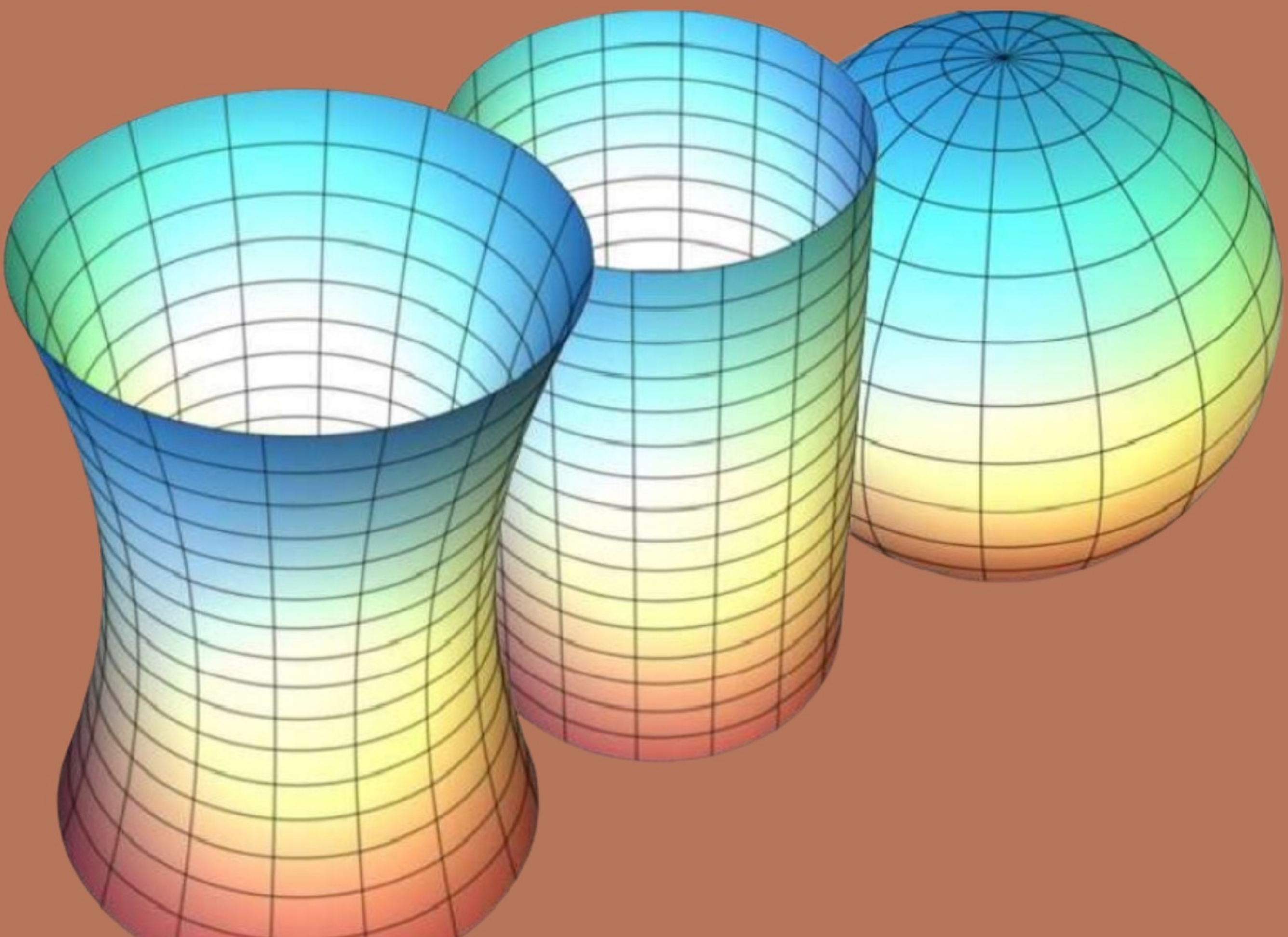
Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

ANÁLISE REAL:
INTRODUÇÃO AS MAJORAÇÕES

VOLUME II



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

Análise Real: Introdução as Majorações

2ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

2ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586A Análise Real: Introdução as Majorações

/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. Jornandes Dias da Silva. Juan Carlos Oliveira de Medeiros. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2023

153 f.: il
DOI: 10.37423/2023.edcl788
ISBN: 978-65-5367-368-7
Modo de acesso: World Wide Web
Incluir Bibliografia

1. majorações 2. sequência-de-cauchy 3. intervalos-encaixantes 4. -aspectos-topológicos-da-reta 5. esboços-gráficos-de-funções- I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Silva, Jornandes Dias da V. Medeiros, Juan Carlos Oliveira de VI. Título

CDU: 510

https://doi.org/10.37423/2023.edcl788

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO
2023

doi 10.37423/2023.edcl788

Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuíram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha) e o Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- Não estaria sendo justo, se não destacasse o nosso amigo Prof. Ms. Roberto Lessa, ao longo de mais de três décadas lecionando Álgebra Linear, conversando sobre: como abordaríamos determinados temas, ofertou diversas sugestões, correções e orientações no tocante a escrita.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões ao longo dos anos.
- à UPE, pelo apoio.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais, Filhos, Esposas,Todos os familiares e Ao grande Mestre Olavo Otávio Nunes (In Memoriam)

Prefácio

Neste segundo volume de em Análise Real, assim como já foi falado no primeiro volume, é fundamental mostrar e conjecturar como se constrói algumas majorações, os estudantes de Análise Real conseguem resolver as questões iniciais dos livros didáticos, entretanto se deparam com alguns exercícios mais elaborados, que não conseguem solucionar. Isto ocorre desde os temas iniciais, como em temas mais aprofundados. Tendo em vista que poucos materiais ou quase nada, se tem no tocante as construções de majorações em Análise Real estão disponíveis para os estudantes nesta situação, foi escrito este livro com o propósito de apresentar as majorações antes de se passar as demonstrações de problemas não triviais de Análise Real. Inicialmente, apresentamos a resolução de problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um Letramento Matemático de Mentalidade Crescente, Criativa e Flexível em temas básicos de números racionais como um corpo ordenado, até abordarmos temas não triviais como o corpo ordenado completo de números reais, supremos e ínfimos, ressaltando toda uma preparação das majorações para quando se for demonstrar propriedade operacionais com limites de sequencias, funções e continuidades por definições de épsilon e delta. Vale a pena salientar que buscamos dentro do possível, resolver os problemas com todos os passos, detalhando os procedimentos de majorantes, antes de fazer as demonstrações. Em alguns casos, inclusive, fazendo comentários matemáticos sobre o que está sendo realizado. Assim, o texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho (ou em grupo), de forma autônoma e com segurança, conferindo não apenas os resultados, mas todo o desenvolvimento lógico operacional. Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa uma certo cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, correções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endereços:

cjs@poli.br
was@poli.br
galdino@poli.br
jornandesdias@poli.br
juca@ufc.br

Recife, 21 de julho de 2023

Conteúdo

Capítulo 1 - Alguns Aspectos topológicos em $\mathbb{R}$

Uma expressão popular de autoria do filósofo chinês Confúcio
(Chiu Kung) 552 a.C.- 489 a.C.
"Uma figura vale mais que mil palavras"

(a) Vasiliki Laina (University of California, Berkeley)

(b) Michelle Wilkerson (University of California, Berkeley)

O cenário da educação básica está demorando para reconhecer as mudanças que a explosão de dados causou à sociedade. Não estamos preparando nossos alunos da melhor maneira para navegar com sucesso no século XXI.
(Wilkerson & Laina, 2017)

1.1 Alguns Aspectos Topológicos da Reta

Na topologia, a reta é um exemplo simples, mas importante, de espaço topológico. Vamos discutir os aspectos topológicos da reta em termos de conjuntos abertos, conjuntos fechados, fronteira e fecho.

Conjuntos Abertos: Um conjunto é considerado aberto na reta se, para cada ponto do conjunto, existe um intervalo em torno desse ponto totalmente contido no conjunto. Por exemplo, o intervalo aberto $(0, 1)$ é um conjunto aberto na reta, pois para qualquer ponto dentro do intervalo, podemos encontrar um intervalo menor ao redor desse ponto que ainda está totalmente contido no intervalo $(0, 1)$.

Conjuntos Fechados: Um conjunto é considerado fechado na reta se ele contém todos os seus pontos de fronteira. Em outras palavras, um conjunto fechado é o complemento de um conjunto aberto. Por exemplo, o intervalo fechado $[0, 1]$ é um conjunto fechado na reta, pois inclui todos os seus pontos de fronteira (0 e 1). Fronteira: A fronteira de um conjunto é o conjunto de pontos que estão simultaneamente em seu interior e em seu complemento. Na reta, a fronteira de um conjunto é o conjunto de pontos que pertencem ao conjunto fechado e não pertencem ao conjunto aberto correspondente. Por exemplo, a fronteira do intervalo $(0, 1)$ é o conjunto $\{0, 1\}$, pois esses pontos estão no intervalo fechado $[0, 1]$ (complemento do conjunto aberto) e não estão no intervalo aberto $(0, 1)$. Fecho: O fecho de um conjunto é o menor conjunto fechado que contém todos os pontos do conjunto. Na reta, o fecho de um conjunto é obtido adicionando os pontos de fronteira do conjunto ao conjunto original. Por exemplo, o fecho do intervalo aberto (0, 1) é o intervalo fechado $[0, 1]$, pois inclui todos os pontos do intervalo original e seus pontos de fronteira.

Em resumo, na reta, conjuntos abertos são intervalos abertos (como $(0, 1)$), conjuntos fechados são intervalos fechados (como $[0, 1]$), a fronteira de um conjunto é formada pelos pontos que estão simultaneamente no conjunto fechado e não no conjunto aberto correspondente, e o fecho de um conjunto é obtido adicionando os pontos de fronteira ao conjunto original.

Revisitando módulo ou valor absoluto e algumas propriedades

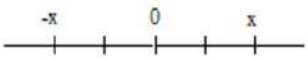
Módulo ou Valor Absoluto

Definição 1.1

Seja x um número real. O módulo de x, denotado por $|x| = d\,(0, X)$, é dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

é a distância da origem O ao ponto X na reta ♣



Exemplo 1.1

(i) $|5| = 5$ $\quad (ii)$ $|3 - \pi| = \pi - 3$; Sabemos que: $\pi \simeq 3,14159...$

$$(iii)\ |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x - 1 \geq 0 \\ -(x-1), & x - 1 < 0 \end{cases} \iff |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}.$$

Consequências

1. (i) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. $\quad (ii)$ $\sqrt{x^2} = |x|$

Demonstração

1^o Caso:

$$x \geq 0 \Longrightarrow |x|^2 = |x|\,.\,|x| = x.x = x^2.$$

2^o Caso:

$$x < 0 \Longrightarrow |x|^2 = |x|\,.\,|x| = (-x)\,.\,(-x) = x^2,$$

dos casos (1) e (2), segue-se:

$$|x|^2 = x^2.$$

■

Decorre daí (ii)

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

■

2. (i) $|x.y| = |x|\,.\,|y|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$. (ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.

(iii) $\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|\,.$

$(i)\ |x.y| = |x|\,.\,|y|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned} |x.y|^2 &= (x.y)^2 = x^2.y^2 = |x|^2\,.\,|y|^2 \\ &\Longrightarrow \sqrt{|x.y|^2} = \sqrt{|x|^2\,.\,|y|^2} \\ &= \sqrt{|x|^2}.\sqrt{|y|^2} = |x|\,.\,|y|\,. \end{aligned}$$

■

$(ii)\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0.$

Demonstração

Basta proceder de forma análoga ao caso anterior, vejamos:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{y}\right|^2 &= \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{|x|^2}{|y|^2} \\ &\Longrightarrow \sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|^2} = \sqrt{\frac{|x|^2}{|y|^2}} = \frac{|x|}{|y|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

■

(iii) Usando o método de indução finita (veja a referência [1])

Demonstração

(a) Para $n = 2$, temos:

$$\left|\prod_{j=1}^{n=2} x_j\right| = |x_1.x_2| = |x_1|\,.\,|x_2| = \prod_{j=1}^{n=2} |x_j|\,.$$

Logo,

$$|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$$

(b) Suponha válido para n (hipótese de indução finita), isto é,

$$\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = |x_1.x_2 \ldots x_n| = |x_1|\,.\,|x_2| \ldots |x_n| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|\,.$$

Então, tem-se:

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} x_j\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} x_j.x_{n+1}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right|.\,|x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|\,.\,|x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|\,,$$

e, portanto,

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} x_j\right| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|\,.$$

■

3. (i) $|x| = a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$ (ii) $|x| \leq a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$

(iii) $|x| \geq a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$ (iv) $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|\,.$

(i) $|x| = a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$

Demonstração

De fato,

$$\begin{aligned} |x| &= a \Longleftrightarrow |x|^2 = x^2 = a^2 \Longleftrightarrow x^2 - a^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-a)\,.\,(x+a) = 0 \Longleftrightarrow x = -a \text{ ou } x = a. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x-1| = \pi$$

Solução

Basta notar que:

$$|x-1| = \pi \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \pi \\ ou \\ x - 1 = -\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 1 \\ ou \\ x = -\pi + 1. \end{cases}$$

■

(ii) $|x| \leq a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$

Demonstração

Por definição, temos: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

1^o Caso: $x \geq 0:$

$$|x| = x \leq a \tag{1}$$

2^o Caso: $x < 0:$

$$|x| = -x \leq a \Longleftrightarrow x \geq -a \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$\begin{cases} x \leq a \\ \text{e} \\ x \geq -a \end{cases} \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

■

Exemplo 1.3

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x-1| \leq 7$$

Solução

Com efeito,

$$|x-1| \leq 7 \Longleftrightarrow -7 \leq x-1 \leq 7 \Longleftrightarrow -6 \leq x \leq 8.$$

■

$$(iii)\ |x| \geq a,\ a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{array}\right.$$

Demonstração

Procedendo de forma análoga ao item anterior, tem-se:

$$|x| = \left\{\begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array}\right.$$

1^o Caso: $x \geq 0$:

$$|x| = x \geq a \tag{1}$$

2^o Caso: $x < 0$:

$$|x| = -x \geq a \Longleftrightarrow x \leq -a, \tag{2}$$

Assim, dos casos (1) e (2) segue-se:

$$\left\{\begin{array}{c} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a. \end{array}\right.$$

■

Outro modo de provar a mesma afirmação:

Uma forma elegante e simples de demonstrar, é descrita por:

$$\begin{array}{rcl} |x| & \geq & a \Longleftrightarrow |x|^2 = x^2 \geq a^2 \Longleftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \\ & \Longleftrightarrow & (x-a).(x+a) \geq 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{array}\right. \end{array}$$

■

Exemplo 1.4

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que: $|x+2| \geq 10$

Solução

Basta proceder de forma inteiramente análoga, para se obter:

$$|x+2| \geq 10 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2 \geq 10 \\ ou \\ x+2 \leq -10 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq 8 \\ ou \\ x \leq -12. \end{array}\right.$$

■

(iv) $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|$.

Demonstração

à luz da definição, temos:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1^o Caso: $x \geq 0$:

$$|x| \geq x \tag{1}$$

2^o Caso: $x < 0$:

$$|x| \geq -x \Longleftrightarrow -|x| \leq x \tag{2}$$

Portanto, decorre de (1) e (2) que:

$$\begin{cases} |x| \geq x \\ \quad \text{e} \\ -|x| \leq x. \end{cases} \Longleftrightarrow -|x| \leq x \leq |x|.$$

■

4. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$(i) \;\; |x+y| \leq |x| + |y| \qquad (ii) \;\; |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$(iii) \;\; ||x| - |y|| \leq |x-y| \quad (iv) \;\; \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Demonstração

(i)

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x|.|y| + y^2 \\ |x+y|^2 &\leq |x|^2 + 2|x|.|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2 \\ &\Longleftrightarrow |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{|x+y|^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

■

(Conhecido como desigualdade triangular, ou seja, em qualquer triângulo qualquer lado é sempre menor ou igual a soma dos outros dois).

Demonstração

(ii)

Basta observar que: $|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$ e, portanto,

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

■

Demonstração

(iii)

Basta observar que:

$$\left\{\begin{array}{c} |x|-|y|\leq|x-y| \\ \text{e} \\ |y|-|x|\leq|x-y| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} |x|-|y|\leq|x-y| \\ \text{e} \\ -(|x|-|y|)\leq|x-y| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} |x|-|y|\leq|x-y| \\ \text{e} \\ |x|-|y|\geq-|x-y| \end{array}\right.$$

$$\iff -|x-y|\leq|x|-|y|\leq|x-y| \iff ||x|-|y||\leq|x-y|$$

e, portanto,

$$||x|-|y||\leq|x-y|\,.$$

■

Demonstração

(iv)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,.$$

Indução Finita sobre n:

Para $n=2$, temos:

$$\left|\sum_{j=1}^{2} x_j\right| = |x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2| = \sum_{j=1}^{2} |x_j|\,.$$

Portanto

$$\left|\sum_{j=1}^{2} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{2} |x_j|\,.$$

Suponha válido para n, então falta mostrar para $n+1$.

Vejamos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right| &= |x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}| \leq |x_1+x_2+\ldots+x_n|+|x_{n+1}| \\ &\leq |x_1+x_2+\ldots+x_n|+|x_{n+1}| \\ &\leq |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|+|x_{n+1}| = \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|\,. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|\,.$$

(Conhecido como desigualdade triangular generalizada) ■

Exercícios: Pensando Um Pouco Mais

1. Prove que: $|f(x) - f(2)| \leq 20.\,|x-2|$ para $0 \leq x \leq 3$;

Demonstração

Observe que:

$$|f(x) - f(2)| = \left|x^3 + x - 10\right| = \left|(x-2).\left(x^2 + 2x + 5\right)\right|.$$

Agora, $0 \leq x \leq 3 \Longrightarrow |x| \leq 3$, por conseguinte, obtemos:
$\left|(x-2).\left(x^2+2x+5\right)\right| \leq |x-2|.\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 20\,|x-2|,$
Visto que: $\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 3^2 + 2.3 + 5 = 20.$
Logo,

$$|f(x) - f(2)| \leq 20.\,|x-2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3.$$

■

2. Sejam y, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,
tais que: $\xi > 0$ e $y_0 \neq 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi\,|y_0|^2}{2}\right\}$$

$y \neq 0$, prove que:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

Vejamos *algumas majorações* antes de fazer a demonstração:

$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y||y_0|}$ e $|y_0| - |y| \leq |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow$
$|y| - |y_0| > -\frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow |y| > \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$
Assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| &= \frac{|y_0 - y|}{|y|\,|y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2}\,|y_0 - y| < \frac{2}{|y_0|^2}\frac{\xi\,|y_0|^2}{2} = \xi \\ &\Longrightarrow \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.\end{aligned}$$

Demonstração
Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi|y_0|^2}{2}\right\} > 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}. \tag{1}$$

$$|y - y_0| < \frac{\xi\,|y_0|^2}{2} \Longrightarrow \frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \xi. \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\frac{1}{|y|}\frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \frac{2}{|y_0|}\xi.$$

De sorte que:

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right|<\xi.$$

■

3. Seja f uma função dada por:

$$f(x)=x+\frac{1}{x}.$$

Prove que:
(i) $|f(x)-2|\leq\left(1+\frac{1}{x}\right).|x-1|$ para $x>0$;
(ii) $|f(x)-2|\leq 3|x-1|$ para $x>\frac{1}{2}$;
(iii) $f(x)\geq 2$, para todo $x>0$.

