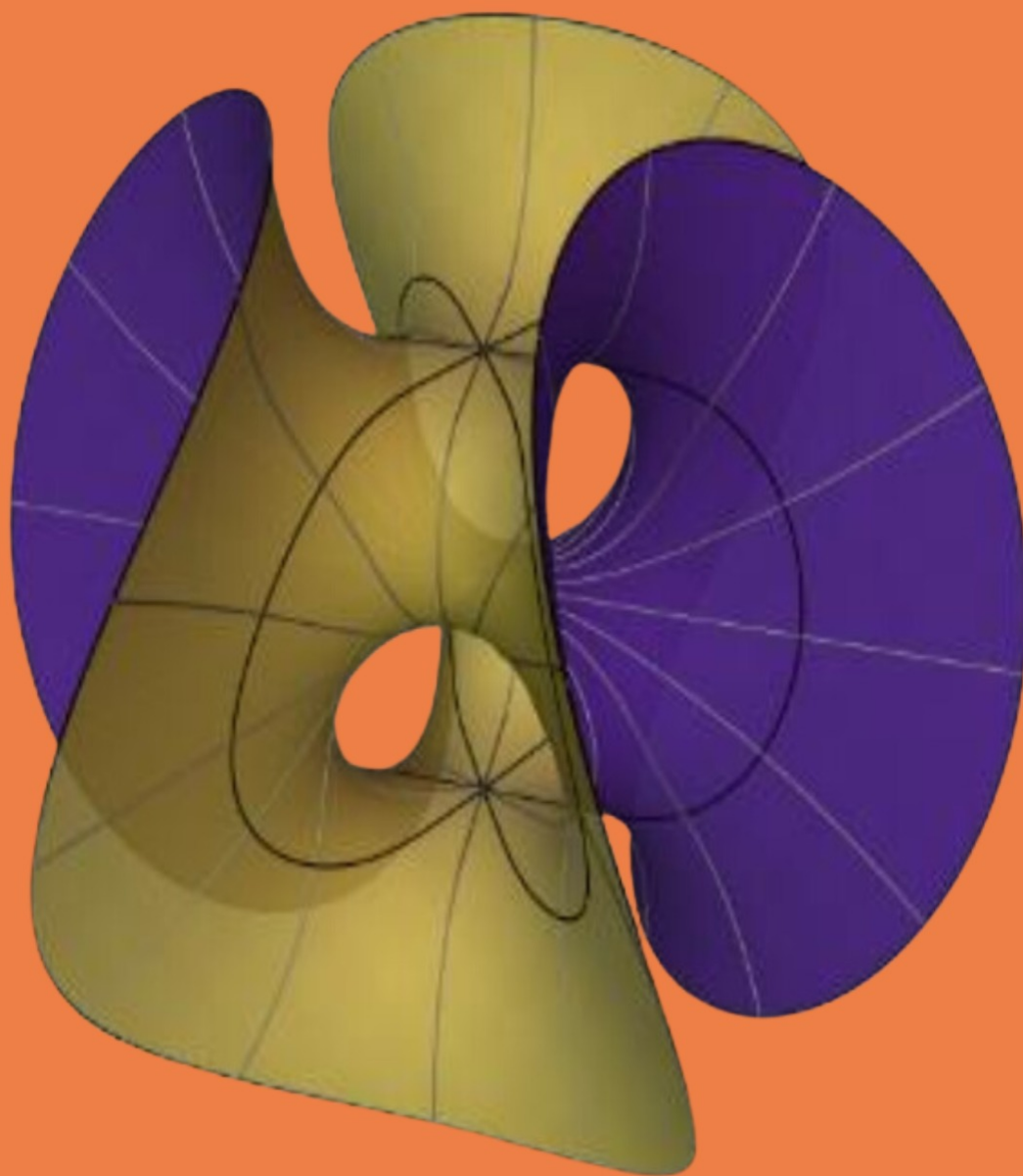


ANÁLISE REAL: INTRODUÇÃO AS MAJORAÇÕES

VOLUME III

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

Análise Real: Introdução as Majorações

3ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

3ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586A Análise Real: Introdução as Majorações

/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. Jornandes Dias da Silva. Juan Carlos Oliveira de Medeiros. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2024

160 f.: il

DOI: 10.37423/2024.edcl882

ISBN: 978-65-5367-443-1

Modo de acesso: World Wide Web

Incluir Bibliografia

1. majorações 2. séries-numéricas 3. -limites-e-suas-majorações 4. aspectos-topológicos-da-reta 5. condições-de-otimilidade I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Silva, Jornandes Dias da V. Medeiros, Juan Carlos Oliveira de VI. Título

CDU: 510

<https://doi.org/10.37423/2024.edcl882>

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORIA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

MSc Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior

MSc Humberto Costa

MSc Thays Merçon

MSc Adalberto Zorzo

MSc Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno

PHD Willian Douglas Guilherme

MSc Andrea Carla Agnes e Silva Pinto

MSc Walmir Fernandes Pereira

MSc Edisio Alves de Aguiar Junior

MSc Rodrigo Sanchotene Silva

MSc Wesley Pacheco Calixto

MSc Adriano Pereira da Silva

MSc Frederico Celestino Barbosa

MSc Guilherme Fernando Ribeiro

MSc. Plínio Ferreira Pires

MSc Fabricio Vieira Cavalcante

PHD Marcus Fernando da Silva Praxedes

MSc Simone Buchignani Maigret

Dr. Adilson Tadeu Basquerote

Dra. Thays Zigante Furlan

MSc Camila Concato

PHD Miguel Adriano Inácio

MSc Anelisa Mota Gregoleti

PHD Jesus Rodrigues Lemos

MSc Gabriela Cristina Borborema Bozzo

MSc Karine Moreira Gomes Sales

Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares

MSc Pedro Panhoca da Silva

MSc Helton Rangel Coutinho Junior

MSc Carlos Augusto Zilli

MSc Euvaldo de Sousa Costa Junior

Dra. Suely Lopes de Azevedo

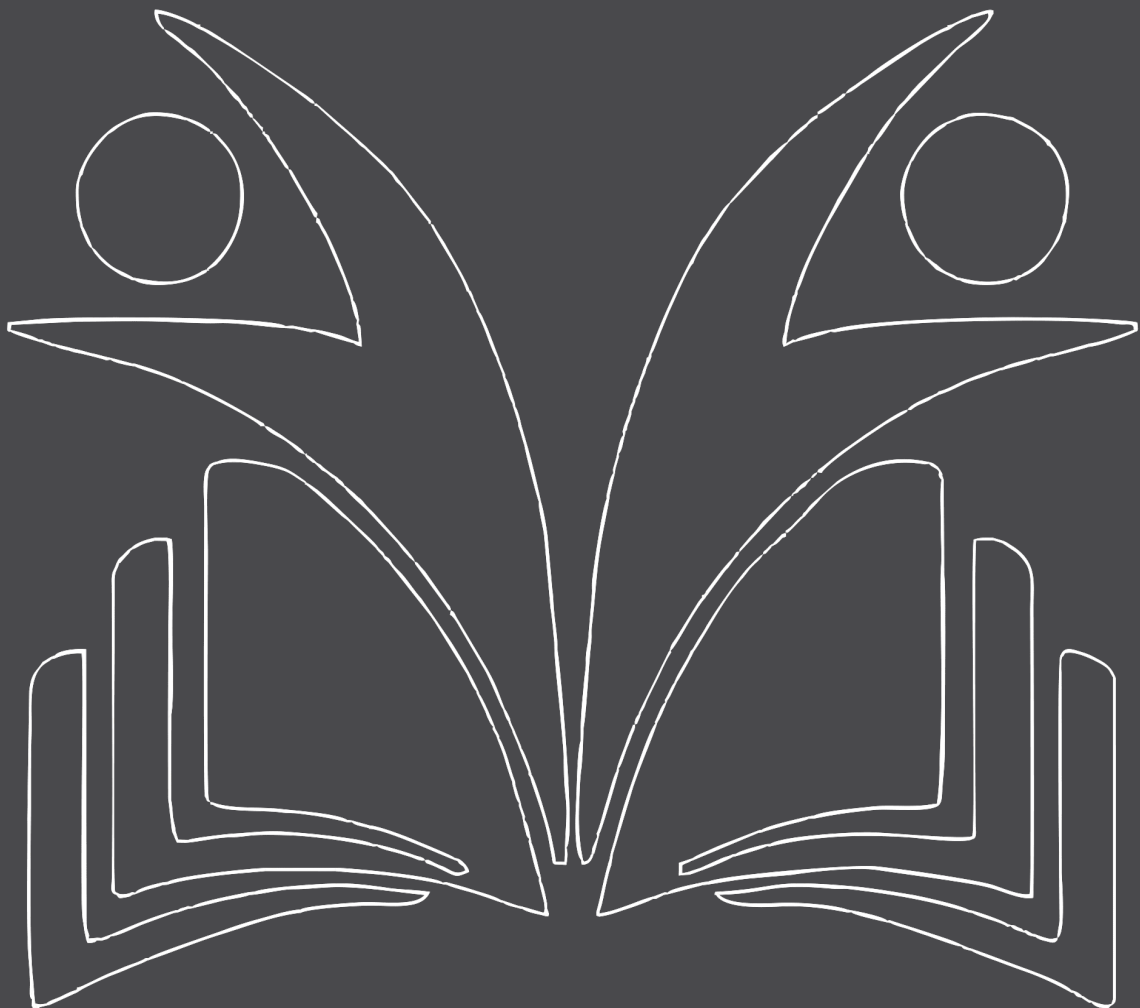
MSc Francisco Odecio Sales

MSc Ezequiel Martins Ferreira

MSc Eliane Avelina de Azevedo Sampaio



10.37423/2024.edcl882



Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuíram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha) e o Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- Não estaria sendo justo, se não destacasse o nosso amigo Prof. Ms. Roberto Lessa, ao longo de mais de três décadas lecionando Álgebra Linear, conversando sobre: como abordaríamos determinados temas, ofertou diversas sugestões, correções e orientações no tocante a escrita.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões ao longo dos anos.
- à UPE, pelo apoio.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais,
Filhos, Esposas, Todos os familiares
e Ao grande Mestre Olavo Otávio
Nunes (In Memoriam)

Prefácio

Neste terceiro volume de Introdução as Majorações em Análise Real, é fundamental mostrar e conjecturar como se constrói algumas majorações, os estudantes de Análise Real conseguem resolver as questões iniciais dos livros didáticos, entretanto se deparam com alguns exercícios mais elaborados, que não conseguem solucionar. Isto ocorre desde os temas iniciais, como em temas mais aprofundados. Tendo em vista que poucos materiais ou quase nada, se tem no tocante as construção de majorações em Análise Real estão disponíveis para os estudantes nesta situação, foi escrito este livro com o propósito de apresentar as majorações antes de se passar as demonstrações de problemas não triviais de Análise Real.

Inicialmente, apresentamos a resolução de problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um Letramento Matemático de Mentalidade Crescente, Criativa e Flexível em temas básicos como sequências e séries numéricas, séries de termos positivos, séries alternadas, teoremas da raiz e razão, teste da integral, ponto de acumulação, limites de funções, continuidade, teorema do valor intermediário até abordarmos temas não triviais como aspectos topológicos da reta, ponto interior, exterior, fronteira de uma determinada região, classificação topológica dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, limites e suas majorações, limites trigonométricos básicos, continuidade como caráter local, função de Lipschitz e continuidade uniforme como caráter global, supremo e ínfimos, ressaltando toda uma preparação das majorações para quando se for demonstrar propriedade operacionais de limites de sequências, funções e continuidades por definições de ϵ e δ . A Derivada de uma função f usando limite óbvio terá caráter local, regras de derivações, derivadas de funções trigonométricas, teorema da regra da cadeia, função inversa, máximo e mínimo local, teoremas de Rolle e Valor Médio, teorema que descreve regiões de crescimento e decrescimentos, bem como Funções Convexas e Condições de Otimalidade de 1ª e 2ª ordem, apêndice A. Polinômio de Taylor e finalizando com Letramento Matemático Criativo e Flexível, apresentando uma Ideia Geométrica de $\sup A$ e $\inf A$ demonstrando detalhadamente os teoremas, em casos mais sofisticados, demonstrando de várias formas o mesmo teorema.

Vale a pena salientar que buscamos dentro do possível, resolver os problemas com todos os passos, detalhando os procedimentos de majorações antes de fazer as demonstrações. Em alguns casos, inclusive, fazendo comentários matemáticos sobre o que está sendo realizado. Assim, o texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho (ou em grupo), de forma autônoma e com segurança, conferindo não apenas os resultados, mas todo o desenvolvimento lógico operacional.

Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa uma certa cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, correções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endereços:

cjs@poli.br
was@poli.br
galdino@poli.br
jornandesdias@poli.br
juca@ufc.br

Recife, 18 de outubro de 2023

Conteúdo

Copiright	iii
Corpo Editorial	iv
Agradecimentos	v
Dedicatória	vi
Prefácio	vii
DOI	vii
Conteúdo	ix
Capítulo 1 Introdução	1
1.1 O matemático Karl Weierstrass	1
1.2 Alguns Aspectos históricos das Séries Numéricas	2
1.3 Alguns Aspectos Topológicos da Reta	3
1.4 Séries Numéricas	4
Capítulo 2 Ponto de acumulação, Limites de funções	21
2.1 A Vizinhança aberta de centro a e raio $\delta > 0$	22
2.2 Alguns aspectos topológicos da reta	22
2.2.1 Classificação topológica dos subconjuntos de $\mathbb{R}$	24
2.3 Limites de Funções	28
2.3.1 Continuidade	28
2.3.2 Ponto de acumulação:	29
2.3.3 Limites de funções	29
2.3.4 Limites Laterais	36
Capítulo 2 Exercício	44
Capítulo 3 Funções Contínuas	57
3.1 Continuidade	58
3.2 Funções contínuas em Intervalos	66
3.3 Aplicações dos teoremas do anulamento e do valor intermediário	68
Capítulo 3 Exercício	76
Capítulo 4 Derivadas	82
4.1 A Derivada de uma função f	83
Capítulo 4 Exercício	84
4.2 Máximo e Mínimo Local (Relativo)	96
Capítulo 4 Exercício	102
4.3 Funções Convexas e Condições de Otimalidade de 1^a e 2^a ordem	108
Capítulo 4 Exercício	109

Capítulo 5 Apêndice A	113
Capítulo 6 Apêndice B	115
Capítulo 7 Apêndice C	120
Capítulo 8 Apêndice D	127
Capítulo 9 Apêndice E	142
Bibliografia	148

Capítulo 1 Introdução

1.1 O matemático Karl Weierstrass



Figura 1.1: Karl Weierstrass

Karl Weierstrass foi um proeminente matemático alemão que viveu de 1815 a 1897. Ele fez contribuições significativas para o campo da matemática, especialmente nas áreas de análise e teoria das funções.

Weierstrass nasceu em 31 de outubro de 1815, em Ostenfelde, na Vestfália, que na época fazia parte do Reino da Prússia. Inicialmente, ele estudou direito na Universidade de Bonn, mas logo desenvolveu uma paixão pela matemática. Ele transferiu-se para a Universidade de Münster, onde estudou matemática sob a orientação do matemático Christoph Gudermann.

Weierstrass continuou seus estudos na Universidade de Berlim, onde assistiu a palestras de renomados matemáticos como Ernst Kummer e Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Apesar das dificuldades financeiras, ele perseverou em seus estudos matemáticos e obteve seu doutorado em 1854. No entanto, devido à falta de oportunidades acadêmicas, Weierstrass trabalhou como professor do ensino secundário por vários anos.

No final dos anos 1850, Weierstrass começou a publicar artigos inovadores que revolucionaram o campo da análise. Ele desenvolveu uma base rigorosa para a análise matemática e desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da teoria das funções. Uma de suas conquistas mais famosas foi a descoberta de um exemplo de função que é contínua em todos os lugares, mas não é diferenciável em lugar algum, conhecida como a função de Weierstrass. Essa descoberta desafiou a crença prevalecente de que todas as funções contínuas eram diferenciáveis, exceto em pontos isolados.

O trabalho de Weierstrass em funções estabeleceu as bases para a teoria moderna da análise real e teve uma influência profunda no desenvolvimento do cálculo. Sua ênfase na rigorosidade e precisão estabeleceu novos padrões na análise matemática e inspirou gerações subsequentes de matemáticos. Apesar de enfrentar problemas de saúde e desafios pessoais ao longo de sua vida, Weierstrass continuou a produzir pesquisas inovadoras. Seu trabalho eventualmente ganhou reconhecimento e, em 1857, ele foi nomeado professor da Universidade de Berlim. Ele se tornou um matemático altamente respeitado e mentor de numerosos estudantes, incluindo Sofia Kovalevskaya, a primeira mulher na Europa a obter um doutorado em matemática.

As contribuições de Karl Weierstrass para a matemática foram abrangentes, abrangendo áreas como análise, cálculo, teoria das funções e física matemática. Sua dedicação à racionalidade matemática rigorosa e seu profundo impacto no desenvolvimento da análise matemática o tornam um dos matemáticos mais influentes do século XIX.

1.2 Alguns Aspectos históricos das Séries Numéricas

As séries numéricas têm uma longa história que remonta à antiguidade, com muitos matemáticos e estudiosos contribuindo para o desenvolvimento e estudo dessas sequências ao longo dos séculos. Aqui estão alguns aspectos históricos importantes das séries numéricas: Antiguidade: Acredita-se que as séries numéricas tenham sido estudadas pelos antigos matemáticos babilônios, egípcios e gregos. Por exemplo, os babilônios desenvolveram um sistema posicional de base 60 e usavam tabelas de números para resolver problemas aritméticos, que poderiam ser considerados séries numéricas em certo sentido.

Sequências aritméticas e geométricas: As sequências aritméticas e geométricas foram estudadas por matemáticos gregos, como Pitágoras e Euclides, por volta do século V a.C. Eles exploraram as propriedades dessas sequências e desenvolveram métodos para calcular a soma dos termos de uma sequência. Série harmônica: A série harmônica, que é a soma dos inversos dos números naturais, foi estudada pelos matemáticos gregos e indianos antigos. Arquimedes, um matemático grego do século III a.C., provou que a série harmônica diverge, ou seja, sua soma não tem um valor finito.

Série de Fibonacci: A sequência de Fibonacci, uma série numérica em que cada termo é a soma dos dois termos anteriores, foi introduzida na Europa Ocidental pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci no século XIII. Essa série tem várias propriedades interessantes e está relacionada a uma série de fenômenos naturais. Séries infinitas e cálculo: O estudo rigoroso das séries infinitas e seu papel no cálculo começou a se desenvolver no século XVII, com matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Eles estabeleceram as bases do cálculo infinitesimal e desenvolveram métodos para manipular séries infinitas, incluindo a série de Taylor, que é usada para aproximar funções por meio de uma série infinita de termos. Séries modernas: No século XIX, matemáticos como Augustin-Louis Cauchy e Karl Weierstrass desenvolveram a teoria rigorosa das séries e suas propriedades de convergência e divergência. Eles estabeleceram critérios matemáticos precisos para determinar se uma série converge (tem uma soma finita) ou diverge (não tem uma soma finita).

Esses são apenas alguns aspectos históricos das séries numéricas, destacando os marcos importantes ao longo dos séculos. Desde então, as séries numéricas continuaram a desempenhar um papel essencial na matemática e em várias áreas da ciência, sendo estudadas e aplicadas em uma variedade de contextos.

1.3 Alguns Aspectos Topológicos da Reta

Na topologia, a reta é um exemplo simples, mas importante, de espaço topológico. Vamos discutir os aspectos topológicos da reta em termos de conjuntos abertos, conjuntos fechados, fronteira e fecho.

Conjuntos Abertos: Um conjunto é considerado aberto na reta se, para cada ponto do conjunto, existe um intervalo em torno desse ponto totalmente contido no conjunto. Por exemplo, o intervalo aberto $(0, 1)$ é um conjunto aberto na reta, pois para qualquer ponto dentro do intervalo, podemos encontrar um intervalo menor ao redor desse ponto que ainda está totalmente contido no intervalo $(0, 1)$.

Conjuntos Fechados: Um conjunto é considerado fechado na reta se ele contém todos os seus pontos de fronteira. Em outras palavras, um conjunto fechado é o complemento de um conjunto aberto. Por exemplo, o intervalo fechado $[0, 1]$ é um conjunto fechado na reta, pois inclui todos os seus pontos de fronteira (0 e 1).

Fronteira: A fronteira de um conjunto é o conjunto de pontos que estão simultaneamente em seu interior e em seu complemento. Na reta, a fronteira de um conjunto é o conjunto de pontos que pertencem ao conjunto fechado e não pertencem ao conjunto aberto correspondente. Por exemplo, a fronteira do intervalo $(0, 1)$ é o conjunto $\{0, 1\}$, pois esses pontos estão no intervalo fechado $[0, 1]$ (complemento do conjunto aberto) e não estão no intervalo aberto $(0, 1)$. **Fecho:** O fecho de um conjunto é o menor conjunto fechado que contém todos os pontos do conjunto. Na reta, o fecho de um conjunto é obtido adicionando os pontos de fronteira do conjunto ao conjunto original. Por exemplo, o fecho do intervalo aberto $(0, 1)$ é o intervalo fechado $[0, 1]$, pois inclui todos os pontos do intervalo original e seus pontos de fronteira.

Em resumo, na reta, conjuntos abertos são intervalos abertos (como $(0, 1)$), conjuntos fechados são intervalos fechados (como $[0, 1]$), a fronteira de um conjunto é formada pelos pontos que estão simultaneamente no conjunto fechado e não no conjunto aberto correspondente, e o fecho de um conjunto é obtido adicionando os pontos de fronteira ao conjunto original.

1.4 Séries Numéricas

Motivação

As séries infinitas têm fascinado matemáticos e cientistas ao longo da história devido à sua natureza intrigante e à sua aplicação em várias áreas. Aqui estão alguns exemplos de motivações para estudar séries (somadas infinitas):

- Soma de sequências infinitas:** As somas infinitas são usadas para representar e somar sequências infinitas de números. Por exemplo, a série harmônica é uma série infinita que representa a soma dos recíprocos dos números naturais. Ela desafia a intuição, pois a soma dos termos infinitos é divergente (infinita), mas a soma parcial de seus termos pode se aproximar de um valor finito.

- Aproximação de funções:** As séries infinitas podem ser usadas para aproximar funções complicadas. Por exemplo, a série de Taylor é uma representação de uma função como uma soma infinita de termos, permitindo uma aproximação precisa de uma função complexa por meio de uma série mais simples. Isso é especialmente útil em cálculos numéricos e análise matemática.

- Análise de comportamento assintótico:** O estudo de séries infinitas é fundamental na análise assintótica, que lida com o comportamento de funções quando os argumentos tendem ao infinito ou a outros pontos singulares. As séries assintóticas ajudam a entender o crescimento relativo de funções e a determinar seu comportamento em escalas grandes ou pequenas.

- Cálculo de integrais:** Muitas vezes, as séries infinitas são usadas para calcular integrais complicadas. Por exemplo, a série de Fourier é uma representação de uma função periódica como uma soma de senos e cossenos. Essa série é essencial na análise de sinais e processamento de imagens.

- Estudo de propriedades matemáticas:** As séries infinitas apresentam uma rica estrutura matemática e são frequentemente utilizadas para explorar propriedades interessantes e fundamentais de números, sequências e funções. Elas estão intimamente relacionadas a tópicos como convergência, continuidade, diferenciabilidade e análise complexa.

Esses são apenas alguns exemplos das várias motivações para estudar séries infinitas. Elas desempenham um papel importante em diversas áreas da matemática e da ciência, e seu estudo é essencial para compreender fenômenos complexos e modelar o mundo ao nosso redor.



Observação

*A grosso modo podemos dizer em uma única frase que:
Uma série é a soma de todos os termos de uma sequência infinita.
(série convergente).*

Na época, antes da formalização com o rigor necessário, os matemáticos efetuavam as operações de somas infinitas como se fosse algo natural, sem se preocupar se era sempre possível. Como veremos a seguir, partindo de situações do ensino médio como progressões geométrica, vejamos ilustrativamente alguns exemplos.

Exemplo 1.1

Polinômio de Taylor

Uma aproximação para função exponencial $f(x) = e^x$, é possível ter a igualdade?

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Exemplo 1.2

A série de Taylor vai permitir escrever o igual no lugar da aproximação

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Revisitando as progressões geométricas

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-r}, \text{ com } |r| < 1.$$

Exemplo 1.3

Considere a seguinte progressão geométrica

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \text{ com } |x| < 1.$$

Exemplo 1.4

A progressão geométrica

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}, \text{ com } |x| < 1.$$

Integrando termo a termo, temos:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| + C.$$

Em particular, $C = 0$, obtemos:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \ln|1+x|.$$

Exemplo 1.5

Uma outra progressão geométrica

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Agora integrando, termo a termo, obtem-se:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C.$$

Em particular, $C = 0$, obtemos:

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x.$$

Observe que facilmente obtemos um valor para π

$$1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + \frac{1^9}{9} - \dots = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Alguns exemplos da crise no estudo das séries (somas infinitas)**Exemplo 1.6**

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Será que podemos dizer que é zero?

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 0$$

Reescrevendo a soma

$$S = 1 + [(-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots] = 1$$

Olhando como uma progressão geométrica

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Afinal de contas: Quanto vale a soma infinita? Adiantando a resposta, não vale nenhum dos valores descritos. veremos posteriormente que se trata de uma série divergente.

O objetivo central é saber: Quais as condições necessárias para que as "somas infinitas" convirjam.

Exemplo 1.7

Dada a progressão geométrica:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1 - x}, \text{ com } |x| < 1. \quad (1)$$

e analogamente,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x - 1}, \text{ com } |x| > 1. \quad (2)$$

Agora, combinando (1) e (2) obtemos:

$$\dots + x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^n} + \dots = 0.$$

Se substituirmos um valor positivo como é possível dar zero? Óbvio que esta soma infinita não poderia ser realizada uma vez que

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1 \text{ e } |x| > 1\} = \emptyset.$$

Quando podemos derivar termo a termo? Integrar termo a termo? Com as ilustrações dadas, facilmente se percebe que não é sempre que podemos ter somas infinitas convergentes.

Séries Numéricas

Definição 1.1

Seja (a_n) uma sequência numérica e seja (S_n) a sequência das somas parciais

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Dizemos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ converge se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n = L.$$

Caso contrário, será uma série divergente.



Exemplo 1.8

$$1. \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad 3. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Somas parciais da série:

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{(n-1)} + a_n.$$

Assim,

$$S_n = S_{(n-1)} + a_n.$$

Exemplo 1.9

$$1. \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$



Observação

(A) Não esqueça!!

As somas parciais **tende** a L , ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ e a soma infinita **é** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$.

(verbos **tender** e **ser**)

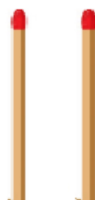
(B) Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, converge, onde $n_0 \in \mathbb{N}$ é fixado arbitrariamente, ou seja, o caráter de convergência de uma série não se altera se omitirmos (ou acrescentarmos) um número finito de termos.

Exemplo 1.10

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} + \dots$$

Revisitando o Ensino Médio

É de se esperar que esta soma infinita (série) seja igual a 2.



Mantem-se um palito fixo e o outro divide ao meio, em seguida, temos um inteiro, meio e meio, dividimos o último ao meio e assim sucessivamente, vem:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots = 2
 \end{aligned}$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão $q : |q| < 1$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Daí, obtemos:

$$(1 - q) S_n = a - aq^n = a(1 - q^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ desde que } |q| < 1.$$

Por conseguinte, vem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}, \text{ desde que } |q| < 1$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Agora, passando Ao limite, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Portanto, a série converge. ■

Série Geométrica:

$$\sum_{j=1}^{\infty} ar^{j-1} = a + ar + \dots + r^{j-1} + \dots = \begin{cases} \frac{a}{a-r}, \text{ se } |r| < 1 : \text{converge} \\ \pm\infty, \text{ se } |r| > 1 : \text{diverge.} \end{cases}$$

Os casos $r = 1$ ou $r = -1$.

1º Caso: $r = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \pm\infty$$

A série diverge.

2º Caso: $r = -1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a(-1)^{j-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} [a - a + \dots + (-1)^{n-1} a] = \begin{cases} 0, \text{ se } n \text{ é par} \\ a, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a série diverge. ■

Série de encaixe ou série telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \dots$$

As somas parciais da série

$$S_n = \sum_{j=1}^n (b_j - b_{j+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

A série converge (diverge) se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 - b_{n+1})$$

convergir. (divergir).

Exemplo 1.11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Basta notar que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n+1} \implies \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

E, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Ou ainda a série é convergente. ■

Exemplo 1.12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln n - \ln (n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [b_1 - b_{n+1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln 1 - \ln (n+1) = -\infty.$$

Logo a série é divergente. ■

Série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente.

Observe que: a elegante argumentação intuitiva em majorações para mostrar que a série harmônica é

divergente

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots \\
 & > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16}} + \dots \Rightarrow \\
 & \Rightarrow S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.
 \end{aligned}$$

Ora, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{n}{2}) = \infty$ segue-se daí que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \infty$$

Por conseguinte, vem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

De sorte que a série diverge. ■

Curiosidades

1. Um fato básico e interessante na série harmônica:

Cada termo é a média harmônica entre o termo anterior e o termo posterior.

Ilustrando, temos:

$$\begin{aligned}
 M.H. &= \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}} = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2} = a_2 \\
 M.H. &= \frac{2}{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}} = \frac{2}{\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\frac{2}{3} + 4} = \frac{2}{\frac{14}{3}} = \frac{3}{7} = a_3 \\
 M.H. &= \frac{2}{\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5}} = \frac{2}{\frac{1}{\frac{3}{7}} + \frac{1}{\frac{1}{5}}} = \frac{2}{\frac{7}{3} + 5} = \frac{2}{\frac{22}{3}} = \frac{3}{11} = a_4
 \end{aligned}$$

De forma geral tem-se:

$$M.H. = \frac{2}{\frac{1}{a_{j-1}} + \frac{1}{a_{j+1}}} = a_j$$

2. A denominação série harmônica é em correspondência aos nós de uma corda vibrando (nota musical). Por exemplo, $\frac{1}{2}$ produz um harmônico igual ao dobro da frequência fundamental, $\frac{1}{3}$ produz um harmônico 3 vezes a frequência fundamental.

Teorema 1.1

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então, tem-se: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.



Demonstração

Com efeito, as somas parciais da série produz:

$$S_n = S_{(n-1)} + a_n.$$

Seja $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$, então, temos: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{(n-1)} = L$. Logo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n - S_{(n-1)}] = L - L = 0.$$

Dito de outra forma: Se a série converge, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Decorre daí, um excelente critério para saber quando uma série diverge
Usando a equivalência tautológica, tem-se:

$$p \implies q \iff \sim q \implies \sim p$$

Ou ainda, se o limite do termo geral a_n não é zero, então, a série diverge.

Exemplo 1.13

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é uma série divergente; pois,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

■

Exemplo 1.14

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ é uma série divergente; pois,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

■

Teste da Divergência

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Exemplo 1.15

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ é divergente; pois, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$

Exemplo 1.16

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ é divergente, visto que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Exemplo 1.17

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ é divergente, visto que não existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$
o mesmo limite não pode convergir para dois valores distintos 1 ou -1.

■

Teorema 1.2 (Teorema da Comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos

- (i) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n, \forall$, então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- (ii) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $b_n \leq a_n, \forall$, então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.


Demonstração

As afirmações (i) e (ii) são equivalentes, assim, basta demonstrar a parte (i)

Com efeito, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $a_n \leq b_n, \forall$ e sejam as somas parciais das séries

$$S_n = \sum_{n=1}^n a_n \text{ e } T_n = \sum_{n=1}^n b_n, \text{ além disso, } 0 < S_n \leq T_n, \forall$$

Como a sequência (T_n) é convergente, segue-se que é limitada

(S_n) é uma sequência monótona e limitada, portanto, (S_n) converge.

Logo a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ■



Observação O teorema da comparação continua válido, se suprimirmos um número finito de termos das duas séries.

Exemplo 1.18

Estude a convergência das séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

Basta observar que:

$$a_n = \frac{\ln n}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = b_n.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série-p, com $p = 2 > 1$ convergente

segue-se daí por comparação que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ também converge. ■

Exemplo 1.19

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n} = a_n$$

A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente e, portanto, pelo teorema da comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ também diverge ■

Exemplo 1.20

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Com efeito, $n! \geq 2^{n-1}$, então,

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ora, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ é uma série geométrica convergente, então, pelo teorema da comparação, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

também é convergente. ■

Exemplo 1.21

Série- p : $0 < p < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Basta notar que:

$$b_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$$

como a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, segue-se que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

desde que: $0 < p < 1$. ■

**Observação**

Quando estudarmos os termos da série- p com $p > 1$ veremos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

é convergente.

Teorema 1.3 (Teorema da Comparação por limite)

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries de termos positivos e seja $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

(i) Se $L > 0$ as séries $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são ambas convergentes ou ambas divergentes.

(ii) Se $L = 0$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(iii) $L = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.

Majorações

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \iff -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \iff L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Podemos escolher $\varepsilon = \frac{L}{2}$

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon, \forall n \geq n_0 \iff \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}, \forall n \geq n_0 \iff \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n, \forall n \geq n_0$$

Daí, se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e $a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n, \forall n \geq n_0$, então, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.

Caso contrário, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge e $\frac{L}{2} \cdot b_n < a_n$, então, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ■


Demonstração

Faça a redação matemática da demonstração


Exemplo 1.22

Estude a convergência das séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Basta observar que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 > 0.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série-p, com $p = 2 > 1$ convergente

segue-se daí que: por comparação do limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ também converge. ■

Exemplo 1.23

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Note que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{1}{\cos h} = 1 > 0.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é uma série harmônica divergente.

Daí por comparação do limite que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge. ■

Séries Alternadas**Teorema (Leibniz):****Teorema 1.4 (Leibniz)**

Seja (b_n) uma sequência de termos positivos, monótona e decrescente, tal que:

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Então, a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n$ converge. ♥

Demonstração

Se (S_n) é a sequência das somas parciais da série, tem-se:

$$S_{(2n-1)} \leq S \leq S_{2n}$$

e

$$S_{2n} = S_{(2n-1)} + b_{2n}.$$

Agora, como $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ segue-se que: $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n} = 0$.

Assim,

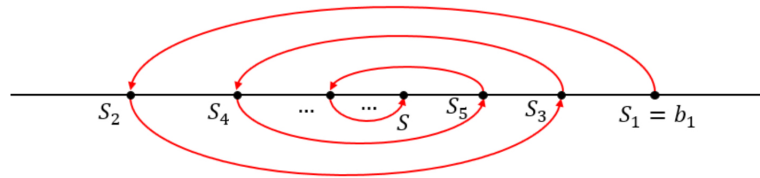
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{(2n-1)} = S.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Ou ainda, a série alternada converge.. ■

Este gráfico traduz o processo da construção da demonstração do teorema



$$S_2 = b_1 - b_2$$

$$S_3 = (b_1 - b_2) + b_3$$

$$S_4 = (b_1 - b_2) + b_3$$

$$\vdots$$

$$S_{2n} = S_{2n-1} + b_{2n}$$

Exemplo 1.24

Estude a convergência das séries:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Solução

1.

(i) Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 1$

(i) f é positiva $\forall x > 1$

(ii) f é decrescente $\forall x > e$

De fato,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \implies 1 - \ln x = 0 \implies x = e$$

$x \in (0, e) : f'(x) > 0 \implies f$ é crescente

$x \in (e, +\infty) : f'(x) < 0 \implies f$ é decrescente. Além disso,

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Logo, a série alternada converge. ■

2.

(i) Seja $f(x) = \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0$

(ii) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x > 0 \implies f$ é decrescente.

(iii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

De sorte que: a série converge. ■

Teorema 1.5 (Teorema da razão)

Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \neq 0, \forall n$ e seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L.$$

- (i) se $L < 1$, então, a série converge absolutamente
(ii) $L > 1$ ou $L = \infty$, então, a série diverge.

**Observação**

O teorema da razão não se aplica quando $L = 1$
(nada se pode concluir: se a série converge ou diverge)

Demonstração

Ver referências [6], [10] e [19].

Exemplo 1.25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Nada se pode concluir pelo teorema da razão; no entanto, a série harmônica já vimos é divergente.

Exemplo 1.26

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^2 = 1.$$

Pelo teorema da razão nada se conclui; sabemos que a série- p , com $p = 2 > 1$ é convergente.

Exemplo 1.27

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n + 5}{2^n + 5} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \cdot (2^n + 5)}{2^n + 5} - \frac{5}{2^n + 5} \right] = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema da razão a série converge.

Exemplo 1.28

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 5}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2^n + 5} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^n + 5}{2^n + 5} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2 \cdot (2^n + 5)}{2^n + 5} - \frac{5}{2^n + 5} \right] = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Portanto, pelo teorema da razão a série converge.

Exemplo 1.29

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{e \cdot e^n} \cdot \frac{e^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e} = \infty.$$

Logo, pelo teorema da razão a série diverge.

Teorema 1.6 (Teorema da Raiz)

Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \neq 0, \forall n$ e seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

- (i) se $L < 1$, então, a série converge absolutamente
- (ii) $L > 1$ ou $L = \infty$, então, a série diverge.

**Demonstração**

Vejam referências [6], [10] e [19].

Exemplo 1.30

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{n}{\ln n} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{\ln n} \right|.$$

Seja $f(x) = \frac{x}{\ln x}, \forall x \geq 2$, temos a indeterminação na forma $\frac{\infty}{\infty}$, então, podemos analisar o limite à luz de L'Hôpital

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} x = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{\ln n} \right| = \infty.$$

Portanto, a série é divergente.

Teorema 1.7 (Critério da Integral)

Seja $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que: f é não-negativa e monótona não-crescente, isto é,

(i) $f(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ e

(ii) $f(x) \geq f(y)$, sempre que: $1 \leq x \leq y$.

Nestas condições, e seja $a_n = f(n)$ então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente, se:

a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ for convergente.

**Exemplo 1.31**

Estudar a convergência da série- p :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$$

Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x^P} = x^{-P}.$$

f é positiva para todo $x > 1$

Se $P = 1 : f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0, \forall x > 1 \implies f$ é uma função decrescente.

Se $P \neq 1 : f'(x) = -Px^{-P-1} < 0, \forall x > 1 \implies f$ é uma função decrescente.

Daí estudar a série- P é o mesmo que estudar a integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^P} dx$$

1º Caso: $p = 1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} [\ln |B| - \ln |1|] = \lim_{B \rightarrow \infty} \ln |B| = +\infty.$$

Como a integral imprópria diverge segue-se que: a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

também diverge como já havíamos provado anteriormente.

2º Caso: $p \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x^{-P} dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{x^{-P+1}}{-P+1} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left[\frac{B^{-P+1}}{-P+1} - \frac{1^{-P+1}}{-P+1} \right] \\ &= \frac{1}{P-1} + \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B^{1-P}}{1-P} = \begin{cases} +\infty, P < 1 \text{ diverge} \\ \frac{1}{P-1}, P > 1 \text{ converge} \end{cases} \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} = \begin{cases} +\infty, P \leq 1 \text{ diverge} \\ \frac{1}{P-1}, P > 1 \text{ converge} \end{cases}$$

**Exemplo 1.32**

Estudar a convergência :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}.$$

Seja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x) = xe^{-x}.$$

f é positiva: $\forall x > 1$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = \frac{1-x}{e^x}$$

$\forall x > 1 : f'(x) < 0 \implies f$ é uma função decrescente.

Daí, estudar a série é o mesmo que estudar a integral imprópria

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} xe^{-x} dx &= \lim_{B \rightarrow \infty} -(x+1)e^{-x} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left[-\frac{(B+1)}{e^B} + \frac{2}{e} \right] \\ &= \frac{2}{e} - \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{(B+1)}{e^B}. \end{aligned}$$

Agora, aplicando L'Hôpital, obtemos:

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x} dx = \frac{2}{e} - \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{e^B} = \frac{2}{e}.$$

A integral imprópria converge, segue-se do teorema da integral que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}.$$

converge para o mesmo valor. ■

Capítulo 2 Ponto de acumulação, Limites de funções



*Spock e suas frases inspiradoras! **Jornada nas Estrelas***

"Fatos insuficientes convidam sempre ao perigo."

T01E24 Space Seed (1968)

"Após algum tempo, você vai perceber que ter não é tão agradável como querer. Não é lógico, mas é normalmente verdade."

T02E01 Amok Time (1967)

"Vida longa e próspera."

T02E01 Amok Time (1967)

"É curioso como vocês humanos conseguem tantas vezes obter aquilo que não querem."

T03E01 Spock's Brain (1968)

"Em momentos críticos, o homem por vezes vê exatamente o que deseja ver."

T03E09 The Tholian Web (1968)

"A mudança é um processo essencial a toda a existência."

T03E15 Let That Be Your Last Battlefield (1969)

"As necessidades da maioria superam as necessidades dos poucos, ou de um."

Jornada nas Estrelas II: A Ira de Khan (1982)

"Quando você elimina o impossível, o que restar, embora improvável, deve ser a verdade."

Jornada nas Estrelas VI: A Terra Desconhecida (1991)

"Se eu fosse humano eu acredito que minha resposta seria "vá para o inferno". Se eu fosse humano."

Jornada nas Estrelas VI: A Terra Desconhecida (1991)

"Uma pessoa pode começar remodelando a paisagem com apenas uma flor, Capitão."

A Nova Geração, T05E08 Unification II (1991)

Pontos de Acumulação:

Um ponto de acumulação, também conhecido como ponto limite ou ponto de acumulação, é um ponto em um conjunto onde é possível encontrar uma sequência infinita de elementos desse conjunto que se aproximam cada vez mais desse ponto. Em outras palavras, um ponto de acumulação é um ponto em que é possível encontrar pontos arbitrariamente próximos pertencentes ao conjunto.

Por exemplo, considere o conjunto dos números reais entre 0 e 1, excluindo o próprio 0 e 1. O ponto 0 é um ponto de acumulação desse conjunto, pois podemos encontrar uma sequência infinita de números desse conjunto que se aproximam de 0, como 0.1, 0.01, 0.001, e assim por diante.

2.1 A Vizinhança aberta de centro a e raio $\delta > 0$

Definição 2.1

A Vizinhança aberta de centro " a " e raio $\delta > 0$, é dada por:

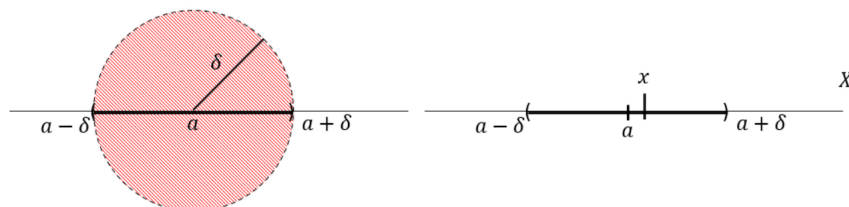
$$\mathbb{V}_\delta(a) = \{x \in \mathbb{X} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$



Observação

Note que:

$$|x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta \iff x \in (a - \delta, a + \delta).$$



2.2 Alguns aspectos topológicos da reta

Definição 2.2

Sejam $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. A posição relativa de a com respeito ao conjunto $\mathbb{X}$, quando é caracterizada por:

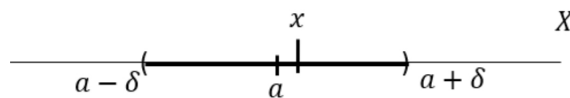
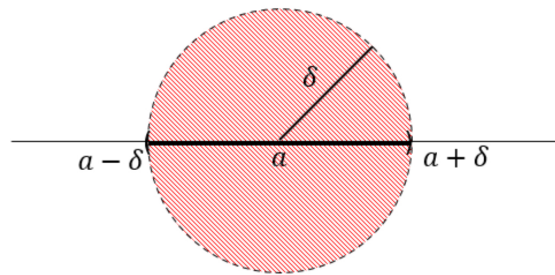
- (i) Existe $\delta > 0$; $\mathbb{V}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \subset \mathbb{X}$. Neste caso, a é ponto interior de $\mathbb{X}$.
- (ii) Existe $\delta > 0$; $\mathbb{V}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) \subset \mathbb{X}^C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$. Neste caso, a é ponto exterior de $\mathbb{X}$.
- (iii) Para todo $\delta > 0$; $\mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{X} \neq \phi$ e $\mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{X}^C \neq \phi$. Neste caso, a é um ponto fronteira de $\mathbb{X}$.

Notações

- (a) Interior de $\mathbb{X}$: $\text{int}(\mathbb{X})$ ou $\overset{\circ}{\mathbb{X}}$, isto é, $\text{int}(\mathbb{X}) = \overset{\circ}{\mathbb{X}} = \{x \in \mathbb{X} : x \text{ é ponto interior}\}$
 (b) Exterior de $\mathbb{X}$: $\text{ext}(\mathbb{X})$
 (c) Fronteira de $\mathbb{X}$: $\partial(\mathbb{X})$

Lembrete!!

$$a \in \partial X \Leftrightarrow \begin{matrix} V_\delta(a) \cap X \neq \emptyset \\ e \\ V_\delta(a) \cap \mathbb{R} \setminus X \neq \emptyset \end{matrix}$$



Exemplo 2.1

Seja $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\} = [0, 2)$. Ilustrativamente $a = 1$ é ponto interior de $\mathbb{X}$. De fato, dado $a = 1$ existe $\delta > 0$, escolha por exemplo $\delta = \frac{1}{2}$. Assim,

$$(a - \delta, a + \delta) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) \subset [0, 2).$$

Afirmção: Todo ponto $a \in (0, 2)$ é ponto interior de $\mathbb{X}$.

De fato, escolha $\delta = \frac{1}{2} \min \{a - 0, 2 - a\} > 0$, então, temos:

1º Caso: Se $\delta = \frac{1}{2} \min \{a - 0, 2 - a\} = \frac{a}{2} > 0$, então, tem-se:

$$(a - \delta, a + \delta) = \left(a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right) \subset [0, 2).$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: se $\delta = \frac{1}{2} \min \{a - 0, 2 - a\} = \frac{2-a}{2} = 1 - \frac{a}{2} > 0$, então, temos:

$$(a - \delta, a + \delta) = \left(a - \left(1 - \frac{a}{2}\right), a + \left(1 - \frac{a}{2}\right)\right) = \left(\frac{3a}{2} - 1, \frac{a}{2} + 1\right) \subset [0, 2).$$

Agora, dos casos (1) e (2), segue-se que:

$$(a - \delta, a + \delta) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) \subset [0, 2).$$

Exemplo 2.2

Vale a pena ressaltar que: $a = 0$ não é ponto interior de $\mathbb{X} = [0, 2)$. com efeito, basta notar que: $\forall \delta > 0$, tem-se:

$$(a - \delta, a + \delta) = (0 - \delta, 0 + \delta) \not\subset [0, 2).$$



Definição 2.3

Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $\mathbb{X}$ é um conjunto aberto, quando:

$$\mathbb{X} = \text{int}(\mathbb{X}).$$

consequentemente, $\mathbb{X}$ é aberto se, e somente se,

$$\forall x_0 \in \mathbb{X} : \exists \delta_{x_0} > 0, \text{ tal que: } (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \subset \mathbb{X}.$$

mudando o linguajar, podemos dizer que:

Um conjunto aberto é estável em relação a pontos próximos.



Exemplo 2.3

O conjunto $\mathbb{X} = [0, 2)$ não é aberto, pois, $0 \in \mathbb{X} = [0, 2)$, mas, $0 \notin \text{int}(\mathbb{X})$
0 não é ponto interior.

Exemplo 2.4

A reta real é um conjunto aberto, isto é, $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.

De fato,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : \exists \delta_{x_0} > 0 \text{ (De fato, qualquer } \delta > 0 \text{) , tal que: } (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \subset \mathbb{R}.$$

visto que: tanto $(x_0 - \delta_{x_0}) \in \mathbb{R}$ como $(x_0 + \delta_{x_0}) \in \mathbb{R}$. conteúdo...

2.2.1 Classificação topológica dos subconjuntos de $\mathbb{R}$

1 Conjunto aberto: $\mathbb{X}$ é aberto, quando: $\mathbb{X} = \text{int}(\mathbb{X})$.

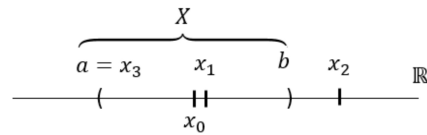
2 Conjunto fechado: $\mathbb{X}$ é fechado, quando: $\partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X}$.

Fato: $\mathbb{X}$ é aberto $\iff$ O conjunto complementar de $\mathbb{X}$ igual a $\mathbb{X}^C$ é fechado.

Ilustrando um conjunto aberto X , ponto exterior e ponto fronteira de um conjunto X dado da reta

$$x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{X} = \text{ext}(\mathbb{X})$$

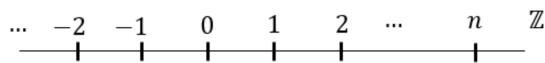
$$x_1 \in \text{int}(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$$



$x_3 = a, b \in \partial(X) = \text{fronteira de } X$.

Exemplo 2.5

$\text{int}(\mathbb{Z}) = \emptyset$; $\forall \delta (n)$ contém algum ponto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}$ pela densidade]



$$\forall \delta (n) \left\{ \begin{array}{l} \not\subset \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \not\subset \mathbb{Z}, \forall \delta > 0 \end{array} \right. \text{ e } \partial(\mathbb{Z}) = \emptyset$$

Exemplo 2.6

X é denso em $\mathbb{R}$ quando $\bar{X} = \mathbb{R}$

Exemplo 2.7

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

$$a \in \partial(X) \implies \forall \delta (a) \cap X \neq \emptyset \text{ e } \forall \delta (a) \cap \mathbb{R} \setminus X \neq \emptyset$$

Lembrete!!

$$a \in \partial X \iff V_\delta(a) \cap X \neq \emptyset \\ \text{e} \\ V_\delta(a) \cap \mathbb{R} \setminus X \neq \emptyset$$

$\text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$ Não existe $\delta > 0$, tal que: $V_\delta\left(\frac{m}{n}\right) \subset \mathbb{Q}$ totalmente

$\text{ext}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ Não existe $\delta > 0$, tal que: $V_\delta(M) \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ totalmente

$\partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ $\left[V_\delta\left(\frac{m}{n}\right) \text{ contém algum ponto de } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } \mathbb{Q} \text{ pela densidade} \right]$

■

Exemplo 2.8

O conjunto dos números reais é separável.

O conjunto, $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é enumerável.

Devemos mostrar que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. É claro que $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \partial(\mathbb{Q})$.

Demonstração

Seja $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que toda ε -vizinhança, $B_\varepsilon(x)$, contém algum número racional. Então, x é aderente a $\mathbb{Q}$, isto é, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Conclusão $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ■

Teorema 2.1

Seja $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes

- (A) $\mathbb{X}$ é um conjunto fechado;
- (B) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$ é aberto;
- (C) $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X}$ fecho.

**Demonstração**

(A $\implies$ B) $\mathbb{X}$ é um conjunto fechado $\iff \partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X}$.

Se $\mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$ não fosse aberto, existiria $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$, tal que: $a \in \text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{X})$.

Logo, $\forall \delta > 0$, temos:

$$\forall_\delta(a) \cap \mathbb{X} \neq \emptyset \text{ e } a \in \forall_\delta(a) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{X} \implies a \in \partial\mathbb{X} \implies a \in \mathbb{X}.$$

Absurdo! ■

(B $\implies$ C) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$ é aberto.

Com efeito, $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \partial\mathbb{X}$, então, $\mathbb{X} \subset \bar{\mathbb{X}} \implies \partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X}$.

Suponhamos que existe $a \in \partial\mathbb{X}$, $a \notin \mathbb{X}$.

Ora,

$$a \in \partial\mathbb{X} \iff \forall_\delta(a) \cap \mathbb{X} \neq \emptyset \text{ e } a \in \forall_\delta(a) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{X}, \forall \delta > 0.$$

Daí, obtemos:

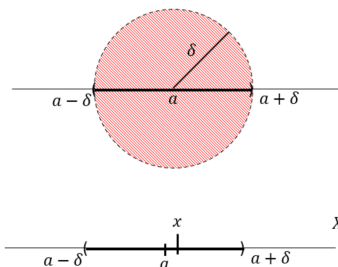
$$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{X} \text{ e } a \in \forall_\delta(a) \cap \mathbb{X} \neq \emptyset.$$

Assim, $a \in \text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{X})$. Isto contradiz o fato de ser $\mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$ um conjunto aberto. ■

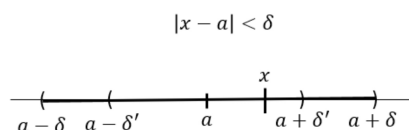
(C $\implies$ A) $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \partial\mathbb{X} \iff \bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \iff \partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X} \iff \mathbb{X}$ é fechado. ■

Exemplo 2.9

$\mathbb{V}_\delta(a)$ é um conjunto aberto



$$|x - a| < \delta \iff \delta' = \delta - |x - a| > 0.$$



Seja $x \in \mathbb{V}_\delta(a)$ seja $\delta' = \delta - |x - a| > 0$.

Afirmção: $\mathbb{V}_{\delta'}(a) \subset \mathbb{V}_\delta(a)$

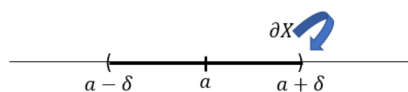
Seja $y \in \mathbb{V}_{\delta'}(a)$:

$$\begin{aligned} |y - a| &= |y - x + x - a| \leq |y - x| + |x - a| \\ &< \delta' + |x - a| = \delta - |x - a| + |x - a| = \delta. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, temos:

$$|y - a| < \delta \iff y \in \mathbb{V}_\delta(a).$$

Portanto, $\mathbb{V}_{\delta'}(a) \subset \mathbb{V}_\delta(a)$.

**Exemplo 2.10**

O conjunto

$$\mathbb{X} = [a, b] = \{x \in \mathbb{X} : a \leq x \leq b\}$$

é fechado; pois, $\partial\mathbb{X} = \{a, b\} \subset \mathbb{X}$.

Exemplo 2.11

O conjunto

$$\mathbb{X} = (0, 1] = \{x \in \mathbb{X} : 0 < x \leq 1\}$$

não é aberto nem fechado.

(i) $0 \in \partial\mathbb{X}$, $0 \notin \mathbb{X}$: $\mathbb{X}$ não é fechado.

(ii) $1 \in \mathbb{X}$, $1 \notin \text{int}(\mathbb{X})$: $\mathbb{X}$ não é aberto.



Observação

Uma outra forma de caracterizar o fecho

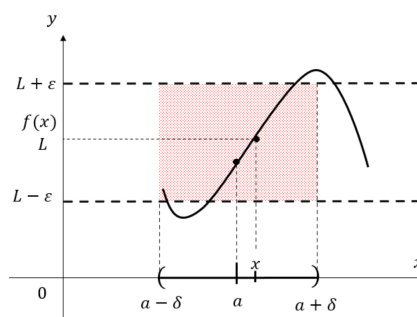
$$a \in \bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \partial\mathbb{X} \iff \forall \delta (a) \cap \bar{\mathbb{X}} \neq \emptyset, \forall \delta > 0.$$

Em outras palavras: Qualquer vizinhança de a contém algum ponto de $\mathbb{X}$.

2.3 Limites de Funções

O conceito de limite é fundamental na análise matemática e é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que a variável independente se aproxima de um determinado valor. O limite de uma função f quando x se aproxima de um número a é denotado por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



Isso significa que quando x se aproxima de a , o valor de $f(x)$ se aproxima de L . O valor L pode ser um número real ou pode ser $\pm\infty$, caso a função tenha uma tendência a crescer ou decrescer indefinidamente à medida que x se aproxima de a . A existência de um limite depende do comportamento da função em torno do ponto a . Existem diferentes regras e técnicas para calcular limites, como a aplicação direta do valor da função no ponto a , uso de propriedades algébricas, aplicação do teorema do confronto (sanduíche) e utilização de limites trigonométricos e exponenciais conhecidos.

2.3.1 Continuidade

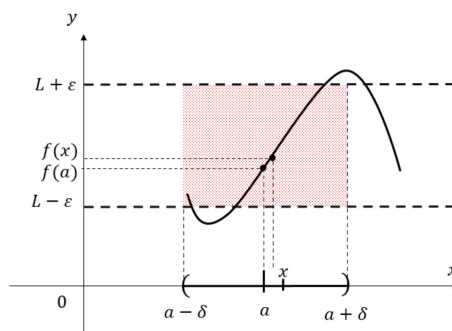
Uma função é contínua em um ponto quando ela não apresenta descontinuidades nesse ponto. Intuitivamente, isso significa que não há "buracos" ou "pulos" na representação gráfica da função no ponto em questão. Formalmente, uma função $f(x)$ é contínua em um ponto a se três condições forem satisfeitas: O limite da função existe quando x se aproxima de a .

O valor da função em a é definido, ou seja, $f(a)$ existe.

O limite da função quando x se aproxima de a é igual ao valor da função em a , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Se essas três condições forem atendidas, então a função é contínua no ponto a . Além disso, uma função pode ser contínua em um intervalo se for contínua em todos os pontos desse intervalo. A continuidade de uma função é importante para a análise matemática, pois, garante que certas propriedades e teoremas sejam aplicáveis.



2.3.2 Ponto de acumulação:

Definição 2.4

Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $\mathbb{X}$, quando: todo intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ de centro a , contém algum ponto $x \in \mathbb{X}$ diferente de a .



Observação

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{X}$ será denotado por: $\mathbb{X}'$. A condição $a \in \mathbb{X}'$, em símbolo, será descrita por:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{X}; 0 < |x - a| < \delta.$$

2.3.3 Limites de funções

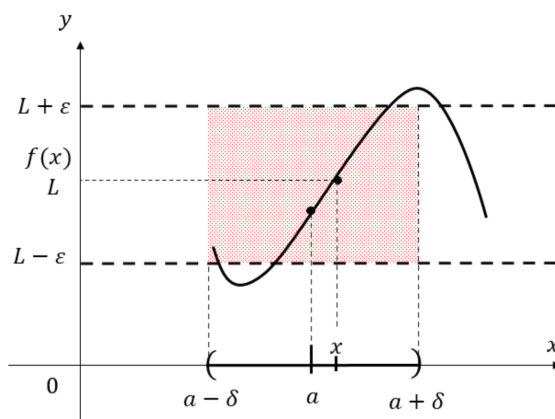
Definição 2.5

Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. dizemos que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(a, \varepsilon) > 0$, tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

ou equivalentemente, temos:

$$\mathbb{V}_\delta(a) \cap (\mathbb{X} \setminus \{a\}) \Rightarrow f(\mathbb{V}_\delta(a) \cap (\mathbb{X} \setminus \{a\})) \subset \mathbb{V}_\varepsilon(L).$$

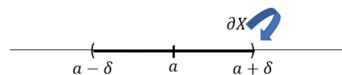




Observação

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{X}$ será denotado por: $\mathbb{X}'$. A condição $x_0 \in \mathbb{X}'$, em símbolo, será descrita por:

$$\forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{X}; 0 < |x - x_0| < \delta.$$



Problema 2.1

(A) Use a definição para provar que:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 6) = 8 \quad (ii) \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-1} = 2. \quad (iv) \lim_{x \rightarrow x_0} ax + b = ax_0 + b, \\ \text{com } a \neq 0 \quad (v) \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1. \quad (vi) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}. \quad (vii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8, \text{ onde } f(x) = 2x + 6$$

Majorações

$$|f(x) - 8| = |(2x + 6) - 8| = |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon \\ \implies 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(1, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tal que:

$$0 < |x - 1| < \delta \implies 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \implies 2|x - 1| < \varepsilon \\ \implies |2x - 2| < \varepsilon \implies |(2x + 6) - 8| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$|(2x + 6) - 8| < \varepsilon, \text{ desde que: } 0 < |x - 1| < \delta.$$

dito de outro modo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8, \text{ onde } f(x) = 2x + 6.$$

■

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2, \text{ onde } f(x) = x^2.$$

Majorações

1º Caso: $a \neq 0$

$$|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| \\ \leq |x - a| \cdot [|x| + |a|]$$

$$|x| - |a| \leq |x - a| < |a| \implies |x| < 2|a|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |x - a| \cdot |x + a| &\leq |x - a| \cdot [|x| + |a|] \\ &\leq |x - a| \cdot [2|a| + |a|] < \varepsilon \\ 0 < |x - a| &< \frac{\varepsilon}{3|a|}. \end{aligned}$$

Desta forma basta tomar $\delta(a, \varepsilon) = \min \left\{ |a|, \frac{\varepsilon}{3|a|} \right\} > 0$.

2º Caso: $a = 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - 0^2| &= |x^2| = |x|^2 < \varepsilon \implies \\ &\implies 0 < |x - 0| < \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

Neste caso, tome $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$.

Demonstração

1º Caso: $a \neq 0$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(a, \varepsilon) = \min \left\{ |a|, \frac{\varepsilon}{3|a|} \right\} > 0$, tal que:

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{3|a|} \implies 3|a| \cdot |x - a| < \varepsilon \quad (1)$$

e

$$|x| - |a| \leq |x - a| < |a| \implies |x| < 2|a| \implies |x| + |a| < 3|a| \quad (2)$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| \leq |x - a| \cdot [|x| + |a|] < |x - a| \cdot 3|a| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon, \forall x : 0 < |x - a| < \delta.$$

2º Caso: $a = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(0, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$, tal que:

$$0 < |x - 0| < \delta \implies 0 < |x - 0| < \sqrt{\varepsilon} \implies |x^2 - 0^2| = |x|^2 < \varepsilon.$$

Decorre dos casos (1) e (2) que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2, \text{ onde } f(x) = x^2.$$

■

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-1} = 2.$$

Majorações

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x}{x-1} - 2 \right| = \left| \frac{x+2-2x}{x-1} \right| = \left| \frac{2-x}{x-1} \right| = \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \quad (*)$$

Se escolhermos uma vizinhança

$$\begin{aligned} |2| - |x| \leq |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies |x| - 2 > -\frac{1}{2} \\ &\implies |x| > \frac{3}{2} \implies x - 1 > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ &\implies |x - 1| > \frac{1}{2} \implies \frac{1}{|x - 1|} < 2. \end{aligned}$$

voltando a (*), temos:

$$\left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| = \frac{|x - 2|}{|x - 1|} < 2. \quad |x - 2| < \varepsilon \implies 0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim basta escolher $\delta\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0$.