Demonstração
(i) Com efeito,

$$\begin{aligned}|f(x)-2| &= \left|x+\frac{1}{x}-2\right|=\left|\frac{x^2-2x+1}{x}\right|\Longrightarrow\left|\frac{x^2-2x+1}{x}\right|\\ &= \left|\frac{(x-1)^2}{x}\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right|.|x-1|\leq\left(\frac{|x|+|1|}{|x|}\right).|x-1|\end{aligned}$$

Como $x>0$, segue-se que:

$$|f(x)-2|\leq\left(1+\frac{1}{x}\right).|x-1|.$$

(ii) Para $x>\frac{1}{2}$, então, $\frac{1}{x}<2$ e, portanto, $1+\frac{1}{x}<3$.
Daí, e do item anterior, obtemos:

$$|f(x)-2|\leq 3|x-1|.$$

(iii) Basta revisitar a desigualdade entre as médias: geométrica e aritmética, obtendo:

$$\sqrt{x.\frac{1}{x}}\leq\frac{x+\frac{1}{x}}{2},\ x>0.$$

Logo,

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\geq 2.$$

■

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função, tal que:$f(x)=4x^3-x-1$. Calcule em função de "a"e "b"o seguinte quociente

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b};a\neq b.$$

Conclua daí que, se $|a|<2$ e $|b|<2$, tem-se:

$$|f(a)-f(b)|<49.|a-b|$$

Demonstração

Observe que:

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \left|4a^3 - a - 1 - \left(4b^3 - b - 1\right)\right| \\ &= \left|4\left(a^3 - b^3\right) - (a - b)\right| \\ &= \left|(a - b) . \left[4\left(a^2 + ab + b^2\right) - 1\right]\right| \\ &= |a - b| . \left|4\left(a^2 + ab + b^2\right) - 1\right| . \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\left|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right| = \left|4\left(a^2 + ab + b^2\right) - 1\right| . \tag{1}$$

Assim, como consequência da desigualdade triangular generalizada, temos:

$$\begin{aligned} \left|4\left(a^2 + ab + b^2\right) - 1\right| &\leq 4\left|a^2 + ab + b^2\right| + |-1| \\ &\leq 4\left[|a|^2 + |a| . |b| + |b|^2\right] + 1 \\ &< 4. \left[2^2 + 2.2 + 2^2\right] + 1 = 49. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\left|4\left(a^2 + ab + b^2\right) - 1\right| < 49. \tag{2}$$

Agora, substituindo (2) em (1) , obtemos:

$$\left|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right| = \left|4\left(a^2 + ab + b^2\right) - 1\right| < 49.$$

Por conseguinte, vem:

$$\left|\frac{f(a) - f(b)}{a - b}\right| < 49 \Longleftrightarrow |f(a) - f(b)| < 49 |a - b| .$$

De sorte que:

$$|f(a) - f(b)| < 49 |a - b| .$$

$\blacksquare$

1.2 A Vizinhança aberta de centro a e raio $\delta > 0$

Definição 1.2

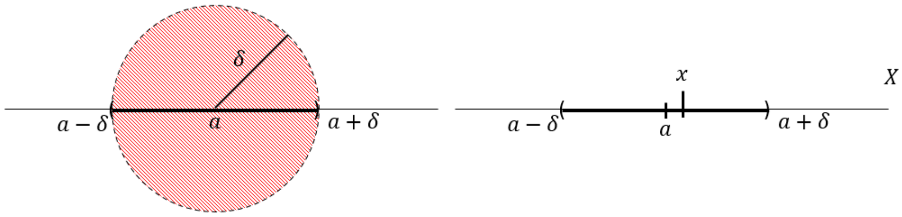
A Vizinhança aberta de centro "a"e raio $\delta > 0$, é dada por:

$$\mathbb{V}_{\delta}(a) = \{x \in \mathbb{X} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

♣

Observe que:

$$|x - a| < \delta \Longleftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Longleftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \Longleftrightarrow x \in (a - \delta, a + \delta).$$



1.3 Alguns aspectos topológicos da reta

Definição 1.3

Sejam $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. A posição relativa de a com respeito ao conjunto $\mathbb{X}$, quando é caracterizada por:

(i) *Existe $\delta > 0$; $\mathbb{V}_{\delta}(a) = (a - \delta, a + \delta) \subset \mathbb{X}$. Neste caso, a é ponto interior de $\mathbb{X}$.*

(ii) *Existe $\delta > 0$; $\mathbb{V}_{\delta}(a) = (a - \delta, a + \delta) \subset \mathbb{X}^{C} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{X}$. Neste caso, a é ponto exterior de $\mathbb{X}$.*

(iii) *Para todo $\delta > 0$; $\mathbb{V}_{\delta}(a) \cap \mathbb{X} \neq \phi$ e $\mathbb{V}_{\delta}(a) \cap \mathbb{X}^{C} \neq \phi$. Neste caso, a é um ponto fronteira de $\mathbb{X}$.*

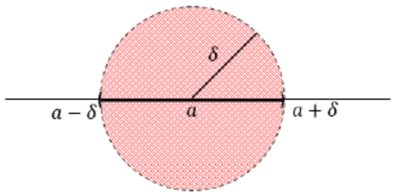
♣

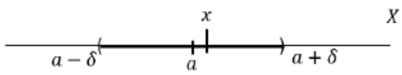
Notações:

(a) Interior de $\mathbb{X}$: $int(\mathbb{X})$ ou $\mathring{\mathbb{X}}$, isto é, $int(\mathbb{X}) = \mathring{\mathbb{X}} = \{x \in \mathbb{X} : x$ é ponto interior$\}$

(b) Exterior de $\mathbb{X}$: $ext(\mathbb{X})$

(c) Fronteira de $\mathbb{X}$: $\partial(\mathbb{X})$





Exemplo 1.5

Seja $\mathbb{X} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\} = [0,2)$. Ilustrativamente $a = 1$ é ponto interior de $\mathbb{X}$. De fato, dado $a = 1$ existe $\delta > 0$, escolha por exemplo $\delta = \frac{1}{2}$. Assim,

$$(a-\delta, a+\delta) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) \subset [0,2).$$

Afirmação: Todo ponto $a \in (0,2)$ é ponto interior de $\mathbb{X}$.
De fato, escolha $\delta = \frac{1}{2}\min\{a-0, 2-a\} > 0$, então, temos:

1^o Caso: Se $\delta = \frac{1}{2}\min\{a-0, 2-a\} = \frac{a}{2} > 0$, então, tem-se:

$$(a-\delta, a+\delta) = \left(a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right) \subset [0,2).$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2^o Caso: se $\delta = \frac{1}{2}\min\{a-0, 2-a\} = \frac{2-a}{2} = 1 - \frac{a}{2} > 0$, então, temos:

$$(a-\delta, a+\delta) = \left(a - \left(1 - \frac{a}{2}\right), a + \left(1 - \frac{a}{2}\right)\right) = \left(\frac{3a}{2} - 1, \frac{a}{2} + 1\right) \subset [0,2).$$

Agora, dos casos (1) e (2), segue-se que:

$$(a-\delta, a+\delta) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) \subset [0,2).$$

Exemplo 1.6

Vale a pena ressaltar que: $a = 0$ não é ponto interior de $\mathbb{X} = [0,2)$. com efeito, basta notar que: $\forall \delta > 0$, tem-se:

$$(a-\delta, a+\delta) = (0-\delta, 0+\delta) \not\subseteq [0,2).$$

$\blacksquare$

Definição 1.4

Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. *Dizemos que* $\mathbb{X}$ *é um conjunto aberto, quando:*

$$\mathbb{X} = int\,(\mathbb{X})\,.$$

Consequentemente, $\mathbb{X}$ *é aberto se,e somente se,*

$$\forall x_0 \in \mathbb{X} : \exists \delta_{x_0} > 0, \text{ tal que: } (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \subset \mathbb{X}.$$

mudando o linguajar, podemos dizer que:
Um conjunto aberto é estável em relação a pontos próximos. ♣

Exemplo 1.7

O conjunto $\mathbb{X} = [0, 2)$ não é aberto, pois, $0 \in \mathbb{X} = [0, 2)$, mas, $0 \notin int\,(\mathbb{X})$ 0 não é ponto interior.

Exemplo 1.8

A reta real é um conjuto aberto, isto é, $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.
De fato,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : \exists \delta_{x_0} > 0 \;\; (\text{De fato, qualquer } \delta > 0\,)\,, \text{ tal que: } \; (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \subset \mathbb{R}.$$

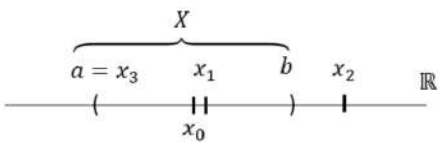
visto que: tanto $(x_0 - \delta_{x_0}) \in \mathbb{R}$ como $(x_0 + \delta_{x_0}) \in \mathbb{R}$.

1.3.1 Classificação topológica dos subconjuntos de $\mathbb{R}$

1 Conjunto aberto: $\mathbb{X}$ é aberto, quando: $\mathbb{X} = int\,(\mathbb{X})$.
2 Conjunto fechado: $\mathbb{X}$ é fechado, quando: $\partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X}$.

Fato: $\mathbb{X}$ é aberto $\iff$ O conjunto complementar de $\mathbb{X}$ igual a $\mathbb{X}^C$ é fechado.

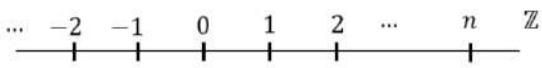
Ilustrando um conjunto aberto X, ponto exterior e ponto fronteira de um conjunto X dado da reta



$x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{X} = \text{ext}\,(\mathbb{X})$
$x_1 \in \text{int}\,(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$
$x_3 = a, b \in \partial\,(\mathbb{X})$ =fronteira de $\mathbb{X}$.

Exemplo 1.9

int $(\mathbb{Z}) = \phi$; [$\mathbb{V}_\delta\,(n)$ contém algum ponto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}$ pela densidade]



$$\mathbb{V}_\delta\left(n\right)\begin{cases} \not\subset \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \notin \mathbb{Z}, \forall\delta > 0 \end{cases} \text{e } \partial\left(\mathbb{Z}\right) = \phi$$

Exemplo 1.10

$\mathbb{X}$ é denso em $\mathbb{R}$, quando: $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{R}$

Exemplo 1.11

$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial\left(\mathbb{Q}\right) = \mathbb{R}$

$$a \in \partial\left(\mathbb{X}\right) \Longrightarrow \mathbb{V}_\delta\left(a\right) \cap \mathbb{X} \neq \phi \text{ e } \mathbb{V}_\delta\left(a\right) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{X} \neq \phi$$

$\text{int}\left(\mathbb{Q}\right) = \phi$ Não existe $\delta > 0$, tal que: $\mathbb{V}_\delta\left(\frac{m}{n}\right) \subset \mathbb{Q}$ totalmente
$\text{ext}\left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right) = \phi$ Não existe $\delta > 0$, tal que: $\mathbb{V}_\delta\left(M\right) \subset \left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right)$ totalmente
$\partial\left(\mathbb{Q}\right) = \mathbb{R}$ $\left[\mathbb{V}_\delta\left(\frac{m}{n}\right)\right.$ contém algum ponto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}$ pela densidade$\left.\right]$ ■

Exemplo 1.12

1) O conjunto dos números reais é separável.

2)O conjunto, $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é enumerável.

Devemos mostrar que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. é claro que $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \partial\left(\mathbb{Q}\right)$.

Demonstração

Seja $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que toda $\varepsilon-$vizinhança, $B_\varepsilon(x)$, contém algum número racional. Então, x é aderente a $\mathbb{Q}$, isto é, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Conclusão $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ■

Teorema 1.1

Seja $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são equivalentes

(A) $\mathbb{X}$ *é um conjunto fechado;*

(B) $\mathbb{R} \diagdown \mathbb{X}$ *é aberto;*

(C) $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X}$ *fêcho.* ♡

Demonstração

$(A \Longrightarrow B)$ $\mathbb{X}$ é um conjunto fechado$\Longleftrightarrow \partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X}$.

Se $\mathbb{R} \diagdown \mathbb{X}$ não fosse aberto, existiria $a \in \mathbb{R} \diagdown \mathbb{X}$, tal que: $a \in \text{int}\left(\mathbb{R} \diagdown \mathbb{X}\right)$.

Logo, $\forall\delta > 0$, temos:

$$\mathbb{V}_\delta\left(a\right) \cap \mathbb{X} \neq \phi \text{ e } a \in \mathbb{V}_\delta\left(a\right) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{X} \Longrightarrow a \in \partial\mathbb{X} \Longrightarrow a \in \mathbb{X}.$$

Absurdo! ■

$(B \Longrightarrow C)$ $\mathbb{R} \diagdown \mathbb{X}$ é aberto.

Com efeito, $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \partial\mathbb{X}$, então, $\mathbb{X} \subset \bar{\mathbb{X}} \Longrightarrow \partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X}$.
Suponhamos que existe $a \in \partial\mathbb{X}$, $a \notin \mathbb{X}$.
Ora,

$$a \in \partial\mathbb{X} \Longleftrightarrow \mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{X} \neq \phi \text{ e } a \in \mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{X}, \forall \delta > 0.$$

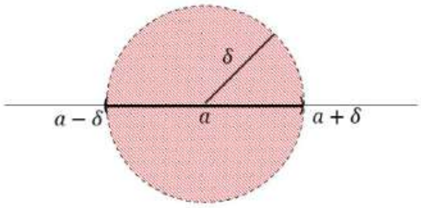
Daí, obtemos:

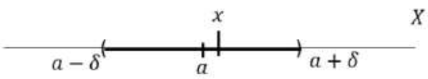
$$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{X} \text{ e } a \in \mathbb{V}_\delta(a) \cap \mathbb{X} \neq \phi.$$

Assim, $a \in \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{X})$. Isto contradiz o fato de ser $\mathbb{R} \setminus \mathbb{X}$ um conjunto aberto. ■
$(C \Longrightarrow A)$ $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \partial\mathbb{X} \Longleftrightarrow \bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \Longleftrightarrow \partial\mathbb{X} \subset \mathbb{X} \Longleftrightarrow \mathbb{X}$ é fechado. ■

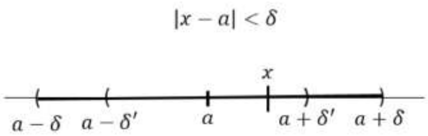
Exemplo 1.13

$\mathbb{V}_\delta(a)$ é um conjunto aberto





$|x - a| < \delta \Longleftrightarrow \delta\text{'} = \delta - |x - a| > 0.$



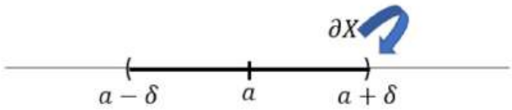
Seja $x \in \mathbb{V}_\delta(a)$ seja $\delta\text{'} = \delta - |x - a| > 0$.
Afirmação: $\mathbb{V}_{\delta\text{'}}(a) \subset \mathbb{V}_\delta(a)$
Seja $y \in \mathbb{V}_{\delta\text{'}}(a)$:

$$\begin{aligned} |y - a| &= |y - x + x - a| \leq |y - x| + |x - a| \\ &< \delta\text{'} + |x - a| = \delta - |x - a| + |x - a| = \delta. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, temos:

$$|y - a| < \delta \Longleftrightarrow y \in \mathbb{V}_\delta(a).$$

Portanto, $\mathbb{V}_{\delta'}(a) \subset \mathbb{V}_{\delta}(a)$. ■



Exemplo 1.14

O conjunto

$$\mathbb{X} = [a, b] = \{x \in \mathbb{X} : a \leq x \leq b\}$$

é fechado; pois, $\partial\mathbb{X} = \{a, b\} \subset \mathbb{X}$.

Exemplo 1.15

O conjunto

$$\mathbb{X} = (0, 1] = \{x \in \mathbb{X} : 0 < x \leq 1\}$$

não é aberto nem fechado.

(i) $0 \in \partial\mathbb{X}$, $0 \notin \mathbb{X}$: $\mathbb{X}$ não é fechado.

(ii) $1 \in \mathbb{X}$, $1 \notin \text{int}(\mathbb{X})$: $\mathbb{X}$ não é aberto.

Nota

Uma outra forma de caracterizar o fêcho

$$a \in \bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \partial\mathbb{X} \Longleftrightarrow \mathbb{V}_{\delta}(a) \cap \bar{\mathbb{X}} \neq \phi, \forall \delta > 0.$$

Em outras palavras: Qualquer vizinhança de a contém algum ponto de $\mathbb{X}$.

Definição 1.5 (Ponto de acumulação)

Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $\mathbb{X}$, quando em todo intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ de centro x_0, contém algum ponto $x \in \mathbb{X}$ diferente de x_0. ♣

Nota

O conjunto dos pontos de acumulação de $\mathbb{X}$ será denotado por: $\mathbb{X}$'. A condição $x_0 \in \mathbb{X}$', em símbolo, será descrita por:

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \mathbb{X};\, 0 < |x - x_0| < \delta.$$

1.4 Conjuntos Finitos e Infinitos e Enumerabilidade

Admitimos conhecidos as notações usuais da teoria dos conjuntos: relação de conjuntos, etc.. Denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais isto é

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Definição 1.6

Um conjunto A é dito enumerável se existe uma correspondência injetiva entre os elementos de A e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{N}, \text{ injetiva, 1-1.}$$

Noutras palavras: um conjunto A é enumerável se seus elementos podem ser indexados na forma $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots$. ♣

Exemplo 1.16

O conjunto, $\mathbb{N}$, dos números naturais, é enumerável. A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \varphi(n) = n. \end{array}$$

Exemplo 1.17

O conjunto, $\mathbb{Z}$, dos números inteiros é enumerável.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

A aplicação $\varphi\ : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2n+1, & \text{se} \quad n \geq 0 \\ -2n, & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

é injetiva.

Exemplo 1.18

O conjunto, P, dos naturais pares é enumerável. A aplicação

$$\varphi : P \longrightarrow \mathbb{N},\ \varphi(n) = \frac{n}{2}$$

é injetiva.

Exemplo 1.19

O conjunto, Q, dos números racionais, é enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$$

Todo número racional pode ser escrito na forma de uma fração irredutível $\alpha = \frac{p}{q},\ q > 0$.
A soma $n = |p| + q$ é chamada de “altura"do número racional α . O número de frações tendo altura n é finito. Por exemplo, o único racional de altura um é o zero. $(0 = \frac{0}{1})$
Tem altura dois os números $\frac{1}{1}$ e $\frac{-1}{1}$, e altura três, os números, $\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{-2}{1},\ \frac{-1}{2}$, e assim por diante.
Assim todos os números racionais podem ser escritos numa ordem de altura não-decrescente:

$$\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \ldots \tag{$*$}$$

A função $\varphi : \longrightarrow \mathbb{N}$, injetiva, é a função que associa, a cada número em $(*)$, um natural. ■

Proposição 1.1

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é finito ou enumerável. ♠

Demonstração

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável. Seja B um subconjunto de A. Como $B \subset A$ existem naturais $n_1,\ n_2$,que correspondem aos elementos de B, dentro da enumeração de A. Se existir um maior dentre os naturais: $n_1,\ n_2, \ldots,\ B$ é finito. Caso contrário B é enumerável. ■

Proposição 1.2

A união, enumerável, de conjuntos enumeráveis, é um conjunto enumerável.

Demonstração

Sejam A_1, $A_2, \ldots$ conjuntos enumeráveis. Podemos listar os elementos de cada um desses conjuntos, na forma:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

onde a $1^{\underline{a}}$ linha da tabela representa os elementos de A_1, na segunda linha, estão os de A_2, etc... Enumeramos todos os elementos dessa tabela, pelo "método diagonal": a_{11} é o primeiro elemento, a_{12} é o segundo, a_{21} o terceiro, a_{31} o quarto, a_{22} o quinto,... com esta ordenação, a cada elemento na tabela correspondente um único número natural, o que estabelece uma correspondência injetiva entre $\bigcup A_i$ e $\mathbb{N}$.

■

Exemplo 1.20

O conjunto de todos os polinômios a coeficientes racionais é enumerável.

De fato: para cada coeficiente, em tais polinômios, tem-se a chance de escolher uma quantidade enumerável de racionais. Isto feito em cada coeficiente e no têrmo independente, obtemos uma quantidade enumerável de escolha dos coeficientes. Portanto uma quantidade enumerável de polinômios a coeficientes racionais. ■

Exemplo 1.21

O conjunto de todos os intervalos racionais, i.é., intervalos com extremos racionais, é enumerável.
Como o conjunto,$\mathbb{Q}$, dos números racionais, é enumerável, podemos supor que

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Para $a_1 \in \mathbb{Q}$, como um extremo, podemos construir uma quantidade enumerável de intervalos, tendo como outro extremo, qualquer racional diferente de a_1. Repetimos o processo agora com a_2. Repetindo o processo em $a_j \in \mathbb{Q}$, encontramos uma união enumerável de conjuntos enumeráveis ou seja o conjunto de todos os intervalos racionais é enumerável. ■

Proposição 1.3

Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável.

Demonstração

Um conjunto é dito infinito se após a retirada de qualquer quantidade finita de elementos do conjunto, ainda permanecem elementos no conjunto. Seja M um conjunto infinito. Tomemos um elemento $a_1 \in M$. Como M é infinito, encontramos $a_2 \in M$, $a_2 \neq a_1$. Considerando o conjunto $\{a_1,\ a_2\}$, e o fato de M ser infinito, encontramos $a_3 \in M$, talque $a_3 \neq a_2,\ a_3 \neq a_1$. Este processo constrói um subconjunto enumerável $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\}$ de M. ■

Nota

Deduz-se da Proposição 1.4.4*, que entre os conjuntos infinitos, os "menores"são os conjuntos enumeráveis.*■

Definição 1.7

Dois conjuntos S e T são ditos equivalentes ($S \sim T$) se existir uma correspondência biunívoca entre seus elementos.

Pela definição 1.5 um conjunto é enumerável se é equivalente ao conjunto, $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Exemplo 1.22 O conjunto de pontos em $[0,1]$ é equivalente ao conjunto de pontos em $[a,b]$.