Uma outra forma de fazer a esta parte da majoração é:

$$\begin{aligned} |x - 2| < \frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \iff \frac{3}{2} - 1 < x - 1 < \frac{5}{2} - 1 \\ &\iff \frac{1}{2} < |x - 1| < \frac{3}{2} \iff \frac{2}{3} < \frac{1}{|x - 1|} < 2 \end{aligned}$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0$, tal que:

$$0 < |x - 2| < \frac{1}{2} \implies |2| - |x| \leq |x - 2| < \frac{1}{2} \implies |x| - 2 > -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |2| - |x| \leq |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies |x| - 2 > -\frac{1}{2} \\ &\implies |x| > \frac{3}{2} \implies x - 1 > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ &\implies |x - 1| > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\implies \frac{1}{|x - 1|} < 2. \tag{1}$$

analogamente,

$$0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \implies 2 \cdot |x - 2| < \varepsilon \tag{2}$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2), obtemos:

$$\frac{1}{|x - 1|} \cdot 2 \cdot |x - 2| < 2\varepsilon.$$

De sorte que:

$$\left| \frac{x}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon, \quad \forall x : 0 < |x - 2| < \delta.$$

Ou ainda,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x - 1} = 2$$

■

$$(iv) \lim_{x \rightarrow x_0} ax + b = ax_0 + b, a \neq 0.$$

Majorações

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ax + b = ax_0 + b,$$

$$\begin{aligned} |f(x) - (ax_0 + b)| &= |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a(x - x_0)| = |a| |x - x_0| < \varepsilon \\ \implies 0 < |x - x_0| &< \frac{\varepsilon}{|a|}, a \neq 0. \end{aligned}$$

Assim basta escolher $\delta(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta &\implies 0 < |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \\ \implies |f(x) - (ax_0 + b)| &= |(ax + b) - (ax_0 + b)| \\ &= |a(x - x_0)| = |a| |x - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - (ax_0 + b)| < \varepsilon.$$

Ou ainda,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ax + b = ax_0 + b,$$

■

$$(v) \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1.$$

Majorações

$$\begin{aligned} \implies |f(x) - 1| &= |x^3 - 1| \\ &= |(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)| = |x - 1| |x^2 + x + 1| \\ &\leq |x - 1| [|x|^2 + |x| + 1]. \end{aligned}$$

Agora, se tomarmos uma vizinhança 1, ou melhor,

$$|x| - 1 \leq |x - 1| < 1 \implies |x| < 2.$$

Assim,

$$|x - 1| [|x|^2 + |x| + 1] < |x - 1| \cdot [2^2 + 2 + 1] < \varepsilon \implies 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Daí, basta tomar $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(1, \varepsilon) = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\} > 0$, tal que:

$$\begin{aligned}
0 < |x - 1| < 1 &\implies |x| - 1 \leq |x - 1| < 1 \implies |x| < 2 \\
&\implies |x|^2 + |x| + 1 < 2^2 + 2 + 1 = 7 \implies |x|^2 + |x| + 1 < 7. \\
&\implies |x^2 + x + 1| \leq |x|^2 + |x| + 1 < 7 \implies |x^2 + x + 1| < 7
\end{aligned} \tag{1}$$

e

$$0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{7} \implies 7|x - 1| < \varepsilon. \tag{2}$$

Agora, decorre de (1) e (2) que:

$$7|x - 1| \cdot |x^2 + x + 1| < 7\varepsilon.$$

Portanto,

$$0 < |x - 1| < \delta \implies 0 < |x^3 - 1| < \varepsilon, \text{ desde que: } 0 < |x - 1| < \delta$$

Dito de outro modo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1.$$

■

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}.$$

Majorações

$$\left| \frac{x}{x-2} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3x - 5x + 10}{3(x-2)} \right| = \left| \frac{10 - 2x}{3(x-2)} \right| = 2 \cdot \frac{1}{3} \left| \frac{x-5}{x-2} \right| < \varepsilon \implies 0 < |x-2| < \varepsilon \tag{1}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
|x-5| < 1 &\iff -1 < x-5 < 1 \iff 4 < x < 6 \\
&\iff 2 < x-2 < 4 \implies |x-2| = x-2 > 2 \\
&\implies \frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Assim, substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\left| \frac{x}{x-2} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3x - 5x + 10}{3(x-2)} \right| = \left| \frac{10 - 2x}{3(x-2)} \right| < 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |x-5| < \varepsilon \implies 0 < |x-5| < 3\varepsilon$$

Basta escolher $\delta = \delta(1, \varepsilon) = \min\{1, 3\varepsilon\} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(1, \varepsilon) = \min\{1, 3\varepsilon\} > 0$, tal que:

$$\begin{aligned}
0 < |x-5| < 1 &\implies -1 < x-5 < 1 \iff 4 < x < 6 \\
&\iff 2 < x-2 < 4 \implies |x-2| = x-2 > 2 \\
&\implies \frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

e

$$0 < |x-5| < 3\varepsilon \implies \frac{1}{3} |x-5| < \varepsilon \tag{4}$$

Agora, combinando (3) e (4), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{1}{|x-2|} \cdot |x-5| &< \frac{1}{2} \varepsilon \implies \left| \frac{10-2x}{3(x-2)} \right| = \left| \frac{3x-5x+10}{3(x-2)} \right| \\ &= \left| \frac{x}{x-2} - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon, \text{ desde que: } 0 < |x-5| < \delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}.$$

■

(vii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

Majorações

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |(x+2) - 4| = |x-2| < \varepsilon \implies 0 < |x-2| < \varepsilon$$

Basta escolher $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(2, \varepsilon) > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(2, \varepsilon) > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} 0 < |x-2| < \delta &\implies |x-2| < \varepsilon \\ \implies \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| &= |(x+2) - 4| = |x-2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| < \varepsilon \text{ desde que: } 0 < |x-2| < \delta.$$

Ou ainda, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

■

(B) Se $0 < r < 1$ e $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que:

(x_n) é de Cauchy.

Majorações

Fixemos $m = n + 1$

$$|x_m - x_n| = |x_{n+1} - x_n| < r^n < \varepsilon.$$

Daí, escolha $0 < r < \sqrt[n]{\varepsilon}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, com $0 < r < \sqrt[n]{\varepsilon}$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &< r^n < \varepsilon \implies \\ |x_m - x_n| &< \varepsilon, \forall m > n \geq n_0. \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy.

■

2.3.4 Limites Laterais

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < x - x_0 < \delta$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $-\delta < x - x_0 < 0$, ($0 < x_0 - x < \delta$).

Teorema 2.2

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow {}^a \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

^aLimites Laterais

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < x - x_0 < \delta$; (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $-\delta < x - x_0 < 0$, ($0 < x_0 - x < \delta$).



Demonstração

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < |x - x_0| < \delta$

$\Leftrightarrow$ Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que: $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $-\delta < x - x_0 < 0$ e $0 < x - x_0 < \delta$. Assim, $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $-\delta < x - x_0 < 0$ e $0 < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$



Para a demonstração da unicidade do limite de função; procedemos de forma inteiramente análoga ao limite de sequência, antes porém, destacaremos os resultados básicos a seguir.

Fatos que ajudam

F1) Se um número real "a" é tal que: $0 \leq a < \varepsilon$, para qualquer número positivo ε , então, $a = 0$.

Demonstração

Com efeito, $0 \leq a < \varepsilon$, para $a > 0$, tome $\varepsilon = \frac{a}{2}$, logo teríamos $0 \leq a < \frac{a}{2}$ Absurdo! Portanto, $a = 0$.



F2) Se $a - \varepsilon < b$, $\forall \varepsilon > 0$, então, $a < b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, então $a \leq b$.

Demonstração

Suponha $a > b$, então, $a - b > 0 \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $\varepsilon = a - b$.

Então, tem-se:

$$a < b + \varepsilon = b + a - b = a \iff a < a.$$

Contradição! De sorte que: $a \leq b$.

■

Mais Fatos

F_1 (Unicidade do Limite)

Sejam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = M$, então, prove que: $L = M$.

Majorações

Suponhamos que: $L \neq M$, então, temos:

$$\begin{aligned} |L - M| &= |L - f(x) + f(x) - M| \\ &\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, basta escolher $\varepsilon = \frac{|L-M|}{2} > 0$

Demonstração

1º modo: (Usando redução ao absurdo):

$$p \implies q : \sim q \wedge p \implies \text{Contradição!}. \text{ Logo, } \sim(\sim q) = q$$

é verdadeira.

Suponhamos $L \neq M$. Dado $\varepsilon = \frac{|L-M|}{2} > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que:

$$|L - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quando: } 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

e

$$|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quando: } 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

Assim tomando-se $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} |L - M| &= |L - f(x) + f(x) - M| \\ &\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \frac{|L - M|}{2}. \end{aligned}$$

Daí, tem-se:

$$|L - M| < \frac{|L - M|}{2}.$$

Absurdo! e, portanto, $L = M$ (único)

■

2º modo:

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$, tais que:

$$|L - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quando: } 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

e

$$|f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ quando } 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

Assim tomando-se $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} |L - M| &= |L - f(x) + f(x) - M| \\ &\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Daí, tem-se:

$$|L - M| \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

De sorte que: $L = M$ (único) ■

$F_2)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e existe $K > 0$, tal que: $|g(x)| < K, \forall x$, então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Majorações

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x) - 0| |g(x)| < |f(x) - 0| \cdot K < \varepsilon$$

Basta tomar

$$|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{K}, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{K}, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta$$

e g é uma função limitada

$$|g(x)| < K, \forall x, \text{ em particular, na vizinhança de } x_0, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

De sorte que:

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)| |g(x)| < |f(x) - 0| \cdot K < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Dito de outro modo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0. \quad \text{■}$$

$F_3)$

Teorema 2.3 (Teorema da Permanência do Sinal)

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \frac{|L|}{2}.$$



Majorações:

$$|L| - |f(x)| \leq |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x)| - |L| > \varepsilon, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x)| > |L| - \varepsilon = |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x)| > \frac{|L|}{2}, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Se $L > 0$, então, na vizinhança de x_0 , tem-se: $f(x) > 0$, ou seja,

$$L > 0 \implies f(x) > 0, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

De forma análoga, temo-se:

Se $L < 0$, então, na vizinhança de x_0 , tem-se: $f(x) < 0$, ou seja,

$$L < 0 \implies f(x) < 0, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$|L| - |f(x)| \leq |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\implies |f(x)| > |L| - \varepsilon, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\implies |f(x)| > \frac{|L|}{2}, \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

■

$F_4)$

Teorema 2.4 (Teorema da limitação de f na vizinhança de x_0)

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, então, f é limitada numa vizinhança de x_0 . Isto é, existem $K > 0$ e $\delta > 0$ tal que: $|f(x)| < K, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$.

♥

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Como

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta.$$

segue-se que:

$$|f(x)| < |L| + \varepsilon, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Assim, fixando por simplicidade $\varepsilon = 1$ e $K = |L| + 1 > 0$, obtemos:

$$|f(x)| < K, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Ou ainda, na vizinhança de x_0 a função f é limitada.

■

$F_5)$

Teorema 2.5 (Teorema do Sanduíche)

Sejam $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$. Então, temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

**Demonstração**

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |x - x_0| < \delta_1.$$

e

$$|g(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

Agora, tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ e destacando que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$$

segue-se que:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$$

Como

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \iff |h(x) - L| < \varepsilon, \text{ sempre que } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L.$$

**Exemplo 2.12**

Para ilustrar a aplicação do teorema do sanduíche provemos os limites trigonométricos fundamentais:

$$(i) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \quad (ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} = 0$$

Demonstração

Basta comparar na circunferência de raio $R = 1$ as áreas das regiões limitadas por:

$A_1 = \frac{\cos(h) \cdot \sin(h)}{2}$ com o setor circular de área $A_2 = \frac{h}{2}$ e área $A_3 = \frac{1}{2} \cdot tg(h)$, daí obtemos:

$$\frac{\cos(h) \cdot \sin(h)}{2} < \frac{h}{2} < \frac{1}{2} \cdot tg(h) \iff \cos(h) < \frac{h}{\sin(h)} < \frac{1}{\cos(h)}.$$

Agora, passado ao limite quando $h \rightarrow 0$, obtemos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos(h) < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin(h)} < \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(h)} \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin(h)} = 1,$$

e portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\sin(h)} = 1 \implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1,$$

como consequência, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[1 - \cos(h)]}{h} \cdot \frac{[1 + \cos(h)]}{[1 + \cos(h)]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{\sin(h)}{[1 + \cos(h)]} = 0. \end{aligned}$$

Lembrando que: $\sin^2(h) = 1 - \cos^2(h)$, $\sin(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$. ■

F_6) Sejam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, então:

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M.$$

Majorações

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

desde que:

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Basta escolher $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tais que:

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

e

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2.$$

Assim, tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue-se que:

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ sempre que} \\ &0 < |x - x_0| < \delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M. \quad \blacksquare$$

Neste caso, o processo é inteiramente análogo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M.$$

Faremos as majorações e a redação matemática da demonstração, ficará como exercício!

Majorações

$$\begin{aligned} |(f(x) - g(x)) - (L - M)| &= |(f(x) - L) + (M - g(x))| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

desde que:

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Ressaltando que:

$$|g(x) - M| = |g(x) - M|$$

Demonstração

Basta proceder como o caso anterior (ficará como exercício!)

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M.$$

Majorações

A priori, basta notar que:

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| &= |f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - L \cdot M| \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - L| + |L| \cdot |g(x) - M| \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |L| \cdot \frac{\varepsilon}{2M}, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta. \end{aligned}$$

Onde $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Além disso,

$$\begin{aligned} |g(x) - M| &\leq |g(x) - M| < 1, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \\ \implies |g(x)| &< 1 + |M| = K, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \end{aligned}$$

Demonstração

A redação matemática da demonstração, ficará a critério do leitor!

$$(iii) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{M}, \text{ com } M \neq 0$$

Majorações

$$\begin{aligned} |M| - |g(x)| &\leq |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \\ \implies |g(x)| &> \frac{|M|}{2}, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \\ \implies \frac{1}{g(x)} &< \frac{2}{|M|}, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \\ \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| &= \frac{|M - g(x)|}{|M| \cdot |g(x)|} < \frac{2}{|M|} \cdot |M - g(x)| < \varepsilon \\ \implies |M - g(x)| &< \frac{\varepsilon \cdot |M|^2}{2}, \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \end{aligned}$$

Demonstração

A demonstração, fica a critério do leitor!

$$(iv) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}, \text{ com } M \neq 0$$

**Observação**

Note que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}, \text{ com } M \neq 0.$$

F_7) São equivalentes as afirmações:

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

(ii) Se $(x_n) \subset \mathbb{X} \setminus \{x_0\}$, $x_n \rightarrow x_0$, então, $f(x_n) \rightarrow L$.

Demonstração

(i) $\implies$ (ii)

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ sempre que: } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Assim, para o $\delta > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$0 < |x_n - x_0| < \delta \implies |f(x_n) - L| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Portanto, $f(x_n) \rightarrow L$.

(ii) $\implies$ (i)

Suponha que (i) não ocorre, então, existirá $\varepsilon_0 > 0$, tal que: para cada $\delta = \frac{1}{n}$ pode-se escolher $x_n \in \mathbb{V}_\delta(x_0) \cap \mathbb{X} \setminus \{x_0\}$, com $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$.

Logo,

$$x_n \in \mathbb{X}, x_n \neq x_0 \text{ e } |x_n - x_0| < \frac{1}{n}.$$

Assim,

$$x_n \rightarrow x_0 \implies f(x_n) \not\rightarrow L.$$

Isso contradiz (ii).

⌘ Exercícios: Pensando Um Pouco Mais ⌘

1. Sejam $a, b, c \in (0, 1)$ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, prove que:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Solução

Com efeito, basta observar que:

$$\sqrt{abc} < \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (1)$$

e

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < \sqrt{(1-a)(1-b)} \leq \frac{(1-a) + (1-b)}{2}. \quad (2)$$

Agora, combinando (1) e (2), obtemos:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

■

2. Sejam x, y, x_0, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, tal que $\xi > 0$

$$|x - x_0| < \min \left\{ \frac{\xi}{2(|y_0| + 1)}, 1 \right\}$$

e

$$|y - y_0| < \frac{\xi}{2(|x_0| + 1)},$$

prove que

$$|xy - x_0y_0| < \xi.$$

$$|xy - x_0y_0| = |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \leq |x| |y - y_0| + |y_0| |x - x_0|$$

Solução

Majorações

Basta notar que:

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1 \implies |x| < |x_0| + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |xy - xy_0 + xy_0 - x_0y_0| \\ &\leq |x| |y - y_0| + |y_0| |x - x_0| \\ &\leq (|x_0| + 1) \cdot \frac{\xi}{2(|x_0| + 1)} + (|y_0| + 1) \cdot \frac{\xi}{2(|y_0| + 1)} \\ &= \xi \end{aligned}$$

■

3. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Prove que: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Solução

$$g(0) = 0$$

Se $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0, \forall n$, então temos:

$$g(x_n) = x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{x_n}\right).$$

Pois, $x_n \rightarrow 0$ e $\left|\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq 1$ limitada.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

■

4. Mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

Solução

Basta considerar:

$$x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 \implies f(x_n) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ divergente}$$

De sorte que: não existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

■

5. Dê exemplos de dois conjuntos não vazios A e B da reta, tais que:

$$d_H(A, B) = \max\{|\sup A - \sup B|, |\inf A - \inf B|\}$$

A título ilustrativo, tome por exemplos, $A = [1, 5]$ e $B = [6, 8]$, então verifique se: $d_H(A, B) = 5$.

Solução

Com efeito,

$$|\sup A - \sup B| = |5 - 8| = 3$$

e

$$|\inf A - \inf B| = |1 - 6| = 5.$$

De sorte que:

$$d_H(A, B) = \max\{|\sup A - \sup B|, |\inf A - \inf B|\} = \max\{3, 5\} = 5$$

■

6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre que f é constante.

Solução

Com efeito,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|, \forall x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, temos:

$$\Leftrightarrow -(x - x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq (x - x_0).$$

Agora, passando ao limite quando $x \rightarrow x_0$, obtemos:

$$\Leftrightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} [-(x - x_0)] \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \rightarrow x_0} [(x - x_0)] = 0.$$

De sorte que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

■

7. Sejam $a, b, c > 0$ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, então, prove que:

$$(a + b) \cdot (b + c) \cdot (c + a) \geq 8abc$$

Solução

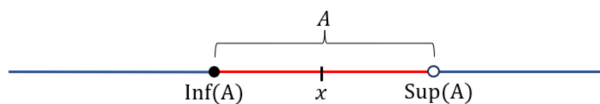
Basta observar que:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} \Rightarrow (a+b) \cdot (b+c) \cdot (a+c) \geq 8a \cdot b \cdot c.$$

■

8. Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, seja $A + B = \{x + y; x \in A \text{ e } y \in B\}$ limitado. Prove que:
- (i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ (ii) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$

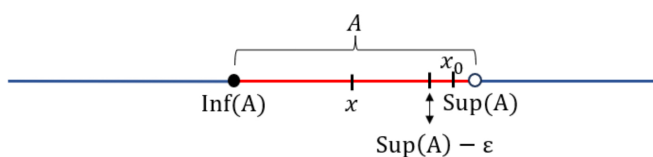
Demonstração



Observação

Se $\sup A \in A$, dizemos que: A tem máximo: $\max A = \sup A$.

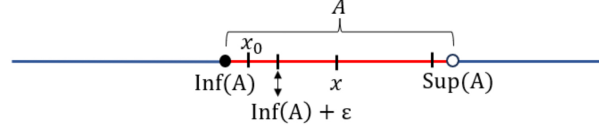
Se $\sup A \notin A$, dizemos que: A não tem máximo.



Analogamente, temos:

Se $\inf A \in A$, dizemos que: A tem mínimo: $\min A = \inf A$.

Se $\inf A \notin A$, dizemos que: A não tem mínimo.



(i) Para $\forall x \in A, \forall y \in B$, temos: $x \leq \sup A$ e $y \leq \sup B$, donde obtemos: $x + y \leq \sup A + \sup B$.

Logo, $\sup A + \sup B$ é uma cota superior para o conjunto $A + B$ por conseguinte, vem:

$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

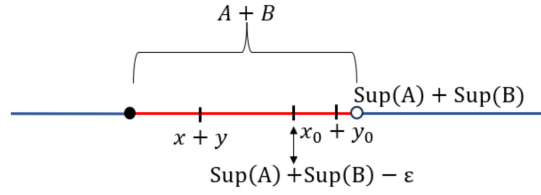
Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Portanto, $\sup A + \sup B$ é a menor das cotas superiores, ou ainda,

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

■



Observação

dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$$

$$\implies K = x_0 + y_0 + \varepsilon > \sup A + \sup B.$$

Desta forma, $\sup A + \sup B$ é a menor das cotas superiores para $A + B$.

(ii) Para $\forall x \in A, \forall y \in B$, temos: $x \geq \inf A$ e $y \geq \inf B$, donde obtemos: $x + y \geq \inf A + \inf B$.

Logo, $\inf A + \inf B$ é uma cota inferior para o conjunto $A + B$ por conseguinte, vem:

$$\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B.$$

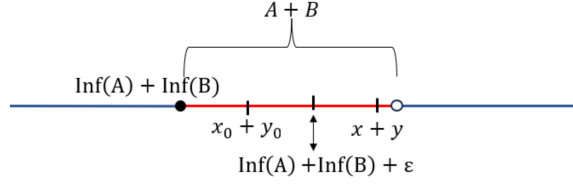
Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 > \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 < \inf A + \inf B + \varepsilon.$$

De sorte que, $\inf A + \inf B$ é a maior das cotas inferiores, ou ainda,

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

■

**Observação**

Dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 > \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 < \inf A + \inf B + \varepsilon \\ \implies K = x_0 + y_0 - \varepsilon < \inf A + \inf B.$$

Assim, diz-se que: $\inf A + \inf B$ é a maior das cotas inferiores

9. Seja $A \subset \mathbb{K}$ não-vazio e limitado. Dado $c > 0$, seja $cA = \{cx; x \in A\}$. Prove que cA é limitado e

$$(i) \quad \sup(cA) = c \sup A. \quad (ii) \quad \inf(cA) = c \inf A.$$

Demonstração

(i) Para $\forall x \in A$, dado $c > 0$, temos: $x \leq \sup A$, donde, obtem-se: $cx \leq c \sup A$.

Logo, $c \sup A$ é uma cota superior para o conjunto cA por conseguinte, vem:

$$\sup(cA) \leq c \sup A.$$

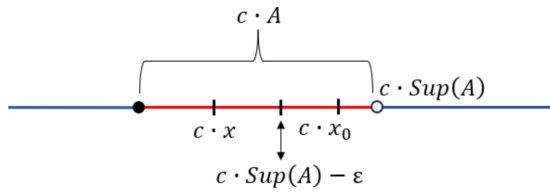
Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$, tal que:

$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{c} \implies cx_0 > c \sup A - \varepsilon.$$

Portanto, $c \sup A$ é a menor das cotas superiores, ou ainda,

$$\sup(cA) = c \sup A.$$

■



Agora, procedendo de forma análoga, obtemos:

(ii) Para $\forall x \in A$, dado $c > 0$, temos: $x \geq \inf A$, donde, obtem-se: $cx \geq c \inf A$.

Logo, $c \inf A$ é uma cota inferior para o conjunto cA por conseguinte, vem:

$$\inf(cA) \geq c \inf A.$$

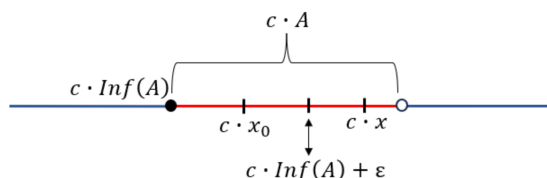
Falta mostrar que: $c \inf A$ é a maior das cotas inferiores para cA .

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ tal que:

$$x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{c} \implies cx_0 < c \inf A + \varepsilon.$$

Portanto, $c \inf A$ é a maior das cotas inferiores para $c.A$, ou ainda,

$$\inf (cA) = c \inf A.$$



10. Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos $A.B = \{x.y; x \in A \text{ e } y \in B\}$. Prove que se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ forem limitados então,

- (i) $A.B$ é limitado,
- (ii) $\sup (A.B) = \sup (A) \cdot \sup (B)$
- (iii) $\inf (A.B) = \inf (A) \cdot \inf (B)$

Demonstração

(i) Com efeito, $\forall x_1 \in A, \forall y_1 \in B$, existem $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq y_1 \leq b_2 \end{cases} \implies \{a_1 b_1 \leq x_1 y_1 \leq a_2 b_2\}.$$

Logo, $A.B$ é limitado.

(ii) $\forall x \in A, \forall y \in B$, tem-se: $x \leq \sup A$ e $y \leq \sup B \implies x.y \leq \sup A \cdot \sup B$.

Isto é, $\sup A \cdot \sup B$ é uma cota superior para o conjunto $A.B$ e, portanto,

$$\sup (A.B) \leq \sup (A) \sup (B).$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_0 \in \mathbb{A}$ e $y_0 \in \mathbb{B}$, tais que:

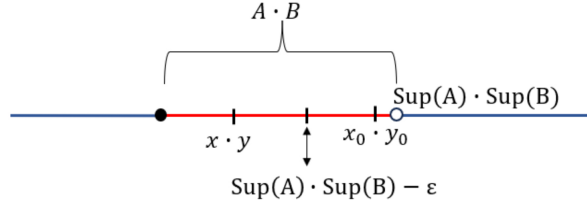
$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{(\sup A + \sup B)} \text{ e } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{(\sup A + \sup B)},$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 \cdot y_0 &> \sup (A) \sup (B) - \frac{(\sup A + \sup B)}{(\sup A + \sup B)} \cdot \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\sup A + \sup B)} \right]^2 \implies \\ x_0 \cdot y_0 &> \sup (A) \sup (B) - \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\sup A + \sup B)} \right]^2 \implies \\ x_0 \cdot y_0 &> \sup (A) \sup (B) - \varepsilon, \text{ pois, } \left[\frac{\varepsilon}{(\sup A + \sup B)} \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B}$ é a menor das cotas superiores para o conjunto $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$. Logo,

$$\sup \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \sup \mathbb{A} \cdot \sup \mathbb{B}.$$



(ii) $\forall x \in \mathbb{A}, \forall y \in \mathbb{B}$, tem-se: $x \geq \inf \mathbb{A}$ e $y \geq \inf \mathbb{B} \implies x \cdot y \geq \inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B}$.

Isto é, $\inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B}$ é uma cota inferior para o conjunto $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ e, portanto,

$$\inf (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \geq \inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B}.$$

Falta mostrar que: $\inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B}$ é a maior das cotas inferiores para $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_0 \in \mathbb{A}$ e $y_0 \in \mathbb{B}$, tais que:

$$x_0 < \inf \mathbb{A} + \frac{\varepsilon}{(\inf \mathbb{A} + \inf \mathbb{B})} \text{ e } y_0 > \inf \mathbb{B} - \frac{\varepsilon}{(\inf \mathbb{A} + \inf \mathbb{B})},$$

Daí, obtemos:

$$x_0 \cdot y_0 < \inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B} + \frac{(\inf \mathbb{A} + \inf \mathbb{B})}{(\inf \mathbb{A} + \inf \mathbb{B})} \cdot \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\inf \mathbb{A} + \inf \mathbb{B})} \right]^2 \implies$$

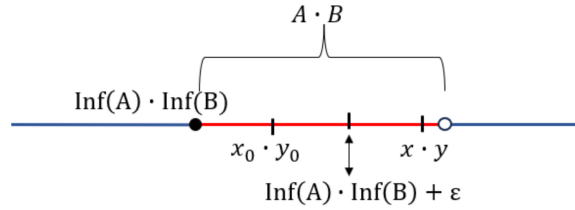
$$x_0 \cdot y_0 < \inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B} + \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\inf \mathbb{A} + \inf \mathbb{B})} \right]^2 \implies$$

$$x_0 \cdot y_0 < \inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B} + \varepsilon, \text{ pois, } \left[\frac{\varepsilon}{(\inf \mathbb{A} + \inf \mathbb{B})} \right]^2 > 0.$$

Dito de outro modo, $\inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B}$ é a maior das cotas inferiores para o conjunto $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$. Logo,

$$\inf (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \inf \mathbb{A} \cdot \inf \mathbb{B}.$$

■



11. Seja $A \subset \mathbb{K}$ não-vazio e limitado. Dado $c > 0$, seja $cA = \{cx; x \in A\}$. Prove que cA é limitado e

$$(i) \quad \inf (-A) = -\sup (A) \quad (ii) \quad \sup (-A) = -\inf A.$$

Demonstração

(i) Para $\forall x \in A$, temos: $x \leq \sup A$, donde, obtem-se: $-x \geq -\sup A$.

Logo, $[-\sup A]$ é uma cota inferior para o conjunto $(-A)$ por conseguinte, vem:

$$\inf (-A) \geq -\sup (A).$$

Queremos mostrar que: $[-\sup (A)]$ é a maior das cotas inferiores para $[-A]$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$, tal que:

$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{c} \implies -x_0 < -\sup A + \varepsilon.$$

Portanto, $-\sup A$ é a maior das cotas inferiores, ou ainda,

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

■

(ii) Procedendo de forma inteiramente análoga obtém-se:

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

12. Use indução finita para provar que:

$$2^n \leq n!, \text{ para } n \geq 4 \text{ inteiro.}$$

Demonstração

(i) Para $n = 4$, temos: $2^4 \leq 4!$.

(ii) Suponhamos válido para n ($2^n \leq n!$), então, falta mostrar para $n + 1$. Defato,

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \leq n! \cdot 2 = n! + n! \leq n \cdot n! + n! = (n + 1) \cdot n!,$$

e, portanto,

$$2^{n+1} \leq (n + 1)!$$

■

13. Sejam y, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,

tais que: $\xi > 0$ e $y_0 \neq 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \min \left\{ \frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi |y_0|^2}{2} \right\}$$

$y \neq 0$, prove que:

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \xi.$$

Majorações

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| |y_0|} \text{ e } |y_0| - |y| \leq |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \implies$$

$$|y| - |y_0| > -\frac{|y_0|}{2} \implies |y| > \frac{|y_0|}{2} \implies \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Assim,

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| |y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2} |y_0 - y| < \frac{2}{|y_0|^2} \frac{\xi |y_0|^2}{2} = \xi$$

$$\implies \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \xi.$$

Demonstração

Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \min \left\{ \frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi |y_0|^2}{2} \right\} > 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \implies \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}. \quad (1)$$

$$|y - y_0| < \frac{\xi |y_0|^2}{2} \implies \frac{2|y - y_0|}{|y_0|^2} < \xi. \quad (2)$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\frac{1}{|y|} \frac{2|y - y_0|}{|y_0|^2} < \frac{2}{|y_0|} \xi.$$

De sorte que:

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \xi.$$

■

14. Seja $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo n , então, verifique se:

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Demonstração

Com efeito, temos:

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{n^k}.$$

Agora, como $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ e $\lim \sqrt[n]{n^k} = 1$, segue-se do Teorema do Sanduíche que

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

■

15. Seja f uma função dada por:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Prove que:

- (i) $|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot |x - 1|$ para $x > 0$;
- (ii) $|f(x) - 2| \leq 3|x - 1|$ para $x > \frac{1}{2}$;
- (iii) $f(x) \geq 2$, para todo $x > 0$.

Demonstração

(i) Com efeito,

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| x + \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \implies \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \\ &= \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| = \left| \frac{x-1}{x} \right| \cdot |x-1| \leq \left(\frac{|x| + |1|}{|x|} \right) \cdot |x-1| \end{aligned}$$

Como $x > 0$, segue-se que:

$$|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot |x - 1|.$$

(ii) Para $x > \frac{1}{2}$, então, $\frac{1}{x} < 2$ e, portanto, $1 + \frac{1}{x} < 3$.

Daí, e do item anterior, obtemos:

$$|f(x) - 2| \leq 3|x - 1|.$$

(iii) Basta revisitar a desigualdade entre as médias: geométrica e aritmética,

obtendo:

$$\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \quad x > 0.$$

Logo,

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

■

16. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que: $f(x) = 4x^3 - x - 1$. Calcule em função de "a" e "b" o seguinte quociente

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}; a \neq b.$$

Conclua daí que, se $|a| < 2$ e $|b| < 2$, tem-se:

$$|f(a) - f(b)| < 49 \cdot |a - b|$$

Demonstração

Observe que:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |4a^3 - a - 1 - (4b^3 - b - 1)| \\ &= |4(a^3 - b^3) - (a - b)| \\ &= |(a - b) \cdot [4(a^2 + ab + b^2) - 1]| \\ &= |a - b| \cdot |4(a^2 + ab + b^2) - 1|. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| = |4(a^2 + ab + b^2) - 1|. \quad (1)$$

Assim, como consequência da desigualdade triangular generalizada, temos:

$$\begin{aligned} |4(a^2 + ab + b^2) - 1| &\leq 4|a^2 + ab + b^2| + |-1| \\ &\leq 4[|a|^2 + |a| \cdot |b| + |b|^2] + 1 \\ &< 4[2^2 + 2 \cdot 2 + 2^2] + 1 = 49. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$|4(a^2 + ab + b^2) - 1| < 49. \quad (2)$$

Agora, substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| = |4(a^2 + ab + b^2) - 1| < 49.$$

Por conseguinte, vem:

$$\left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| < 49 \iff |f(a) - f(b)| < 49|a - b|.$$

De sorte que:

$$|f(a) - f(b)| < 49|a - b|.$$

■

17. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$ são números reais, então, prove que:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Demonstração

Ponha $f(t) = \sum_{j=1}^n (x_j - t y_j)^2$, então, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2t \sum_{j=1}^n x_j y_j + t^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 \\ &= At^2 - 2Bt + C \geq 0, \end{aligned}$$

onde: $A = \sum_{j=1}^n y_j^2$, $B = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ e $C = \sum_{j=1}^n x_j^2$

$$f(t) = At^2 - 2Bt + C \geq 0 \iff B^2 \leq AC.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right).$$

■

18. Dados $x \neq 0$ num corpo ordenado $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$ qualquer, prove que

$$(1+x)^{2n} > 1 + 2nx.$$

Demonstração

Basta notar que:

$$(1+x)^{2n} = \left[(1+x)^2 \right]^n = (1+2x+x^2)^n > (1+2x)^n \geq 1+2nx. \quad (1)$$

Agora, usando a desigualdade de Bernoulli, obtém-se:

$$(1+2x)^n \geq 1+2nx. \quad (2)$$

E, portanto, de (1) e (2), vem

$$(1+x)^{2n} > 1+2nx.$$



Observação

Um outro modo de demonstrar: usar indução finita sobre n .

■

19. Seja $f(z) = z^n + a_{(n-1)}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, um polinômio com coeficiente $a_n = 1$. Mostre que para $|z|$ suficiente grande, temos:

$$|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2} |z|^n.$$

Demonstração

Basta escolher

$$\frac{|z|^{n-j}}{|a_j|} \geq 2n \Rightarrow \frac{|a_j|}{|z|^{n-j}} \leq \frac{1}{2n},$$

onde: $0 \leq j \leq n-1$.

Senão, vejamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|a_0|}{|z|^n} \leq \frac{1}{2n} \\ \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} \leq \frac{1}{2n} \\ \vdots \\ \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \frac{1}{2n} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ vezes}} = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

Agora,

$$\begin{aligned} |f(z) - z^n| &= |a_{(n-1)}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| = |z|^n \cdot \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \\ &\leq |z|^n \cdot \left[\frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \right] \\ &\leq |z|^n \cdot \left(\overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ vezes}} \right) = \frac{1}{2} |z|^n. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2} |z|^n.$$

■

20. Estude a convergência das séries:

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} \quad (B) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \quad (C) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Solução

(A)

Basta notar que:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n+1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Assim,

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

E, portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Ou ainda a série é convergente.

■

(B)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln n - \ln(n+1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [b_1 - b_{n+1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln 1 - \ln(n+1) = -\infty.$$

Longo a série é divergente.

■

(C)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente.

Observe que: a elegante argumentação intuitiva em majorações para mostrar que a série harmônica é divergente

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots \\ & > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16}} + \dots \\ & \implies S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Ora, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty$ segue-se daí que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n} = \infty$$

Por conseguinte, vem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

De sorte que a série diverge. ■

21. Use a definição para provar que: (x_n) , com $x_n = 2 + \frac{\ln n}{n^3}$, $x_n \rightarrow 2$.

Majorações:

$$|x_n - 2| = \left| 2 + \frac{\ln n}{n^3} - 2 \right| = \left| \frac{\ln n}{n^3} \right| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \implies n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}. \text{ Daí basta tomar } n_0 \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ tal que:

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \implies \frac{1}{n^2} < \varepsilon \implies |x_n - 2| = \left| 2 + \frac{\ln n}{n^3} - 2 \right| = \left| \frac{\ln n}{n^3} \right| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Portanto, $x_n \rightarrow 2$. ■

22. Seja $f(x) = x^3 + x$. Prove que:

$$|f(x) - f(2)| \leq 20 \cdot |x - 2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3.$$

Demonstração

Com efeito,

$$|f(x) - f(2)| = |x^3 + x - 10| = |(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 5)|.$$

Agora, $0 \leq x \leq 3 \implies |x| \leq 3$, por conseguinte, obtemos:

$$|(x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 5)| \leq |x - 2| \cdot [x^2 + 2|x| + 5] \leq 20|x - 2|,$$

$$\text{Visto que: } [x^2 + 2|x| + 5] \leq 3^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 20.$$

Logo,

$$|f(x) - f(2)| \leq 20 \cdot |x - 2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3. \quad \blacksquare$$

Capítulo 3 Funções Contínuas



*Frases marcantes da saga **Guerra nas Estrelas***

”Que a força esteja com você.”

A frase mais famosa da saga foi falada por diversos personagens durante os filmes, foi dita pela primeira vez pelo mestre jedi Obi Wan Kenobi para Luke Skywalker, em Episódio IV – Uma Nova Esperança.

”Eu sou seu pai.”

Essa frase marca uma cena dramática no filme O Império Contra-Ataca. Enquanto estão travando uma batalha, Darth Vader revela a Luke Skywalker que é o seu verdadeiro pai. Este episódio deixou qualquer fã surpreso, já que agora a batalha não seria mais somente entre o bem e o mal, mas também entre família.

”Não tente. Faça. . . ou não faça. Não há tentativa.”

Frase profunda e sábia do Mestre Yoda. A mensagem que o pequeno mestre quis dizer para Luke não era que a falha é inaceitável, mas que ele deveria focar e se comprometer com ele mesmo, nas conquistas ou derrotas.

”O dobro do orgulho, o dobro da queda.”

Dita pelo traidor Darth Tyrannus, grande mestre Jedi que mudou de lado e foi para o lado negro da força, esta frase de Star Wars Episódio III: A Vingança dos Sith traduz o quanto devemos ser humildes e não colocarmos o orgulho em nossas vidas, ou podemos nos machucar com isso.

Luke: *”Eu não acredito. Yoda:”É por isso que você fracassa.”*

Esta cena traduz o quanto devemos acreditar em nós mesmo. Enquanto Luke não está conseguindo tirar sua nave do pântano apenas com o poder da mente, ele fica nervoso e começa a se questionar se um dia conseguirá ser um mestre. O pequeno Yoda dá uma lição em Luke e retira ele mesmo a nave com o poder da mente.

”Luke, você descobrirá que muitas das verdades às quais nos prendemos dependem do nosso ponto de vista.”

No Episódio VI: O Retorno do Jedi, Obi-Wan Kenobi tenta explicar para Luke que Darth Vader e Anakin Skywalker não são a mesma pessoa, embora ocupem o mesmo corpo. A frase dita para Luke, pode ter vários significados em relação ao modo que vivemos a vida e opinião de outras pessoas.

”Seus olhos podem traí-lo, não confie neles.”

Obi-Wan Kenobi diz a Anakin que, apesar dos olhos serem a forma mais simples de analisar uma situação ao seu redor, usar os instintos pode ser o melhor jeito de encontrar respostas. Esta frase foi dita no Episódio I: A Ameaça Fantasma.

”Um Jedi usa a Força para o conhecimento e defesa, nunca para o ataque.”

Com conhecimento e sabedoria, Yoda tenta explicar a Luke que tudo que um Jedi precisa ter é conhecimento. O aprendizado fica muito claro quando Luke tem a chance de destruir Darth Vader e, ao invés disso, mostra compaixão.

”A habilidade de falar não o torna inteligente.”

Quando Jar Jar Binks diz a Qui-Gon Jinn que ele consegue falar, a resposta não é a que Jar Jar esperava. De fato, esta frase define como não basta somente mostrar uma habilidade para que você consiga ser considerado totalmente entendido dela.

”Seres luminosos somos nós. Não esta matéria bruta.”

Yoda tenta mostrar a Luke que ele não deve focar em realidades físicas, que a verdadeira Força Jedi vem de ser bondoso, acreditar na conexão de todas as coisas e deixar os que não importa de lado.

3.1 Continuidade

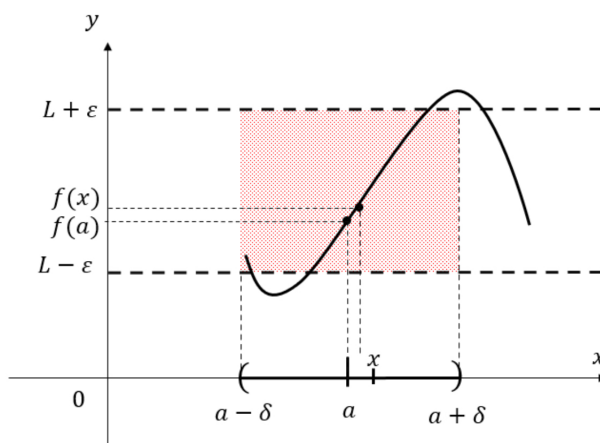
Definição 3.1

Uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in \mathbb{X}$, quando: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$, tal que:

$$f(\mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{X}) \subset \mathbb{V}_\varepsilon(f(a)),$$

ou equivalentemente, temos:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Observação

$$x \in \mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{X} \Rightarrow f(x) \in f(\mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{X}) \subset \mathbb{V}_\varepsilon(f(a)),$$

Problema 3.1

Use a definição para provar que:

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ onde $f(x) = 2x + 6$.

- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, onde $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, onde $f(x) = x^2$.
- (iv) Usando a desigualdade $|\sin x| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mostre que $f(x) = \sin x$ é contínua em zero.
- (v) $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$.
- (vi) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}$.

Solução

- (i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8$, onde $f(x) = 2x + 6$

Majorações

$$\begin{aligned} |f(x) - 8| &= |(2x + 6) - 8| = |2x - 2| = 2|x - 1| < \varepsilon \\ \implies |x - 1| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(1, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} |x - 1| < \delta &\implies |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \implies 2|x - 1| < \varepsilon \\ \implies |2x - 2| < \varepsilon &\implies |(2x + 6) - 8| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|(2x + 6) - 8| < \varepsilon, \text{ desde que: } |x - 1| < \delta.$$

dito de outro modo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8, \text{ onde } f(x) = 2x + 6.$$

■

- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$, onde $f(x) = x^2$.

Majorações

1º Caso: $a \neq 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - a^2| &= |x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| \\ &\leq |x - a| \cdot [|x| + |a|] \end{aligned}$$

$$|x| - |a| \leq |x - a| < |a| \implies |x| < 2|a|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |x - a| \cdot |x + a| &\leq |x - a| \cdot [|x| + |a|] \\ &\leq |x - a| \cdot [2|a| + |a|] < \varepsilon \\ |x - a| &< \frac{\varepsilon}{3|a|}. \end{aligned}$$

Desta forma basta tomar $\delta(a, \varepsilon) = \min \left\{ |a|, \frac{\varepsilon}{3|a|} \right\} > 0$.

2º Caso: $a = 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - 0^2| = |x^2| = |x|^2 < \varepsilon &\implies \\ \implies |x - 0| < \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

Neste caso, tome $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$.

Demonstração

1º Caso: $a \neq 0$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(a, \varepsilon) = \min \left\{ |a|, \frac{\varepsilon}{3|a|} \right\} > 0$, tal que:

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{3|a|} \implies 3|a| \cdot |x - a| < \varepsilon \quad (1)$$

e

$$|x| - |a| \leq |x - a| < |a| \implies |x| < 2|a| \implies |x| + |a| < 3|a| \quad (2)$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a| \leq |x - a| \cdot [|x| + |a|] < |x - a| \cdot 3|a| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$|x^2 - a^2| < \varepsilon, \forall x : |x - a| < \delta.$$

2º Caso: $a = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(0, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$, tal que:

$$|x - 0| < \delta \implies |x - 0| < \sqrt{\varepsilon} \implies |x^2 - 0^2| = |x|^2 < \varepsilon.$$

Decorre dos casos (1) e (2) que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2, \text{ onde } f(x) = x^2.$$

■

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-1} = 2.$$

Majorações

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x}{x-1} - 2 \right| = \left| \frac{x+2-2x}{x-1} \right| = \left| \frac{2-x}{x-1} \right| = \left| \frac{x-2}{x-1} \right| \quad (*)$$

Se escolhermos uma vizinhança

$$\begin{aligned} |2| - |x| \leq |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies |x| - 2 > -\frac{1}{2} \\ &\implies |x| > \frac{3}{2} \implies x - 1 > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ &\implies |x - 1| > \frac{1}{2} \implies \frac{1}{|x - 1|} < 2. \end{aligned}$$

voltando a $(*)$, temos:

$$\left| \frac{x - 2}{x - 1} \right| = \frac{|x - 2|}{|x - 1|} < 2. |x - 2| < \varepsilon \implies |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim basta escolher $\delta\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0$.

Uma outra forma de fazer a esta parte da majoração é: Faça um esboço gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{x - 1}$$

para perceber o porquê de não se tomar $\mathbb{V}_1(2)$ (vizinhança de centro 2 e raio 1).

$$\begin{aligned} |x - 2| < \frac{1}{2} &\iff -\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2} \\ &\iff \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} \iff \frac{3}{2} - 1 < x - 1 < \frac{5}{2} - 1 \\ &\iff \frac{1}{2} < |x - 1| < \frac{3}{2} \iff \frac{2}{3} < \frac{1}{|x - 1|} < 2 \end{aligned}$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta\left(\frac{1}{2}, \varepsilon\right) = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0$, tal que:

$$|x - 2| < \frac{1}{2} \implies |2| - |x| \leq |x - 2| < \frac{1}{2} \implies |x| - 2 > -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} |2| - |x| \leq |x - 2| < \frac{1}{2} &\implies |x| - 2 > -\frac{1}{2} \\ &\implies |x| > \frac{3}{2} \implies x - 1 > \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \\ &\implies |x - 1| > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\implies \frac{1}{|x - 1|} < 2. \quad (1)$$

Analogamente,

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \implies 2 \cdot |x - 2| < \varepsilon \quad (2)$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2), obtemos:

$$\frac{1}{|x - 1|} \cdot 2 \cdot |x - 2| < 2\varepsilon.$$

De sorte que:

$$\left| \frac{x}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon, \forall x : |x - 2| < \delta.$$

Ou ainda,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x - 1} = 2$$



$$(iv) \lim_{x \rightarrow x_0} ax + b = ax_0 + b, a \neq 0.$$

Majorações

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ax + b = ax_0 + b,$$

$$\begin{aligned} |f(x) - (ax_0 + b)| &= |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a(x - x_0)| = |a| |x - x_0| < \varepsilon \\ \implies |x - x_0| &< \frac{\varepsilon}{|a|}, a \neq 0. \end{aligned}$$

Assim basta escolher $\delta(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(a, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \\ \implies |f(x) - (ax_0 + b)| &= |(ax + b) - (ax_0 + b)| \\ &= |a(x - x_0)| = |a| |x - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - (ax_0 + b)| < \varepsilon.$$

Ou ainda,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} ax + b = ax_0 + b,$$

■

$$(v) \lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1.$$

$$\begin{aligned} \implies |f(x) - 1| &= |x^3 - 1| \\ &= |(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)| = |x - 1| |x^2 + x + 1| \\ &\leq |x - 1| [|x|^2 + |x| + 1]. \end{aligned}$$

Agora, se tomarmos uma vizinhança 1, ou melhor,

$$|x| - 1 \leq |x - 1| < 1 \implies |x| < 2.$$

Assim,

$$|x - 1| [|x|^2 + |x| + 1] < |x - 1| \cdot [2^2 + 2 + 1] < \varepsilon \implies |x - 1| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Daí, basta tomar $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(1, \varepsilon) = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{7} \right\} > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} |x - 1| < 1 &\implies |x| - 1 \leq |x - 1| < 1 \implies |x| < 2 \\ \implies |x|^2 + |x| + 1 &< 2^2 + 2 + 1 = 7 \implies |x|^2 + |x| + 1 < 7 \\ \implies |x^2 + x + 1| &\leq |x|^2 + |x| + 1 < 7 \implies |x^2 + x + 1| < 7 \end{aligned}$$

(1)

e

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{7} \implies 7|x - 1| < \varepsilon. \quad (2)$$

Agora, decorre de (1) e (2) que:

$$7|x - 1| \cdot |x^2 + x + 1| < 7\varepsilon.$$

Portanto,

$$|x - 1| < \delta \implies |x^3 - 1| < \varepsilon, \text{ desde que: } |x - 1| < \delta$$

Dito de outro modo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1.$$

■

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}.$$

Majorações

$$\left| \frac{x}{x-2} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3x - 5x + 10}{3(x-2)} \right| = \left| \frac{10 - 2x}{3(x-2)} \right| = 2 \cdot \frac{1}{3} \left| \frac{x-5}{x-2} \right| < \varepsilon \implies |x-2| < \varepsilon \quad (1)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} |x-5| < 1 &\iff -1 < x-5 < 1 \iff 4 < x < 6 \\ &\iff 2 < x-2 < 4 \implies |x-2| = x-2 > 2 \\ &\implies \frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Assim, substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\left| \frac{x}{x-2} - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{3x - 5x + 10}{3(x-2)} \right| = \left| \frac{10 - 2x}{3(x-2)} \right| < 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |x-5| < \varepsilon \implies |x-5| < 3\varepsilon$$

Basta escolher $\delta = \delta(1, \varepsilon) = \min\{1, 3\varepsilon\} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(1, \varepsilon) = \min\{1, 3\varepsilon\} > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} |x-5| < 1 &\implies -1 < x-5 < 1 \iff 4 < x < 6 \\ &\iff 2 < x-2 < 4 \implies |x-2| = x-2 > 2 \\ &\implies \frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

e

$$|x-5| < 3\varepsilon \implies \frac{1}{3} |x-5| < \varepsilon. \quad (4)$$

Agora, combinando (3) e (4), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{1}{|x-2|} \cdot |x-5| &< \frac{1}{2} \varepsilon \implies \left| \frac{10 - 2x}{3(x-2)} \right| = \left| \frac{3x - 5x + 10}{3(x-2)} \right| \\ &= \left| \frac{x}{x-2} - \frac{5}{3} \right| < \varepsilon, \text{ desde que: } |x-5| < \delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x-2} = \frac{5}{3}.$$

Fatos

F_1) Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ é um conjunto discreto, isto é, todos os pontos do conjunto são isolados, então, f é contínua em $x_0 \in \mathbb{X}$.

Demonstração

Seja $\varepsilon > 0$ e considere $\delta > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\delta(x_0) \cap \mathbb{X} = \{x_0\} &\Rightarrow f(\mathbb{V}_\delta(x_0) \cap \mathbb{X}) = \{f(x_0)\} \Rightarrow f(\mathbb{V}_\delta(x_0) \cap \mathbb{X}) \subset \mathbb{V}_\varepsilon(f(x_0)) \\ \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta, x \in \mathbb{X}, \text{ donde, vem: } x = x_0 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

F_2) Os polinômios e as funções racionais são contínuas em seus domínios.

Demonstração

Faça como exercício!

F_3) Sejam $x_0 \in \mathbb{X}$ e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, são equivalentes:

(A) f é contínua em x_0

(B) Se $(x_n) \subset \mathbb{X}$, tal que: $x_n \rightarrow x_0$, então, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Demonstração

(A $\Rightarrow$ B) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow (x_n) \subset \mathbb{X}, x_n \rightarrow x_0.$$

tal que: $|x_n - x_0| < \delta$,

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

(B $\Rightarrow$ A) Se f não fosse contínua em x_0 existiria $\varepsilon_0 > 0$ tal que:

$\forall \delta > 0$ existe $x_n \in \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$|x_n - x_0| < \delta$ mas $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, ou seja, $f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$. Absurdo!

F_4) $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{E}$ contínua em a e $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $b = f(a)$.

Então, $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a .

Demonstração

Seja $(x_n) \subset \mathbb{X}$, $x_n \rightarrow a$. f é contínua em a , então, $f(x_n) \rightarrow f(a) = b$. Como g é contínua em b segue-se que $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$, ou seja,

$$(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(a)$$

F_5) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto

$$Z_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$$

é fechado. Conclua que, se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas então

$$C = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Fatos que ajudam:

(F1) S é fechado quando $\partial S \subset S$, onde ∂S denota a fronteira de S .

(F2) S é fechado $\iff S = \bar{S} = S \cup \partial S$, onde $\bar{S}$ é o fecho de S .

Queremos provar que Z_f é fechado. Isto é, $\bar{Z}_f = Z_f$.

Demonstração

1º caso: $Z_f \subset \bar{Z}_f$

Seja $x \in Z_f$, então, como $\bar{Z}_f = Z_f \cup \partial Z_f$, segue-se que: $x \in \bar{Z}_f$.

Logo $Z_f \subset \bar{Z}_f$.

2º caso: $\bar{Z}_f \subset Z_f$

Seja $x \in \bar{Z}_f$, então, existe (x_n) , com $x_n \in Z_f$, tal que: $x_n \rightarrow x$.

Agora, por definição $f(x_n) = 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, segue-se que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x),$$

donde, vem $f(x) = 0$, ou ainda, $x \in Z_f$ e, portanto, $\bar{Z}_f \subset Z_f$.

Combinando os casos (1) e (2), obtemos:

$$\bar{Z}_f = Z_f.$$

Consequentemente, façamos $h = f - g$, então,

$$C_h = \{x \in \mathbb{R}; h(x) = f(x) - g(x) = 0\},$$

pelo item anterior, C_h é fechado, isto é, C é um conjunto fechado. ■



Observação

Será abordado posteriormente no tópico de funções contínuas

É um erro comum, de alguns livros de Cálculo, dizer que: toda função contínua é aquela que traçamos o gráfico de f sem tirar o lápis do papel. Toda função deste tipo é contínua. Mas, nem toda função contínua é deste tipo. Seja $\mathbb{X}$ um conjunto discreto (um conjunto é discreto se todo ponto de $\mathbb{X}$ é isolado). Assim, toda função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{X}$. De fato,

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{X} = \{x_0\} \implies |x - x_0| < \delta, x \in \mathbb{X} :$$

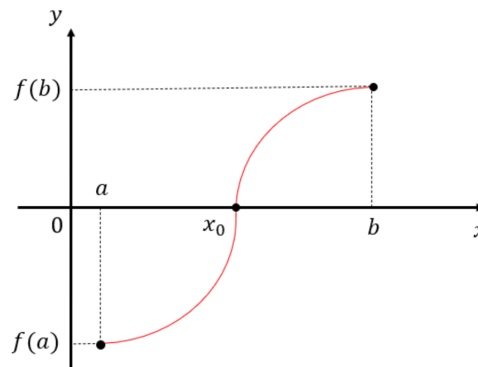
$$x = x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

■

3.2 Funções contínuas em Intervalos

Lema 3.1 (Localização de zeros de uma função contínua)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que: $f(x_0) = 0$.



Demonstração

Seja $\gamma = \frac{a+b}{2}$. Se $f(\gamma) = 0$ tomamos $x_0 = \gamma$ e a demonstração está concluída.

Se $f(\gamma) < 0$, então, tomamos $x_1 = \gamma$ e $y_1 = b$. Se $f(\gamma) > 0$ escolhemos

$x_1 = a$ e $y_1 = \gamma$. Em quaisquer dos casos, temos:

$$f(x_1) < 0 < f(y_1), y_1 - x_1 \leq \frac{b-a}{2^1}.$$

Seja $\gamma_1 = \frac{x_1+y_1}{2}$, então, temos: $f(\gamma_1) = 0$, a demonstração está concluída.

Se $f(\gamma_1) < 0$, pomos $y_2 = y_1$ e $x_2 = \gamma_1$, caso contrário, $f(\gamma_1) > 0$ e neste

caso, tomamos $x_2 = x_1$ e $y_2 = \gamma_1$ daí tem-se:

$$f(x_2) < 0 < f(y_2), y_2 - x_2 < \frac{y_1 - x_1}{2} \leq \frac{b-a}{2^2}.$$

Continuando com o processo, obtemos uma seqüência de intervalos

$$[a, b] \supset \mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_2 \supset \dots \mathbb{I}_n \supset \dots$$

onde $\mathbb{I}_n = [x_n, y_n]$, com

$$y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Seja $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n$, então, à luz do Teorema do Sanduíche, vem:

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}} \Rightarrow (y_n - x_n) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Além disso, $x_n \leq x_0 \leq y_n, \forall n$ e mais.

$$0 \leq x_0 - x_n \leq y_n - x_n, \forall n \Rightarrow x_n \rightarrow x_0. \quad (2)$$

Como

$$y_n = (y_n - x_n) + x_n \quad (3)$$

segue-se combinando (1), (2) e (3) que:

$$y_n \rightarrow x_0.$$

Agora, pela continuidade de f temos:

$f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ e $f(y_n) \rightarrow f(x_0)$, por outro lado, tem-se:

$$f(x_n) < 0 < f(y_n) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0 \\ \text{e} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) \leq 0 \\ \text{e} \\ f(x_0) \geq 0 \end{cases}.$$

De sorte que: $f(x_0) = 0$. ■

Teorema 3.1 (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que: $f(a) < k < f(b)$, então, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que: $f(x_0) = k$. ♥

Demonstração

Basta considerar $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $g(x) = f(x) - k$. Então, temos:

(i) g é contínua em $[a, b]$ (por quê?);

(ii) $g(a) = f(a) - k < 0$ e $g(b) = f(b) - k > 0$.

Logo, pelo Teorema do anulamento segue-se que: existe

$$\bar{x}_0 \in (a, b) : g(\bar{x}_0) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}_0) = k. \quad \text{■}$$

3.3 Aplicações dos teoremas do anulamento e do valor intermediário

Problema 3.2

Provar que: existe $a \in \mathbb{R}$, tal que:

$$(A) \sin a = 1 - a \quad (B) 2^a = a^2$$

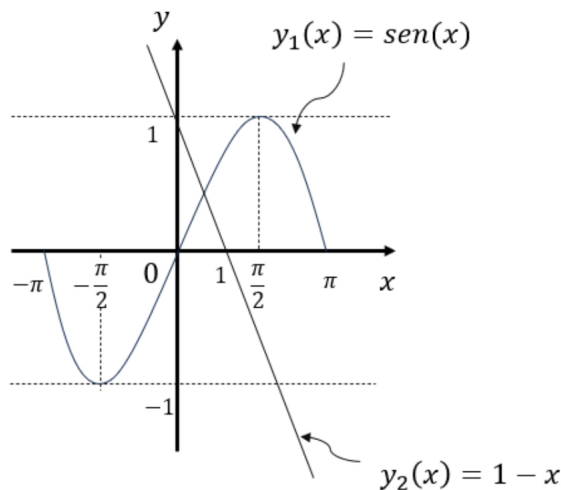
Solução

Queremos mostrar a existência de solução para cada equação dada.

$$(A) \sin a = 1 - a$$

A priori, esboce os gráficos das funções

$$y_1(x) = \sin x \text{ e } y_2(x) = 1 - x$$



Agora, construindo a função no intervalo conveniente $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sin(x) + x - 1.$$

Vejamos,

(i) f é contínua no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$;

(ii) $f(0) = \sin(0) + 0 - 1 = -1 < 0$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} > 0$.

Portanto, pelo teorema do anulamento, existe $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, tal que:

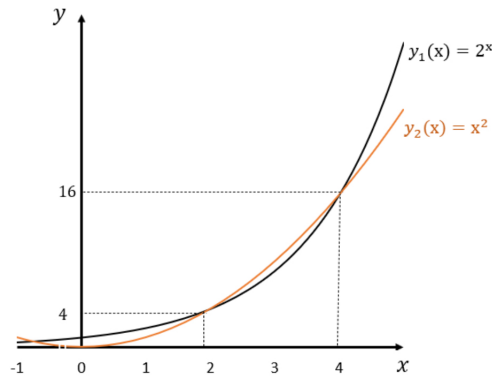
$$f(a) = 0 \iff \sin(a) + a - 1 = 0 \iff \sin(a) = 1 - a.$$

■

$$(B) 2^a = a^2$$

Consideremos, esboçar os gráficos das funções

$$y_1(x) = 2^x \text{ e } y_2(x) = x^2.$$



Daí, construímos a função no intervalo conveniente $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 2^x - x^2.$$

Vejamos,

(i) f é contínua no intervalo $[-1, 0]$;

(ii) $f(-1) = 2^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$ e $f(0) = 2^0 - 0^2 = 1 > 0$.

Logo, pelo teorema do anulamento, existe $a \in (-1, 0)$, tal que:

$$f(a) = 0 \iff 2^a - a^2 = 0 \iff 2^a = a^2.$$

■

Problema 3.3

(A) Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua. Prove que existe $x \in [0, 1]$, tal que: $f(x) = x$ (**Teorema do ponto fixo de Brouwer em dimensão 1**)

(B) Dê exemplos de funções $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sem ponto fixo. Outras funções $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ sem ponto fixo.

(A)

Demonstração

A priori, vejamos o caso trivial: $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$. Nada se tem a demonstrar. Suponhamos por simplicidade que $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$.

Assim, podemos escolher $H : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função definida por:

$$H(x) = f(x) - x.$$

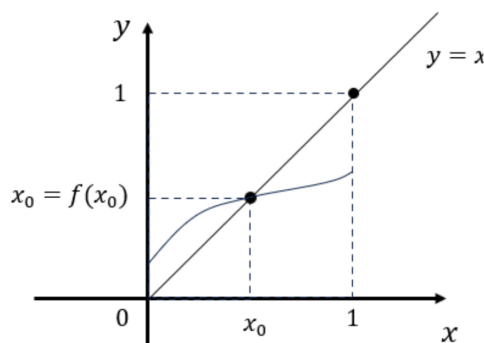
(i) H é contínua em $[0, 1]$. Visto que f e a função identidade o são;

(ii) $H(0) = f(0) - 0 > 0$ e $H(1) = f(1) - 1 < 0$.