De fato, consideremos a função

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ & t & \longmapsto & ta+(1-t)b. \end{array}$$

φ é injetiva. Na verdade φ é bijetiva. ■

Proposição 1.4

Todo conjunto infinito é equivalente a algum subconjunto próprio de si mesmo. ♠

Demonstração

Seja M um conjunto infinito. Então, pela Proposição 1.4.3, M tem um subconjunto enumerável $A=\{a_2,a_4,a_6,\ldots\}$. Como A e A_1 são enumeráveis, existe uma correspondência, $\varphi\ : A \longrightarrow A_1$, injetiva.
Seja

$$\begin{array}{rccl} \Theta\ : & A\cup(M\setminus A) & \longrightarrow & A_1\cup(M\setminus A) \\ & x & \longmapsto & \Theta(x)\begin{cases} \quad x, & \text{se} \quad x\in M\setminus A \\ \varphi(x), & \text{se} \quad x\in A \end{cases} \end{array}$$

Θ é injetiva, $A\cup(M\setminus A)=M$ e $A_1\cup(M\setminus A)=M\setminus A_2 \subsetneq M$.
Assim M e $M\setminus A_2$ são equivalentes. ■

1.5 Conjuntos Não Enumeráveis

Nossa idéia, agora, é provar que existem conjuntos que não são enumeráveis.
Antes, consideremos a seguinte questão: $0,5000\ldots$ é igual a $0,4999\ldots$?
Inicialmente provamos que $0,999\ldots=1$.
De fato: seja $x=0,999\ldots$. Então $10x=9,999\ldots$
Daí $10x-x=9$. Logo $x=1$.
Agora deduzimos que $0,5000\ldots$ é igual a $0,4999\ldots$.
Veja, $0,4999\ldots$ é igual a $0,5000\ldots$ se e somente se $4,999\ldots$ é igual a $5,000\ldots$, se e somente se $4+0,999\ldots=5 \Longleftrightarrow 0,999\ldots=1$.
Isto nos auxiliará em nosso primeiro resultado sobre não enumerabilidade. ■

Teorema 1.2

O conjunto de números no intervalo fechado $[0,1]$ *é não enumerável.* ♡

Demonstração

Suponhamos, por contradição, que os reais de $[0,1]$ sejam enumeráveis, e que estão todos arranjados na forma

$$\begin{array}{cccc} 0\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \cdots & . & . & . \\ 0\cdot a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ \cdots & . & . & . \end{array} \tag{1}$$

Na forma exposta em (1) cada a_{ik} é algum dos números $0,\ 1,\ 2, \dots,\ 9$.

Seja $x = 0.b_1b_2b_3\dots$, onde, para b_1, tomamos qualquer dos números de 0 a 9, diferente daquele assumido por a_{11}, e repete-se o processo para os demais $b_i's$. Note que x é diferente de todos os números na tabela (1) no número por dígito. Portanto $[0, 1]$ é não enumerável.

Nota

Precisamos de um pouco mais de exatidão na prova do Teorema 1, em face do que expomos no início deste parágrafo.

Será que não podia acontecer com o números $x = 0.b_1b_2b_3\dots$ o que aconte com $0,4999\dots$ e $0.5000\dots$?

Bem que poderia !! Para esta possibilidade, basta tomar os decimais, em x, diferentes de 0 e 9. Por exemplo, podemos construir o número x, com $b_n = 2$ se $a_{nn} = 1$,e $b_n = 1$ se $a_{nn} \neq 1$. ■

Exemplo 1.23

O conjunto de pontos, no intervalo fechado $[a, b]$ é não enumerável. Da mesma forma o conjunto de pontos no intervalo aberto (a, b) é não enumerável $(a < b)$.

Exemplo 1.24

Exemplo 9: O conjunto de todos os números reais é não enumerável.

Definição 1.8

Se dois conjuntos finitos são equivalentes, diz-se que tem o mesmo número de elementos. Se S e T são conjuntos equivalentes, arbitrários, diz-se que S e T tem o mesmo número cardinal e escreve-se $card(S) = card(T)$. ♣

A cardinalidade do conjunto,$\mathbb{N}$, dos números naturais é denotada por $\aleph_0(alefzero)$. Portanto todo conjunto enumerável tem cardinalidade $\aleph_0$.

Conjuntos que são equivalentes ao conjuntos cuja cardinalidade é a "potência do contínuo", denotada por c. Assim $card(0, 1) = c$, $card(\mathbb{R}) = c$.

Prova-se que se um conjunto, M, tem cardinalidade maior que m então o conjunto de todos os subconjuntos de M, tem cardinalidade maior que m. Portanto c não é a maior cardinalidade. ■

1.6 Funções

Seja X um subconjunto de números reais. Uma função f é definida, sobre X, se para cada $x \in X$ corresponde um número bem definido, $y = f(x)$.

O elemento y é dito a imagem de x, pela função f. O conjunto $f(x) = \{f(x);\ x \in X\}$ é dito imagem de X. O conjunto dos elementos, de X, cuja imagem é o elemento b, é dita imagem inversa de b, e escrito $f^{-1}(b)$. Assim

$$f^{-1}(b) = \{x \in X;\ f(x) = b\}$$

.

O conjunto $f^{-1}(B)$ é definido como sendo o conjunto de os elementos de X, cuja imagem está em B.

Se $f\ : M \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma função e $f(M) = \mathbb{N}$, diz-se que f é sobrejetiva ou sobre $\mathbb{N}$. Em geral $f(M) \subseteq \mathbb{N}$. ■

Proposição 1.5

A imagem inversa da união de dois conjuntos é igual a união das imagens inversas. ♠

Demonstração

Sejam A e B dois subconjuntos de X. Queremos provar que

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$x \in f^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B \Rightarrow$
$x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Assim $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

Se $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cup B)$. Assim $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$.

Conclusão:$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. ■

Proposição 1.6

A imagem inversa da interseção de dois conjuntos é igual a interseção das imagens inversas. ♠

Demonstração

Basta proceder de forma análoga a demonstração da Proposição anterior ■

Proposição 1.7

A imagem da união de dois conjuntos é igual a das imagens. ♠

Demonstração

Queremos provar que, se A e B são subconjuntos de X, então

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

$y \in f(A \cup B) \Rightarrow y = f(x)$, $x \in A \cup B$. Se $x \in A$, então $y = f(x) \in f(A)$, e daí, $y \in f(A) \cup f(B)$. Se $x \in B$, então $y = f(x) \in f(B)$, e daí, $y \in f(B) \cup f(A)$.

Assim, $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. $y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Se $y \in f(A)$, então $y = f(x),\ x \in A$. Daí $y = f(x)$, $x \in A \cup B$. Se $y \in f(B)$, então $y = f(x),\ x \in B$. Daí $y = f(x),\ x \in B \cup A$, ou seja $y \in f(A \cup B)$.

Assim, $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

Conclusão: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. ■

Nota

Sejam $\pi\ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y) = (x, 0)$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, y = 1\}$.

Note que $A \cap B = \emptyset$ *e* $\pi(A \cap B) = \emptyset$.

Por outro lado $\pi(A) \cap \pi(B) = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$. ■

Capítulo 2 - Limites de Sequências: Sequência de Cauchy e Majorações Necessárias e Suficientes para as Demonstrações

Nikolai Ivanovich Lobachevsky
Nascimento: 1 de dezembro de 1792 - Nijni Novgorod (é uma cidade na Rússia)
Morte: 24 de fevereiro de 1856 (63 anos) - Cazã (Império Russo)

"Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real."

(a) Augustin-Louis-Cauchy

(b) SCIENCE PHOTO LIBRARY

Augustin-Louis Cauchy é o crème-de-la-crème (melhor dos melhores) dos matemáticos franceses.
(Nascimento: 21 de agosto de 1789 Paris. Morte: 23 de maio de 1857 (67 anos) Paris)

2.1 Um pouco de história dos Limites das Sequências Numéricas

Os limites das sequências numéricas são um conceito importante na matemática, especialmente na análise matemática. Eles desempenham um papel fundamental no estudo do comportamento das sequências à medida que seus termos se aproximam de um valor específico à medida que a sequência continua indefinidamente.

A ideia de limite remonta à antiguidade, com contribuições de matemáticos como Arquimedes e Euclides, embora o conceito formal de limite tenha sido desenvolvido mais tarde por matemáticos como Augustin-Louis Cauchy, Karl Weierstrass e Bernhard Bolzano.

No século XIX, a noção de limite foi rigorosamente formalizada por Weierstrass, que estabeleceu a definição moderna de limite de uma sequência. Segundo essa definição, uma sequência $(x_1, x_2, , x_n, ...)$ tem um limite a se, para qualquer valor $\varepsilon > 0$ (epsilon), existe um número natural $n_0\left(\varepsilon\right)$, tal que: odos os termos da sequência a partir do termo $n_0\left(\varepsilon\right)$ se aproximam de a com uma diferença menor do que ε.

Por exemplo, se considerarmos a sequência $(1, 1/2, 1/3, 1/4, ...)$, que é a sequência dos inversos dos números naturais, podemos dizer que seu limite é zero. Isso ocorre porque, à medida que avançamos na sequência, os termos se aproximam cada vez mais de zero.

Os limites das sequências numéricas são estudados em vários contextos matemáticos, incluindo cálculo diferencial e integral, análise matemática e teoria dos números. Eles também têm aplicações práticas em diversas áreas, como física, economia e ciências da computação.

Ao longo do tempo, matemáticos têm estendido o conceito de limite para outros tipos de sequências, como sequências infinitas, sequências generalizadas e sequências em espaços métricos. Essas generalizações permitem a aplicação do conceito de limite em contextos mais abrangentes e têm contribuído para o desenvolvimento de diversos ramos da matemática.

2.2 Sequência Numérica

O objetivo deste Capítulo é estudar, sequências numéricas, limites de sequências, destacando: propriedades operacionais básicas, tais como: limites da soma, diferença, produto e divisão de sequências, demonstrando usando a definição por epsilon-ε e $n_0\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ (Conjunto dos Números Natuais). Ressaltando; uma aobrdagem de como dar os primeiros passos em construir majorações, provável uma das principais dificuldades ao estudar Análise Real.

A princípio, desconstruir e reconstruir as demonstrações questionando o porquê de determinadas escolhas como $\frac{\varepsilon}{2}$, ε ou $\frac{\varepsilon}{3}$ (tais questionamentos são fundamentais, enfraquecer hipóteses e ver se a conclusão de determinados teoremas continuam validas ou apresentar comtra-exemplos).

Definição 2.1

Uma sequência numérica é uma função definida por:

$$\begin{aligned} x: \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \longmapsto x_n \end{aligned}$$

onde (x_n) *é a sequência de termo geral* x_n*.* ♣

Exemplo 2.1

(x_n), com $x_n = (-1)^n$, $(-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$

Exemplo 2.2

(x_n) com $x_n = \frac{1}{n}$, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$

Exemplo 2.3

(x_n) com $x_n = \frac{n+1}{n}$, $(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots)$

Exemplo 2.4

(x_n) com $x_n = \sqrt{n}$, $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots)$

Exemplo 2.5

(x_n) com $x_n = \sqrt{n}$, $(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots)$

Exemplo 2.6

(x_n) com $x_n = (-1)^n$, $(-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots)$

Definição 2.2

Uma sequência (x_n) é limitada superiormente quando existe um número real M tal que

$$x_n \leq M, \forall n.$$

♣

Nota *O número M da definição acima é chamado cota superior da sequência.*

Definição 2.3

Uma sequência (x_n) é limitada inferiormente quando existe um número real m tal que

$$m \leq x_n, \forall n.$$

♣

Nota *O número m da definição é chamado cota inferior da sequência.*

Exemplo 2.7

(x_n) com $x_n = \frac{1}{n}$, $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$

$0 \leq x_n \leq 1$, desta forma 0 é cota inferior e 1 é cota superior.

Exemplo 2.8

(x_n) com $x_n = \frac{n+1}{n}$, $(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots)$

Observe que: $1 \leq x_n \leq 2$, assim, 1 é cota inferior e 2 é cota superior.

Além disso, temos:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)+1}{n+1} . \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \leq 1 \Longrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 \Longrightarrow b_{n+1} \leq b_n.$$

Nota *Para saber se uma sequência (x_n) é monótona (não-decrescente ou não-crescente) temos que comparar o termo de ordem $(n+1)$ com o termo de ordem n.*

Sequência monótona

Definição 2.4

Uma sequência (x_n) é monótona não-crescente, quando: $x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Quando $x_{n+1} \geq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Dizemos que a sequência (x_n) é monótona não-decrescente. ♣

Exemplo 2.9

(x_n) com $x_n = \sqrt{n}$,
$x_{n+1} = \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} = x_n, \forall n$
(x_n) é não-decrescente e limitada inferiormente por 1, visto que:
$1 \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, além disso, (x_n) não é limitada superiormente

Exemplo 2.10

Mostre que: (x_n) com $x_n = \frac{n!}{1.3.5.7...(2n-1)}$ é monótona não-crescente, isto é,

$$x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

Basta mostrar que:

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)\,.n!}{1.3.5.7\ldots(2n-1)\,(2n+1)}.\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{n!}\\ &= \frac{(n+1)}{(2n+1)} \leq 1 \Longrightarrow x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.11

A sequência (x_n) com $x_n = (-1)^n$ é limitada superiormente e inferiormente, mas não é monótona. Basta notar que $-2 \leq x_n \leq 4$, $\forall n$.

Exemplo 2.12

Mostre que: (x_n) com $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é monótona não-decrescente, isto é,

$$x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

A priori, note que (x_n) é limitada inferiormente e superiormente por:

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Consideremos a sequência de $n+1$ termos:

$$\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right), 1}^{(n+1)\text{ vezes}}$$

à luz da desigualdade entre as as médias geométrica e aritmética,vem:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right).1} \leq \frac{n.\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Agora, elevando ambos os menbro das desigualdades a $n+1$, obtemos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{n.\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Logo,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$$

Ou ainda,

$$x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

isto é, (x_n) é uma sequência monótona não-decrescente. ■

Exemplo 2.13

Mostre que: (x_n) com $x_n = \frac{n+1}{n}$ é monótona não-crescente, isto é,

$$x_{n+1} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

A priori, note que (x_n) é limitada por:

$$1 < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} n &> 1 \Longrightarrow n+1 \geq n \Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{n} = x_n \\ &\Longrightarrow x_{n+1} \leq x_n, \forall \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é monótona não-crescente. ■

Exemplo 2.14

Mostre que: (x_n) com $x_n = \frac{n-1}{n}$ é monótona não-decrescente, isto é,

$$x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração

Consideremos (x_n) limitada inferiormente e superiormente por:

$$0 < \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} n &> 1 \Longrightarrow n+1 \geq n \Longrightarrow -(n+1) \leq -n \Longrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n} \Longrightarrow x_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n} = x_n \\ &\Longrightarrow x_{n+1} \geq x_n, \forall \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De sorte que:, (x_n) é monótona não-decrescente. ■

Subsequência

Definição 2.5

Dada um sequência $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $x_n = f(n)$, as restrições de (x_n) a um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ são denominadas subsequência de x ♣

Agora, vamos caracterizar as subsequências
$\mathbb{N}$'$= \{n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots\}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$
Assim, $\mathbb{N}$'$\subset \mathbb{N}$ e $\left(x_{n_j}\right)$ é uma subsequência de (x_n).

Exemplo 2.15 (x_{2n}), com $x_{2n} = (-1)^{2n}$, $\left(1, 1, \ldots, (-1)^{2n}, \ldots\right)$ subsequência par.

Exemplo 2.16 (x_{2n-1}), com $x_{2n-1} = (-1)^{2n-1}$, $\left(-1, -1, \ldots, (-1)^{2n-1}, \ldots\right)$ subsequência ímpar.

Exemplo 2.17 (x_n), com $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots\right)$ não é monótona.

Sequência Limitada

Definição 2.6

Dizemos que uma sequência (x_n) é limitada, quando: existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que:

$$|x_n| \leq M, \forall n.$$

♣

Exemplo 2.18 (x_n), com $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, temos: $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{n} = \frac{1}{n} \leq 1$,ou seja,

$$-1 \leq x_n \leq 1 \iff |x_n| \leq 1, \forall n.$$

Exemplo 2.19 (x_n), com $x_n = (-1)^n$, tem-se: $-1 \leq x_n \leq 1 \iff |x_n| \leq 1, \forall$.
Exemplo 2.20 (x_n), com $x_n = arctgn$, tem-se: $-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2} \iff |x_n| \leq \frac{\pi}{2}, \forall$.

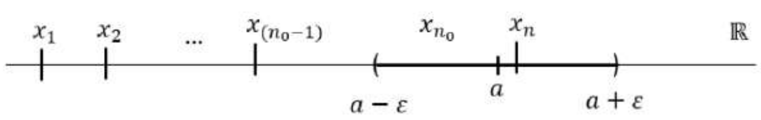
2.3 Convergência de uma sequência numérica

Definição 2.7

Seja uma sequência numérica (x_n). Dizemos que (x_n) converge para a, quando: dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ($n_0(\epsilon)$ dependendo de ε) tal que:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

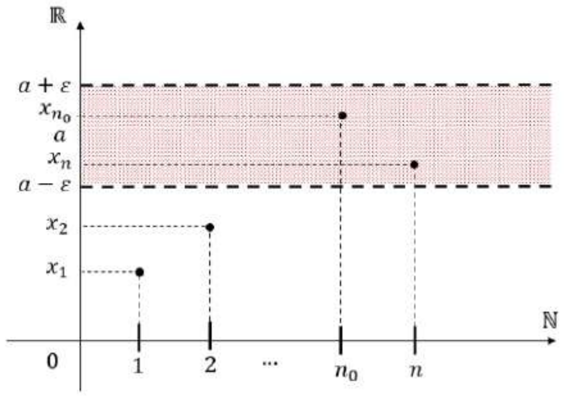
♣



Nota *Uma sequência converge para "a"se toda vizinhaça de "a"contém* *todos os termos da sequência a partir de uma certa ordem* n_0.

Notações

Uma sequência numérica (x_n).converge para a, denotamos por:
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ou $\lim x_n = a$ ou $x_n \longrightarrow a$ ou $x_n \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} a$.
Caso contrário, será divergente.



Exemplo 2.21

Use a definição para mostrar que as sequências (x_n) convergem para o valor indicado.
(a) (x_n), com $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$.
(b) (x_n), com $x_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $x_n \to 1$.
(c) (x_n), com $x_n = \frac{1-n}{2n+1}$, $x_n \to \frac{-1}{2}$.
(d) (x_n), com $x_n = 2 + \frac{\ln n}{n^3}$, $x_n \to 2$.
(e) (x_n), com $x_n = \frac{n}{n+1}$, $x_n \to 1$.
(f) (x_n), com $x_n = \frac{2n}{n+1}$, $x_n \to 2$.

(a) (x_n), com $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$.

Majorações

$$\begin{aligned} |x_n - 0| &= \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \epsilon \\ &\Longrightarrow n > \frac{1}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon}$.
antes de passarmos a prova vejamos

Se tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{100}$, então, nosso $n_0(\varepsilon) \geq 100$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, Assim,

$$\begin{aligned} n &\geq n_0(\varepsilon) = 100 \Longrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} = \varepsilon \\ &\Longrightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Note que a partir do temo de ordem 101, todos os termos estarão no raio de convergência com centro na origem e raio $\varepsilon > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > n_0 \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Logo, $x_n \to 0$. ∎

(b) (x_n), com $x_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $x_n \to 1$.

Majorações

$$\begin{aligned} |x_n - 1| &= \left| 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n - 1 \right| = \left| \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right| \\ &= \left| \left(\frac{-1}{2}\right) \right|^n = \left| \left(\frac{1}{2}\right) \right|^n = 2^{-n} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow -n \ln 2 < \ln \varepsilon \Longrightarrow n > -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Desta forma, escolha qualquer $n_0 \geq -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0 \Longrightarrow n > -\frac{\ln \ln \epsilon}{\ln 2} \Longrightarrow -n \ln 2 < \ln \varepsilon \\ &\Longrightarrow \ln 2^{-n} < \ln \varepsilon \Longrightarrow 2^{-n} < \varepsilon \Longrightarrow \left| 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n - 1 \right| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |x_n - 1| < \varepsilon. \end{aligned}$$

De sorte que: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \Longleftrightarrow x_n \longrightarrow 1.$ ∎

(c)

Majorações

$$\begin{aligned} \left| x_n - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| &= \left| \frac{1-n}{2n+1} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 - 2n + 2n + 1}{2(2n+1)} \right| \\ &= \left| \frac{3}{2(2n+1)} \right| = \frac{3}{2(2n+1)} \\ &\leq \frac{3}{2n+1} \leq \frac{3}{2n} < \varepsilon \Longrightarrow n > \frac{3}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Desta forma, basta tomar $n_0 \geq \frac{3}{2\varepsilon}$.

Demonstração Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \geq \frac{3}{2\varepsilon}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0 \Longrightarrow n > \frac{3}{2\varepsilon} \Longrightarrow \frac{3}{2n} < \epsilon \Longrightarrow \left|\frac{3}{2(2n+1)}\right| = \frac{3}{2(2n+1)} \leq \frac{3}{2n+1} \leq \frac{3}{2n} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \left|x_n - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1-n}{2n+1} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-2n+2n+1}{2(2n+1)}\right| \\ &= \left|\frac{3}{2(2n+1)}\right| = \frac{3}{2(2n+1)} \leq \frac{3}{2n+1} \leq \frac{3}{2n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\left|x_n - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon, \forall n > n_0$. Isto é, $x_n \to \frac{-1}{2}$. ■

(d) (x_n), com $x_n = 2 + \frac{\ln n}{n^3}$, $x_n \to 2$.

Majorações

$|x_n - 2| = \left|2 + \frac{\ln n}{n^3} - 2\right| = \left|\frac{\ln n}{n^3}\right| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Daí, basta tomar $n_0 \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Ilustrativamente, se $\varepsilon = \frac{1}{100}$, basta escolher $n_0(\varepsilon) \geq 100$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ ($n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dependendo de ε), tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0 \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \Longrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{\ln n}{n^3}\right| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \\ \left|2 + \frac{\ln n}{n^3} - 2\right| &< \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2 \Longleftrightarrow \lim x_n = 2 \Longleftrightarrow x_n \to 2.$$

■

(e) (x_n), com $x_n = \frac{n}{n+1}$, $x_n \to 1$.

Majorações

$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Daí, basta tomar $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Ilustrativamente, se $\varepsilon = \frac{3}{100}$, basta escolher $n_0(\varepsilon) \geq \frac{100}{3}$ escolhemos o primeiro $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, podemos escolher por exemplo $n_0(\varepsilon) = 34$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ($n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dependendo de ε), tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0 \Longrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |x_n - 1| < \varepsilon. \end{aligned}$$

De sorte que: $x_n \to 1$. ■

(f) (x_n), com $x_n = \frac{2n}{n+1}$, $x_n \to 2$.

Majorações

$|x_n - 1| = \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n-2(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon \Longrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$. Daí, basta tomar $n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Ilustrativamente, se $\varepsilon = \frac{3}{100}$, basta escolher $n_0(\varepsilon) \geq \frac{200}{3}$ escolhemos o primeiro $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, podemos escolher por exemplo $n_0(\varepsilon) = 67$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \geq \frac{2}{\varepsilon}$ ($n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dependendo de ε), tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0 \Longrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Longrightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |x_n - 2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

De sorte que: $x_n \to 2$. ■

Teorema 2.1 (Unicidade do Limite)

Considere uma sequência (x_n), tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.
Então, tem-se: $a = b$. ♡

Comentários e Majorações

Em boa parte dos textos clássicos a demonstração é feita por redução ao absurdo inicialmente supõe-se $a \neq b$ e escolhe $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$.
Qual o critério para escolha deste ε? E se escolhesse $\varepsilon = |a - b| > 0$.ou $\varepsilon = \frac{|a-b|}{K} > 0$. $K \in \mathbb{N}$, com $K \geq 3$?
As majorações a seguir, poderão dar um norte para as possiveis escolhas
Suponhamos $a \neq b$, então, temos:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1(\varepsilon)$,$n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$,tais que:

$$\begin{aligned} |a - x_n| &< \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n > n_1(\varepsilon) \\ &\text{e} \\ |x_n - b| &< \frac{\epsilon}{2}, \ \forall n > n_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Escolha $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \in \mathbb{N}$, daí segue-se:

$$\begin{aligned} |a - b| &= |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, $|a - b| < \epsilon$, escolhendo qualquer $\varepsilon = \frac{|a-b|}{K} > 0$, com

$$K \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

conduzirá ao absurdo e, portanto, $a = b$.

Demonstração 1 (Unicidade do Limite)

Suponhamos $a \neq b$ e dado $\varepsilon = \frac{|a-b|}{K} > 0$, existem $n_1(\varepsilon)$,$n_2(\varepsilon)$, $K \in \mathbb{N}$, tais que:

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n > n_1(\varepsilon)$$

e

$$|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2},\ \forall n > n_2(\varepsilon)\,.$$

Agora, escolhendo $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ temos:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = \frac{|a-b|}{K}. \end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$|a-b| < \frac{|a-b|}{K}.$$

Absurdo!

Portanto, $a = b$. (único). ■

Fatos que ajudam:

F1-

Se um número real "a"é tal que: $0 \leq a < \epsilon$, para qualquer número positivo ϵ, então, $a = 0$.

Demonstração

Com efeito, $0 \leq a < \varepsilon$, para $a > 0$, tome $\varepsilon = \frac{a}{2}$, logo teríamos $0 \leq a < \frac{a}{2}$

Absurdo! Portanto, $a = 0$.

■

F2-

Se $a - \varepsilon < b$, $\forall \varepsilon > 0$, então, $a < b + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, então $a \leq b$.

Suponha $a > b$, então, $a - b > 0 \Leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $\epsilon = a - b$. Então, tem-se:

$$a < b + \varepsilon = b + a - b = a \Longleftrightarrow a < a.$$

Contradição! De sorte que: $a \leq b$.

■

Demonstração 2 (Unicidade do Limite)

Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1(\varepsilon)$,$n_2(\varepsilon)$, $K \in \mathbb{N}$, tais que:

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n > n_1(\varepsilon)$$

e

$$|x_n - b| < \frac{\epsilon}{2},\ \forall n > n_2(\varepsilon).$$

Agora, escolhendo $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ temos:

$$\begin{aligned} |a-b| &= |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$|a - b| < \epsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Portanto, $a = b$. (único). ■

Teorema 2.2

Seja (x_n) *uma sequência, então, tem-se:*
$x_n \to a$*, prove que:* $|x_n| \to |a|$. ♡

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$,tal que:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Agora, como

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0(\varepsilon).$$

segue-se que:

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon, \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Portanto,

$$|x_n| \to |a|.$$

■

Dê um contra-exemplo para recíproca salvo no caso em que $a = 0$.

Contra-exemplo:

(i) Basta escolher (x_n), com $x_n = (-1)^n$, temos:

$$|x_n| \to 1.$$

No entanto, não existe $\lim x_n$. ■

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} r^n = 0$, desde que: $|r| < 1, r \neq 0$

Majorações

$0 < |r| < 1$

$$\begin{aligned} |r^n - 0| &= |r|^n < \varepsilon \Longrightarrow \ln|r|^n < \ln\varepsilon \Longrightarrow n.\ln|r| < \ln\varepsilon \\ &\Longrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|r|}. \end{aligned}$$

Basta escolher $n_0(\varepsilon) \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln|r|}$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_0(\varepsilon) \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln|r|} \in \mathbb{N}$,tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0(\varepsilon) \Longrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|r|} \Longrightarrow n. \ln|r| < \ln \varepsilon \\ &\Longrightarrow \ln|r|^n < \ln \varepsilon \Longrightarrow |r^n - 0| = |r|^n < \varepsilon. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\lim_{n \to +\infty} r^n = 0.$$

■

Teorema:

Teorema 2.3

Sejam (x_n) e (y_n) sequência, tais que: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ e (y_n) é limitada.
temos então que: $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n y_n) = 0$.

♡

Majorações:

(y_n) é uma sequência limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tal que:

$$|y_n| \leq M, \forall n$$

e

$$|x_n y_n - 0| = |x_n y_n - 0| = |x_n| \, |y_n| \leq |x_n| \, M < \varepsilon \Longrightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \forall n > n_0.$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$,tal que:

$$|x_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}, \forall n > n_0.$$

e (y_n) é uma sequência limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tal que:

$$|y_n| \leq M, \forall n.$$

Daí, segue-se que:

$$|x_n y_n - 0| = |x_n| \, |y_n| \leq |x_n| \, M < \frac{\varepsilon}{M}.\varepsilon = \varepsilon \Longrightarrow |x_n y_n - 0| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

De sorte que:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = 0.$$

■

Exemplo 2.22 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin n}{n+1} = 0$, pois, $|\sin n| \leq 1, \forall n$ $(\sin n)$ é limitada e $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Exemplo 2.23 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{arctgn}{n^2+1} = 0$, visto que: $|arctgn| < \frac{\pi}{2}, \forall n$ $(\operatorname{arctg} n)$ é limitada e $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

Teorema 2.4 (Toda sequência convergente é limitada)

Seja (x_n) *uma sequência, tais que:* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *Então,* (x_n) *é limitada.* ♡

Demonstração

Suponha que $x_n \to a$, então, dado $\varepsilon = 1 > 0$ existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1, \forall n \geq n_0,$$

daí, segue-se que:

$$|x_n| \leq 1 + |a|, \forall n \geq n_0.$$

Isto é, a sequência está limitada a partir da ordem n_0, falta garantir a limitação dos termos anteriores. Assim, tomando-se

$$M = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |a|\right\}.$$

obtemos:

$$|x_n| \leq M, \forall n.$$

Portanto, (x_n) é limitada para todo n.
Quanto a recíproca, escolha (x_n), com $x_n = (-1)^n$ é obviamente limitada.
Mas, sabemos que a mesma não tem valor limite. ■

Teorema 2.5 (Teorema do Sanduíche ou confronto)

Sejam (x_n), (y_n) *e* (z_n) *sequências, tais que:*

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n.$$

Além disso, $x_n \to a$ *e* $y_n \to a$. *Então,* $z_n \to a$. ♡

Demonstração

Dado $\varepsilon >$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_1 \iff -\varepsilon < x_n < \varepsilon, \forall n > n_1.$$

e procedendo de forma análoga, temos:

$$|y_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_2 \iff -\varepsilon < y_n < \varepsilon, \forall n > n_2.$$

Agora, tomando-se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e usando a hipótese de que

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \forall n,$$

segue-se que:

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< x_n \leq z_n \leq y_n < \varepsilon, \forall n > n_0 \iff -\varepsilon < z_n < \varepsilon, \forall n > n_0 \\ &\iff |z_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

■

Exemplo 2.24

1. Prove que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

Demonstração Basta observar que:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)=1$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)==\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)=1,$$

segue-se à luz do Teorema do Sanduíche que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

■

Exemplo 2.25 Sejam a, b, c números reais não-negativos. Prove que:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=\max\{a,b,c\}$$

Demonstração

Seja $M=\max\{a,b,c\}$, então, temos:

$$M=\sqrt[n]{M^n}\leq\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\leq\sqrt[n]{3M^n}=\sqrt[n]{3}.M.$$

Agora, $\lim\limits_{n\to+\infty}M=M$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}.M=M$, segue-se daí que:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=M=\max\{a,b,c\}$$

■

Exemplo 2.26 Sejam $0<a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_k$, sendo a_j todos números fixos, com $j=1,2,\ldots,k$. Seja

$$x_n=\left(a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n\right)^{1/n},$$

então, prove que: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a_k$

Demonstração

Procedendo de forma análoga ao caso anterior, seja $M=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, então, temos:

$$M=\sqrt[n]{M^n}\leq\sqrt[n]{(a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n)}\leq\sqrt[n]{kM^n}=\sqrt[n]{k}.M.$$

Agora, $\lim\limits_{n\to+\infty}M=M$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{k}.M=M$ e, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n)}=M=\max\{a,b,c\}$$

■

Teorema 2.6

Seja (x_n) uma sequência. Se (x_n) converge paara "a", então, a partir de uma certa ordem tem-se:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall m, n \geq n_0$$

♡

Demonstração

Se (x_n) converge paara "a", então, por definição temos:
Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0\,(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0$$

e

$$|a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m \geq n_0.$$

Assim, tem-se:

$$\begin{array}{rcl} |x_n - x_m| & = & |(x_n - a) + (a - x_m)| \\ & < & |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ & \Longrightarrow & |x_n - x_m| < \varepsilon, \forall m, n \geq n_0. \end{array}$$

■

Fato:

Seja (x_n) uma sequência, tal que: $x_n \longrightarrow a$.
Uma subsequência (x_{n_k}) converge para a se, e somente se, qualquer subsequência de (x_n) converge para a

Demonstração

Sugestão:
$(\Longrightarrow)$

$$\begin{array}{rcl} |x_{n_k} - a| & = & |(x_{n_k} - x_n) + (x_n - a)| \\ & < & |x_{n_k} - x_n| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \\ & \Longrightarrow & |x_{n_k} - a| < \varepsilon, \forall n_k \geq n_0. \end{array}$$

$(\Longleftarrow)$ (x_{2n}) e (x_{2n-1}) convergem para a. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0\,(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{array}{rcl} |x_{2n} - a| & < & \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0 \\ & \text{e} & \\ |x_{2n-1} - a| & < & \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0. \end{array}$$

Daí, segue-se que:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

■

Exemplo 2.27

Prove que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0.$$

Demonstração

Seja $K = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}}$, então,

$$K = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{K}{K} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

■

Exemplo 2.28

Prove que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Demonstração

Seja

$$K = \lim_{n\to+\infty} [2n]^{\frac{1}{2n}}$$

Então, temos:

$$K^2 = \lim_{n\to+\infty} \left[(2n)^{\frac{1}{2n}}\right]^2 = \lim_{n\to+\infty} (2n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}}.n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1}{n}}.K = K \Longrightarrow \begin{cases} K = 0 \\ \text{ou} \\ K = 1 \end{cases}.$$

De sorte que:

$$\lim_{n\to+\infty} [2n]^{\frac{1}{2n}} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

■

Corolário 2.1

Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$*, então,* $\lim_{n\to+\infty} x_{n+p} = a$

♡

Demonstração

Com efeito, $(x_{1+n}, x_{2+n}, \ldots, x_{p+n}, \ldots)$ é uma subsequência de (x_n).

Portanto, pelo teorema anterior seque-se que:

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+p} = a$$

■

Teorema 2.7 (Permanência do Sinal)

Seja (x_n) *uma sequência, tal que:* $\lim_{n\to+\infty} x_n = a \neq 0$*, então,*

tem-se:

$$|x_n| > \frac{|a|}{2}, \forall n \geq n_0.$$

♡

Majorações

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \neq 0$, então,

$$\begin{aligned} |a| - |x_n| &\leq |x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n| - |a| > -\varepsilon, \forall n \geq n_0 \\ &\Longrightarrow |x_n| > |a| - \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2}, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$.

Demonstração

Dado $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} |a| - |x_n| &\leq |x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n| - |a| > -\varepsilon, \forall n \geq n_0 \\ &\Longrightarrow |x_n| > |a| - \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2}, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

■

Nota *O teorema da parnanência no sinal nos diz que:*

Se $a > 0$, então, a partir da ordem n_0, todos os termos da sequência $x_n > 0, \forall n \geq n_0$.

Analogamente, tem-se:

Se $a < 0$, então, a partir da ordem n_0, todos os termos da sequência $x_n < 0, \forall n \geq n_0$.

Teorema 2.8 (Propriedades operatórias)

Sejam (x_n) e (y_n) sequências, tais que: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$.

Temos então que:

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = a + b$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = a - b$.

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (cx_n) = ac$

(iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n . y_n) = a.b$.

(v) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{b}, b \neq 0$.

(vi) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}, b \neq 0$.

♡

Algumas Majorações:

(i)

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Vale ressaltar que:

$$|b - y_n| = |y_n - b|$$

$$\begin{aligned} |(x_n - y_n) - (a-b)| &= |(x_n - a) + (b - y_n)| \\ &\leq |x_n - a| + |b - y_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} |cx_n - ac| &= |c| \, . \, |(x_n - a)| \\ &\leq |c| \, . \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon \\ |cx_n - ac| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} (x_n . y_n) - (a.b) &= x_n . y_n + x_n b - x_n b - ab = x_n . y_n - x_n b + + x_n b - ab \\ &= x_n (y_n - b) + b (x_n - a) \, . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |(x_n . y_n) - (a.b)| &= |x_n (y_n - b) + b (x_n - a)| \\ &\leq |x_n| \, . \, |y_n - b| + |b| \, . \, |x_n - a| \\ &< M . \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \, . \frac{\varepsilon}{2 |b|} = \varepsilon \end{aligned}$$

(v)

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - y_n}{y_n b} \right| = \frac{|b - y_n|}{|y_n b|}. \tag{1}$$

e

$$|y_n| > \frac{|b|}{2}, \forall n \geq n_0 \text{ e } b \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}, \forall n \geq n_0 \text{ e } b \neq 0 \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) vem:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - y_n}{y_n b} \right| = \frac{|b - y_n|}{|y_n b|} \\ &= \frac{|b - y_n|}{|y_n| \, . \, |b|} < \frac{2}{|b|} \frac{|b - y_n|}{|b|} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow |b - y_n| < \frac{\varepsilon \, |b|^2}{2}. \end{aligned}$$

Demonstração

(i) Dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1 (\varepsilon), n_2 (\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tais que:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1$$
$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_2.$$

Agora, tomando-se; $n_0 = \max \{n_1 (\varepsilon), n_2 (\varepsilon)\}$, segue-se que:

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a+b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$|(x_n + y_n) - (a+b)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=a+b.$$

■

Demonstração

(ii) Dado $\varepsilon>0$, existem $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, tais que:

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}, \forall n\geq n_1$$
$$|b-y_n|<\frac{\varepsilon}{2}, \forall n\geq n_2.$$

Agora, tomando-se; $n_0=\max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, segue-se que:

$$\begin{aligned} |(x_n-y_n)-(a-b)| &= |(x_n-a)+(b-y_n)| \\ &\leq |x_n-a|+|b-y_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \end{aligned}$$

Portanto,

$$|(x_n-y_n)-(a-b)|<\varepsilon, \forall n\geq n_0.$$

Ou ainda,

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=a-b.$$

■

Demonstração

(iii) Dado $\varepsilon>0$, existe $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, tal que:

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{|c|}, \forall n\geq n_0, c\neq 0$$

$$\begin{aligned} |cx_n-ac| &= |c|\,.\,|(x_n-a)| \\ &\leq |c|\,.\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon \\ |cx_n-ac| &< \varepsilon, \forall n\geq n_0 \end{aligned}$$

De sorte que:

$$|cx_n-ac|<\varepsilon,, \forall n\geq n_0.$$

Dito de outra forma, vem:

$$\lim_{n\to+\infty}(cx_n)=ac$$

■

Demonstração

(iv) Dado $\varepsilon>0$, existem $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, tais que:

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2|b|}, \forall n\geq n_1(\varepsilon).$$

E procedendo de forma análoga, temos:

$$|x_n|\leq M, \forall n$$

$$|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}, \forall n\geq n_2(\varepsilon).$$

e

$$\begin{aligned}(x_n.y_n)-(a.b) &= x_n.y_n+x_nb-x_nb-ab=x_n.y_n-x_nb++x_nb-ab\\ &= x_n\left(y_n-b\right)+b\left(x_n-a\right).\end{aligned}$$

Agora, tomando-se; $n_0=\max\left\{n_1\left(\varepsilon\right),n_2\left(\varepsilon\right)\right\}$, segue-se que:

$$\begin{aligned}\left|(x_n.y_n)-(a.b)\right| &= \left|x_n\left(y_n-b\right)+b\left(x_n-a\right)\right|\\ &\leq \left|x_n\right|.\left|y_n-b\right|+\left|b\right|.\left|x_n-a\right|\\ &< M.\frac{\varepsilon}{2M}+\left|b\right|.\frac{\varepsilon}{2\left|b\right|}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|x_n.y_n-a.b\right|<\varepsilon.$$

■

Demonstração

(v) Dado $\varepsilon>0$, existe $n_0\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$, tal que:

$$\left|b-y_n\right|<\frac{\varepsilon\left|b\right|^2}{2},\forall n\geq n_0$$

e

$$\left|y_n\right|>\frac{\left|b\right|}{2},\forall n\geq n_0\text{ e }b\neq 0\Longrightarrow\frac{1}{\left|y_n\right|}<\frac{2}{\left|b\right|},\forall n\geq n_0\text{ e }b\neq 0$$

Assim,

$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b-y_n}{y_nb}\right|=\frac{\left|b-y_n\right|}{\left|y_nb\right|}. \tag{1}$$

e

$$\left|y_n\right|>\frac{\left|b\right|}{2},\forall n\geq n_0\text{ e }b\neq 0\Longrightarrow\frac{1}{\left|y_n\right|}<\frac{2}{\left|b\right|},\forall n\geq n_0\text{ e }b\neq 0. \tag{2}$$

Agora, decorre de (1) e (2) que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b-y_n}{y_nb}\right|=\frac{\left|b-y_n\right|}{\left|y_nb\right|}\\ &= \frac{\left|b-y_n\right|}{\left|y_n\right|.\left|b\right|}<\frac{\varepsilon\left|b\right|^2}{2}.\frac{2}{\left|b\right|.\left|b\right|}<\varepsilon\\ \left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{b}\right| &< \varepsilon,\forall n\geq n_0.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{y_n}\right)=\frac{1}{b}$$

■

Demonstração

(vi) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n.\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{y_n}\right)=a.\frac{1}{b}=\frac{a}{b},b\neq 0.$ ■

Proposição 2.1 (Teste da Razão)

Se $x_n>0$, $\forall$ n *e* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=L<1$, *então,* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$ ♠

Demonstração

Seja $r \in \mathbb{R}$, tal que: $L < r < 1$ e fixemos $\varepsilon = r - L > 0$, por definição de limite existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < r - L, \forall n \geq n_0 \tag{1}$$

Decorre de (1) que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - L < r - L, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_{n+1} < rx_n < x_n, \ \forall n \geq n_0. \tag{2}$$

Logo, $0 < x_{n+1} < x_n$, $\forall n \geq n_0$ e, portanto, a seqüência (x_n) é limitada inferiormente por zero, e decrescente, a partir da ordem n_0, sendo portanto convergente.