Logo, pelo teorema do anulamento: existe $x_0 \in (0, 1)$, tal que:

$$H(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0.$$

■



(B)

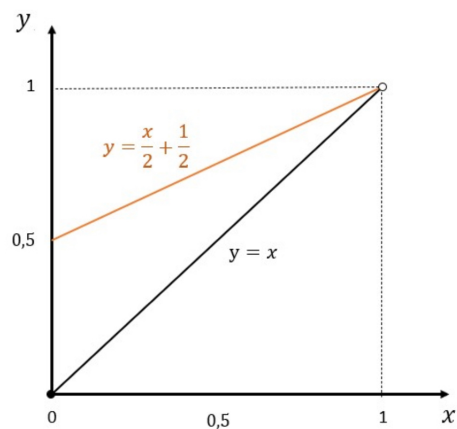
Dê exemplos de funções $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ sem ponto fixo.

para a função $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ basta tomar

1. Considere a função $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

f não tem ponto fixo.



2. Seja $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por:

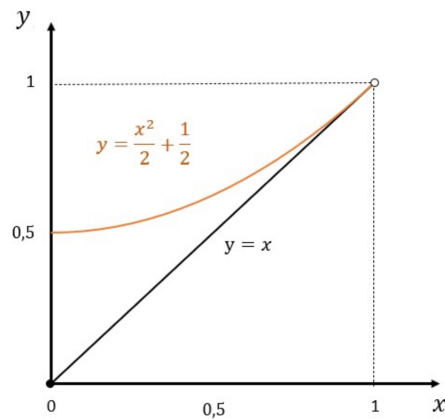
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

f não tem ponto fixo.

No caso, na topologia do aberto $(0, 1)$, seja $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ dada em (i) ou (ii) definidas pelas famílias de funções:

(i) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $\forall x \in (0, 1)$ ou

(ii) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $\forall x \in (0, 1)$: $n \in \mathbb{N}$



(façam os gráficos para $n = 2, 3, 4$)

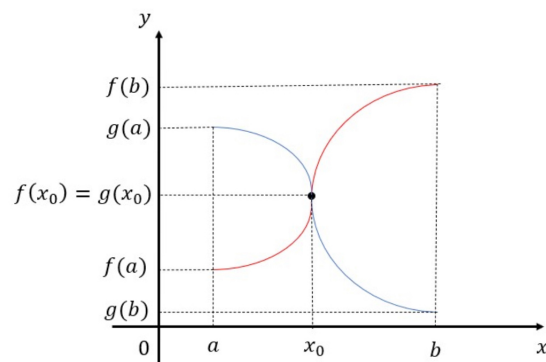
Problema 3.4

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, tais que: $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$.

Prove que: existe x_0 , $a < x_0 < b$, de modo que: $f(x_0) = g(x_0)$.

(Ilustre graficamente f e g)

Demonstração



Seja $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por:

$$H(x) = f(x) - g(x).$$

(i) H é contínua, visto que: f e g o são;

(ii) $H(a) = f(a) - g(a) < 0$ e $H(b) = f(b) - g(b) > 0$.

Logo, pelo teorema do anulamento, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que:

$$H(x_0) = 0 \iff f(x_0) - g(x_0) = 0 \iff f(x_0) = g(x_0).$$

Problema 3.5

(i) Seja $f(x) = x^3$, então, use a definição para provar que: $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = f(1)$, ou seja, f é contínua em $x = 1$.

Majorações

$$\begin{aligned} \implies |f(x) - 1| &= |x^3 - 1| \\ &= |(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)| = |x - 1| \cdot |x^2 + x + 1| \\ &\leq |x - 1| \cdot [|x|^2 + |x| + 1]. \end{aligned}$$

Agora, se tomarmos uma vizinhança 1, ou melhor,

$$|x| - 1 \leq |x - 1| < 1 \implies |x| < 2.$$

Assim,

$$|x - 1| \cdot [|x|^2 + |x| + 1] < |x - 1| \cdot [2^2 + 2 + 1] < \varepsilon \implies |x - 1| < \frac{\varepsilon}{7}.$$

Daí, basta tomar $\delta = \min \{1, \frac{\varepsilon}{7}\} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(1, \varepsilon) = \min \{1, \frac{\varepsilon}{7}\} > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} |x - 1| < 1 &\implies |x| - 1 \leq |x - 1| < 1 \implies |x| < 2 \\ &\implies |x|^2 + |x| + 1 < 2^2 + 2 + 1 = 7 \implies |x|^2 + |x| + 1 < 7. \\ &\implies |x^2 + x + 1| \leq |x|^2 + |x| + 1 < 7 \implies |x^2 + x + 1| < 7 \end{aligned} \quad (1)$$

e

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{7} \implies 7|x - 1| < \varepsilon. \quad (2)$$

Agora, decorre de (1)e (2) que:

$$7|x - 1| \cdot |x^2 + x + 1| < 7\varepsilon.$$

Portanto,

$$|x - 1| < \delta \implies |x^3 - 1| < \varepsilon, \text{ desde que: } |x - 1| < \delta$$

Dito de outro modo, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1 = f(1).$$

■

(ii) Prove que: $f(x) = \sin x$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$.

Majorações

Basta notar que:

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

Por conseguinte, obtemos:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right).$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \right| \cdot \left| \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \cdot \frac{|x-x_0|}{2} \end{aligned}$$

Agora, como $|\cos(\frac{x+x_0}{2})| \leq 1$, segue-se que:

$$|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

Assim, basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\implies |\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \left(\frac{x-x_0}{2} \right) \right| \cdot \left| \cos \left(\frac{x+x_0}{2} \right) \right| \\ &\leq |x - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$|x - x_0| < \delta \implies |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Portanto, f é uma função contínua em $x_0 \in \mathbb{R}$. ■

Problema 3.6

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$.

Majorações:

$$|f(x_0)| - |f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ sempre que: } |x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x)| - |f(x_0)| > -\varepsilon, \text{ sempre que: } |x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x)| > |f(x_0)| - \varepsilon = |f(x_0)| - \frac{|f(x_0)|}{2} = \frac{|f(x_0)|}{2}, \text{ sempre que: } |x - x_0| < \delta.$$

$$\implies |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}, \text{ sempre que: } |x - x_0| < \delta.$$

Se $f(x_0) > 0$, então, na vizinhança de x_0 , tem-se: $f(x) > 0$, ou seja,

$$f(x_0) > 0 \implies f(x) > 0, \text{ sempre que: } |x - x_0| < \delta.$$

Procedendo de forma análoga, tem-se:

Se $f(x_0) < 0$, então, na vizinhança de x_0 , tem-se: $f(x) < 0$, ou seja,

$$f(x_0) < 0 \implies f(x) < 0, \text{ sempre que: } |x - x_0| < \delta.$$

Demonstração

Dado $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta &\implies |f(x_0)| - |f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2} = \varepsilon \\ &\implies |f(x)| > |f(x_0)| - \frac{|f(x_0)|}{2} \implies |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

■

Problema 3.7

Mostre que: não existe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua que transforme todo número racional num irracional e vice-versa.

Solução

Suponhamos que f é contínua e considere $g(x) = x - f(x)$. Então, tem-se:

$$(i) \ x_0 \in \mathbb{Q} \implies [g(x_0) = x_0 - f(x_0)] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

ou

$$(ii) \ x_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \implies [g(x_1) = x_1 - f(x_1)] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \text{ (com } x_0 < x_1)$$

Agora, sendo $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ambos densos em $\mathbb{R}$, então, existe $k \in \mathbb{Q}$, tal que:

$$g(x_0) < k < g(x_1).$$

Como g é contínua. Pois, a identidade e f o são segue-se via teorema do valor intermediário que existe $\bar{x} \in (x_0, x_1)$, tal que:

$$g(\bar{x}) = k.$$

Absurdo! Visto que: $g(x_p) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall x_p \in \mathbb{R}$.

Portanto, f acima descrito não existe.

■

Problema 3.8

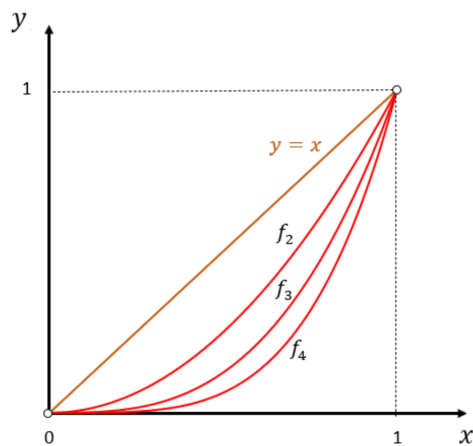
Dê exemplo de uma função $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ sem ponto fixo.

Solução

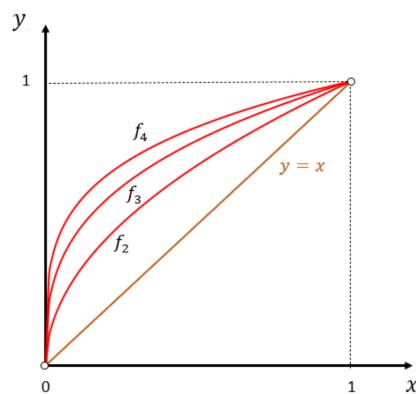
A título ilustrativo, podemos construir duas famílias de funções, neste intervalo $(0, 1)$, sem ponto fixo, a saber:

$$(i) f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, f_4(x) = x^4, \dots, f_n(x) = x^n, n \geq 2$$

Analogamente, tem-se:



$$(ii) f_2(x) = \sqrt{x}, f_3(x) = \sqrt[3]{x}, f_4(x) = \sqrt[4]{x}, \dots, f_n(x) = \sqrt[n]{x}, n \geq 2.$$



❧ Exercícios: Pensando Um Pouco Mais ❧

1. Prove que: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x) := \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ é contínua em zero.

Solução

1º Modo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0),$$

Pois, $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$ e $x \rightarrow 0$. Portanto, f é contínua em zero. ■

2º Modo: (x_n) , $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$|f(x_n) - f(0)| = \left| x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \rightarrow 0,$$

visto que: $\left(\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)$ é limitada e $x_n \rightarrow 0$. ■

3º Modo: (x_n) , $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$|f(x_n) - f(0)| = \left| x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| = |x_n| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \leq |x_n - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

De sorte que: $f(x_n) \rightarrow f(0) = 0$.

Ou ainda, f é contínua em zero. ■

2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se $f(x) = 0$ para todo x racional, então, $f(x) = 0$ para todo x em $\mathbb{R}$.

Solução

Basta lembrar que: tanto $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$. Assim,

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, existe sequência de racionais (r_n) , tal que: $r_n \rightarrow x_0$.

Agora,

$$0 = f(r_n) \implies 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = f(x_0).$$

Logo, $f(x_0) = 0$ para todo x_0 em $\mathbb{R}$. ■

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Mostre que f é contínua somente em $x_0 = \frac{1}{2}$.

Solução

A priori, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$. Assim,

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$, existem sequências de racionais (r_n) e de irracionais (q_n) , tais que: $r_n \rightarrow x_0$ e

$q_n \longrightarrow x_0$. Assim,

$$r_n = f(r_n) \implies x_0 = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = f(x_0). \quad (1)$$

Por outro lado, temos:

$$1 - q_n = f(q_n) \implies 1 - x_0 = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n\right) = f(x_0). \quad (2)$$

agora, comparando (1) e (2), obtemos:

$$1 - x_0 = x_0 \implies x_0 = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o único valor que f é contínua é $x_0 = \frac{1}{2}$. ■

4. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in \text{int}(X)$. Se $f(x_0) > 0$, então, prove que: existe $V_\delta(x_0)$, tal que:

$$f(x) > 0, \text{ para todo } x \in V_\delta(x_0) \cap X.$$

Solução

Majorações

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em x_0 , então, dado $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ existe $\delta > 0$, tal que:

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}, \text{ para todo } x \in V_\delta(x_0) \cap X.$$

Daí vem:

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x), \text{ para todo } x \in V_\delta(x_0) \cap X.$$

Portanto,

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0, \text{ para todo } x \in V_\delta(x_0) \cap X. \quad \blacksquare$$

5. Sejam $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, então,

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = f(x_0) \pm g(x_0).$$

Sejam $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $x = x_0$, então, prove que as combinações algébricas: (ii) $f \cdot g$, (iii) $\frac{1}{g}$, (iv) $\frac{f}{g}$ com $g(x_0) \neq 0, \forall x \in \mathbb{X}$ são contínuas em x_0 .

(i)

Majorações

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

desde que:

$$|x - x_0| < \delta.$$

Basta escolher $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tais que:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x : |x - x_0| < \delta_1$$

e

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x : |x - x_0| < \delta_2.$$

Assim, tomando-se $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ segue-se que:

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))| &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ sempre que} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ sempre que } |x - x_0| < \delta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0).$$

■

Neste caso, o processo é inteiramente análogo com

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = f(x_0) - g(x_0).$$

Faremos as majorações e a redação matemática da demonstração, ficará como exercício!

Majorações:

$$\begin{aligned} |(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))| &= |(f(x) - f(x_0)) + (g(x_0) - g(x))| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

desde que:

$$|x - x_0| < \delta.$$

Ressaltando que:

$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x_0) - g(x)|$$

Demonstração

Basta proceder como o caso anterior (ficará como exercício!)

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = f(x_0) \cdot g(x_0).$$

Majorações

A priori, basta notar que:

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| &= |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| \\ &\leq |g(x)| \cdot |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \cdot |g(x) - g(x_0)| \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |L| \cdot \frac{\varepsilon}{2M}, \forall x : |x - x_0| < \delta. \end{aligned}$$

Onde $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$. Além disso,

$$\begin{aligned} |g(x)| - |g(x_0)| &\leq |g(x) - g(x_0)| < 1, \forall x : |x - x_0| < \delta_2 \\ \implies |g(x)| &< 1 + |g(x_0)| = K, \forall x : |x - x_0| < \delta_2 \end{aligned}$$

Demonstração

A redação matemática da demonstração, ficará a critério do leitor!

$$(iii) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{g(x)} \right] = \frac{1}{g(x_0)}, \text{ com } g(x_0) \neq 0, \forall x \in \mathbb{X} : |x - x_0| < \delta$$

Majorações

$$\begin{aligned} |g(x_0)| - |g(x)| &\leq |g(x) - g(x_0)| < \frac{|g(x_0)|}{2}, \forall x : |x - x_0| < \delta \\ \implies |g(x)| &> \frac{|g(x_0)|}{2}, \forall x : |x - x_0| < \delta \\ \implies \frac{1}{g(x)} &< \frac{2}{|g(x_0)|}, \forall x : |x - x_0| < \delta \\ \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} \right| &= \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x_0)| \cdot |g(x)|} < \frac{2}{|g(x_0)|} \cdot |g(x_0) - g(x)| < \varepsilon \\ \implies |g(x_0) - g(x)| &< \frac{\varepsilon \cdot |g(x_0)|^2}{2}, \forall x : |x - x_0| < \delta \end{aligned}$$

Demonstração

A demonstração, fica a critério do leitor!

$$(iv) \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \text{ com } g(x_0) \neq 0$$

Note que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = f(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \text{ com } g(x_0) \neq 0.$$

■

6. Seja $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|, \forall x, x_0 \in \mathbb{I}.$$

(Função Lipschitziana) Prove que: f é contínua em x_0 , sendo $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$.

Majorações

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < \varepsilon \implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Basta escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, $M > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0, \frac{\varepsilon}{M}) > 0$, tal que:

$$|x - x_0| < \delta \implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M} \implies M|x - x_0| < \varepsilon.$$

Agora, como

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

segue-se que:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em x_0 . ■

7. Função Uniformemente Contínua

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$\forall x, x_0 \in X : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(A continuidade uniforme tem propriedade global)

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que: f é uma **Função Lipschitziana** Prove que: f é uniformemente contínua.

Majorações

Note que: f é uma **Função Lipschitziana**

$$\forall x, x_0 \in X : |f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < \varepsilon \implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Assim, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$.

Demonstração

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, tal que:

$$\forall x, x_0 \in X : |x - x_0| < \delta \implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Como f é de Lipschitz

$$\forall x, x_0 \in X : |f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$$

Daí, segue-se que:

$$\forall x, x_0 \in X : |f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ou ainda,

$$\forall x, x_0 \in X : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

De sorte que: f é uniformemente contínua ■

8. Mostre que as funções dadas são uniformemente continuas

(a) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \sin x$

Majorações

(a) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^2$

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0| \cdot [|x| + |x_0|]$$

$0 \leq x \leq 2 : |x| + |x_0| \leq 2 + 2 = 4$. Assim,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot [|x| + |x_0|] \leq 4 \cdot |x - x_0|$$

Daí, como a função é de Lipschitz podemos concluir que: f é uniformemente continua.

Mas faremos também via definição

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 4 \cdot |x - x_0| < \varepsilon \implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Assim, basta escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Demonstração

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$, tal que:

$$\forall x, x_0 \in [0, 2] : |x - x_0| < \delta \implies |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{4} \implies 4 \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

Além disso, temos:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \cdot [|x| + |x_0|] \leq 4 \cdot |x - x_0| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Ou ainda,

$$\forall x, x_0 \in [0, 2] : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Dito de outro modo, f é uniformemente continua. ■

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \sin x$

Sugestão:

$$\forall x, x_0 \in \mathbb{R} : |\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

Basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Demonstração

dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon > 0$, tal que:

$$\forall x, x_0 \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \implies |x - x_0| < \varepsilon.$$

Agora, como

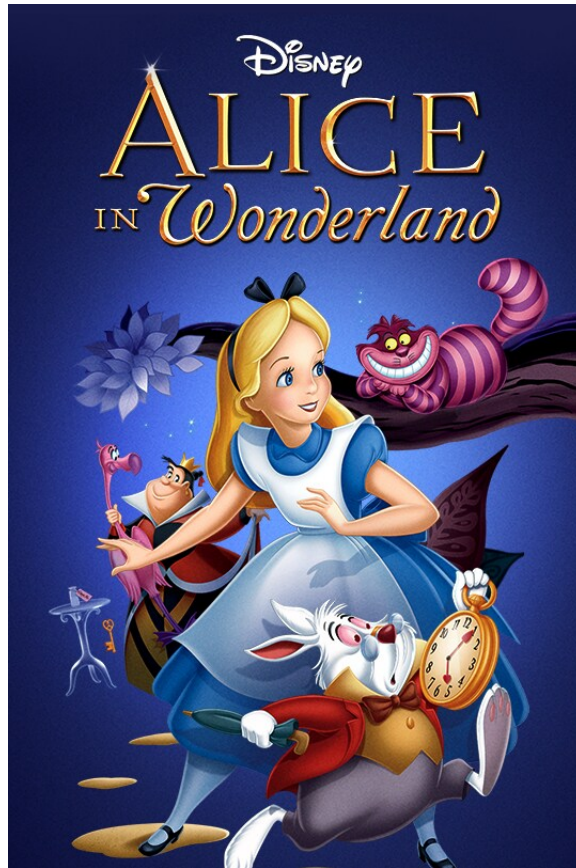
$$\forall x, x_0 \in \mathbb{R} : |\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0|,$$

segue-se que:

$$\forall x, x_0 \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \implies |\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

De sorte que: f é uniformemente continua. ■

Capítulo 4 Derivadas



*”Por favor, poderia me dizer que caminho devo seguir agora?
Isso depende bastante de até onde você quer chegar.”*

Lewis Carrol - Alice no País das Maravilhas

A derivada de uma função é um conceito fundamental na análise matemática que descreve a taxa de variação instantânea de uma função em relação à sua variável independente. Em outras palavras, a derivada indica como a função muda em um ponto específico. Ressaltando que a derivada tem caráter local

A derivada tem várias interpretações e aplicações importantes: Taxa de Variação Instantânea: A derivada fornece a taxa de variação instantânea da função em um ponto específico. Tangente a uma Curva: A derivada em um ponto de uma função fornece a inclinação da reta tangente à curva da função nesse ponto. Isso é útil para entender a geometria da curva.

O cálculo das derivadas é uma parte central da análise matemática, e existem várias regras e técnicas para calcular derivadas de funções de diferentes tipos. As derivadas são usadas em uma ampla variedade de campos da matemática e das ciências para modelar e compreender o mundo ao nosso redor.

4.1 A Derivada de uma função f

Definição 4.1

Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja $x \in \mathbb{X} \setminus \{x_0\}$. A derivada de f em x_0 , é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ou equivalentemente, $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

quando existir o limite.



Observação

1. Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e seja $x \in \mathbb{X} \setminus \{x_0\}$. Consideremos a vizinhança $\mathbb{V}_\delta(x_0)$, então, o quociente de Newton, é dado por:

$$q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in \mathbb{V}_\delta(x_0) \cap (\mathbb{X} \setminus \{x_0\}).$$

2. A derivada na linguagem das seqüências, é descrita por:

$$f'(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

$(x_n) \subset (\mathbb{X} \setminus \{x_0\})$, $x_n \neq x_0$ para todo n .

Fatos

F_1) f é derivável em $x_0 \implies f$ é contínua em x_0 .

Demonstração

Basta notar que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n) - f(x_0)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \cdot [x_n - x_0] = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_n) - f(x_0)] = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Ou ainda, f é contínua em x_0 . ■

F_2) f é derivável em $x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ onde:

(i) A derivada à direita $f'_+(x_0)$ é dada por:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

(ii) A derivada à esquerda $f'_-(x_0)$ é descrita por:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

quando os limites existirem.

Exercícios Gerais

1. Calcule a e b para que a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ ax + b, & x < 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$.

Solução

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, tem-se:

$$f'_-(1) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - 1^2}{x - 1}. \quad (1)$$

Agora, como f é derivável em $x = 1$ segue-se que: f é contínua em $x = 1$, ou seja,

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) \implies 1 = a + b.$$

Ou ainda,

$$b - 1 = -a \quad (2)$$

Decorre de (1) e (2) que:

$$f'_-(1) = f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a \cdot (x - 1)}{x - 1} = a$$

Como $f'_+(1) = f'_-(1)$ por conseguinte, obtemos: $a = 2$ e $b = -1$. ■

2. Determine a e b para que exista a derivada de f em $x = 1$, onde:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

Solução

Por definição, temos:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - (a + b)}{x - 1} \quad (1)$$

Procedendo de forma análoga, tem-se:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 + b - (a + b)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} a(x + 1) = 2a. \end{aligned} \quad (2)$$

Agora, como f é derivável em $x_0 = 1$ segue-se que: f é contínua em $x_0 = 1$, ou seja,

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + b) \implies 1 = a + b.$$

Ou ainda,

$$1 = a + b. \quad (3)$$

Daí, substituindo (3) e (1), obtemos:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x - 1)}{x} \cdot \frac{1}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1 \quad (4)$$

Como $f_+'(1) = f_-'(1)$ por conseguinte, vem: $2a = -1$ e $b = 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)$.
Logo, $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$. ■

3. Suponha que

$$|f(x) - f(1)| \leq (x-1)^2$$

para todo x . Verifique se f é contínua em 1.

Solução

1º Modo:

Com efeito,

$$-(x-1)^2 \leq f(x) - f(1) \leq (x-1)^2.$$

Agora, como

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} -(x-1)^2 = 0$$

segue-se do teorema do sanduíche que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - f(1)] = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

De sorte que: f é contínua em 1. ■

2º Modo:

Seja (x_n) , tal que: $x_n \rightarrow 1$, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(1)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1)^2 = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) - f(1)] = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(1).$$

Ou ainda, f é contínua em 1. ■

4. Seja f uma função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, & x \neq x_0 \\ g'(x_0), & x = x_0. \end{cases}$$

Prove que: Se $g'(x_0)$ existe, então, f é contínua em x_0 .

Solução

A priori, existe $g'(x_0)$, desta forma tem-se:

$$g'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) = f(x_0).$$

Portanto, f é contínua em x_0 . ■

5. Sejam f e g definidas em $\mathbb{R}$, com g contínua em 0, e tais que, para todo x , temos

$$f(x) = xg(x).$$

Mostre que f é derivável em 0.

Solução

A priori, g contínua em 0, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$$

e

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0).$$

Decorre da continuidade de g em zero que: f é derivável em 0. ■

6. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que:

$$f(x) - f(y) = \mathbb{M}(x - y)^n,$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ e para algum $\mathbb{M} \in \mathbb{R}$ e $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que: f é constante.

Solução

Seja (x_n) , com $x_n \rightarrow a$, então,

$$f(x_n) - f(a) = \mathbb{M}(x_n - a)^n \implies \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \mathbb{M}(x_n - a)^{n-1}.$$

Agora, passando ao limite, obtemos:

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathbb{M}(x_n - a)^{n-1}] = 0, \quad n > 1, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Daí, obtemos:

$$f'(a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Logo, f é constante. ■

7. Sejam f e g funções cujos domínios são o conjunto de todos os números reais. Além disso, suponha que:

i) $g(x) = xf(x) + 1$;

ii) $g(a + b) = g(a) \cdot g(b)$ para todo a e b ;

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Verifique se: $g'(x) = g(x)$.

Solução

Com efeito, das hipóteses, tem-se:

$$g(x + h) = g(x) \cdot g(h), \quad g(h) = hf(h) + 1 \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 1.$$

Além disso, por definição, temos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot g(h) - g(x)}{h} \\ &= g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 1}{h} = g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(h) + 1 - 1}{h} \\ &= g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(h)}{h} = g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = g(x). \end{aligned}$$

Portanto, $g'(x) = g(x)$. ■

8. Determine a equação da reta tangente à curva

$$\xi : x^2 + y^2 = R^2, \quad R > 0,$$

no ponto (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$. Conclua daí que a reta é descrita por:

$$xx_0 + yy_0 = R^2.$$

(Interprete geometricamente)

Solução

Suponha $y = f(x)$ e $x^2 + y^2 = R^2$, então derivando implicitamente, vem:

$$\begin{aligned} 2x + 2y \cdot y' &= 0 \implies y' = -\frac{x}{y} \\ \implies y'(x_0, y_0) &= -\frac{x_0}{y_0}, \quad y_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Agora, a equação da reta tangente à curva ξ passando por (x_0, y_0) é descrita por:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0} \cdot (x - x_0).$$

Agora, fazendo algumas manipulações algébricas, vem:

$$yy_0 - y_0^2 = -xx_0 + x_0^2 \iff yy_0 + xx_0 = x_0^2 + y_0^2 = R^2.$$

Logo,

$$xx_0 + yy_0 = R^2.$$

■

9. Se $f'(x_0)$ existe, verifique se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x_0) + x_0f(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ f(x_0) \cdot \frac{[x - x_0]}{x - x_0} - x_0 \cdot \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ f(x_0) - x_0 \cdot \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} \right\} \\ &= f(x_0) - x_0f'(x_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0).$$

■

10. Mostre por definição que:

$$(i) f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x \quad (ii) f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x.$$

Solução

$$(i) f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$$

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{(1 - \cos h)}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \right] \\ &= \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

$$(ii) f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x.$$

Procedendo de forma análoga, destacando que

$$\cos(x+h) = \cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \cdot \sin(h),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \cdot \sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} - \cos x \cdot \frac{(1 - \cos h)}{h} \right] \\ &= -\sin x \cdot 1 + 0 \cdot \cos x = -\sin x. \end{aligned}$$

11. Seja $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto a interior ao intervalo $\mathbb{I}$. Suponha que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = L.$$

para todo par de sequências $(x_n), (y_n)$ em $\mathbb{I}$ com $x_n < a < y_n$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

Prove que existe $f'(a) = L$. Mostre que a hipótese de f ser contínua no ponto a é indispensável.

Solução

Por hipótese, tem-se: f é contínua no ponto a , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = f(a).$$

Além disso,

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \cdot \frac{(y_n - a)}{y_n - x_n} + \frac{f(a) - f(x_n)}{x_n - a} \cdot \frac{(x_n - a)}{y_n - x_n}.$$

Dito de outro modo, tem-se:

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} \cdot \frac{(y_n - a)}{y_n - x_n} + \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \cdot \frac{(a - x_n)}{y_n - x_n} \quad (1)$$

e

$$t_n = \frac{y_n - a}{y_n - x_n} \implies 1 - t_n = 1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n} = \frac{a - x_n}{y_n - x_n}. \quad (2)$$

Agora, substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = t_n \cdot \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + (1 - t_n) \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}, \text{ com } 0 \leq t_n \leq 1.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

De sorte que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) \cdot f'(a) + \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - t_n) \cdot f'(a) = f'(a).$$

Ou ainda,

$$L = f'(a).$$

■

12. Uma função $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, derivável no intervalo $\mathbb{I}$, satisfaz a condição de Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{I}$, se, e somente se,

$$|f'(x_0)| \leq C.$$

para todo $x \in \mathbb{I}$.

Solução

($\implies$) Com efeito, pela condição de Lipschitz, temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq C.$$

Logo,

$$|f'(x_0)| \leq C.$$

($\impliedby$) Reciprocamente $|f'(x_0)| \leq C$ e $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tal que:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \text{ desde que: } |x - x_0| < \delta$$

Daí obtemos:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| - |f'(x_0)| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \text{ desde que: } |x - x_0| < \delta$$

Pondo $C = \varepsilon + |f'(x_0)|$ segue-se que:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C \cdot |x - x_0|, \forall x, x_0 \in \mathbb{I}.$$

Portanto, f é de Lipschitz.

■

13. Seja $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo $\mathbb{I}$. Se existe $\alpha > 1$ tal que: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbb{I}$, então f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de $\mathbb{I}$. Consequentemente, f é constante.

Majorações

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^\alpha < \varepsilon.$$

Daí obtemos:

$$|x - x_0| < \sqrt[\alpha]{\varepsilon}.$$

Assim, basta tomar $\delta = \sqrt[\alpha]{\varepsilon}$.

Solução

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \sqrt[\alpha]{\varepsilon} > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \implies |x - x_0| < \sqrt[\alpha]{\varepsilon} \implies |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^\alpha < \varepsilon.$$

Por conseguinte, vem:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

De sorte que: f é contínua em x_0 .

Além disso,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^\alpha < \varepsilon \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|^{\alpha-1}.$$

Agora, passando o limite à medida que $x \rightarrow x_0$, obtemos:

$$f'(x_0) = 0, \forall x_0 \in \text{int}(\mathbb{I}).$$

De sorte que: $f(x) = K$ constante. ■

14. A função de Dirichlet $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

g não é contínua em algum ponto da reta.

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Conjunto dos números irracionais.

Solução

Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$, então, pela completude $\mathbb{R}$, existem sequências $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ e $(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tais que:

$x_n \rightarrow x_0$ e $y_n \rightarrow x_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$.

Se $(x_n) \subset \mathbb{Q}$, então, $g(x_n) = 1 \rightarrow g(x_0) = 1$ Caso contrário,

$(y_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $g(y_n) = 0 \rightarrow g(x_0) = 0$, absurdo!

Logo, g não é contínua em ponto algum da reta. ■

15. Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

É derivável em $x = 0$ mas a derivada não é contínua em $x = 0$.

Solução

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Pois, $\lim_{x \rightarrow 0} x$ e $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ limitada.

Logo,

$$g'(0) = 0.$$

Além disso, $x \neq 0$ tem-se:

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

e, portanto,

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

queremos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) \neq g'(0).$$

De fato, $g'(0) = 0$ e não existe $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x)$.

Dito de outro modo g' não é contínua em $x = 0$. ■

16. Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no intervalo $\mathbb{X}$. Dizemos que f é de Hölder.

Se existe $M > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, tais que:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M \cdot |x_1 - x_2|^\alpha, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{X}$$

(i) Mostre que: se f é Hölder, então, f é uniformemente.

(ii) Se a condição de Hölder permitisse $\alpha > 1$, então, $f'(x) = 0, \forall x \in \text{int}(\mathbb{X})$

possui derivada nula em todos os pontos de $\mathbb{X}$. Por conseguinte,

$f(x) = K$ é constante.

Majorações

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|^\alpha < \varepsilon \implies |x - x_0|^\alpha < \frac{\varepsilon}{M}$$

Daí obtemos:

$$|x - x_0| < \frac{\sqrt[\alpha]{\varepsilon}}{M}.$$

Assim, basta tomar $\delta = \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{M}} > 0$.

Solução

(i) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{M}} > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \implies |x - x_0| < \sqrt[\alpha]{\frac{\varepsilon}{M}} \implies |x - x_0|^\alpha < \frac{\varepsilon}{M} \implies |f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|^\alpha < \varepsilon.$$

Por conseguinte, vem:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x, x_0 \in \mathbb{X}$$

De sorte que: f é uniformemente contínua. ■

(ii) Além disso, se $\alpha > 1$, então temo-se:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M \cdot |x - x_0|^\alpha < \varepsilon \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M \cdot |x - x_0|^{\alpha-1}.$$

Agora, passando o limite à medida que $x \rightarrow x_0$, obtemos:

$$f'(x_0) = 0, \forall x_0 \in \text{int}(\mathbb{X}).$$

De sorte que: $f(x) = K$ constante. ■

17. Calcule por definição a derivada de cada função dada:

- 1) $f(x) = b$ 3) $f(x) = ax + b$ 5) $f(x) = \sin x$
 2) $f(x) = x^n$ 4) $f(x) = \frac{1}{x}$ 6) $f(x) = \cos x$

Solução

1) $f(x) = b$

Por definição, temos:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b - b}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0.$$

2) $f(x) = x^n$

Decorre da definição que:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) = n \cdot x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

3) $f(x) = ax + b$

Por definição, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a = a. \end{aligned}$$

4) $f(x) = \frac{1}{x}$

Dá definição, temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0 - x}{xx_0} \cdot \frac{1}{(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x - x_0)}{xx_0} \cdot \frac{1}{(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{xx_0} = \frac{-1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

5) $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{(1 - \cos h)}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \right] \\ &= \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

$$(ii) f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x.$$

$$6) f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x.$$

Procedendo de forma análoga, destacando que

$$\cos(x+h) = \cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \cdot \sin(h),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \cdot \sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{\sin h}{h} - \cos x \cdot \frac{(1 - \cos h)}{h} \right] \\ &= -\sin x \cdot 1 + 0 \cdot \cos x = -\sin x. \end{aligned}$$

Teorema 4.1 (Regras de Derivação)

Sejam $f, g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in \text{int}(\mathbb{X})$ e seja $c \in \mathbb{R}$

com $c \neq 0$. Então, tem-se:

$$(i) (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(ii) (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

$$(iii) (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$(iv) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \text{ com } g(x_0) \neq 0.$$

$$(v) \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \text{ com } g(x_0) \neq 0.$$

Demonstração

(i) Por definição, tem-se:

$$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] + \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

(ii) Por definição, temos:

$$\begin{aligned}(cf)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(cf)(x) - (cf)(x_0)}{x - x_0} \\ &= c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= cf'(x_0).\end{aligned}$$

(iii) Por definição, tem-se:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).\end{aligned}$$

(iv) Com efeito,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \\ &= \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \text{ com } g(x_0) \neq 0.\end{aligned}$$

(v) Decorre da definição que:

$$\begin{aligned}\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}, \text{ com } g(x_0) \neq 0.\end{aligned}$$

Exemplo 4.1

Calcule as derivadas das funções trigonométricas

1. $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$

Por definição, temos:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{(1 - \cos h)}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \right] \\ &= \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x.\end{aligned}$$

2. $f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x.$

Procedendo de forma análoga, destacando que

$$\cos(x+h) = \cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \cdot \sin(h),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cdot \cos(h) - \sin(x) \cdot \sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin(x) \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin(x) \cdot \frac{(1 - \cos h)}{h} \right] \\ &= -\sin x \cdot 1 + 0 \cdot \sin x = -\sin x. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$

Usando as regras derivadas para o quociente e a identidade

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, obtem-se:

$$f'(x) = \frac{(\cos x) \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

4. $f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$

Usando as regras derivadas para o quociente e a identidade

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obtem-se:

$$f'(x) = \frac{(-\sin x) \cdot \sin x - \cos x (\cos x)}{(\sin x)^2} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x.$$

5. $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

Usando as regras derivadas para o quociente, vem:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \operatorname{tg} x.$$

6. $f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

Usando as regras derivadas para o quociente, vem:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \sin x - 1(\cos x)}{(\sin x)^2} = -\frac{1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x.$$

Teorema 4.2 (Regra da Cadeia)

Sejam $\mathbb{I}$ e $\mathbb{J}$ intervalos da reta e sejam $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{J} = f(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Se f é derivável em $x = x_0$ e g é derivável em $y_0 = f(x_0)$, então, $g \circ f$ é derivável em x_0 e vale

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

**Demonstração**

Consideremos $G : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & , y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , y = y_0 \end{cases}$, então,

G é contínua em $\mathbb{J}$. De fato, basta notar que:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} G(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = G(y_0).$$

Logo, G é contínua em $\mathbb{J}$.

Agora, para $y \neq y_0$, temos:

$$g(y) - g(y_0) = G(y)(y - y_0),$$

ou ainda,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

$G \circ f$ é contínua e, portanto, passando o limite em (1), obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} G(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = G(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

**Teorema 4.3 (Teorema da função Inversa)**

Sejam $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e estritamente crescente com inversa $g : \mathbb{J} = f(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{R}$, com $f'(x_0) \neq 0$. Então, tem-se: $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, $y_0 = f(x_0)$.

**Demonstração**

Sugestão:

Basta observar que:

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.2 Máximo e Mínimo Local (Relativo)

Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

(i) $f(x_0)$ é máximo local, quando: existe $\delta > 0$, tal que:

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (\mathbb{X} \cap \mathbb{V}_\delta(x_0)).$$

(ii) $f(x_0)$ é mínimo local, quando: existe $\delta > 0$, tal que:

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in (\mathbb{X} \cap \mathbb{V}_\delta(x_0)).$$

**Observação**

Ao máximo ou mínimo local (relativo) chama-se: extremo local (relativo).

Teorema 4.4

Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que:

- (i) f é derivável em $x_0 \in \text{int}(\mathbb{X})$;
- (ii) f admite um extremo local em $x_0 \in \text{int}(\mathbb{X})$. Então, $f'(x_0) = 0$.

**Observação**

Antes de passarmos a demonstração, vejamos que a recíproca do teorema é falsa.

Basta escolher, $f(x) = x^3$. Além disso, $f'(x_0) = 0 \implies x_0 = 0$. No entanto, $f(0)$ não é extremo local.

Demonstração (Máximo Local)

Com efeito,

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in (\mathbb{X} \cap \mathbb{V}_\delta(x_0)).$$

Então, temos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & x > x_0 \\ \geq 0, & x < x_0 \end{cases},$$

então, vem: $f'_+(x_0) \leq 0$ e $f'_-(x_0) \geq 0$ e como f é derivável em x_0 segue-se que: $f'(x_0) = 0$. ■

Teorema 4.5 (Teorema de Rolle)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) f é contínua em $[a, b]$;
- (ii) f é derivável em (a, b) ;
- (iii) $f(a) = f(b)$. Então, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que: $f'(x_0) = 0$.



(Interprete geometricamente o resultado do teorema)

Demonstração

Faremos a prova em duas partes, a saber:

1º **Caso:** Se $f(x) = c$, então, $f'(x_0) = 0$, para todo $x_0 \in (a, b)$. Admita agora f não constante.

2º **Caso:** Se f não é constante, então, f atinge o máximo e o mínimo em $[a, b]$ (Via Teorema de Weierstrass) e como $f(a) = f(b)$, segue que o máximo e o mínimo de f ocorre no interior do intervalo $[a, b]$. Além disso, como f é derivável em (a, b) segue-se que: existe $x_0 \in (a, b)$, tal que: $f'(x_0) = 0$. ■

Exemplo 4.2

Faça uma análise da aplicabilidade do Teorema de Rolle para a função f definida por:

$$f : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 x.$$

- (i) f é contínua em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$;
 (ii) f é derivável em $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;
 (iii) $f(-\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$. Então, existe $x_0 \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, tal que: $f'(x_0) = 0$.
 $f'(x_0) = 2 \cos(x_0) \cdot \sin(x_0) = \sin(2x_0) = 0$. DAí, obtemos:

$$f'(x_0) = \sin(2x_0) = 0 \implies 2x_0 = k\pi \implies x_0 = \frac{k\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, temos: $k = 0 \implies x_0 = 0 \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Teorema 4.6 (Teorema do Valor Médio)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) f é contínua em $[a, b]$;
 (ii) f é derivável em (a, b) . Então existe $x_0 \in (a, b)$, tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



(Interprete geometricamente o resultado do teorema)

Demonstração

Consideremos $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a).$$

Então, temos:

- (i) Φ é contínua em $[a, b]$;
 (ii) Φ é derivável em (a, b) ;
 (iii) $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, então, pelo Teorema de Rolle existe $x_0 \in (a, b)$, de modo que:

$$\Phi(x_0) = 0 \iff f(x_0) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) = 0,$$

e, portanto,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exemplo 4.3

1. Mostre que: $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Solução

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sin x$$

Observe que:

- (i) f é contínua em $[a, b]$;
 (ii) f é derivável em (a, b) , então, pelo Teorema do Valor médio existe $x_0 \in (a, b)$,

de modo que:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos(x_0) \\ \implies \sin b - \sin a &= \cos(x_0) \cdot (b - a) \\ \implies |\sin b - \sin a| &= |\cos(x_0)| \cdot |b - a|. \end{aligned}$$

Agora, como $|\cos(x_0)| \leq 1$ segue-se que:

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a|, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

■

2. Prove que: $e^x \geq 1 + x, \forall x \geq 0$, deduza daí que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Sugestão: Basta observar que: $0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{A}{x}$, onde: $A = (n+1)^{n+1}$.

Solução

Seja $f : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(t) = e^t$$

Observe que:

(i) f é contínua em $[0, x]$;

(ii) f é derivável em $(0, x)$, então, pelo Teorema do Valor médio existe $x_0 \in (0, x)$,

de modo que:

$$f'(x_0) = \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^{x_0} \implies e^x - 1 = e^{x_0} \cdot x$$

Agora, como $x_0 \in (0, x)$, segue-se que:

$$e^{x_0} > 1 \implies e^x = e^{x_0} \cdot x + 1 > x + 1.$$

Portanto,

$$e^x \geq x + 1, \forall x \geq 0.$$

Por conseguinte, temos:

$$e^{\frac{x}{n+1}} \geq \frac{x}{n+1} \implies e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{A}.$$

Daí, vem:

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{A} \implies 0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{A}{x}$$

Assim, pelo teorema do sanduíche obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$



Observação

Este problema de provar que

$$e^x \geq 1 + x, \forall x \geq 0.$$

poderia ser resolvido definindo-se

$$f(x) = e^x - 1 - x, \forall x \geq 0$$

e estudando o sinal da derivada de f que pode ser realizado via teorema a seguir.

Teorema 4.7

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que: f é contínua em $[a, b]$, f é derivável em (a, b) .

(i) Se $x \in (a, b) : f'(x) > 0$, então, f é crescente em $[a, b]$.

(ii) Se $x \in (a, b) : f'(x) < 0$, então, f é decrescente em $[a, b]$.

**Demonstração**

(i) Decorre do teorema do valor médio que: $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 &\implies f(x_2) - f(x_1) > 0 \\ &\implies f(x_2) > f(x_1). \end{aligned}$$

Logo, f é crescente em $[a, b]$.

(ii) À luz do teorema do valor médio, $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$,

temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 &\implies f(x_2) - f(x_1) < 0 \\ &\implies f(x_2) < f(x_1). \end{aligned}$$

De sorte que: f é decrescente em $[a, b]$.

Exemplo 4.4

1. Prove que: $e^x \geq 1 + x, \forall x \geq 0$

Solução

O mesmo problema poderia ser resolvido

definindo

$$f(x) = e^x - 1 - x, \forall x \geq 0$$

Derivando f em relação a x , obtemos:

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \implies e^x = 1.$$

Daí, obtemos o ponto crítico de f :

$$e^x = 1 \implies x = 0 \in (0, \infty).$$

Se $x \in (0, \infty) : f'(x) > 0$, então, f é crescente:

$$x > 0 \implies f(x) > f(0),$$

ou ainda,

$$x > 0 \implies e^x - 1 - x > 0.$$

De sorte que:

$$x \geq 0 \implies e^x \geq 1 + x.$$

2. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos prove que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Demonstração

Com efeito, decorre do problema anterior que:

$$e^x \geq 1 + x, x \geq 0.$$

Assim, basta observar que:

$$e^{\frac{x_j}{A}-1} \geq \frac{x_j}{A},$$

com $j = 1, 2, \dots, n$ e $A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

Vejam os

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{x_1}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} \\ e^{\frac{x_2}{A}-1} \geq \frac{x_2}{A} \\ \vdots \\ e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_n}{A} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \left(e^{\frac{x_1}{A}-1} \right) \cdot \left(e^{\frac{x_2}{A}-1} \right) \dots e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} \cdot \frac{x_2}{A} \dots \frac{x_n}{A} \right\},$$

ou ainda,

$$\left\{ e^{\overbrace{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{A} - n}^{=1}} \geq \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{A^n} \right\}.$$

Logo,

$$A \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \iff \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

A primeira desigualdade é imediata, de fato:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)}{n}.$$

Logo,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

De sorte que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

■

Capítulo 4 Exercício

1. Seja $y = \frac{1}{x^2+1}$, onde $x = x(t)$ é uma função definida e derivável em $\mathbb{R}$. Verifique se, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se: $\frac{dy}{dt} = -2xy^2 \frac{dx}{dt}$.

Solução

Com efeito, temos:

$$y \longrightarrow x \longrightarrow t.$$

(y é função de x e x é função de t), então, derivar y em relação a t , a regra da cadeia nos dá:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

Além disso,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = -2x \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} \right)^2 = -2x \cdot y^2 \quad (2)$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = -2x \cdot y \cdot \frac{dx}{dt}.$$

■

2. Seja $y = g(x)$ uma função diferenciável num intervalo aberto $\mathbb{I}$, com $1 \in \mathbb{I}$, suponha que $f(1) = 2$ e $f'(1) = 4$ para todo $x \in \mathbb{I}$, tem-se: $g(x) = x + [f(x)]^3$. Calcule: (i) $g'(x)$ (ii) $g'(1)$.

Solução

(i) Pela regra da cadeia, tem-se:

$$g'(x) = 1 + 3[f(x)]^2 \cdot f'(x)$$

(ii) Sabemos que: $f(1) = 2$ e $f'(1) = 4$, então,

$$\begin{aligned} g'(1) &= 1 + 3[f(1)]^2 \cdot f'(1) \\ &= 1 + 3 \cdot (2)^2 \cdot 4 = 49. \end{aligned}$$

■

3. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável num intervalo aberto $\mathbb{I}$, com $1 \in \mathbb{I}$, suponha que $f(1) = 2$ e para todo $x \in \mathbb{I}$, tem-se: $f(x) = 2x^4 + [f(x)]^4$. Calcule: (i) $f'(x)$ (ii) $f'(1)$

Solução

Basta proceder como a questão anterior, destacando :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 + 4[f(x)]^3 \cdot f'(x) \\ \Rightarrow f'(x) - 4[f(x)]^3 \cdot f'(x) &= 8x^3 \\ \Rightarrow f'(x) \cdot [1 - 4[f(x)]^3] &= 8x^3 \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{8x^3}{1 - 4[f(x)]^3}. \end{aligned}$$

4. (A) Prove sem usar L'Hôpital que :

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x} = k$

Solução

Seja $f(x) = e^{kx}$, então, $f'(x) = ke^{kx}$, em particular, temos:

$$f'(0) = k$$

Além disso, da definição de derivada, temos:

$$k = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x}.$$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

Solução

Seja $f(x) = \operatorname{arctg} x$, então, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, em particular, temos:

$$f'(0) = 1$$

Além disso, da definição de derivada, temos:

$$1 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Solução

Seja $f(x) = \ln(x+1)$, então, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, em particular, temos:

$$f'(0) = 1$$

Além disso, da definição de derivada, temos:

$$1 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e$$

Solução

Decorre do item anterior que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 &\iff \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = 1 \\ &\iff \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} \right] = 1 \\ &\iff \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}} \right] = e^1. \end{aligned}$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k, \text{ com } k \neq 0$$

Solução

Sugestão

$$\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)}.$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kt)}{t} = k.$$

(Verifique!).

De sorte que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot \ln(1 + \frac{k}{x})]} = e^k.$$

(B) Use o resultado delineado no item anterior para obter $k \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{kx+1}{kx-1}\right)^x = 9.$$

Solução

Decorre do item anterior que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{Kx+1}{Kx-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{Kx}\right)^x}{\left(1 - \frac{1}{Kx}\right)^x} = \frac{e^{\frac{1}{K}}}{e^{-\frac{1}{K}}} = 9.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{e^{\frac{1}{K}}}{e^{-\frac{1}{K}}} = 9 &\iff e^{\frac{2}{K}} = 9 \iff \frac{2}{K} \cdot \ln e = \ln(3^2) \\ &\iff \frac{2}{K} = 2 \cdot \ln(3) \iff \frac{1}{K} = \ln 3 \iff K = \frac{1}{\ln 3}. \end{aligned}$$

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis com as seguintes propriedades:

$f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = f(x)$, $f(0) = 10$ e $g(0) = -10$. Calcule: $(f(25))^2 - (g(25))^2$.

Solução

Seja $H(x) = [f(x)]^2 - [g(x)]^2$, então, temos:

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2 \cdot [f(x)] \cdot f'(x) - 2 \cdot [g(x)] \cdot g'(x) \\ &= 2 \cdot [f(x)] \cdot g(x) - 2 \cdot [g(x)] \cdot f(x) = 0. \end{aligned}$$

Como $H'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ segue-se que: $H(x) = C$.

Agora, $H(0) = C$ e $H(0) = [f(0)]^2 - [g(0)]^2 = (10)^2 - (-10)^2 = 0$.

De sorte que:

$$H(x) = 0 \iff [f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 0.$$

Em particular, quando $x = 25$, tem-se:

$$[f(25)]^2 - [g(25)]^2 = 0.$$

■

6. Seja f uma função contínua e positiva no intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b) .
Mostre que: existe $x_0 \in (a, b)$, tal que:

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a) \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}$$

Solução

Considere a função $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$H(x) = \ln(f(x)), f(x) > 0, \forall x \in [a, b].$$

(i) H é contínua em $[a, b]$;

(ii) H é derivável em (a, b) .

Então, pelo teorema do valor médio existe $x_0 \in (a, b)$, tal que:

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{\ln(f(b)) - \ln(f(a))}{b - a} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \\ \implies \ln(f(b)) - \ln(f(a)) &= (b - a) \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a) \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}.$$

Portanto,

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a) \cdot \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}}.$$

■

7. Faça um estudo do crescimento e decrescimento da função f dada por:

(i) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (ii) $f(x) = xe^{-x}$ (iii) $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ (iv) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ (v) $f(x) = f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Solução

Basta estudar o sinal de cada derivada de 1ª ordem

8. Sejam $0 < a < b$. Então, verifique se:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Solução

Considere a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \forall x \in [a, b].$$

(i) f é contínua em $[a, b]$;

(ii) f é derivável em (a, b)

Então, pelo teorema do valor médio existe $x_0 \in (a, b)$, tal que:

$$f'(x_0) = \frac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b-a} = \frac{1}{1+x_0^2}. \quad (1)$$

Como $a < x_0 < b$ consequentemente, vem:

$$\begin{aligned} a^2 < x_0^2 < b^2 &\iff 1+a^2 < 1+x_0^2 < 1+b^2 \\ &\iff \frac{1}{1+a^2} < \frac{1}{1+x_0^2} < \frac{1}{1+b^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Agora, decorre de (1) e (2) que:

$$\frac{1}{1+a^2} < \frac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b-a} = \frac{1}{1+x_0^2} < \frac{1}{1+b^2},$$

ou ainda,

$$\frac{b-a}{1+a^2} < \operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a < \frac{b-a}{1+b^2},$$

■

9. Sejam α e β dois números reais positivos. Mostre que, se $x > 0$, então $\alpha x + \frac{\beta}{x} \geq 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$. Em particular, se $x > 0$ vale a desigualdade $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Solução

1º Modo:

Estude o sinal da derivada primeira da função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}.$$

Ponto crítico

$$\begin{aligned} f'(x) = \alpha - \frac{\beta}{x^2} = 0 &\implies \frac{\beta}{x^2} = \alpha \\ \implies x^2 = \frac{\beta}{\alpha} &\implies x = \pm \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned}$$

(i) $\forall x \in \left(0, \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) : f'(x) < 0 \implies f$ é decrescente

(ii) $\forall x \in \left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}, +\infty\right) : f'(x) > 0 \implies f$ é crescente.

De sorte que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\right) &= \alpha \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta}{\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} + \beta \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \\ &= \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}. \end{aligned}$$

■

é o ponto de mínimo absoluto para todo $x \in (0, +\infty)$ ou seja,

$$f(x) \geq 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \iff \alpha x + \frac{\beta}{x} \geq 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

2º Modo:

Revisitando as desigualdades entre as médias geométrica e aritmética, obtem-se:

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha x \cdot \frac{\beta}{x}} \leq \frac{\alpha x + \frac{\beta}{x}}{2} \iff 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \leq \alpha x + \frac{\beta}{x}.$$

Portanto,

$$\alpha x + \frac{\beta}{x} \geq 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

■

10. Sejam f e g funções definidas e deriváveis em $\mathbb{R}$. Suponhamos que

$f(0) = 0$, $g(0) = 1$ e que para todo x

$$f'(x) = g(x) \text{ e } g'(x) = -f(x).$$

Mostre que, para todo x ,

$$(f(x) - \sin x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0.$$

Conclua daí que $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$.

Solução

Considere a função $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$H(x) = (f(x) - \sin x)^2 + (g(x) - \cos x)^2.$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} H'(x) &= 2(f(x) - \sin x)(f'(x) - \cos x) + 2(g(x) - \cos x)(g'(x) + \sin x) \\ &= 2(f(x) - \sin x)(g(x) - \cos x) + 2(g(x) - \cos x)(-f(x) + \sin x) \\ &= 2(g(x) - \cos x)[f(x) - \sin x - f(x) + \sin x] = 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$H(x) = C.$$

Agora,

$$\left\{ \begin{array}{l} H(0) = (f(0) - \sin(0))^2 + (g(0) - \cos(0))^2 = 0 \\ \quad \quad \quad e \\ H(0) = C \end{array} \right. \implies C = 0$$

Logo,

$$H(x) = 0 \iff (f(x) - \sin x)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0.$$

Por conseguinte, obtemos:

$$f(x) = \sin x \text{ e } g(x) = \cos x.$$

4.3 Funções Convexas e Condições de Otimalidade de 1ª e 2ª ordem

Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $\mathbb{X}$. Dizemos que f é convexa, quando:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ e $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 4.8 (Condição de 1ª ordem)

Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $f \in C^1$, então, temos:

f é convexa se, e somente se,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

para todo $x, x_0 \in \text{int}(\mathbb{X})$.



Demonstração

($\Rightarrow$) Suponha que f é convexa, então, temos:

$$f((1-t)x_0 + tx) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x),$$

ou ainda,

$$f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0) \leq t(f(x) - f(x_0)),$$

dito de outro modo, vem:

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0). \quad (\#)$$

Passando ao limite, quando $t \rightarrow 0$, obtemos:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x).$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

para todo $x, x_0 \in \text{int}(\mathbb{X})$.

Agora, fixando $x_1, x_2 \in \text{int}(\mathbb{X})$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, temos:

$$\alpha f(x_1) \geq \alpha f(x_0) + f'(x_0)(\alpha x_1 - \alpha x_0), \quad (1)$$

e analogamente,

$$(1 - \alpha)f(x_2) \geq (1 - \alpha)f(x_0) + f'(x_0)((1 - \alpha)x_2 - (1 - \alpha)x_0), \quad (2)$$

Decorre de (1) e (2) que:

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 - x_0],$$

como $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ segue que:

$$\alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

Logo, f é convexa. ■



Observação

Na demonstração fazendo os detalhes de (#), obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\frac{h}{x - x_0}} = f'(x_0)(x - x_0).$$

Teorema 4.9 (Condição de 2ª ordem)

Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $f \in C^2$. Então,
 f é convexa se, e somente se,

$$f''(x) \geq 0,$$

para todo $x \in \text{int}(\mathbb{X})$.

**Demonstração**

($\Leftarrow$) Com efeito, $f''(x) \geq 0$, então, à luz do desenvolvimento de Taylor, temos:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots, \quad (A)$$

ou ainda,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Visto que, $\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \geq 0$, portanto,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (B)$$

e pelo Teorema das condições de otimalidade de 1ª ordem, segue que: f é convexa.

($\Rightarrow$) Por hipótese f é convexa. Suponha que $f''(x) < 0$ para algum $x \in \text{int}(\mathbb{X})$, temos também que existe $x_0 \in \text{int}(\mathbb{X})$, de modo que: $\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 < 0$. Além disso, pela expansão de Taylor, vem:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \quad (A)$$

consequentemente,

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (B)$$

Logo, $A \nRightarrow B$.

Portanto, f não é convexa. Absurdo! Pois, supomos $f''(x) < 0$.

De sorte que: $f''(x) \geq 0$. ■

⌘ Capítulo 4 Exercício ⌘

1. Verifique que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^x$, é convexa e conclua que, para $t \in [0, 1]$ e $x, y \in \mathbb{R}$ quaisquer vale:

$$e^{(1-t)x+ty} \leq (1-t)e^x + te^y.$$

Deduza daí a desigualdade

$$a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha a + \beta b,$$

para α, β, a, b não-negativos, com $\alpha + \beta = 1$.

Solução

Com efeito, $f''(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então, pela condição de otimalidade de 2ª ordem f é convexa, isto é,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \forall t \in [0, 1],$$

e, portanto,

$$e^{(1-t)x+ty} \leq (1-t)e^x + te^y.$$

Agora, fazendo $e^x = a$, $e^y = b$, $1-t = \alpha$ e $t = \beta$: $\alpha + \beta = 1$. Daí vem:

$$\begin{aligned} e^{x(1-t)} \cdot (e^y)^t &\leq (1-t)e^x + te^y \\ \Downarrow \\ (e^x)^{(1-t)} \cdot (e^y)^t &\leq (1-t)e^x + te^y. \end{aligned}$$

Logo,

$$a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

2. Sejam $0 < a \leq b$ Então, verifique se:

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}.$$

Solução

Considere a função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, onde $a > 0$, definida por:

$$f(x) = \ln x, x > 0, \forall x \in [a, b].$$

(i) f é contínua em $[a, b]$;

(ii) f é derivável em (a, b) .

Então, pelo teorema do valor médio que:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{x_0} \\ \implies \ln b - \ln a &= (b - a) \cdot \frac{1}{x_0} \\ \implies \ln\left(\frac{b}{a}\right) &= (b - a) \cdot \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Como $0 < a < x_0 < b$ segue-se que:

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{x_0} > \frac{1}{b} \implies \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{x_0} < \frac{b-a}{a}.$$

Portanto,

$$\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}.$$

3. Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa no intervalo $\mathbb{X}$. Se $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{X}$, $t_1, t_2, \dots, t_n$ pertencem a $[0, 1]$ e

$\sum_{j=1}^n t_j = 1$, prove que:

$$f\left(\sum_{j=1}^n t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(a_j).$$

Solução

Usaremos indução finita sobre n

(i) Para $n = 2$, tem-se:

$$f\left(\sum_{j=1}^2 t_j a_j\right) = f(t_1 a_1 + t_2 a_2) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) = f\left(\sum_{j=1}^2 t_j a_j\right)$$

(definição)

(ii) Suponha válido para n , isto é, $f\left(\sum_{j=1}^n t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(a_j)$.

(hipótese de indução). Então falta mostrar para $n+1$.

Vejamos

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) &= f\left(\sum_{j=1}^n t_j a_j + t_{n+1} a_{n+1}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n t_j f(a_j) + t_{n+1} f(a_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(a_j). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(a_j).$$

■

4. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $t_1, t_2, \dots, t_n$ números reais não-negativos, com $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$. Prove que $x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \leq t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_n x_n$. Conclua, em particular a desigualdade entre a média aritmética e geométrica.

Solução

Com efeito, pela questão anterior, tem-se:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(a_j).$$

Ou ainda,

$$f(t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + \dots + t_n f(a_n).$$

Agora, procedendo de forma análoga ao exercício 1 fazendo

$$f(x) = e^x \text{ e } t_1 + t_2 + \dots + t_n = \sum_{j=1}^n t_j = 1, \text{ obtemos:}$$

$$e^{t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n} \leq t_1 \cdot e^{a_1} + t_2 \cdot e^{a_2} + \dots + t_n \cdot e^{a_n}$$

$\Updownarrow$

$$(e^{a_1})^{t_1} \cdot (e^{a_2})^{t_2} \dots (e^{a_n})^{t_n} \leq t_1 \cdot e^{a_1} + t_2 \cdot e^{a_2} + \dots + t_n \cdot e^{a_n}$$

Além disso, fazendo $e^{a_j} = x_j$ com $j = 1, 2, \dots, n$ segue-se que:

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n} \leq t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2 + \dots + t_n \cdot x_n$$

Se $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$, então, temos

$$x_1^{\frac{1}{n}} \cdot x_2^{\frac{1}{n}} \dots x_n^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \cdot x_1 + \frac{1}{n} \cdot x_2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot x_n.$$

De sorte que:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

■

**Observação**

Poderíamos usar as notações de
produtório

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$$

e somatório

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n}$$

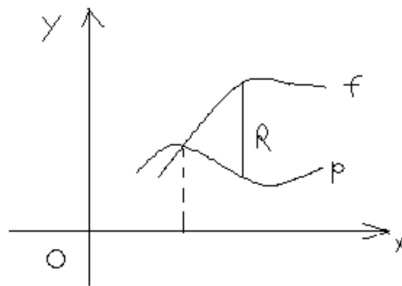
A demonstração da questão poderia ser feita por indução finita sobre n .

Capítulo 5 Apêndice A

Polinômio de Taylor

Sejam $\mathbb{I} := [a, b]$ e $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^n . O polinômio de Taylor de f no ponto $x_0 \in \text{int}(\mathbb{I})$, é dado por:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (1)$$



onde: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Considere $\Phi : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$, descrita por:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \dots - \frac{f^n(t)}{n!}(x - t)^n \\ &\quad - R_n(x) \frac{(x - t)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Então, temos:

- (i) Φ é contínua em $[x_0, x]$;
- (ii) Φ é derivável em (x_0, x) ;
- (iii) $\Phi(x) = \Phi(x_0) = 0$

Daí, pelo Teorema de Rolle, existe $z_0 \in (x_0, x)$, tal que: $\Phi'(z_0) = 0$.