Seja $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, se a fosse positivo, então, teríamos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

Isso contradiz a hipótese de ser $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$.

Portanto, $a = 0$. ∎

Exemplo 2.29

Para ilustrar o teorema, estude a convergência das seqüências descritas a seguir:

(i) (x_n), com $x_n = \frac{n!}{n^n}$; (ii) (x_n), com $x_n = \frac{r^n}{n!}$, $r > 0$;

(iii) (x_n), com $x_n = \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$; (iv) (x_n), com $x_n = \frac{n^p}{2^n}.p > 0$;

(v) (x_n) ,com $x_n = \frac{n^b}{a^n}$, $a > 1$ e $b > 0$.

Demonstração

(i) Com efeito, tem-se:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ (Verifique este fato!), segue-se pelo teorema da razão que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

∎

Demonstração

(ii) (x_n), com $x_n = \frac{r^n}{n!}$, $r > 0$.

Observe que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{r^n.r}{(n+1)\,n!} \cdot \frac{n!}{r^n} = \frac{r}{n+1} \longrightarrow k = 0 < 1.$$

Logo, pelo teorema da razão para sequências, temos:

$$x_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{r^n}{n!} = 0.$$

∎

Demonstração

(iii) (x_n), com $x_n = \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)}$;

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)\,.n!}{1.3.5.\ldots(2n-1)\,.\,(2n+1)} \cdot \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{n!} = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \longrightarrow k = \frac{1}{2} < 1.$$

De sorte que: à luz do teorema da razão para sequências, temos:

$$x_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{1.3.5...(2n-1)} = 0.$$

■.

Demonstração

(iv) (x_n), com

$$x_n = \frac{n^p}{2^n}.$$

Note que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^p}{2^n.2}.\frac{2^n}{n^p} = \frac{1}{2}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow k = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, pelo teorema da razão para sequências, temos:

$$x_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{2^n} = 0.$$

■

Demonstração

(v) (x_n) ,com

$$x_n = \frac{n^b}{a^n}, a > 1 \text{ e } b > 0.$$

Com efeito,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^b}{a^n.a}.\frac{a^n}{n^b} = \frac{1}{a}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \frac{1}{a}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow k = \frac{1}{a} < 1.$$

Logo, pelo teorema da razão para sequências, temos:

$$x_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0.$$

■

Exercícios: Pensando Um Pouco Mais

1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), tais que: $1 < a < b < c$ e $b - a = c - b$, mostre que:
$$\frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}.$$

Demonstração

Queremos mostrar que:
$$\ln a . \ln c < (\ln b)^2 \,,$$
onde: $1 < a < b < c$ e $b - a = c - b$ sendo a, b, c no corpo ordenado $\mathbb{R}$.
De fato, pela comparação entre as médias geométrica e aritmética, temos:
$$\sqrt{\ln a . \ln c} < \frac{\ln a + \ln c}{2} = \ln \sqrt{ac} < \ln(\frac{a+c}{2}) = \ln b,$$
e, portanto,
$$\sqrt{\ln a . \ln c} < \ln b \Longleftrightarrow \ln a . \ln c < (\ln b)^2 \Longleftrightarrow \frac{\ln c}{\ln b} < \frac{\ln b}{\ln a}.$$
■

2. Dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, seja
$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \{x + y;\ x \in \mathbb{A} \text{ e } y \in \mathbb{B}\}$$
limitado. Prove que:
$$\sup{(\mathbb{A} + \mathbb{B})} = \sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B}$$

Demonstração

Para $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, temos: $x \leq \sup A$ e $y \leq \sup B$, donde obtemos:
$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$
Logo, $\sup A + \sup B$ é uma cota superior para o conjunto $A + B$ por conseguinte, vem:
$$\sup{(A + B)} \leq \sup A + \sup B.$$
Agora, dado $\xi > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:
$$x_0 > \sup A - \frac{\xi}{2} \text{ e } y_0 > \sup B - \frac{\xi}{2} \Longrightarrow x_0 + y_0 > \sup A + \sup B - \xi.$$
Portanto, $\sup A + \sup B$ é a menor das cotas superiores, ou ainda,
$$\sup{(A + B)} = \sup A + \sup B.$$
■

3. Num corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, se a e $a + x$ são positivos e $n \in \mathbb{N}$, mostre que:
$$(a + x)^n \geq a^n + na^{n-1}x.$$

Demonstração

Basta notar que:
$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \ldots + x^n \geq a^n + na^{n-1}x.$$
■

4. Prove que:

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0.$

Sugestão: Use o fato de
$$(1+x)^n \geq 1 + nx, x \geq -1.)$$

Demonstração

1^o Caso: $a > 1 :\ \sqrt[n]{a} > 1$, existe $h_n > 0 :$
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} &= 1 + h_n \Longrightarrow a = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n\\ &\Longrightarrow 0 < nh_n \leq a - 1 \Longrightarrow 0 < h_n \leq \frac{a-1}{n}.\end{aligned}$$
Agora, pelo teorema do sanduíche seque-se que:
$$h_n \longrightarrow 0,$$
e, portanto,
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} (1+h_n) = 1.$$
Procedendo de forma análoga, temos:

2^o Caso: $a > 1 :\ \sqrt[n]{a} < 1$, existe $k_n > 0 :$
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} &= \frac{1}{1+k_n} \Longrightarrow a = \frac{1}{(1+k_n)^n} \leq \frac{1}{1+nk_n}\\ &\Longrightarrow 1 + nk_n \leq \frac{1}{a} \Longrightarrow nk_n \leq \frac{1}{a} - 1 \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow 0 < k_n \leq \frac{1}{n}.\left(\frac{1}{a} - 1\right).\end{aligned}$$
à luz do teorema do sanduíche, obtemos:
$$k_n \longrightarrow 0.$$
De sorte que:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+k_n}\right) = 1.$$

Decorre dos casos (1) e (2) que:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0.$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Demonstração

Basta notar que:
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} &> 1 : \exists h_n > 0 :\ \sqrt[n]{n} = 1 + h_n \Longrightarrow n = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \ldots\\ &\Longrightarrow n \geq \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \Longrightarrow 0 < \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 \leq n \Longrightarrow 0 < h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Longrightarrow h_n \longrightarrow 0.\end{aligned}$$
De sorte que:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} (1+h_n) = 1.$$

5. Considere (x_n), com $x_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}$. Então, prove que: $0 < x_n < 3$.

Fatos que ajudam:

F1)

$$n! \geq 2^{n-1}, \forall n \geq 2.$$

Demonstração

De fato,

(i) Para $n = 2 : 2! \geq 2^{2-1} = 2$;

(ii) Supomha válido para $n : n! \geq 2^{n-1}$.

Então, falta mostrar para $n + 1$.

Vejamos

$$(n+1)! = (n+1)\,.n! \geq (n+1)\,.2^{n-1} \geq 2.2^{n-1} = 2^n.$$

Portanto,

$$(n+1)! \geq 2^n.$$

F2)

$$n! \geq 2^{n-1}, \forall n \geq 2 \Longrightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$x_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}$. Então, prove que: $0 < x_n < 3$.

Demonstração

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} 0 \quad &< \quad x_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} < 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots \\ &= \quad 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 < x_n < 3.$$

■

6. Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo n, prove que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Demonstração

Com efeito,

$$a \leq x_n \leq n^k \Longrightarrow \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{n^k} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^k$$

Ora,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1.$$

Segue-se daí e do teorema do sanduíche que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

■

7. Sejam $a, b, c > 0$ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$, então, prove que:

$$(a+b).(b+c).(c+a) \geq 8abc$$

Demonstração

Basta notar que:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{b+c}{2}.\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ac} \Longrightarrow (a+b).(b+c).(a+c) \geq 8a.b.c.$$

Portanto,

$$(a+b).(b+c).(c+a) \geq 8abc$$

∎

8. Prove que::

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3^2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4^2}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n^2}\right)\right) = 0.$$

Demonstração

A priori, observe que:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3^2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4^2}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n^2}\right)\right) \leq \left(\frac{\pi}{2^2}\right).\left(\frac{\pi}{3^2}\right)\ldots\left(\frac{\pi}{n^2}\right) = t_n \\ x_n &\leq \frac{\pi^{n-1}}{(n!)^2} = t_n. \end{aligned}$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\pi^n}{[(n+1)\,n!]^2}.\frac{(n!)^2}{\pi^{n-1}} = \frac{\pi}{(n+1)^2} \longrightarrow K = 0 < 1.$$

Daí, pelo teorema da razão para sequências, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0.$$

Além disso,

$$0 \leq x_n \leq \frac{\pi^{n-1}}{(n!)^2} = t_n.$$

Por conseguinte, pelo teorema do sanduíche, vem::

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3^2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4^2}\right)\ldots\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n^2}\right)\right) = 0.$$

∎

9. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$, então, prove que:

$$|a+b|^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Demonstração

Com efeito,

$$|a+b| \leq |a| + |b| \leq 2\max\{|a|, |b|\}.$$

Por conseguinte, temos:

$$|a+b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq 2^p(\max\{|a|,|b|\})^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Logo,

$$|a+b|^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

∎

10. Sejam $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ conjuntos de números reais positivos. Definamos

$$\mathbb{A}.\mathbb{B} = \{x.y;\ x \in \mathbb{A} \text{ e } y \in \mathbb{B}\}.$$

Prove que se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ forem limitados,então,

(i) $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ é limitado, sendo
(ii) $\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} = \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}$ (iii) $\inf \mathbb{A}.\mathbb{B} = \inf \mathbb{A}.\inf \mathbb{B}$

Demonstração
(i) Com efeito, $\forall x_1 \in \mathbb{A}, \forall y_1 \in \mathbb{B}$, existem $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq y_1 \leq b_2 \end{cases} \Longrightarrow \{a_1 b_1 \leq x_1 y_1 \leq a_2 b_2.$$

Logo, $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ é limitado.

■

(ii) $\forall x \in \mathbb{A}, \forall y \in \mathbb{B}$, tem-se: $x \leq \sup \mathbb{A}$ e $y \leq \sup \mathbb{B} \Longrightarrow x.y \leq \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}$.
Isto é, $\sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}$ é uma cota superior para o conjunto $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ e, portanto,

$$\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} \leq \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, existem $x_0 \in \mathbb{A}$ e $y_0 \in \mathbb{B}$, tais que:

$$x_0 > \sup \mathbb{A} - \frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})} \text{ e } y_0 > \sup \mathbb{B} - \frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})},$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \frac{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}.\epsilon + \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 \Longrightarrow \\ x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \epsilon + \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 \Longrightarrow \\ x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \epsilon, \text{ pois, } \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}$ é a menor das cotas superiores para o conjunto $\mathbb{A}.\mathbb{B}$. Logo,

$$\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} = \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}.$$

■

11. Dados a, b,ϵ no corpo ordenado $\mathbb{R}$, prove que:

$$|a - b| < \varepsilon \Longrightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon$$

conclua que

$$|a - b| < \varepsilon \Longrightarrow a < |b| + \varepsilon.$$

Demonstração
Basta notar que:

$$\begin{cases} |a| - |b| \leq |a - b| < \varepsilon \\ \text{e} \\ |b| - |a| \leq |a - b| < \varepsilon \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |a| < |b| + \varepsilon \\ \text{e} \\ |b| - \varepsilon < |a| \end{cases} \Longrightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |a| < |b| + \varepsilon,$$

além disso, vem:

$$a \le |a| < |b| + \varepsilon \Longrightarrow a < |b| + \varepsilon.$$

■

12. Para determinar o valor de "a" de uma grandeza foram feitas, em laboratório, n medições.Os valores encontrados foram $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Resolveu-se adotar como estimativa de "a" o valor para o qual a soma dos quadrados dos erros das medidas fosse mínimo. Que valor é esse?

Solução

Seja

$$\Phi(a) = (a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + \ldots + (a - x_n)^2,$$

então, fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtemos:

$$\Phi(a) = na^2 - 2a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

De sorte que, a abscissa do vértice produz

$$a_V = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

■

13. Use a definição para provar que: (x_n), com $x_n = 2 + \frac{\ln n}{n^3}$, $x_n \to 2$.

Majorações:

$|x_n - 2| = \left|2 + \frac{\ln n}{n^3} - 2\right| = \left|\frac{\ln n}{n^3}\right| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$. Daí, basta tomar $n_0 \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \ge \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0 \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \Longrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Longrightarrow |x_n - 2| = \left|2 + \frac{\ln n}{n^3} - 2\right| \\ &= \left|\frac{\ln n}{n^3}\right| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$x_n = 2 + \frac{\ln n}{n^3} \to 2.$$

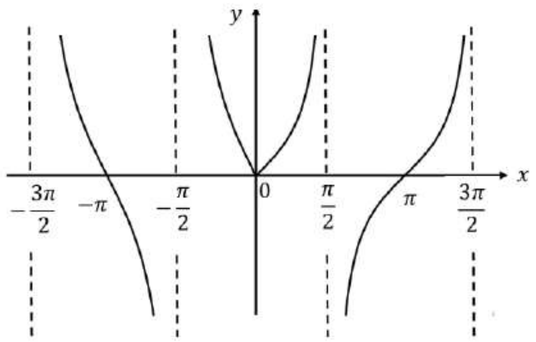
■

14. Use translações e reflexões para esboçar o gráfico da função f, definida por:

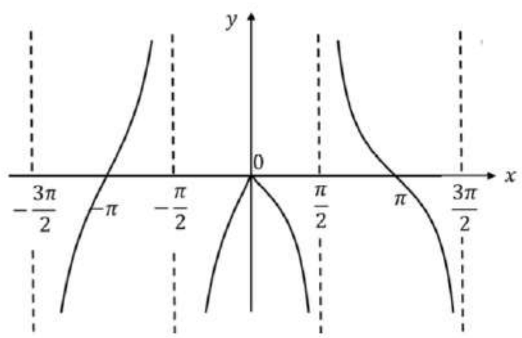
$$f(x) = |1 - 2\,\mathrm{tg}\,|x||$$

A priori, usando a definição de módulo, tem-se:

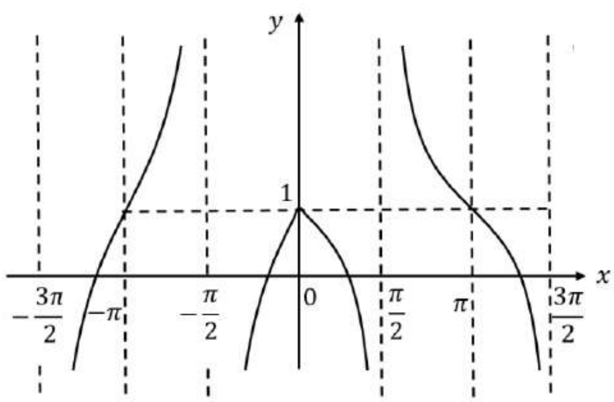
$$y_1 = 2\,\mathrm{tg}\,|x| = \begin{cases} 2\,\mathrm{tg}\,x, & x \ge 0 \\ 2\,\mathrm{tg}\,(-x), & x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y_1 = \begin{cases} 2\,\mathrm{tg}\,x, & x \ge 0 \\ -2\,\mathrm{tg}\,x, & x < 0 \end{cases}$$



$$y_2 = -2\operatorname{tg}|x| = \begin{cases} -2\operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ -2\operatorname{tg}(-x), & x < 0 \end{cases} \iff y_1 = \begin{cases} -2\operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ 2\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$

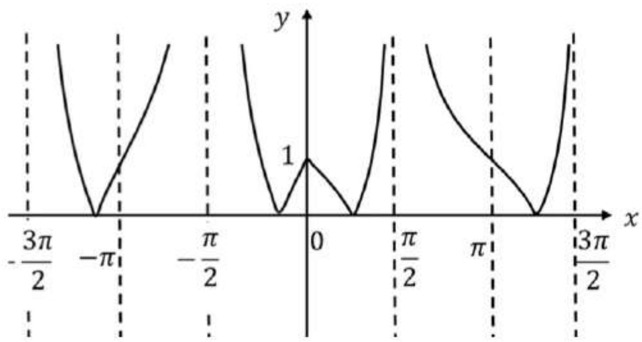


$$y_3 = 1 - 2\operatorname{tg}|x| = \begin{cases} 1 - 2\operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ 1 + 2\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$



Agora, obtemos um esboço do gráfico de f :

$$f(x) = |1 - 2\operatorname{tg}|x||$$



2.4 Intervalos Encaixantes Reais

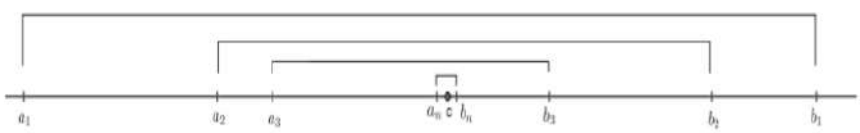
Definição 2.8

Uma sequência de intervalos encaixantes reais é uma sequência $s = ([a_n, b_n])$ *satisfazendo:*
(i) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$
(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon.$ ♣

Teorema 2.9 (Teorema dos Intervalos Encaixantes)

Sejam $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ *uma sequência de intervalos satisfazendo as seguintes condições:*
(i) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots, \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$
(Cada intervalo da sequência contém o seguinte: $\ldots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ *)*
(ii) $\forall \varepsilon > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N} : b_n - a_n < \varepsilon$
(ou seja, à medida que n *cresce o comprimento do intervalo* $[a_n, b_n]$ *vai tender a zero)*
$\mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_2 \supset \ldots \mathbb{I}_{(n-1)} \supset \mathbb{I}_n \supset \mathbb{I}_{(n+1)} \ldots$, *onde:*

$$\mathbb{I}_j = [a_j, b_j], \text{ com } j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$ ♡



Antes de passarmos a demonstração, veremos um fato básico que ajuda:

F_1) Se um número real "a" é tal que:

$$0 \leq a < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0,$$

então, $a = 0$.

Demonstração

Com efeito, $0 \leq a < \varepsilon$, para $a > 0$ tome $\varepsilon = \frac{a}{2}$.
Daí obtemos: $0 \leq a < \frac{a}{2}$. Absurdo!
Logo, a única possibilidade é: $a = 0$. ■

Demonstração

(*Existência*)
Seja $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{I}_{(n+1)} \subset \mathbb{I}_n$, então, temos:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\mathbb{A}$ é não-vazio e limitado superiormente, visto que: b_n é uma cota superior para $\mathbb{A}$.
Seja $x_0 = \sup \mathbb{A}$ como x_0 é a menor das cotas superiores para $\mathbb{A}$, tem-se:

$$a_n \leq x_0 \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

(*Unicidade*)
Se x_0 é outro número real, tal que:

$$a_n \leq y_0 \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow -b_n \leq y_0 \leq -a_n \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$-(b_n - a_n) \leq y_0 - x_0 \leq b_n - a_n \Longleftrightarrow |y_0 - x_0| \leq b_n - a_n < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Logo, $y_0 = x_0$ (único). ■

Nota

1. *Os intervalos serem fechados é necessário, por exemplo se escolhermos* $\mathbb{I}_n = [0, \frac{1}{n})$, *então, temos:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n = \Phi \text{ (vazio)}$$

2. *Os intervalos serem limitados é essencial. De fato, tome, por exemplo,* $\mathbb{I}_n = [0, +\infty)$, *então, tem-se:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n = \Phi \text{ (vazio)}$$

Teorema 2.10 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)

Toda sequência limitada de números reais admite pelo menos uma subsequência convergente. ♡

Demonstração

com efeito, (x_n) é uma sequência limitada, então, existem $a, b \in \mathbb{R}$, tais que:

$$a \leq x_n \leq b, \forall n \in \mathbb{N} : (x_n) \subset [a, b]$$

$\mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_2 \supset \ldots \mathbb{I}_{(n-1)} \supset \mathbb{I}_n \supset \mathbb{I}_{(n+1)} \ldots$, onde:

$$\mathbb{I}_j = [a_j, b_j] = \left[\frac{a}{2^j}, \frac{b}{2^j}\right], \text{com } j = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Daí, segue-se que:

$$|x_{n_K} - x_0| \leq |b_n - a_n| = \frac{|b - a|}{2^n}.$$

Agora, passando ao limite, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n_K} - x_0| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{|b-a|}{2^n} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_K} = x_0.$$

■

Outras forma de demonstrar veja uma das referências [2, 6, 10, 11, 13, 19]

Nota

Poderíamos demonstrar usando o resultado do teorema sobre sequências monótonas limitadas.

Proposição 2.2 (Convergência Monótona)

Se (x_n) é uma seqüência monótona limitada.
(i) Se (x_n) é não-decrescente, então, $x_n \to a$, onde $a = \sup \mathbb{A}$ e $\mathbb{A} = \{x_n;\ x_n \leq x_{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$.
(ii) Se (x_n) é não-crescente, então, $x_n \to b$, onde $b = \inf \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} = \{x_n;\ x_n \geq x_{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$.

Demonstração

(i) Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Logo, $|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$, ou ainda, $x_n \to a$. ■
(ii) Análoga! (Faça!).

Sugestão:

$$x_n \leq x_{n_0} < b + \varepsilon, \forall n \geq n_0 \tag{1}$$

e sendo b o ínfimo da seqüência (x_n), então, temos:

$$b \leq x_n,\ \forall n, \tag{2}$$

de modo que:

$$b - \varepsilon < b \leq x_n\ \forall n. \tag{3}$$

Portanto, combinando (1) e (3) segue que: $x_n \to b$. ■

Problema 2.1

Considere a sequência (x_n), tal que: $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, prove que: $x_n \to 2$.

Demonstração

Com efeito, $x_2 = \sqrt{2}$, então,

$$1 \leq x_1 < x_2 < 2 \Longrightarrow 1 \leq x_n < x_{n+1} < 2 \Longrightarrow 2 \leq 2x_n < 2x_{n+1} < 4.$$

Daí, obtemos: (x_n) é monótona crescente.

Além disso,

$$1 < \sqrt{2} \leq \sqrt{2x_n} < \sqrt{2x_{n+1}} < \sqrt{4} = 2.$$

Por conseguinte, vem: (x_n) é limitada, em particular, (x_n) é limitada superiormente.
Logo, (x_n) converge. Digamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, então, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = L$.
Agora,

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2x_n} = \sqrt{2L}.$$

Dai, vem:

$$L = \sqrt{L} \Longrightarrow L^2 = 2L \Longrightarrow \begin{cases} L = 2 \\ \text{ou} \\ L = 0. \text{ (Não convém)} \end{cases}$$

Portanto,

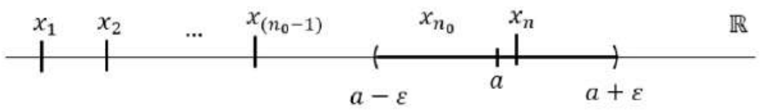
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

■

2.5 Sequência de Cauchy

Definição: Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que (x_n) é de Cauchy, quando: Dado $\varepsilon > 0$ existem $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \, \forall m > n \geq n_0$$



Nota

(A) A sequência de Cauchy nos diz que: para n arbitrariamente grande todos os termos da sequência estão próximos uns dos outros.

(B) Uma sequência converge para "a"se toda vizinhaça de "a"contém todos os termos da sequência a partir de uma ceta ordem n_0 é de se esperar que: as sequências convergentes sejam de Cauchy e vice-versa.

Exemplos

Exemplo 2.30

Use a definição para mostrar que (x_n), com $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy.

Majorações

Fixemos $m = 2n$

$$|x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1-2}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

Daí, obtemos: $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Assim, basta tomar $n_0 \geq \frac{1}{2\varepsilon}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \geq \frac{1}{2\varepsilon}$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} n \quad &\geq \quad n_0 \Longrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1-2}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon. \\ &\Longrightarrow \quad |x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1-2}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad |x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

de sorte que: (x_n) é de Cauchy. ■

Exemplo 2.31

Use a definição para mostrar que (x_n), com $x_n = \ln n$ não é uma sequência de Cauchy.

Majorações

Escolha fixar $m = 2n$ ou $m = 3n$

$$|x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n| = |\ln(2n) - \ln(n)| = \left|\ln\left(\frac{2n}{n}\right)\right| = |\ln 2| = \ln 2 > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Demonstração

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \geq \frac{1}{2\varepsilon}$, $n_0\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|x_m - x_n| = |x_{2n} - x_n| = |\ln(2n) - \ln(n)| = \left|\ln\left(\frac{2n}{n}\right)\right| = |\ln 2| = \ln 2 > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

De sorte que: $(\ln n)$ não é de Cauchy. ■

Exemplo 2.32

Use a definição para mostrar que (x_n), com $x_n = (-1)^n$ não é de Cauchy.

Demonstração

A sequência $(x_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, \ldots - 1^n, \ldots)$.
Escolha um valor apropriado fixo, por exemplo, $m = 2n$, poderia ser $m = 3n$

$$|x_m - x_{2n-1}| = |x_{2n} - x_{2n-1}| = \left|(-1)^{2n} - (-1)^{2n-1}\right| = 2 > \varepsilon = 1.$$

Logo, (x_n) não é uma sequência de Cauchy. ■

Exemplo 2.33

Se $0 < r < 1$ e $|x_{n+1} - x_n| < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que:
(x_n) é de Cauchy.

Majorações

Fixemos $m = n + 1$

$$|x_m - x_n| = |x_{n+1} - x_n| < r^n < \varepsilon.$$

Daí, escolha $0 < r < \sqrt[n]{\varepsilon}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, com $0 < r < \sqrt[n]{\varepsilon}$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &< r^n < \varepsilon \Longrightarrow \\ |x_m - x_n| &< \varepsilon, \forall m > n \geq n_0. \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. ■

Teorema 2.11

Seja (x_n) *uma sequência.*
(x_n) *converge para a se, e somente se,* (x_n) *é de Cauchy* ♡

Majorações

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - a + a - x_n| \\ &\leq |x_m - a| + |a - x_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall m, n \geq n_0 \end{aligned}$$

$(\Longrightarrow)$ (x_n) converge para $a \Longrightarrow (x_n)$ é de Cauchy.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall m \geq n_0$$

e

$$|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_0.$$

Dai, segue-se que:

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - a + a - x_n| \\ &\leq |x_m - a| + |a - x_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall m, n \geq n_0. \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy.
$(\Longleftarrow)$ (x_n) é de Cauchy $\Longrightarrow$ converge para a
(x_n) é de Cauchy $\Longrightarrow (x_n)$ é limitada,.
De fato, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} |x_n| - |x_{n_0}| &\leq |x_n - x_{n_0}| < 1, \forall n \geq n_0 \\ &\Longrightarrow |x_n| \leq 1 + |x_{n_0}|, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

assim, basta escolher

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, 1 + |x_{n_0}|\}$$

.

Logo,

$$|x_n| \leq M, \forall n.$$

Daí, segue-se do teorema do Bolzano-Weierstrass que existe subsequência convergente.(x_{n_k}), $x_{n_k} \longrightarrow a$, tal que:

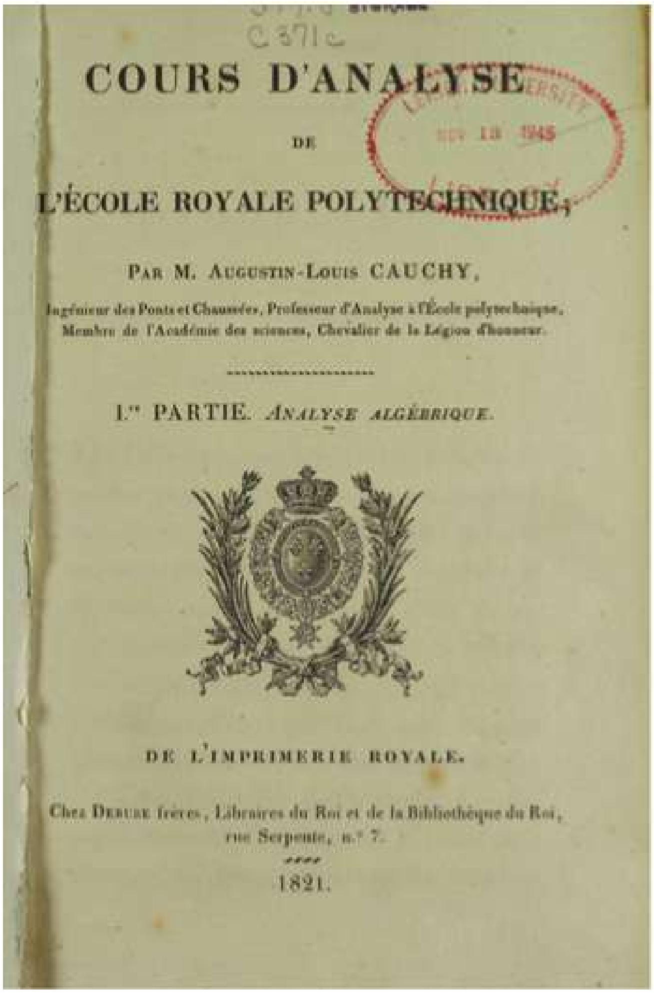
$$\begin{aligned} |x_n - a| &= |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \\ &\leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Portanto, (x_n) converge para a. ■

2.6 Um Pouco da história do matemático Cauchy

Augustin-Louis Cauchy, matemático, engenheiro e físico francês foi o pioneiro no estudo da análise real e complexa e da teoria dos grupos de permutação, fazendo ainda contribuições pioneiras para a mecânica do continuum. Nasceu no dia 1^o de agosto de 1789, em Paris, e faleceu em 23 de maio de 1857, em Sceaux – França. Além da França, ele também morou na Suíça e na Itália.

Cauchy foi um dos matemáticos responsáveis pela introdução do rigor na Matemática e foi o primeiro a divulgar e defender a forma rigorosa de se fazer Matemática (apresentação de definições e regras). Particularmente, em seus livros Cours d'analyse de l'école Polytechnique, escrito em 1821, Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, de 1823 e Leçons sur le calcul différentiel, publicado em 1829, Cauchy apresentou uma fundamentação completa do Cálculo, estabelecendo o caráter que ele tem nos dias de hoje.



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

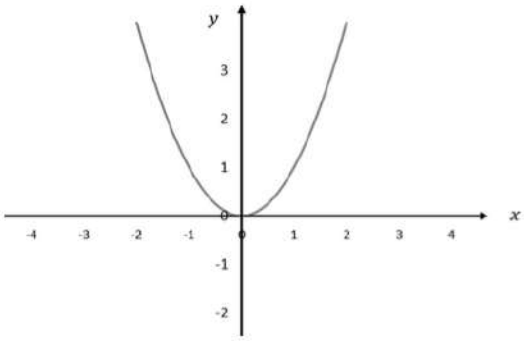
1821.

Capítulo Apêndice A

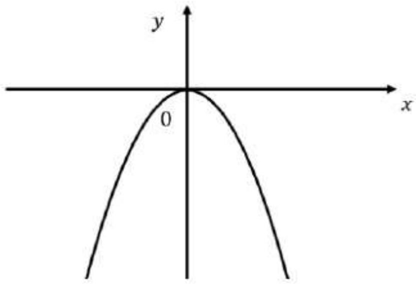
3.1 Gráficos de Funções Elementares

Exemplo 3.1

(i) $f(x) = x^2$

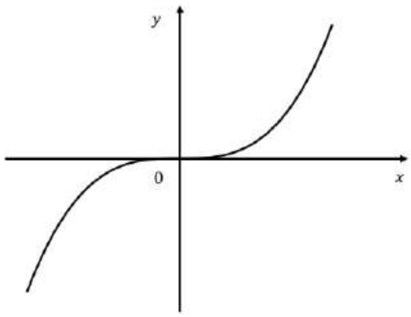


(ii) $f(x) = -x^2$

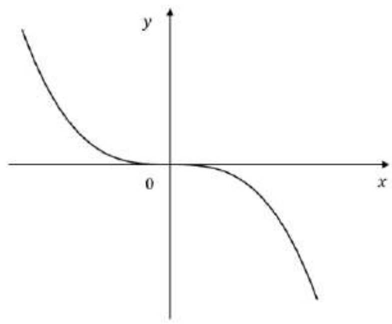


Exemplo 3.2

(i) $f(x) = x^3$

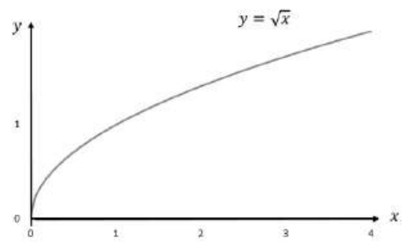


$(ii)\ f\,(x) = -x^3$

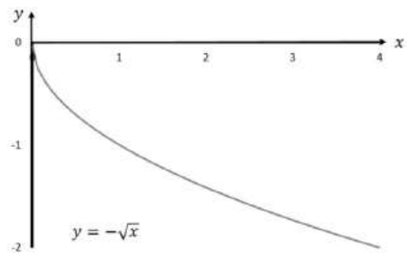


Exemplo 3.3

$(i)\ \ f\,(x) = \sqrt{x}$

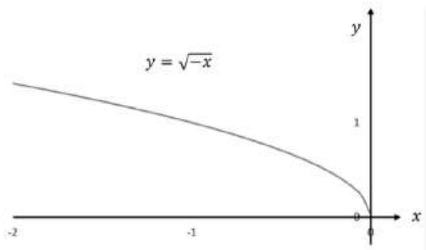


$(ii)\ f\,(x) = -\sqrt{x}$

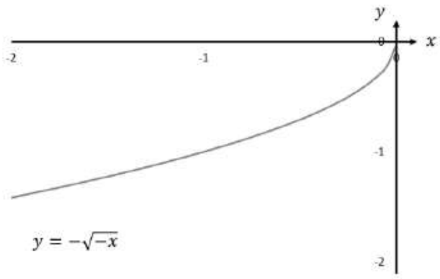


Exemplo 3.4

$(i)\ \ f\,(x) = \sqrt{-x}$

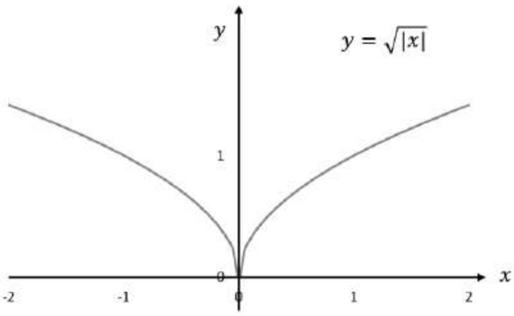


$(ii)\ f(x) = -\sqrt{-x}$



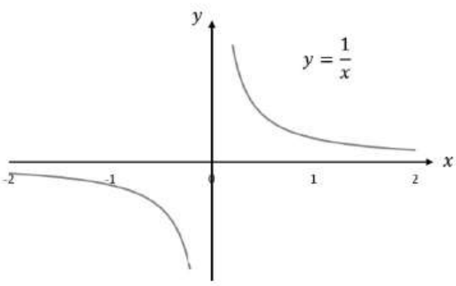
Exemplo 3.5

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

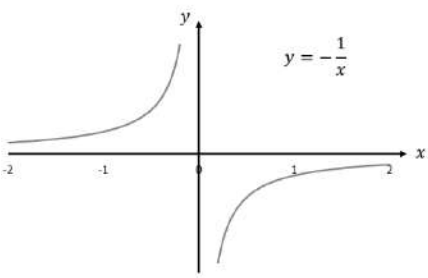


Exemplo 3.6

$(i)\ f(x) = \frac{1}{x}$

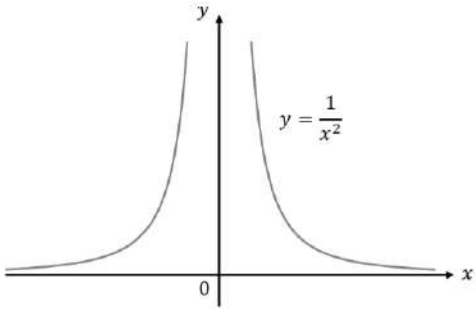


$(ii)\ f(x) = -\frac{1}{x}$

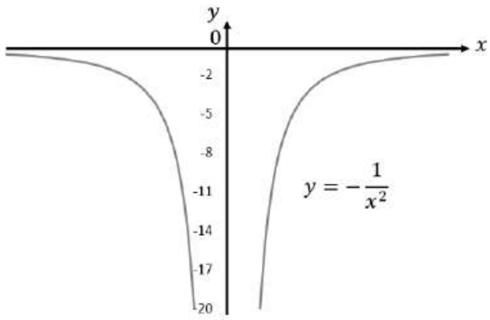


Exemplo 3.7

$(i)\ f(x) = \frac{1}{x^2}$

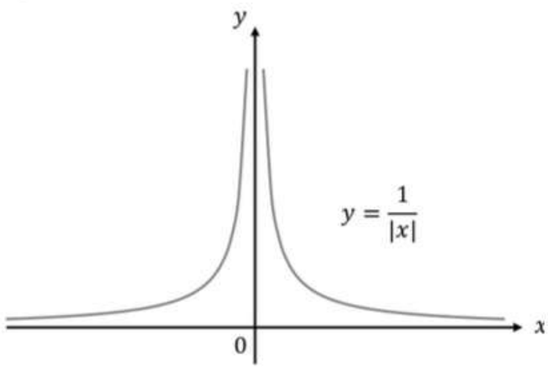


$(ii)\ f(x) = -\frac{1}{x^2}$



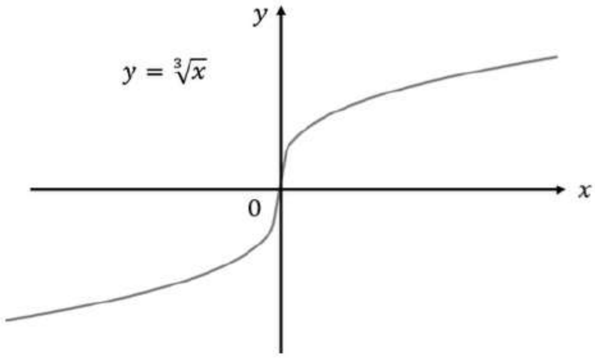
Exemplo 3.8

$$f(x) = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

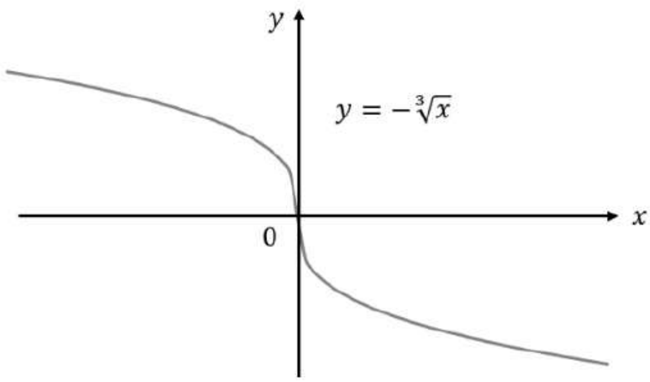


Exemplo 3.9

(i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



(ii) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$



Uma pausa para comentar sobre a função exponencial de base "e"

Seja

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 2,718 = e.$$

então, fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots$, tem-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1+1)^2 = 2 \\ a_2 &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \\ a_3 &= \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \simeq 2,37 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Daí, continuando com o processo, segue-se que:

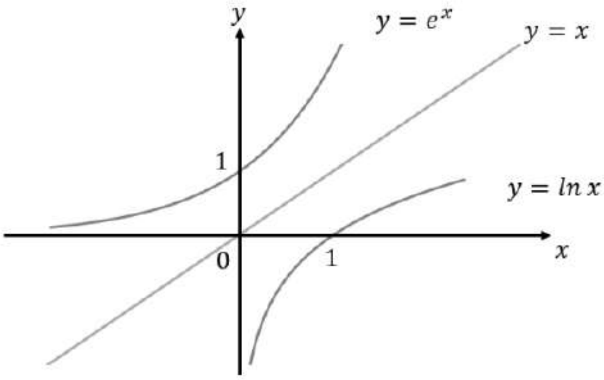
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 2,718\ldots = e.$$

Cujo valor é aproximadamente [1]

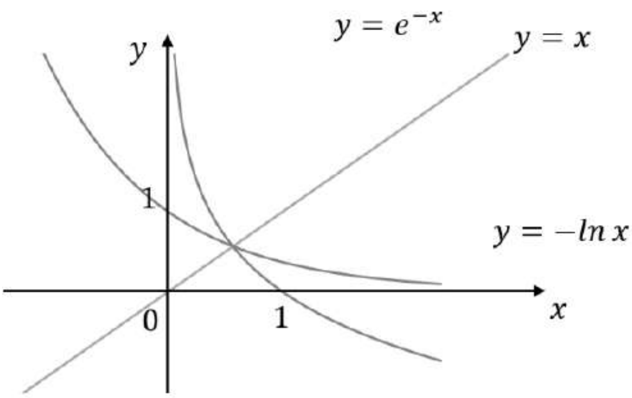
$$e \simeq 2,718281828459045235360287$$

Exemplo 3.10

$(i)\ f(x) = e^x$ $\qquad$ $(ii)\ g(x) = \ln x$



$(i)\ f(x) = e^{-x}$ $\qquad$ $(ii)\ g(x) = -\ln x$

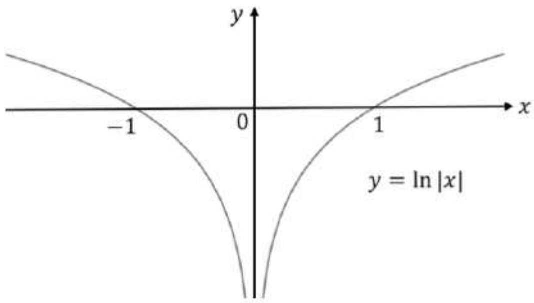


[1]O número "e"é uma constante matemática que é a base dos logaritmos naturais. Por vezes é chamado número de Euler (não confundir com a constante de Euler) em homenagem ao **matemático suíço Leonhard Euler**, número de Napier, em homenagem a **John Napier**, número de Neper, constante de Néper, número neperiano, número exponencial e outros. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