Vejamos

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= -f'(t) - f''(t)(x - t) + f'(t) - f'''(t) \frac{(x - t)^2}{2!} + f''(t)(x - t) - \\ &\quad \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + n \frac{f^n(t)}{n!}(x - t)^{n-1} + (n+1) R_n(x) \frac{(x - t)^n}{(x - x_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, obtemos:

$$\Phi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + (n+1) R_n(x) \frac{(x - t)^n}{(x - x_0)^{n+1}}.$$

Ou ainda,

$$\Phi'(z_0) = 0 \implies \Phi'(z_0) = -\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{n!}(x - z_0)^n + (n+1) R_n(x) \frac{(x - z_0)^n}{(x - x_0)^{n+1}},$$

por conseguinte, temos:

$$\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{n!}(x - z_0)^n = (n+1) R_n(x) \frac{(x - z_0)^n}{(x - x_0)^{n+1}},$$

e, portanto,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad z_0 \in (x_0, x).$$

A forma em (2) é chamada **Fórmula de Taylor** de f no ponto x_0 com **resto de Lagrange**.

Cálculos Auxiliares

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= f(x) - f(x_0) - \frac{f'(t)}{1!}(x-x_0) - \frac{f''(t)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\quad - \dots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-x_0)^n - R_n(x) \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

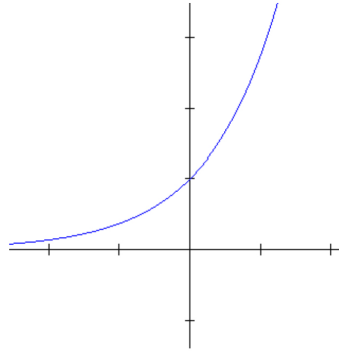
$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= f(x) - f(x_0) - \frac{f'(t)}{1!}(x-x_0) - \frac{f''(t)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &\quad - \dots - \frac{f^n(t)}{n!}(x-x_0)^n - R_n(x) \end{aligned}$$

$$\Phi(x_0) = f(x) - P_n(x) - R_n(x) = 0$$

Capítulo 6 Apêndice B

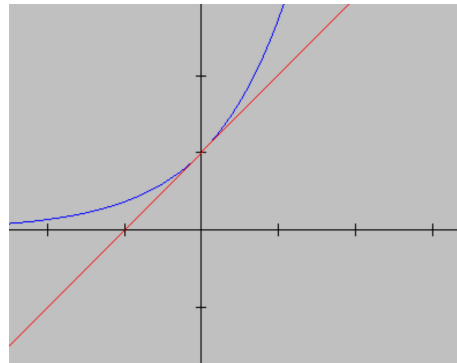
Derivadas das Funções Exponencial e Logarítmica

1. Considere a função exponencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = e^x$ então, $f'(x) = e^x$.



Solução

A priori, vejamos os esboços gráficos de $f(h) = e^h$ e $g(h) = h + 1$



Intuitivamente, temos:

$$e^h \approx h + 1, h \rightarrow 0$$

à medida que: $h \rightarrow 0$, ou ainda.

$$e^h - 1 \approx h, h \rightarrow 0$$

De sorte que:

$$\frac{e^h - 1}{h} \approx 1, h \rightarrow 0$$

Dito de outro modo, vem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Agora, usando a definição de derivada, tem-se:

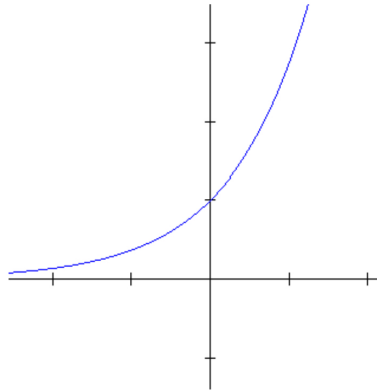
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

■

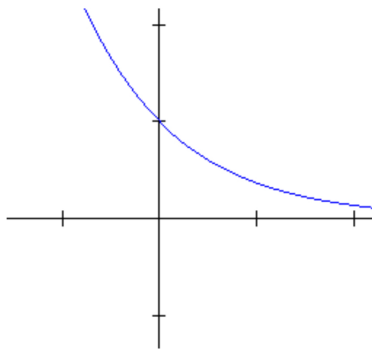
2. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = a^x$, onde $0 < a \neq 1$ então,

$$f'(x) = a^x \ln a$$

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$



Solução

Revisitando a matemática básica, temos:

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln a}$$

e à luz da regra da cadeia, tem-se:

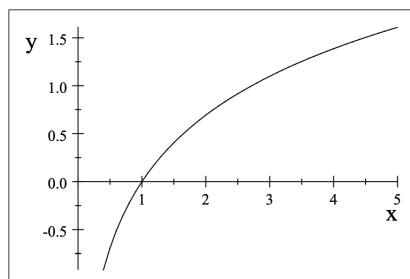
$$f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

■

3. Se $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \ln x$, então,

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

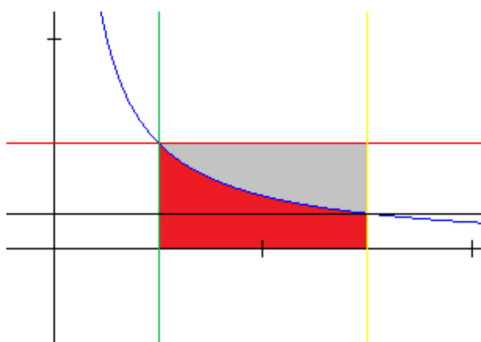
$$f(x) = \ln x$$



Solução

Considere a função $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(t) = \frac{1}{t}$$



Então, observando as áreas, temos:

$$\frac{1}{x+h} \cdot h < \ln(x+h) - \ln x < h \cdot \frac{1}{x},$$

ou ainda,

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} < \frac{1}{x},$$

Agora, passando ao limite quando $h \rightarrow 0$ e usando o teorema do sanduíche, vem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}.$$



Observação

Uma outra forma de resolver o problema:

Considerar a equivalência básica

$$f(x) = \ln x \iff e^{f(x)} = x.$$

Em seguida, aplicar a derivação implícita conjuntamente, com a regra da cadeia

supondo $y = f(x)$, obtém-se:

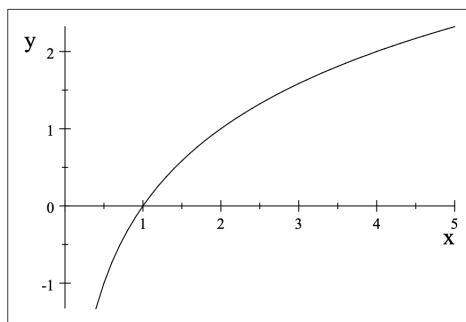
$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1 \iff f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

■

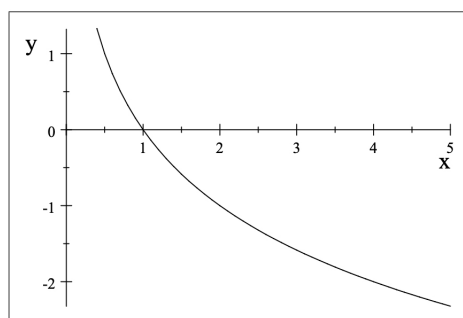
4. Se $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \log_a x$, onde: $0 < a \neq 1$ então,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

1º Caso: $a > 1 : f(x) = \log_a x$



2º Caso: $0 < a < 1 : f(x) = \log_a x$



Solução

Com efeito, usando mudança da base a para e do logaritmo $\log_a x$, tem-se:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Então, derivando, segue-se que

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

■

Problema 6.1

- (a) Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = x^x$
 (b) Determine a equação da reta tangente à curva passando por $(2, 2)$.

Solução

(a) Com efeito,

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln x},$$

Daí, usando a regra da cadeia, obtem-se:

$$f'(x) = e^{\ln(x^x)} = e^{x \cdot \ln x} \left[\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right] = x^x [\ln x + 1]$$

■

(b) A equação da reta tangente à curva passando por $(2, 2)$ é dada por:

$$y - 4 = f'(2) \cdot (x - 2),$$

onde: $f(2) = 2^2 = 4$ e

$$f'(2) = 2^2 [\ln(2) + 1].$$

Portanto, a equação da reta tangente à curva é descrita por:

$$y - 4 = 4 [\ln(2) + 1] \cdot (x - 2),$$

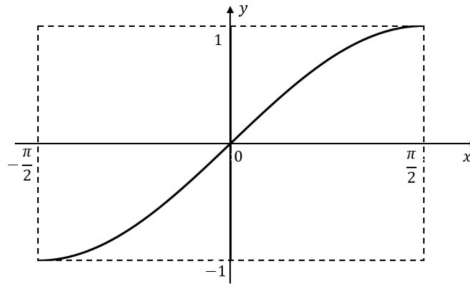
■

Capítulo 7 Apêndice C

Derivada das Funções Trigonômicas Inversas

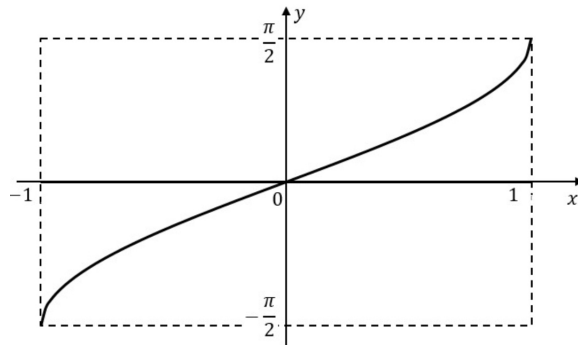
$$1. f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x$$



A função inversa $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é definida por:

$$y = \arcsin x \iff \sin(y) = x$$



$$y = \arcsin x \iff \sin(y) = x, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(Intervalo aberto para se ter a existência da derivada). Agora, derivando implicitamente, vem:

$$\cos(y) \cdot y' = 1 \implies y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

Agora, $\cos(y) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(y)} = \pm\sqrt{1 - x^2}$, $\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ segue-se que

$$\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}.$$

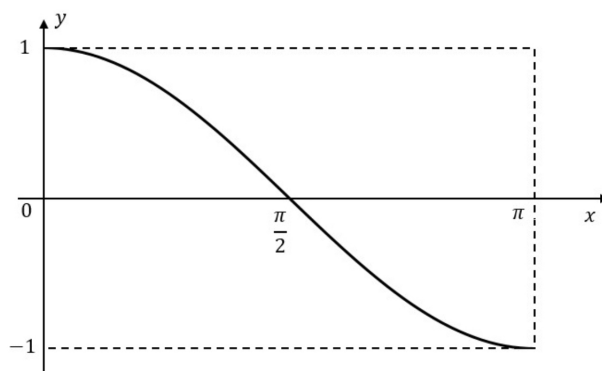
Portanto,

$$y' = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

■

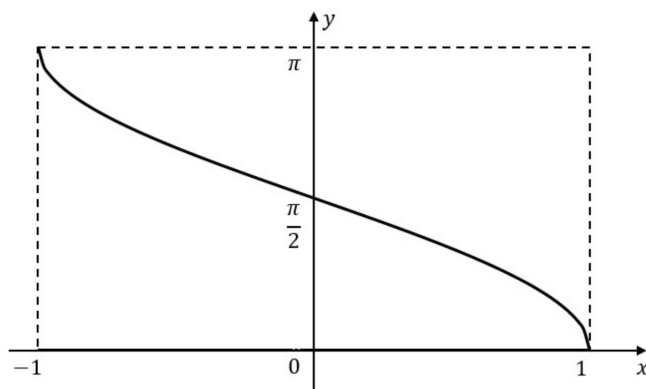
2. $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

$$f(x) = \cos(x)$$



A função inversa $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ é descrita por:

$$y = \arccos(x) \iff \cos(y) = x$$



$$y = \arccos x \iff \cos(y) = x, \forall y \in (0, \pi)$$

(Intervalo aberto questão de existência da derivada). Assim, derivando implicitamente, obtem-se:

$$-\sin(y) \cdot y' = 1 \implies y' = \frac{-1}{\sin(y)}.$$

como

$$\sin^2(y) = 1 - \cos^2(y) = 1 - x^2.$$

Logo,

$$\sin(y) = \pm \sqrt{1 - x^2}, \forall y \in (0, \pi) \implies \sin(y) = \sqrt{1 - x^2}.$$

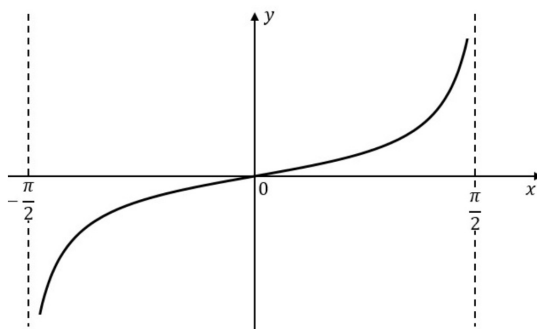
De sorte que:

$$y' = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

■

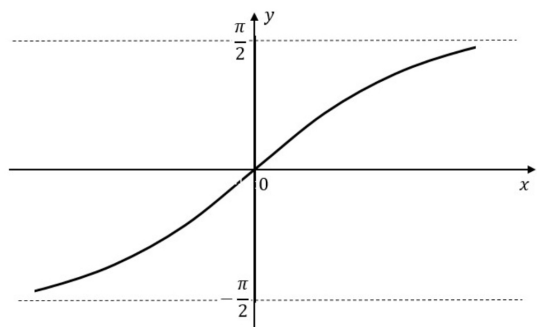
$$3. f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



A função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é dada por:

$$y = \arctg x \iff \operatorname{tg}(y) = x, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



Derivando implicitamente, vem:

$$\sec^2(y) \cdot y' = 1 \implies y' = \frac{1}{\sec^2(y)}$$

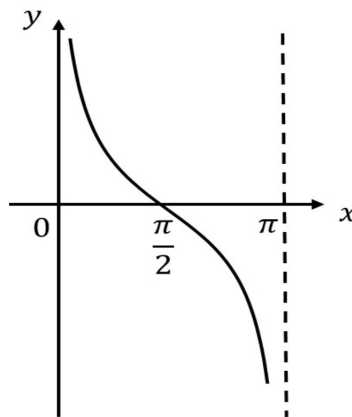
Agora, como $\sec^2(y) = 1 + \operatorname{tg}^2(y) = 1 + x^2$ segue-se que

$$y' = \frac{1}{\sec^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

■

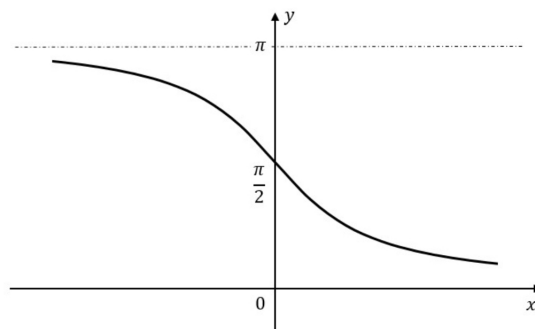
4. $f : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \cotg x$$



A função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$ é dada por:

$$y = \operatorname{arccotg}(x) \iff \cotg(y) = x, \forall y \in (0, \pi)$$



Derivando implicitamente, obtemos:

$$\cotg(y) = x \implies -\operatorname{cosec}^2(y) \cdot y' = 1$$

Sabemos que: $\operatorname{cosec}^2(y) = 1 + \cotg^2(y) = 1 + x^2$. Daí, vem:

$$y' = \frac{-1}{-\operatorname{cosec}^2(y)} = \frac{-1}{1+x^2}$$



Observação

(a) Poderíamos abordar da seguinte forma

$$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arccotg}(x), \forall y \in (0, \pi).$$

Derivando obtem-se:

$$y' = 0 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(b) Provar que

$$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arccotg}(x), \forall y \in (0, \pi).$$

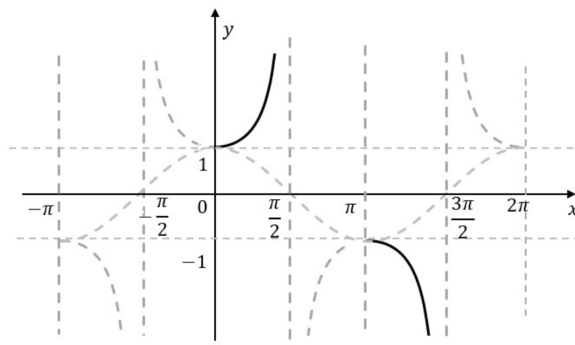
Solução

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arccotg}(x) &\iff \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} - y \\ \iff x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \frac{\cos(y)}{\sin(y)} = \operatorname{cotg}(y) \\ \iff x = \operatorname{cotg}(y) &\iff y = \operatorname{arccotg}(x), \forall y \in (0, \pi). \end{aligned}$$

■

5. Seja $f : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{A}$, onde
 $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ dada por:

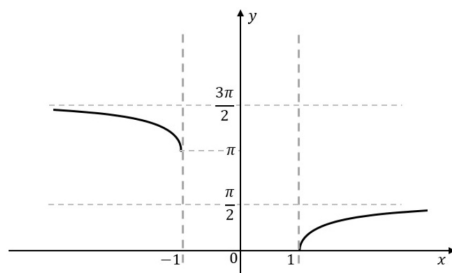
$$f(x) = \sec x$$



A função inversa $f^{-1} : \mathbb{A} \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$

$\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$, definida por:

$$y = \operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right), \forall x : |x| \geq 1$$



$$y = \operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right), |x| > 1.$$

(Intervalo aberto para existência da derivada).

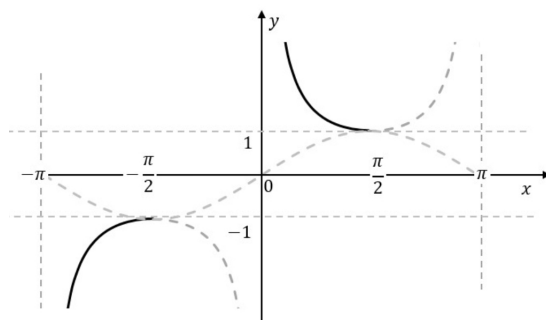
Assim, derivando e usando a regra da cadeia, temos:

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}} \cdot \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}.$$

■

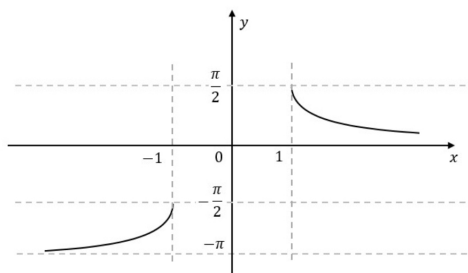
6. Seja $f : (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{A}$ onde
 $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ definida por

$$f(x) = \operatorname{cosec} x$$



A função inversa $f^{-1} : \mathbb{A} \rightarrow (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ onde
 $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$ definida por

$$y = \operatorname{arccosec}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \forall x : |x| \geq 1$$



$$y = \operatorname{arccosec}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right), \forall x : |x| > 1$$

(Intervalo aberto para existência da derivada). Assim,
 derivando e usando a regra da cadeia, temos:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x|}} \cdot \frac{-1}{|x|^2} = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}.$$

■

Capítulo 8 Apêndice D

Letramento Matemático Criativo e Flexível, apresentando uma Ideia Geométrica de $\sup A$ e $\inf A$

As dificuldades em letramento matemático para supremo e ínfimo na literatura matemática: tanto a nível nacional como estrangeiros é notada de forma explícita

A abordagem generalizada mesmo no tocante a subconjuntos da reta real, em geral não é dada de forma a se perceber a ideia simples, de supremo e ínfimo basta

Ver os textos clássicos [1], [2], [3] e [4]. Ressaltando que até mesmo em textos mais recentes, como é o caso [17] Zahn, Maurício, *Análise Real-SP*, Editora Brucher,

2022 e [18] Neves, Wladimir Augusto das, *Uma Introdução à Análise Real*, RJ: Editora UFRJ, 2014 não é dada uma interpretação geométrica. Mesmo em artigos como

[19] e [20]. No caso, de conjuntos de números reais positivos tanto o supremo como o ínfimo, a saber:

$$\sup (A.B) = \sup (A) . \sup (B) \text{ e } \inf (A.B) = \inf (A) . \inf (B)$$

como são problemas bem mais difíceis, deveria ser dado, pelo menos, alguma sugestão. No caso, $c < 0$, temos:

$$\sup (c.A) = c . \inf (A) \text{ e } \inf (c.A) = c . \sup (A) .$$

Ilustrativamente, por simplicidade de visualização geométrica, basta provar e dá uma interpretação geométrica para

$$\sup (-A) = -\inf (A) \text{ e } \inf (-A) = -\sup (A) .$$

Para finalizar, definir espaços métrico e ilustrar com exemplos, usando supremo e ínfimo.

Supremo e Ínfimo

Supremo

1. Seja $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é "limitado superiormente", quando:

Existe $M \in \mathbb{R}$, tal que: $x \leq M, \forall x \in X$.

Uma tal constante M é denominada "cota superior de X " e a menor delas é o "supremo de X ", representado por: $\sup X$.

Seja $\alpha = \sup X$

(i) $x \leq \alpha, \forall x \in X$ (α é uma cota superior de X)

(ii) Se $\beta < \alpha$, então, existe $x \in X$, tal que: $\beta < x$.



Observação

(A) A condição (ii) é equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X : x > \sup X - \varepsilon \iff x > \alpha - \varepsilon.$$

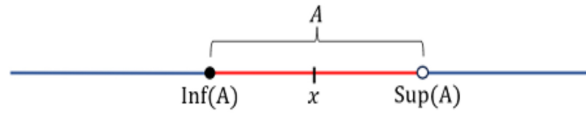
(B) O máximo de um conjunto $\mathbb{X}$ é por definição, um elemento $x_M \in \mathbb{X}$, tal que:

$$x \leq x_M, \forall x \in \mathbb{X}.$$

Para efeito de ilustração, vejamos um exemplo de supremo, considere:

(i) $x \leq 1, \forall x \in \mathbb{X}$,

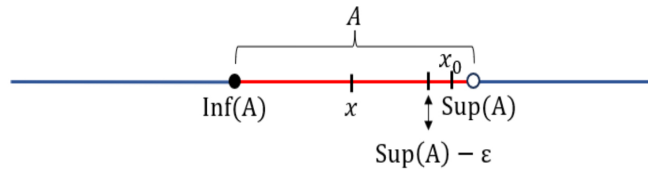
(ii) Dado $\varepsilon > 0$, o número $1 - \varepsilon < \frac{2-\varepsilon}{2} \in \mathbb{X} \implies \sup \mathbb{X} = 1$.



Observação:

Se $\sup A \in A$, dizemos que: A tem máximo: $\max A = \sup A$.

Se $\sup A \notin A$, dizemos que: A não tem máximo.



Ínfimo

2. Seja $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $\mathbb{X}$ é "limitado inferiormente", quando:

$$\text{Existe } m \in \mathbb{R}, \text{ tal que: } m \leq x, \forall x \in \mathbb{X}.$$

Uma tal constante m é denominada "cota inferior de $\mathbb{X}$ " e a maior delas é o "ínfimo de $\mathbb{X}$ ", denotado por:

$$\inf \mathbb{X}$$

Se $\beta = \inf \mathbb{X}$, então, temos:

(i) $\beta \leq x, \forall x \in \mathbb{X}$ (β é uma cota inferior de $\mathbb{X}$)

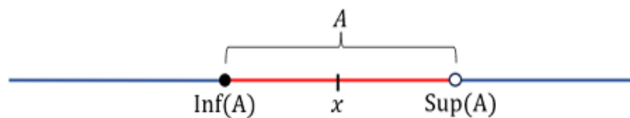
(ii) Se $\gamma < \beta$, então, existe $x \in \mathbb{X}$, tal que: $\gamma < x$.



Observação

A condição (ii) é equivalente a dizer:

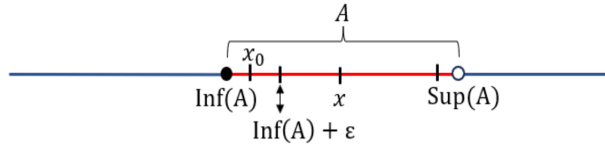
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{X} : x < \inf \mathbb{X} + \varepsilon \iff x < \beta + \varepsilon.$$



Analogamente, temos:

Se $\inf A \in A$, dizemos que: A tem mínimo: $\min A = \inf A$.

Se $\inf A \notin A$, dizemos que: A não tem mínimo.



Agora, passemos a alguns problemas sobre supremo e ínfimo, destacando as ideias geométricas em cada uma das demonstrações.

Teorema 8.1

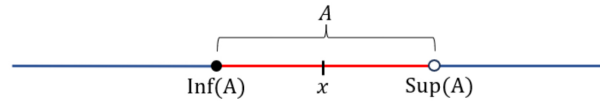
Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, seja $A + B = \{x + y; x \in A \text{ e } y \in B\}$ limitado.

Prove que:

$$(i) \sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad (ii) \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$



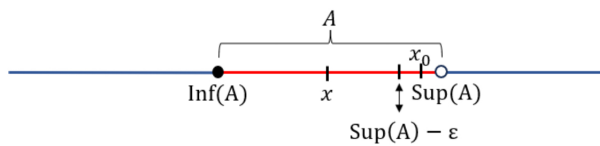
Demonstração



Observação

Se $\sup A \in A$, dizemos que: A tem máximo: $\max A = \sup A$.

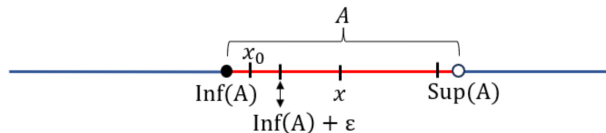
Se $\sup A \notin A$, dizemos que: A não tem máximo.



Analogamente, temos:

Se $\inf A \in A$, dizemos que: A tem mínimo: $\min A = \inf A$.

Se $\inf A \notin A$, dizemos que: A não tem mínimo.



(i) Para $\forall x \in A, \forall y \in B$, temos: $x \leq \sup A$ e $y \leq \sup B$, donde obtemos:

$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$

Logo, $\sup A + \sup B$ é uma cota superior para o conjunto $A + B$ por conseguinte, vem:

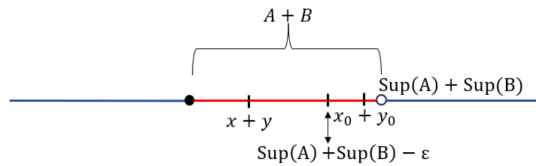
$$\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Portanto, $\sup A + \sup B$ é a menor das cotas superiores, ou ainda,

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$



Observação

Dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 > \sup B - \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 > \sup A + \sup B - \varepsilon$$

$$\implies K = x_0 + y_0 + \varepsilon > \sup A + \sup B.$$

Desta forma, $\sup A + \sup B$ é a menor das cotas superiores para $A + B$

(ii) Para $\forall x \in A, \forall y \in B$, temos: $x \geq \inf A$ e $y \geq \inf B$, donde obtemos:

$$x + y \geq \inf A + \inf B.$$

Logo, $\inf A + \inf B$ é uma cota inferior para o conjunto $A + B$ por conseguinte, vem:

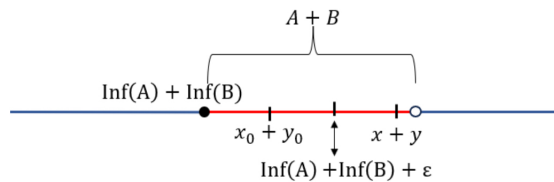
$$\inf(A + B) \geq \inf A + \inf B.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 < \inf A + \inf B + \varepsilon.$$

De sorte que, $\inf A + \inf B$ é a maior das cotas inferiores, ou ainda,

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$



Observação

Dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y_0 < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} \implies x_0 + y_0 < \inf A + \inf B + \varepsilon$$

$$\implies K = x_0 + y_0 - \varepsilon < \inf A + \inf B.$$

Assim, diz-se que: $\inf A + \inf B$ é a maior das cotas inferiores para $A + B$.

Teorema 8.2

Seja $A \subset \mathbb{K}$ não-vazio e limitado. Dado $c > 0$, seja $cA = \{cx; x \in A\}$. Prove que cA é limitado e $\sup(cA) = c \sup A$.

**Demonstração**

Com efeito, A é limitado, então, para todo $x \in A$, com $c > 0$, tem-se:

$$a_1 \leq x \leq b_1 \implies c.a_1 \leq c.x \leq c.b_1, \forall x \in A.$$

Portanto, cA também é limitado. Além disso,

para $\forall x \in A$, temos: $x \leq \sup A$, donde, obtem-se: $cx \leq c \sup A$.

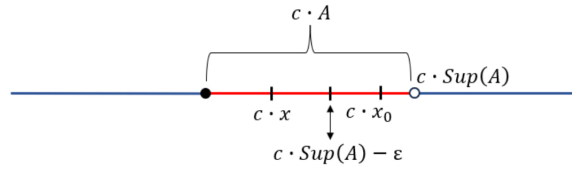
Logo, $c \sup A$ é uma cota superior para o conjunto cA por conseguinte, vem:

$$\sup(cA) \leq c \sup A.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tal que:

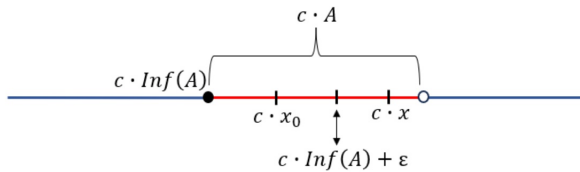
$$x_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{c} \implies cx_0 > c \sup A - \varepsilon.$$

Portanto, $c \sup A$ é a menor das cotas superiores, ou ainda, $\sup(cA) = c \sup A$. ■



Procedendo de forma análoga, temos:

$$\inf(cA) = c \inf A.$$



(ii) Basta proceder de forma inteiramente análoga. Verifique!

Teorema 8.3

Seja A um conjunto não vazio e limitado de números reais. o conjunto

$$-A = \{-x; x \in \mathbb{R}\}$$

Claramente, $-A$ também é limitado, e tem-se:

$$(i) \quad \inf(-A) = -\sup(A) \quad (ii) \quad \sup(-A) = -\inf(A)$$

**Demonstração**

(i) Para $\forall x \in A$, temos: $x \leq \sup(A)$, donde, obtem-se: $-x \geq -\sup(A)$.

Logo, $-\sup(A)$ é uma cota inferior para $-A$. Isto é,

$$\inf(-A) \geq -\sup(A).$$

Falta mostrar que $-\sup(A)$ é a maior das cotas inferiores para $-A$.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in A$, tal que:

$$x_0 > \sup(A) - \varepsilon \iff -x_0 < -\sup(A) + \varepsilon, \text{ com } -x_0 \in -A.$$

Portanto, $-\sup(A)$ é a maior das cotas inferiores para $-A$.

Ou ainda,

$$\inf(-A) = -\sup(A)$$



(ii) Basta proceder de forma inteiramente análoga. Verifique!

Teorema 8.4

Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, tais que: $A \subset B$. Prove que:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$



Demonstração Com efeito, para $\forall x \in B$, temos: $x \leq \sup(B)$, donde, obtem-se: $\sup(B)$ é uma cota superior para A . Logo,

$$\inf A \leq \sup A \leq \sup B. \quad (1)$$

$\forall x \in B$, tem-se: $x \geq \inf(B)$. Assim, $\inf(B)$ é uma cota inferior para A .

De sorte que:

$$\inf B \leq \inf A. \quad (2)$$

Decorre de (1) e (2) que:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

**Teorema 8.5**

Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, tais que: $x \in A, y \in B \implies x \leq y$.