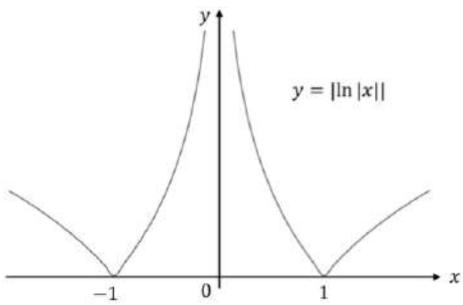
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 2,711828\ldots = e$$

Exemplo 3.11

$(i)\ f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



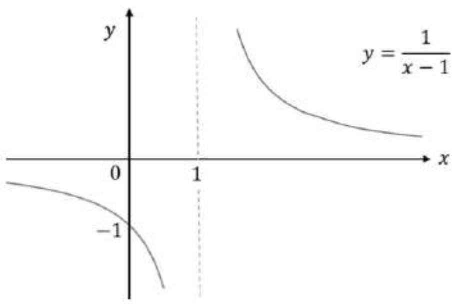
$(ii)\ f(x) = |\ln|x||$



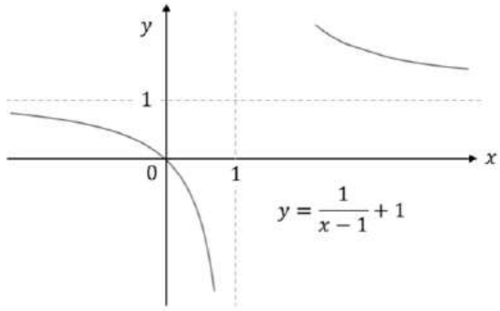
Exemplo 3.12

$f(x) = \left|\frac{1}{x-1} + 1\right|$

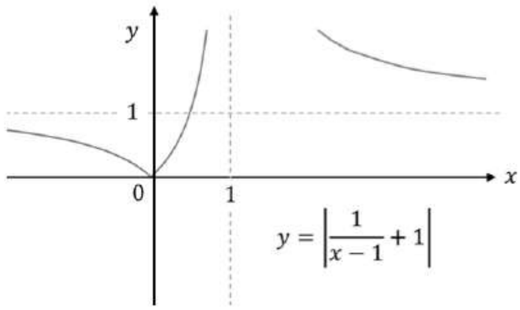
$(i)\ f(x) = \frac{1}{x-1}$



$(ii)\ f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$

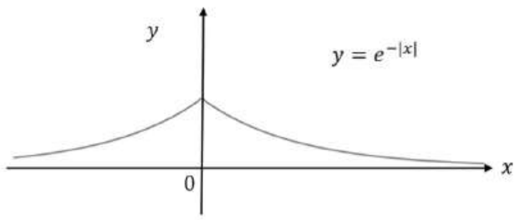


$(iii)\ f(x) = \left|\frac{1}{x-1} + 1\right|$



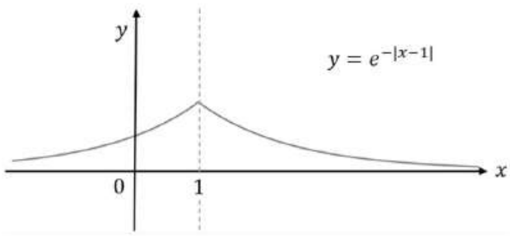
Exemplo 3.13

$(i)\ y_1 = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^{-(-x)}, & x < 0 \end{cases}$



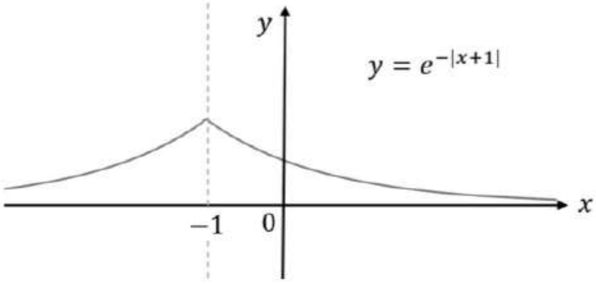
$(ii)\ y_2 = e^{-|x-1|}$

(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{-|x|}$ deslocando uma unidade à direita)



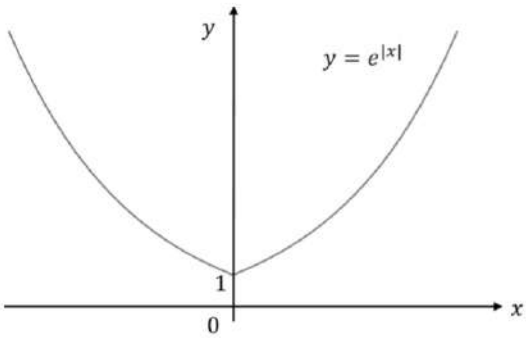
(iii) $y_2 = e^{-|x+1|}$

(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{-|x|}$ deslocando uma unidade à esquerda)

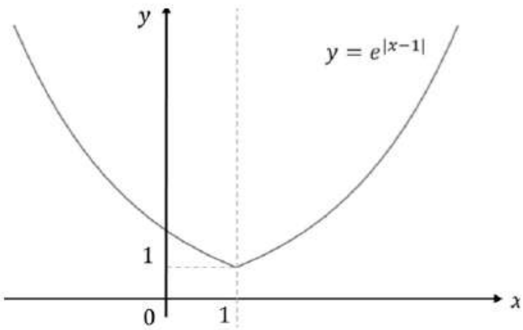


Exemplo 3.14

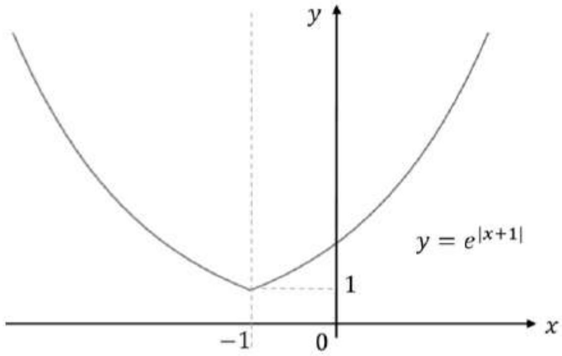
(i) $y_1 = e^{|x|}$ (ii) $y_2 = e^{|x-1|}$



(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{|x|}$ deslocando uma unidade à direita)

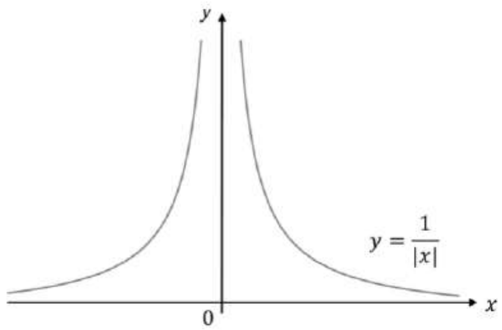


(iii) $y_2 = e^{|x+1|}$
(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{|x|}$ deslocando uma unidade à esquerda)

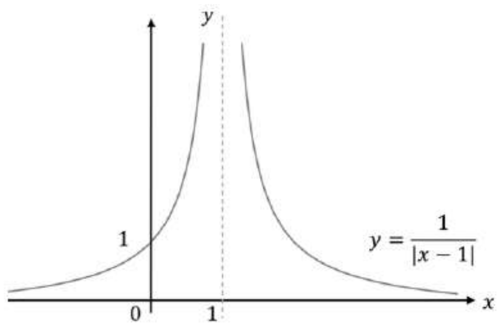


Exemplo 3.15

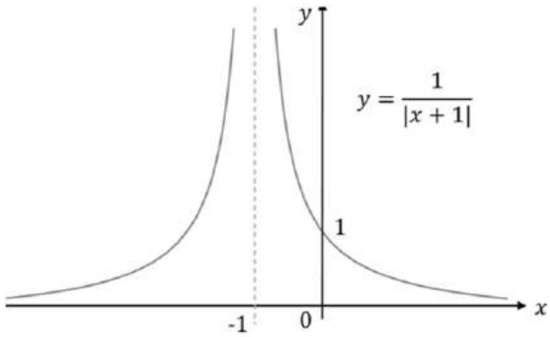
(i) $y_1 = \frac{1}{|x|}$



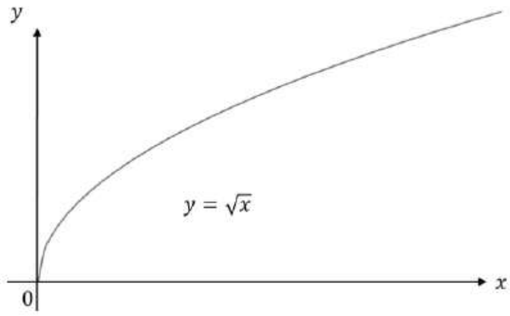
(ii) $y_2 = \frac{1}{|x-1|}$
O gráfico de $y_2 = \frac{1}{|x-1|}$ é obtido de $y_1 = \frac{1}{|x|}$ deslocando 1 unidade à direita.



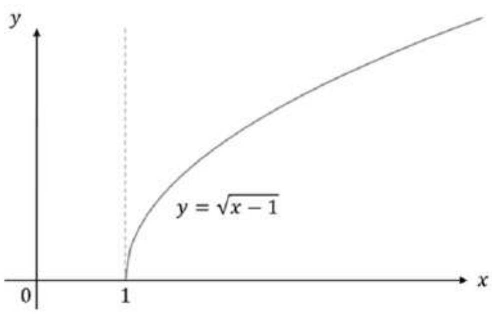
$(iii)\ y_3 = \frac{1}{|x+1|}$
O gráfico de $y_3 = \frac{1}{|x+1|}$ é obtido de $y_1 = \frac{1}{|x|}$ deslocando 1 uma unidade á esquerda.



Exemplo 3.16
$(i)\ y = \sqrt{x}$

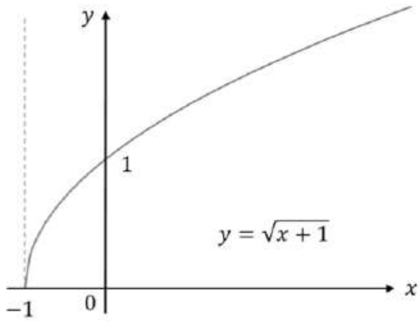


$(ii)\ y_1 = \sqrt{x-1}$
O gráfico de $y_1 = \sqrt{x-1}$ é obtido de $y = \sqrt{x}$ deslocando 1 unidade à direita.



(iii) $y_2 = \sqrt{x+1}$

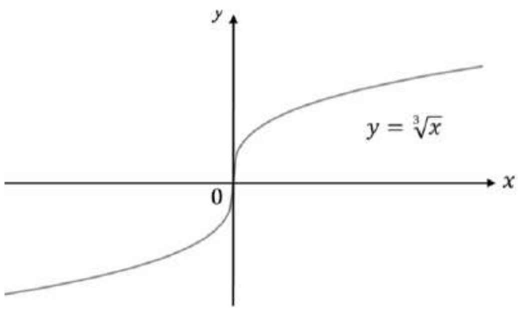
O gráfico de $y_2 = \sqrt{x+1}$ é obtido de $y = \sqrt{x}$ deslocando 1 unidade à esquerda.



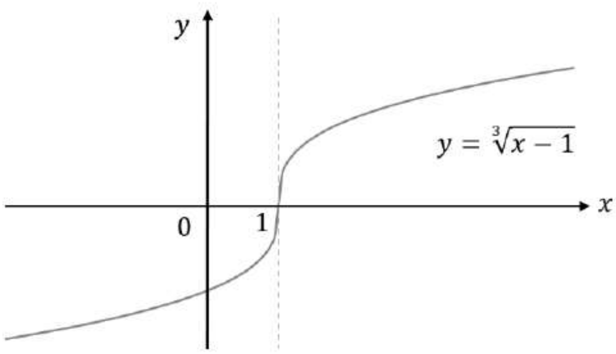
3

Exemplo 3.17

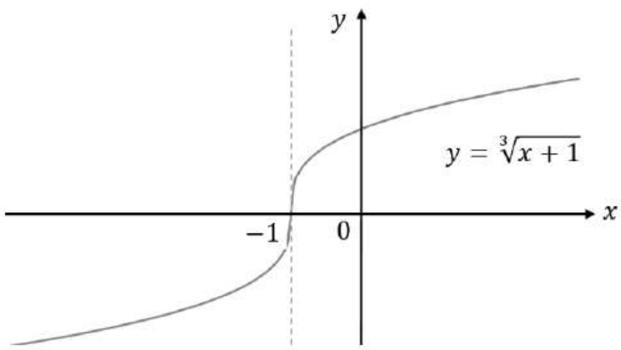
(i) $y = \sqrt[3]{x}$



(ii) $y = \sqrt[3]{x-1}$ é obtido de $y = \sqrt[3]{x}$ deslocando uma 1 unidade à direita.

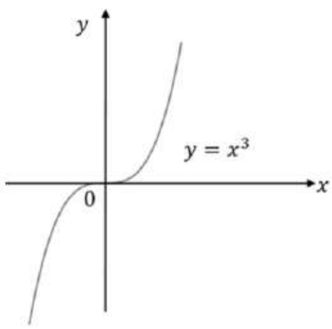


(iii) $y = \sqrt[3]{x+1}$ é obtido de $y = \sqrt[3]{x}$ deslocando uma 1 unidade à esquerda.

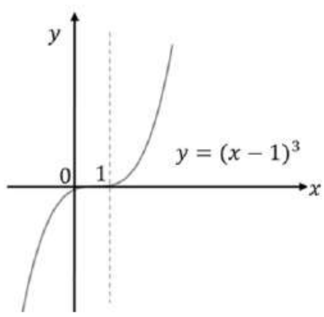


Exemplo 3.18

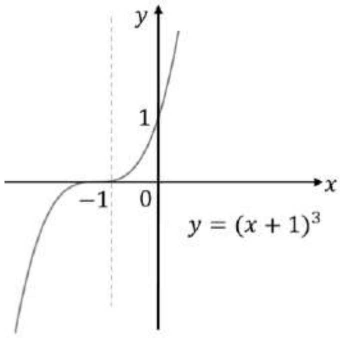
(i) $y = x^3$



(ii) $y_1 = (x-1)^3$ é obtido de $y = x^3$ deslocando uma 1 unidade à direita.



(iii) $y_2 = (x+1)^3$ é obtido de $y = x^3$ deslocando uma 1 unidade à esquerda.



3.2 Funções Pares e Ímpares

Definições:
Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

(i) f é par, se: $f(x) = f(-x), \forall x \in X = D(f)$
(ii) f é ímpar, se: $f(x) = -f(-x), \forall x \in X = D(f)$.

Exemplos

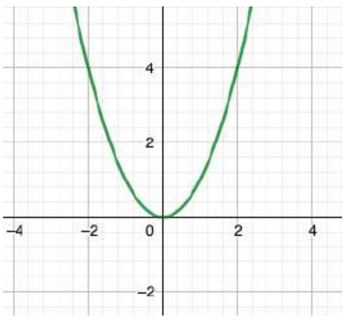
Verifique quais das funções são pares ou ímpares:

Exemplo 3.19
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2$

Basta observar que:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.
Esboço do gráfico $f(x) = x^2$



Exemplo 3.20

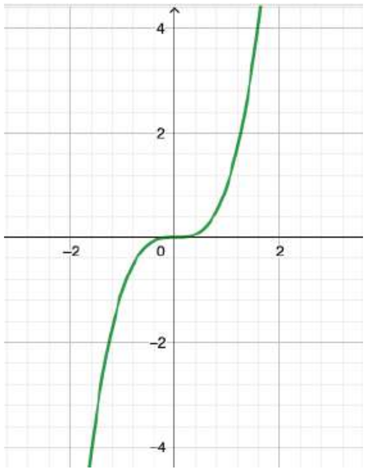
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^3$

com efeito,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico $f(x) = x^3$



Exemplo 3.21

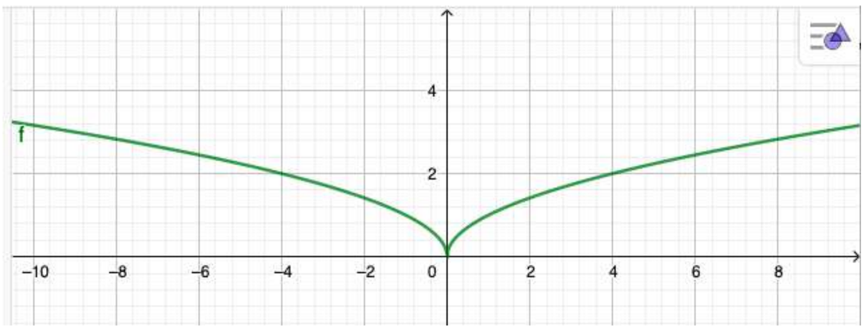
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \sqrt{|x|}$

Basta notar:

$$f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico $f(x) = \sqrt{|x|}$



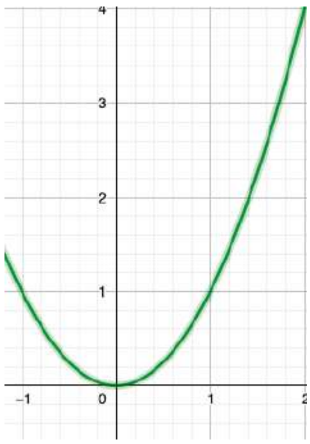
Exemplo 3.22

$f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2$.

Cuidado

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

não vale $\forall x \in D(f) = [-1, 2]$, por exemplo, $f(2) = 2^2$ e $f(-2)$ não está definida no intervalo. Logo, f não é uma função par nem ímpar.
Assim, devemos ter o cuidado com a função e se vale a simetria para todo valor do domínio da função.
Esboço do gráfico de $f(x) = x^2, \forall x \in [-1, 2]$



Atenção

A única função par e ímpar ao mesmo tempo é a função identicamente nula

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 0 = f(x), \ f \text{ é uma função par} \\ f(-x) &= 0 = -f(x), \ f \text{ é uma função ímpar.} \end{aligned}$$

Exemplo 3.23

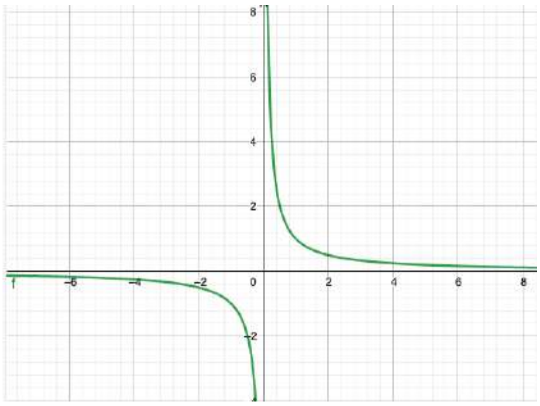
$f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \frac{1}{x}$

com efeito,

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$



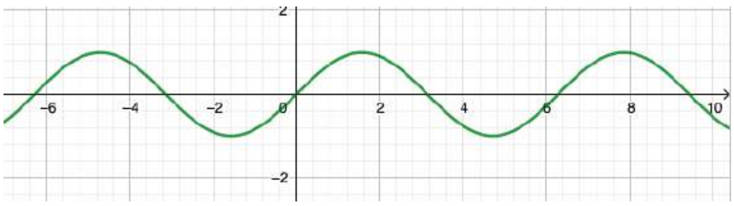
Exemplo 3.24

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \sin x$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \sin x$



Destacando

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$.
Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$
Período de $f : p(f) = 2\pi$

Exemplo 3.25

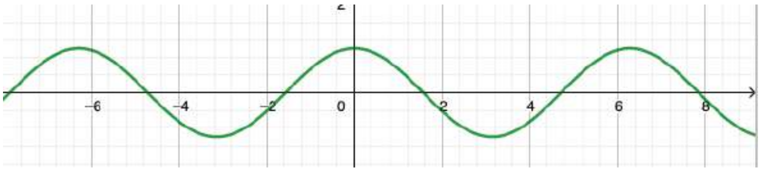
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \cos x$

Basta observar que:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico de $f(x) = \cos x$



Destacando

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$.
Imagem de $f : \text{Im}(f) = [-1, 1]$
Período de $f : p(f) = 2\pi$

Exemplo 3.26

A função **tangente** $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

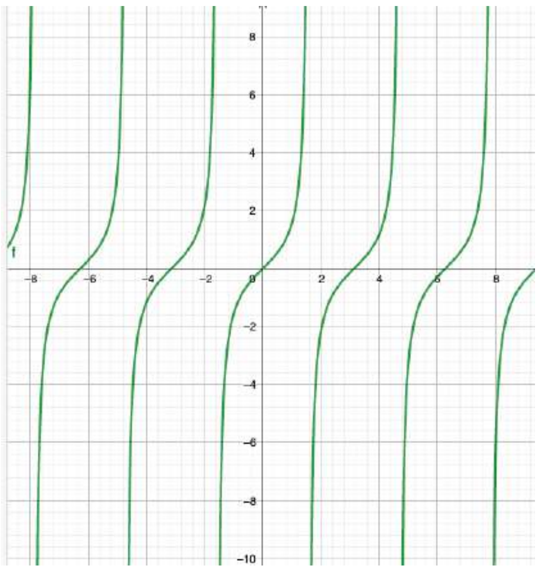
$$f(x) = \text{tg}\, x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \text{tg}(-x) = -\text{tg}(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \text{tg}\, x$.



Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f : \text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e
(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

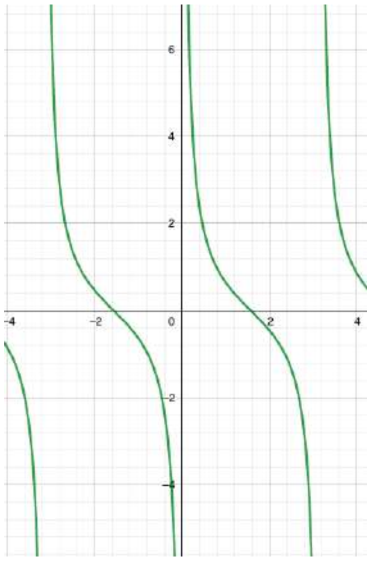
Exemplo 3.27

A função **cotangente** $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{cotg} x.$$

Basta observar que: $f(-x) = \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}$. Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{cotg} x$.



Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ e
(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

Exemplo 3.28

A função **secante** $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

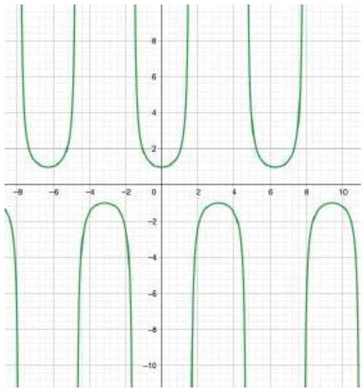
$$f(x) = \sec x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \sec(-x) = \sec(x) = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico de $f(x) = \sec x$.



Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
(iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

Exemplo 3.29

A função **cossecante** $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

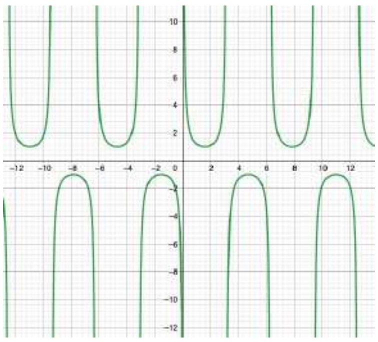
$$f(x) = \operatorname{cossec} x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \operatorname{cossec}(-x) = -\operatorname{cossec}(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{cossec} x$.

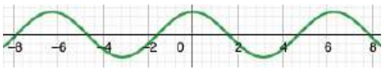


Destacando

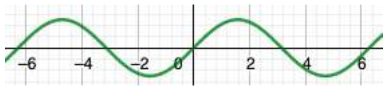
(i) Domínio de f : $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
(iii) período de f : $p(f) = 2\pi$.

Exemplo 3.30

Funções trigonométricas pares e ímpares:



(a) $\cos(-\theta) = \cos\theta$



(b) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

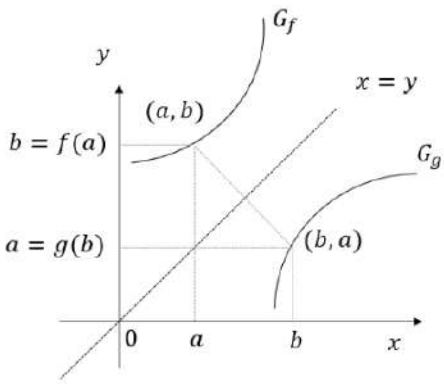
$$(i) \quad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad (ii) \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Consequências

$$\begin{array}{llll} (i) & \sec(-\theta) = \sec\theta & (ii) & \operatorname{cossec}(-\theta) = -\operatorname{cossec}\theta \\ (iii) & \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta & (iv) & \operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg}\theta. \end{array}$$

3.3 Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função injetora:



Fatos

1.

$$(a, b) \in G(f) \Longleftrightarrow (b, a) \in G(g).$$

Dito de outro modo, temos:

$$\begin{aligned} (a,b) \quad &\in \quad G(f) \Longleftrightarrow b = f(a) \\ &\Longleftrightarrow \quad g(b) = g[f(a)] = a \\ &\Longleftrightarrow \quad g(b) = a \\ &\Longleftrightarrow \quad (b,a) \in G(g) = G\left(f^{-1}\right). \end{aligned}$$

2. Toda função injetora estritamente crescente (ou decrescente) no seu domínio, admite inversas.

Definição:

Definição 3.1

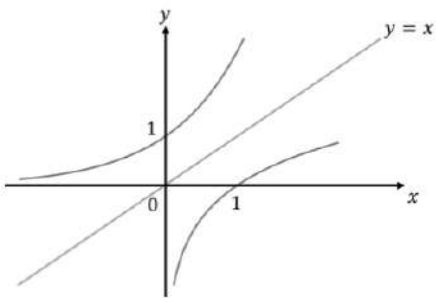
Seja $g : Y \longrightarrow X$ *uma função. Dizemos que:* g *é a inversa de* $f : X \longrightarrow Y$*, se:*

$$(i) \quad (g \circ f)(x) = x, \forall x \in D(f) \qquad (ii) \quad (f \circ g)(y) = y, \forall y \in D(g)$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & g \circ f & X \end{array}$$

♣



Nota

(i)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & Y \end{array}$$

(ii) *Cuidado*

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

(iii) *Notação*

g é a função inversa de f

$$g = f^{-1}.$$

(iv) *$g : Y \longrightarrow X$ é a função inversa de $f : X \longrightarrow Y$*

Afirmação 1: $f : X \longrightarrow Y$ é injetora.

De fato,

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmação 2: f é sobrejetora.
com efeito,

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : x = g(y) \Longrightarrow f(x) = f(g(y)) = y.$$

De sorte que: f é sobrejetora. ■
Consequentemente, vem: f é bijetora.

Conclusão:

$$f : X \longrightarrow Y \text{ invertível} \Longleftrightarrow f \text{ é bijetora.}$$

Nota
Alguns textos do Ensino Médio chama invertível de inversível.

Exemplos

Exemplo 3.31
Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = -2x + 1.$$

Determine $g = f^{-1}$

Solução

Com efeito,

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = -2g(x) + 1 = x.$$

Logo,

$$-2g(x) + 1 = x \Longrightarrow -2g(x) = x - 1 \Longrightarrow 2g(x) = -x + 1 \Longrightarrow g(x) = f^{-1}(x) = \frac{-x+1}{2}.$$

Observe que:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{-f(x)+1}{2} = \frac{-[-2x+1]+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

e

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = -2f^{-1}(x) + 1 = -2\left[\frac{-x+1}{2}\right] + 1 = \frac{2x-2+2}{2} = x$$

Exemplo 3.32

Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função,definida por:

$$f(x) = \sqrt{x},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Determine $g = f^{-1}$.

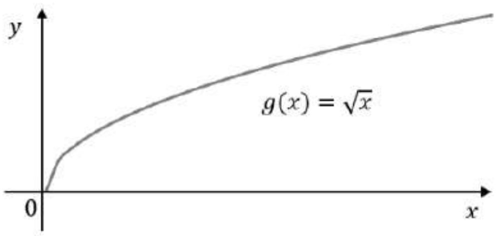
Solução

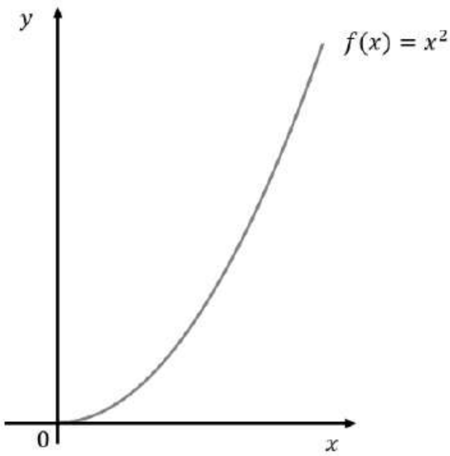
De fato, $g = f^{-1} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = x \Longrightarrow \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 = x^2 \Longrightarrow |g(x)| = x^2 \geq 0.$$

Portanto,

$$g(x) = f^{-1}(x) = x^2.$$





Vale ressaltar que:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

e

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = [f(x)]^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = |x| = x.$$

Exemplo 3.33

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^3.$$

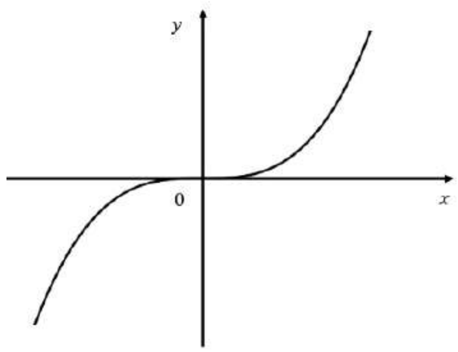
Solução

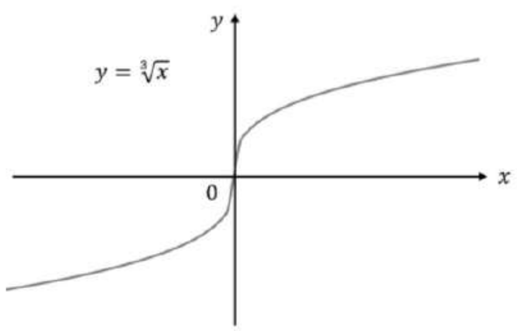
De fato,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 = x \Longrightarrow g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

De sorte que:

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$





Vale salientar que:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = \left[f^{-1}(x)\right]^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

e

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Exemplo 3.34

Seja $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \ln x.$$

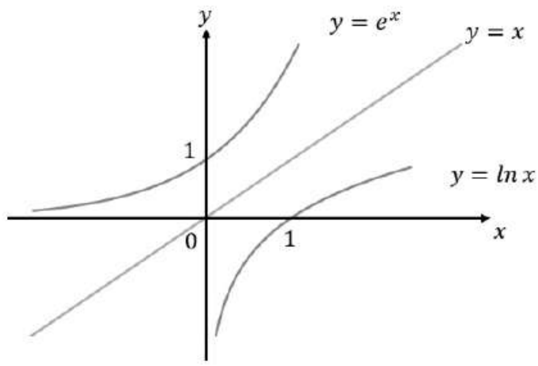
Solução

De fato, $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g = f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R} : y > 0\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln[g(x)] = x \Longrightarrow g(x) = e^x.$$

De sorte que:

$$g(x) = f^{-1}(x) = e^{x}.$$



Note que:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = \ln\left[f^{-1}(x)\right] = \ln\left(e^{x}\right) = x \ln e = x.$$

$\ln e = 1$

e

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\ln x} = x.$$

Exemplo 3.35

Seja $f : \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} \longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$, definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x-2}.$$

Pede-se:

(i) $g = f^{-1}$ (ii) Esboço dos gráficos de f e f^{-1}.

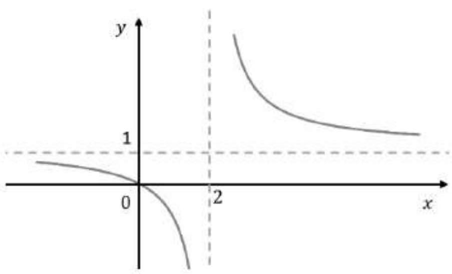
Solução

(i) *Por definição, temos:*

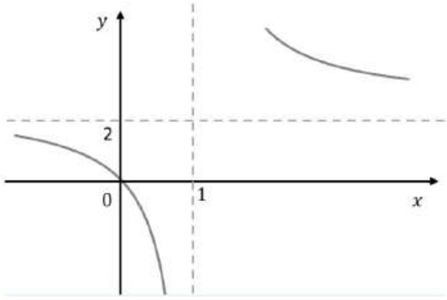
$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{g(x)}{g(x)-2} = x \Longrightarrow g(x) = xg(x) - 2x \\ &\Longrightarrow g(x) - xg(x) = -2x \Longrightarrow g(x)[1-x] = -2x \\ &\Longrightarrow g(x) = f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}. \end{aligned}$$

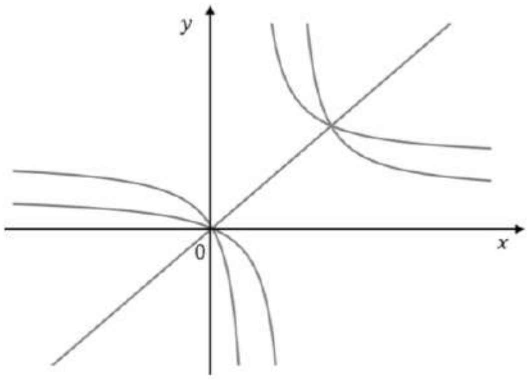
(ii) *Esboço dos gráficos de* f *e* $g = f^{-1}$.

$f(x) = \frac{x}{x-2}$



$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{2x}{x-1}$





Exemplo 3.36

Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função, definida por:

$$f(x) = \sqrt{x-1},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Afirmação 1: f é injetora.

De fato,

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 &\in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1} \\ &\Longrightarrow \left(\sqrt{x_1 - 1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2 - 1}\right)^2 \Longrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \\ &\Longrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2, \text{ visto que } x_1, x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmação 2: f é sobrejetora.

Note que:

$$y = \sqrt{x-1} \Longrightarrow x - 1 = y^2 \Longrightarrow x = 1 + y^2.$$

Com efeito,

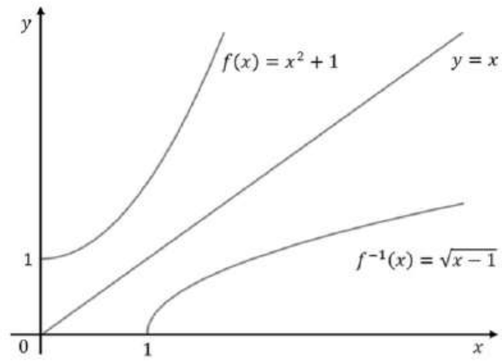
$$\begin{aligned} \forall y &\in CD(f) = \mathbb{B} : \exists x = 1 + y^2 \in D(f) = \mathbb{A} : \\ f(x) &= f\left(1 + y^2\right) = \sqrt{1 + y^2 - 1} = |y| = y. \end{aligned}$$

Portanto,: f é sobrejetora. Por conseguinte, vem: f é bijetora. ■

Agora, a função inversa da função f, será dada por:

$$g = f^{-1} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = x \Longrightarrow |g(x) - 1| = x^2 \Longrightarrow g(x) = x^2 + 1$$



Uma pausa para alguns comentários:

Em alguns textos do Ensino Médio, achar a inversa de uma função usa-se "trocar x por y e expressa y como função de x".´Parece mágica da forma que se procede. A título ilustrativo, escolha:

$$f(x) = x^2.$$

Vejamos $y = x^2$, trocando x por y, vem:

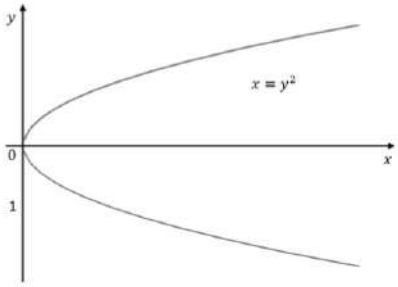
$$y = x^2 \Longrightarrow x = y^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x}.$$

e agora, expressando y como função de x, quem é a função inversa?:

$$\left\{ \begin{array}{c} g(x) = \sqrt{x} \\ \text{ou} \\ g(x) = -\sqrt{x} \end{array} \right. .$$

Vale ressaltar que: a equação dada não é uma função

$$x = y^2.$$



Neste caso, *o esboço gráfico nem função representa*. (Um elemento do domínio $x > 0$ tem duas imagens)

Capítulo Apêndice B

4.1 Função Exponencial

Definição 4.1

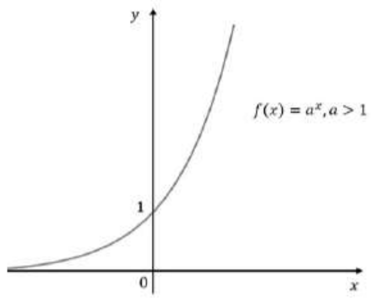
Seja a *um número real, tal que:* $0 < a \neq 1$ *e seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *uma função.*
Dizemos que f *é exponencial de base* a *se:*

$$f(x) = a^x$$

e satisfaz as seguinte condições:
1) $a^{x+y} = a^x . a^y$
2) $a^1 = a$
3) $a > 1 : f$ *é crescente:* $x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow a^{x_2 - x_1} > 1 \\ &\Longrightarrow \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

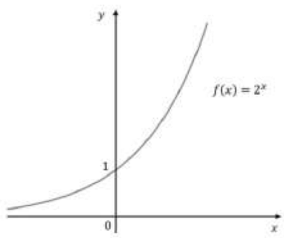
♣



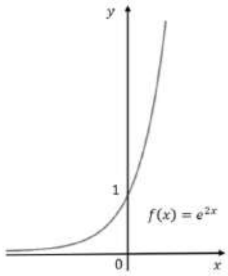
Exemplos

Exemplo 4.1

(A) $f(x) = 2^x$

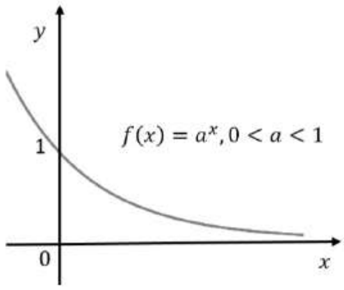


$(B)\ f(x) = e^{2x}$



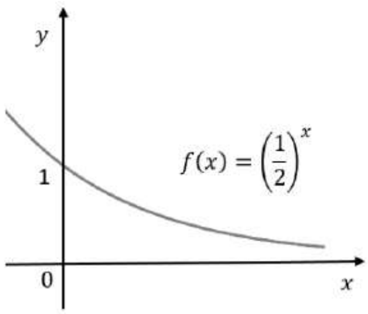
$(C)\ 0 < a < 1$: f é decrescente: $x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$$\begin{aligned} 0 &< a < 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0 \\ &\Longrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2 - x_1} > 1 \Longrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \Longrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \\ &\Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

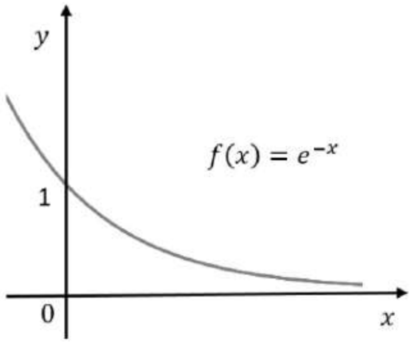


Exemplos

$(A)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$(B)\ f(x) = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$



Uma pausa para alguns questionamentos e comentários:

1. O porquê das restrições a base a?

Uma resposta comum de alguns: queremos que a função exponencial admita inversa. Ora, estamos definindo uma função, as retrições devem bastar em si mesma. Vejamos de fato uma explicação plausível. A saber:

(A). Na definição o que aconteceria se $a = 1$? A função é constante.

(B). Se $a < 0$, ilustrativamente, escolha $a = -2$, então,

$$f(x) = (-2)^x .$$

Observe que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \\ &\text{e} \\ f\left(\frac{2}{4}\right) &= (-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2} \\ &= \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que: f não define uma função.

2. f é injetora:

Demonstração

Basta notar que:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Longrightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Longrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = 1 \\ &\Longrightarrow a^{x_1 - x_2} = 1,\ \text{com } a > 0 \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

3. f é sobrejetora: $y \in \mathbb{R}^{+}, \forall y \in \mathbb{R}^{+}, \exists x \in \mathbb{R} : y = a^{x}$, isto é, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^{+}$.
De sorte que: f é bijetora.(f admite inversa)

4. Vale a pena ressaltar que: se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade

$$a^{x+y} = a^{x}.a^{y},$$

então, não pode assumir o valor 0, salvo no caso de $f(x