Prove que:

$$(i) \sup(A) \leq \inf(B)$$

(ii) $\sup(A) = \inf(B)$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existem $x \in A, y \in B$, tais que:

$$y - x < \varepsilon.$$

**Demonstração**

(i) $\forall x \in A$, tem-se: $x \leq \inf(B)$. Por conseguinte, vem: $\inf(B)$ é uma cota superior para A . Logo,

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$



(ii) $(\implies) \sup(A) = \inf(B) \implies$ para todo $\varepsilon > 0$, existem $x \in A, y \in B$, tais que:

$$y - x < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, existem $x \in A, y \in B$, tais que:

$$x > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ou ainda,

$$-x < -\sup(A) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } y < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, obtemos:

$$y - x < \inf(B) - \sup(A) + \varepsilon.$$

Agora, como $\sup(A) = \inf(B)$ segue-se que:

$$y - x < \varepsilon.$$

$(\impliedby)$ Para todo $\varepsilon > 0$, existem $x \in A, y \in B$, tais que:

$$y - x < \varepsilon \implies$$

$$\sup(A) = \inf(B)$$

De fato, $y - x < \varepsilon \iff y < x + \varepsilon$.

Agora,

$$y \leq \inf(B) < x + \varepsilon \leq \sup(A) + \varepsilon.$$

Daí, vem:

$$\inf(B) < \sup(A) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\inf(B) \leq \sup(A) \text{ e } \sup(A) \leq \inf(B).$$

De sorte que:

$$\sup(A) = \inf(B)$$



Teorema 8.6

Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos

$$A.B = \{x.y; x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Prove que se A e B forem limitados então,

(i) $A.B$ é limitado, sendo

(ii) $\sup(A.B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ (iii) $\inf(A.B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$



Demonstração

(i) Com efeito, $\forall x_1 \in A, \forall y_1 \in B$, existem $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq y_1 \leq b_2 \end{cases} \implies \{a_1 b_1 \leq x_1 y_1 \leq a_2 b_2\}.$$

Logo, $A.B$ é limitado.



(ii) $\forall x \in A, \forall y \in B$, tem-se: $x \leq \sup(A)$ e $y \leq \sup(B) \implies x.y \leq \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Isto é, $\sup(A) \cdot \sup(B)$ é uma cota superior para o conjunto $A.B$ e, portanto,

$$\sup(A.B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

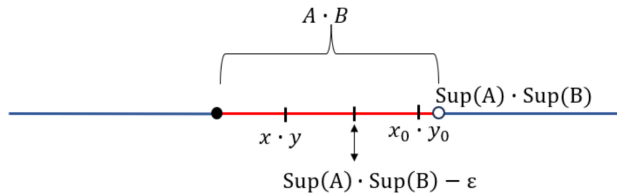
$$x_0 > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{(\sup(A) + \sup(B))} \text{ e } y_0 > \sup(B) - \frac{\varepsilon}{(\sup(A) + \sup(B))},$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 \cdot y_0 &> \sup(A) \cdot \sup(B) - \frac{(\sup(A) + \sup(B))}{(\sup(A) + \sup(B))} \cdot \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\sup(A) + \sup(B))} \right]^2 \Rightarrow \\ x_0 \cdot y_0 &> \sup(A) \cdot \sup(B) - \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\sup(A) + \sup(B))} \right]^2 \Rightarrow \\ x_0 \cdot y_0 &> \sup(A) \cdot \sup(B) - \varepsilon, \text{ pois, } \left[\frac{\varepsilon}{(\sup(A) + \sup(B))} \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\sup(A) \cdot \sup(B)$ é a menor das cotas superiores para o conjunto $A \cdot B$. Logo,

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$



Observação

Duas outras formas de provar que $\sup(A) \cdot \sup(B)$ é a menor das cotas superiores para $A \cdot B$ são:

1. Dado $\varepsilon > 0$, existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 > \sup(A) - \varepsilon \text{ e } y_0 > \sup(B) - \varepsilon,$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 \cdot y_0 &> \sup(A) \cdot \sup(B) - (\sup(A) + \sup(B)) \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 \\ &> \sup(A) \cdot \sup(B) - (\sup(A) + \sup(B)) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando-se $\varepsilon = \sup(A) + \sup(B)$ segue-se que:

$$x_0 \cdot y_0 > \sup(A) \cdot \sup(B) - \varepsilon^2.$$

Dito de outro modo, $\sup(A) \cdot \sup(B)$ é a menor das cotas superiores para o conjunto $A \cdot B$. Logo,

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

2. Dado $\varepsilon > 0$, existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 > \sup(A) - \varepsilon \text{ e } y_0 > \sup(B) - \varepsilon.$$

Daí, obtemos:

$$x_0 \cdot y_0 > \sup(A) \cdot \sup(B) - (\sup(A) + \sup(B)) \cdot \varepsilon + \varepsilon^2.$$

Tomando-se $\varepsilon + 1 = \sup(A) + \sup(B)$ segue-se que:

$$x_0 \cdot y_0 > \sup(A) \cdot \sup(B) - (\varepsilon + 1) \cdot \varepsilon + \varepsilon^2.$$

Por conseguinte, vem:

$$x_0 \cdot y_0 > \sup(A) \cdot \sup(B) - \varepsilon.$$

Dito de outro modo, $\sup(A) \cdot \sup(B)$ é a menor das cotas superiores para o conjunto $A \cdot B$. Logo,

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

(ii) $\forall x \in A, \forall y \in B$, tem-se: $x \geq \inf(A)$ e $y \geq \inf(B) \implies x \cdot y \geq \inf(A) \cdot \inf(B)$. Isto é, $\inf(A) \cdot \inf(B)$ é uma cota inferior para o conjunto $A \cdot B$ e, portanto,

$$\inf(A \cdot B) \geq \inf(A) \cdot \inf(B).$$

Falta mostrar que: $\inf(A) \cdot \inf(B)$ é a maior das cotas inferiores para $A \cdot B$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{(\inf(A) + \inf(B))} \text{ e } y_0 < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{(\inf(A) + \inf(B))}.$$

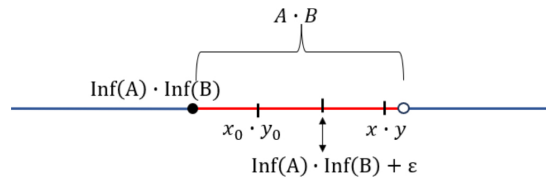
Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 \cdot y_0 &< \inf(A) \cdot \inf(B) + \frac{(\inf(A) + \inf(B))}{(\inf(A) + \inf(B))} \cdot \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\inf(A) + \inf(B))} \right]^2 \implies \\ x_0 \cdot y_0 &< \inf(A) \cdot \inf(B) + \varepsilon + \left[\frac{\varepsilon}{(\inf(A) + \inf(B))} \right]^2 \implies \\ x_0 \cdot y_0 &< \inf(A) \cdot \inf(B) + \varepsilon, \text{ pois, } \left[\frac{\varepsilon}{(\inf(A) + \inf(B))} \right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\inf(A) \cdot \inf(B)$ é a maior das cotas inferiores para o conjunto $A \cdot B$. Logo,

$$\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B).$$

■



Função Limitada

Definição 8.1

Seja $\phi \neq X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se limitada, quando: sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado. Neste caso, define-se $\sup(f)$ como o supremo do conjunto $f(X)$.

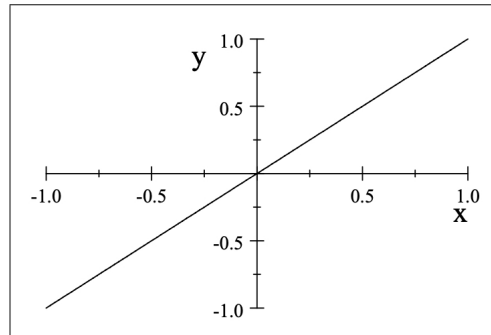
Notações: $\sup_{x \in X} [f(x)]$ ou $\sup_X(f)$.



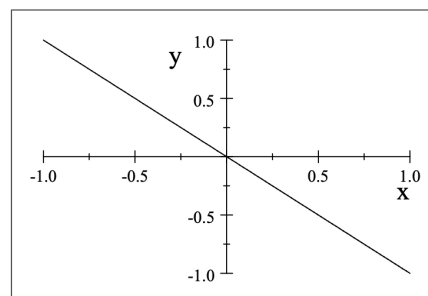
Exemplo 8.1

Considere as funções $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

(i) $f(x) = x$



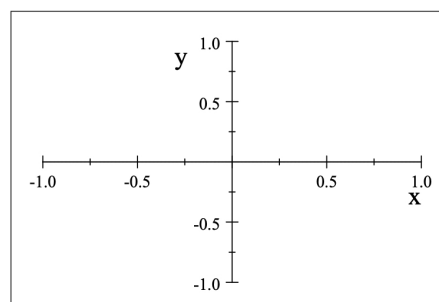
$\sup(f) = 1$ e $\inf(f) = -1$ (ii) $g(x) = -x$



$\sup(g) = 1$ e $\inf(g) = -1$

(iii) $h(x) = 0$

$\sup(f) + \sup(g) = 2$ e $\inf(f) + \inf(g) = -2$



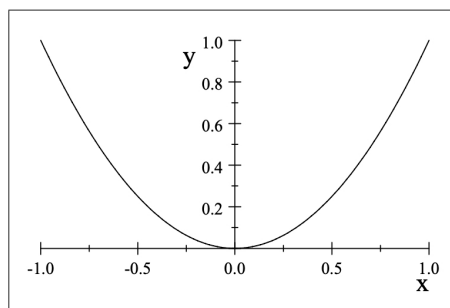
(a) $\sup(h) = \sup(f + g) = 0 < \sup(f) + \sup(g) = 2$ e

(b) $\inf(h) = \inf(f + g) = 0 > \inf(f) + \inf(g) = -2$

Exemplo 8.2

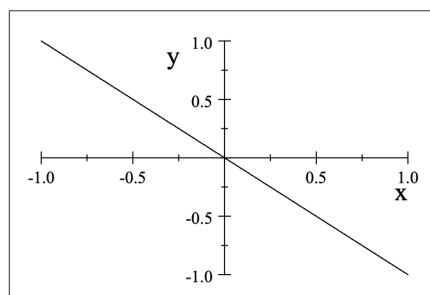
Sejam $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ as funções dadas por:

(i) $f(x) = x^2$



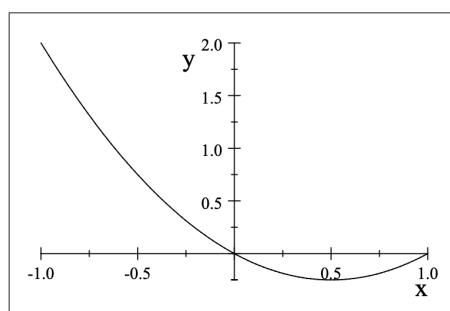
$\sup(f) = 1$ e $\inf(f) = 0$

(ii) $g(x) = -x$



$\sup(g) = 1$ e $\inf(g) = -1$

(iii) $h(x) = x^2 - x, \forall x \in [-1, 1]$ $h(x) = x^2 - x$



$h\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

$\sup(f + g) = \sup(h) = 2 = \sup(f) + \sup(g)$ e

$\inf(f + g) = -\frac{1}{4} > \inf(f) + \inf(g) = 0 - 1 = -1.$

Conjecturas:

Será que se tem $\sup(f + g) \leq \sup(f) + \sup(g)$ e $\inf(f + g) \geq \inf(f) + \inf(g)$?

A resposta é afirmativa. Os exemplos anteriores, servem como motivação para o problema a seguir

Teorema 8.7

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Prove que:

$$(i) \sup (f + g) \leq \sup (f) + \sup (g)$$

$$(ii) \inf (f + g) \geq \inf (f) + \inf (g),$$

**Fato que Ajuda**

Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, tais que: $A \subset B$. Prove que:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Demonstração

(i) Sejam $A = f([a, b])$, $B = g([a, b])$ e $C = \{(f + g)(x) = f(x) + g(x); x \in [a, b]\}$, então, $C \subset A + B$. Daí, vem:

$$\sup (C) = \sup (f + g) \leq \sup (A + B) = \sup (A) + \sup (B) = \sup (f) + \sup (g).$$

Portanto,

$$\sup (f + g) \leq \sup (f) + \sup (g).$$



Procedendo de forma análoga, obtemos:

(ii)

$$\inf (C) = \inf (f + g) \geq \inf (A + B) = \inf (A) + \inf (B) = \inf (f) + \inf (g).$$

De sorte que:

$$\inf (f + g) \geq \inf (f) + \inf (g).$$

**Problema 8.1**

Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Prove que:

(i) $f.g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada

(ii) $(f.g)(X) \subset f(X).g(X)$

(iii) Conclua daí que: se f e g forem ambas positivas, tem-se:

$$\sup (f.g) \leq \sup (f) . \sup (g).$$

e

$$\inf (f.g) \geq \inf (f) . \inf (g).$$

Demonstração

(i) Com efeito, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas, então, existem $M_1, M_2 > 0$, tais que:

$$\begin{cases} |f(x)| \leq M_1, \forall x \in X \\ \text{e} \\ |g(x)| \leq M_2, \end{cases}$$

Como $|(f.g)(x)| = |f(x).g(x)| = |f(x)| . |g(x)|$ segue-se que:

$$|(f.g)(x)| = |f(x)| . |g(x)| \leq M_1.M_2, \forall x \in X.$$

De sorte que $f.g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada.



(ii) Queremos mostrar que: $(f.g)(X) \subset f(X).g(X)$

Seja $z \in (f.g)(X)$, então, existe $x \in X$, de modo que:

$$z = (f.g)(x) = f(x).g(x), \forall x \in X \implies f(x).g(x) \in f(X).g(X).$$

Logo,

$$(f.g)(X) \subset f(X).g(X).$$

■

(iii) Sejam $A = f(X)$, $B = g(X)$ e $C = \{(f.g)(X) = f(x) + g(x); x \in X\}$,

então, $C \subset A.B$. Daí, vem:

$$\sup(C) = \sup(f.g) \leq \sup(A.B) = \sup(A) \cdot \sup(B) = \sup(f) \cdot \sup(g).$$

Portanto,

$$\sup(f.g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g).$$

■

Procedendo de forma análoga, obtemos:

(ii)

$$\inf(C) = \inf(f + g) \geq \inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B) = \inf(f) + \inf(g).$$

De sorte que:

$$\inf(f + g) \geq \inf(f) + \inf(g).$$

■

Problema 8.2

Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas. Prove que:

(i) $f.g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada

(ii) $(f.g)(X) \subset f(X).g(X)$

(iii) Conclua daí que: se f e g forem ambas positivas, tem-se:

$$\sup(f.g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g).$$

e

$$\inf(f.g) \geq \inf(f) \cdot \inf(g).$$

Demonstração

(i) Com efeito, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas, então, existem $M_1, M_2 > 0$, tais que:

$$\begin{cases} |f(x)| \leq M_1, \forall x \in X \\ \text{e} \\ |g(x)| \leq M_2, \end{cases}$$

Como $|(f.g)(x)| = |f(x).g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$ segue-se que:

$$|(f.g)(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M_1.M_2, \forall x \in X.$$

De sorte que $f.g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada.

■

(ii) Queremos mostrar que: $(f.g)(X) \subset f(X).g(X)$

Seja $z \in (f.g)(X)$, então, existe $x \in X$, de modo que:

$$z = (f.g)(x) = f(x).g(x), \forall x \in X \implies f(x).g(x) \in f(X).g(X).$$

Logo,

$$(f.g)(X) \subset f(X).g(X).$$

■

(iii) Sejam $A = f(X)$, $B = g(X)$ e $C = \{(f.g)(X) = f(x) + g(x); x \in X\}$,

então, $C \subset A.B$. Daí, vem:

$$\sup(C) = \sup(f.g) \leq \sup(A.B) = \sup(A) \cdot \sup(B) = \sup(f) \cdot \sup(g).$$

Portanto,

$$\sup(f.g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g).$$

■

Procedendo de forma inteiramente, análoga, tem-se:

$$\inf(f.g) \geq \inf(f) \cdot \inf(g).$$

Fatos que Ajudam (no próximo problema)

Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos

$$A.B = \{x.y; x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

se A e B forem limitados, então, $A.B$ é limitado, sendo

$$(i) \sup(A.B) = \sup(A) \cdot \sup(B) \quad (ii) \inf(A.B) = \inf(A) \cdot \inf(B)$$

Problema 8.3

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ função limitada, tal que: $f > 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Prove que:

$$\sup(f^2) = [\sup(f)]^2.$$

e

$$\inf(f^2) = [\inf(f)]^2.$$

Demonstração

Com efeito, sabemos que: $\sup(A.B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$, onde:

A, B conjuntos de números reais positivos. Então, temos: $A = B = f([a, b])$

$$\sup(A^2) = [\sup(A)]^2$$

e

$$\sup(f^2) = [\sup(f)]^2.$$

Procedendo de forma inteiramente análoga vem: $\inf(A^2) = [\inf(A)]^2$

De sorte que: $\inf(f^2) = [\inf(f)]^2.$

■

Capítulo 9 Apêndice E

Espaço Métrico

Definição 9.1

Um espaço métrico é um par (M, d) , onde:

M é um conjunto não vazio e d é a métrica (função distância)

em M , dada por: $d : M \times M \longrightarrow [0, +\infty)$ satisfazendo as seguintes

condições: $\forall x, y, z \in M$, tem-se:

(i) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x)$, $\forall x, y, z \in M$ (Desigualdade triangular)



Exemplo 9.1

$M = \mathbb{R}$ e $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ a função dada por:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Demonstração

(i) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$; $d(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$;

(ii) $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$;

(iii) $d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Logo,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$



Exemplo 9.2

Prove que: d é uma métrica, onde: $\mathfrak{B}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ limitada}\}$ e a função

$d : \mathfrak{B}(X, \mathbb{R}) \times \mathfrak{B}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty)$ é definida por:

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Demonstração

(i) $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq 0$;

$$d(f, g) = 0 \iff \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = 0 \iff |f(x) - g(x)| = 0$$

$$\iff f(x) - g(x) = 0 \iff f(x) = g(x), \forall x \in X;$$

(ii)

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in X} |-[g(x) - f(x)]|$$

$$= \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| = d(g, f);$$

(iii)

$$\begin{aligned}
d(f, g) &= \sup_{x \in X} |[f(x) - h(x)] + [h(x) - g(x)]| \\
&\leq \sup_{x \in X} [|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|] \\
&= \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)| = d(f, h) + d(h, g).
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Portanto, d é uma métrica. ■*Antes de passamos ao próximo exemplo, vejamos um problema auxiliar:***Problema Auxiliar:**Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que:

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Mostre que: $f \equiv 0, \forall x \in [0, 1]$.**Demonstração**

Suponhamos que: para algum $x_0 \in (0, 1) : f(x_0) > 0$, então, existe $\delta > 0$, tal que: $f(x) > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &> \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{f(x_0)}{2} dx \\
&= \frac{f(x_0)}{2} [x_0 + \delta - (x_0 - \delta)] \\
&= \frac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta > 0.
\end{aligned}$$

Absurdo! Pois, por hipótese, tem-se: $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Analogamente, supondo que: para algum $x_0 \in (0, 1) : f(x_0) < 0$, então, existe $\delta > 0$, tal que: $f(x) < 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &< \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{f(x_0)}{2} dx \\
&= \frac{f(x_0)}{2} [x_0 + \delta - (x_0 - \delta)] \\
&= \frac{f(x_0)}{2} \cdot 2\delta < 0.
\end{aligned}$$

Absurdo! Visto que, por hipótese, tem-se: $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

De sorte que:

$$f \equiv 0, \forall x \in [0, 1].$$

■

Exemplo 9.3

Seja $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua}\}$ e seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ contínua. defina

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx.$$

Mostre que: (X, d) é uma métrica.

Demonstração

(i) Com efeito, $\varphi(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ e $|f(x) - g(x)| \geq 0$, então tem-se:

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx \geq 0.$$

Além disso,

$$d(f, g) = 0 \iff \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx = 0.$$

Daí, obtemos:

$$\iff |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) = 0, \forall \varphi(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$$

$$|f(x) - g(x)| = 0 \iff f(x) - g(x) = 0 \iff f(x) = g(x), \forall x \in [0, 1];$$

(ii)

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)| \cdot \varphi(x) dx = d(g, f).$$

(iii)

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx \\ &\leq \int_0^1 [|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|] \cdot \varphi(x) dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - h(x)| \cdot \varphi(x) dx + \int_0^1 |h(x) - g(x)| \cdot \varphi(x) dx \\ &= d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

Dito de outro modo,

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Logo, d é uma métrica.

■

Exemplo 9.4

Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios da reta, tais que:

$$d_H(A, B) = \sup \{ |\sup A - \sup B|, |\inf A - \inf B| \}.$$

Verifique se : d é uma métrica.

Demonstração

(i) Com efeito,

$$d_H(A, B) = \sup \{ |\sup A - \sup B|, |\inf A - \inf B| \} \geq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d_H(A, B) = \sup \{ |\sup A - \sup B|, |\inf A - \inf B| \} &= 0 \\ \iff \begin{cases} |\sup A - \sup B| = 0 \\ \text{e} \\ |\inf A - \inf B| = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \sup A - \sup B = 0 \\ \text{e} \\ \inf A - \inf B = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Equivalentemente, vem:

$$\iff \begin{cases} \sup A = \sup B \\ \text{e} \\ \inf A = \inf B. \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \sup \{ |\sup A - \sup B|, |\inf A - \inf B| \} \\ &= \sup \{ |-(\sup B - \sup A)|, |-(\inf B - \inf A)| \} \\ &= \sup \{ |\sup B - \sup A|, |\inf B - \inf A| \} \\ &= d_H(B, A). \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \sup \{ |\sup A - \sup B|, |\inf A - \inf B| \} \\ &= \sup \{ |\sup A - \sup C + \sup C - \sup B|, |\inf A - \inf C + \inf C - \inf B| \} \\ &\leq \sup \{ |\sup A - \sup C| + |\sup C - \sup B|, |\inf A - \inf C| + |\inf C - \inf B| \} \\ &= \sup \{ |\sup A - \sup C|, |\inf A - \inf C| \} + \sup \{ |\sup C - \sup B|, |\inf C - \inf B| \} \\ &= d_H(A, C) + d_H(C, B). \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B).$$

Portanto, d é uma métrica. ■

Exemplo 9.5

Mostre que: $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual se, e somente se, $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ em $\mathbb{R}$ com métrica usual.

Demonstração

($\implies$) Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$d((x_n, y_n), (x, y)) < \varepsilon.$$

Ou de forma equivalente, temos:

$$\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Agora, observe que:

$$|x_n - x| = \sqrt{(x_n - x)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon,$$

e de forma análoga, tem-se:

$$|y_n - y| = \sqrt{(y_n - y)^2} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$|x_n - x| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \text{ e } |y_n - y| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Dito de outro modo, vem:

$$x_n \longrightarrow x \text{ e } y_n \longrightarrow y.$$

em $\mathbb{R}$ com métrica usual. ■

($\impliedby$) Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0 \text{ e } |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0.$$

Agora,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} &\leq \sqrt{(x_n - x)^2} + \sqrt{(y_n - y)^2} \\ d((x_n, y_n), (x, y)) &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

De sorte que: $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual. ■

Alfabeto Grego: $A \ \alpha \ (\textit{alfa})$ $B \ \beta \ (\textit{beta})$ $\Gamma \ \gamma \ (\textit{gama})$ $\Delta \ \delta \ (\textit{delta})$ $E \ \epsilon \ (\textit{epsilon})$ $Z \ \zeta \ (\textit{zeta})$ $H \ \eta \ (\textit{eta})$ $\Theta \ \theta \ (\textit{teta})$ $I \ \iota \ (\textit{iota})$ $K \ \kappa \ (\textit{capa})$ $\Lambda \ \lambda \ (\textit{lambda})$ $M \ \mu \ (\textit{mu})$ $N \ \nu \ (\textit{nu})$ $\Xi \ \xi \ (\textit{ksi})$ $O \ \omicron \ (\textit{omicron})$ $\Pi \ \pi \ (\textit{pi})$ $P \ \rho \ (\textit{rô})$ $\Sigma \ \sigma \ (\textit{sigma})$ $\Upsilon \ \tau \ (\textit{tal})$ $Y \ \upsilon \ (\textit{upsilon})$ $\Phi \ \phi \ (\textit{fi})$ $X \ \chi \ (\textit{chi})$ $\Psi \ \psi \ (\textit{phi})$ $\Omega \ \omega \ (\textit{omega})$

Bibliografia

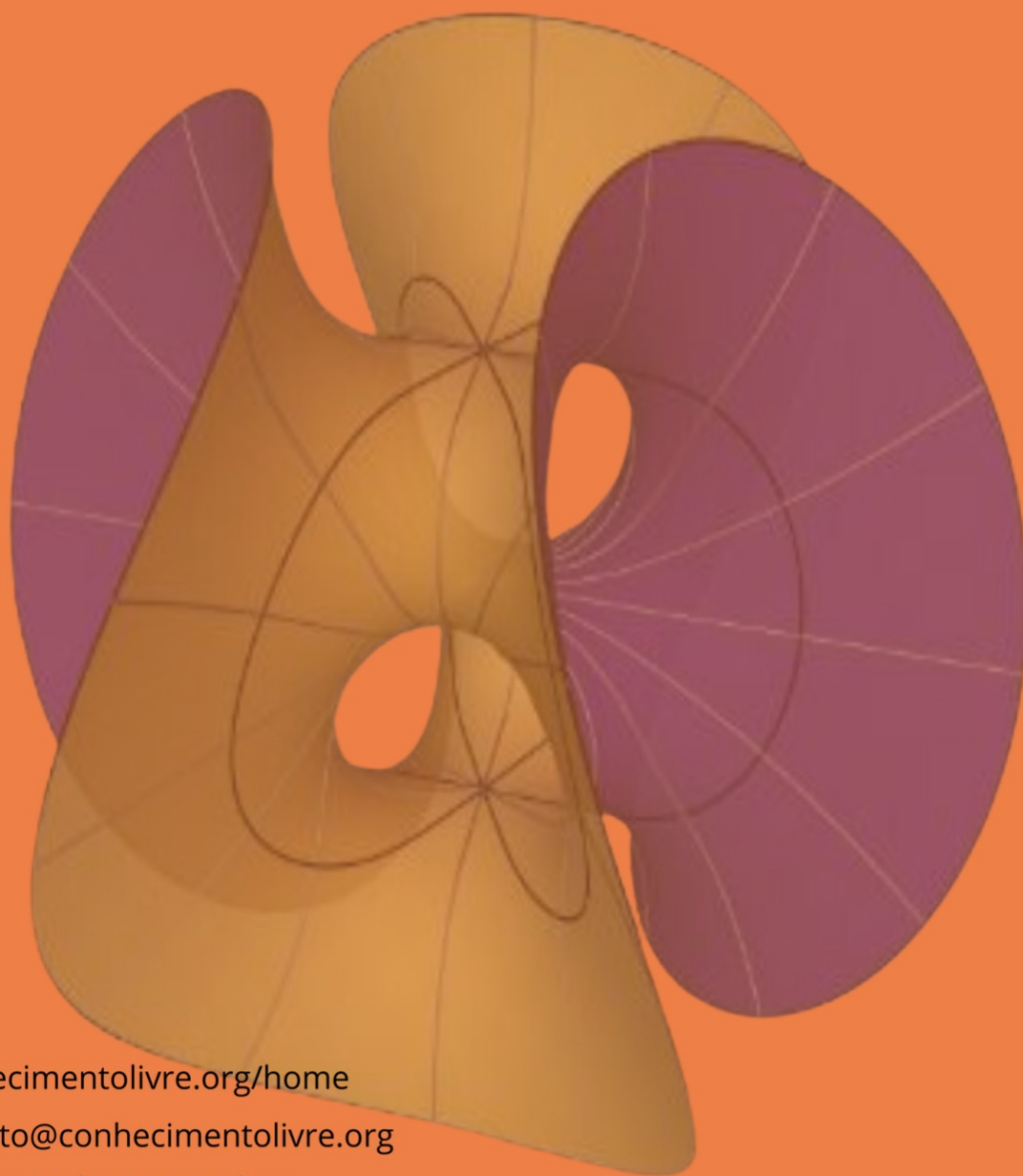
- [1] De Moraes Filho, Daniel Cordeiro. *Um Convite à Matemática*, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3ª Edição, SBM 2016.
- [2] Bartle, Robert G. *Introduction to Real Analysis*. New York, J. Wiley, 2019
- [3] Guidorizzi, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo*, vol.1, 6ª Edição, RJ: LTC, 2018
- [4] Lima, Elon Lages. *Matemática e Ensino*, Coleção do Professor de Matemática, 4ª Edição, RJ, 2017
- [5] De Moraes Filho, Daniel Cordeiro. *Manual de Redação Matemática*, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2ª Edição, SBM 2018
- [6] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, vol. 1, Projeto Euclides, SBM, 21ª Edição, IMPA, 2019
- [7] Aragona, Jorge. *Números Reais*, Texto Universitário do IME-USP, 2010
- [8] Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2004
- [9] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm, em 17 de março às 12h e 25min, 2023
- [10] Figueiredo, D. G. *Análise I*, Livros Técnicos Científicos, 2016
- [11] Ávila, Geraldo. *Introdução à Análise Matemática*, Editora Edgar Blücher Ltda, 1993
- [12] Boyer, Carl B. *História da Matemática*; tradução Elza F. G., SP Edgard Blucher, 1974
- [13] Bartle, Robert G. *The Elements of Real Analysis*. New York, J. Wiley, 1964
- [14] Figueiredo, D.G. *Análise I*, RJ, LTC. 2ª edição, 1996
- [15] Lima, E.L. *Análise Real*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993
- [16] Gonçalves, Adilson. *Introdução à álgebra*. 4ª Edição, Projeto Euclides, IMPA, 1999
- [17] Koblitz, Neal. *A Course in Number Theory and Cryptography*, Springer 2ª Edição, 1994.
- [18] Lequain, Yves e Garcia, Arnaldo. *álgebra: Um curso de Introdução*, Série II, Projeto Euclides, IMPA, 2020
- [19] Matos, Marivaldo Pereira, *Séries e Equações Diferenciais*, Editora Ciência Moderna, 2017
- [20] Neves, Wladimir Augusto, *Uma Introdução à Análise Real*, RJ-Editora UFRJ, 2014.
- [21] Bartle, Robert G - *Elementos de Análise Real*. Editora Campos, 2014.
- [22] http://clubes.obmep.org.br/blog/b_a-l-cauchy/, em 01 de junho 2023
- [23] Loibe, Gilberto Francisco-*Introdução à topologia-SP*: Editora UNESP, 2007.
- [24] Silva, Cícero José da, Soares, Willames de Albuquerque, Galdino, Sérgio Mário Lins. *Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos / Piracanjuba-GO* Editora Conhecimento Livre, 2022

- [25] Silva, Cícero José da, Soares, Willames de Albuquerque, Galdino, Sérgio Mário Lins. *Análise Real: Introdução as Majorações vol.I, Piracanjuba-GO*
- [26] Silva, Cícero José da, Soares, Willames de Albuquerque, Galdino, Sérgio Mário Lins. *Análise Real: Introdução as Majorações vol. II, Piracanjuba-GO*

ANÁLISE REAL: INTRODUÇÃO AS MAJORAÇÕES

VOLUME III

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros



conhecimentolivre.org/home



contato@conhecimentolivre.org



[editoraconhecimentolivre](https://www.instagram.com/editoraconhecimentolivre)



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE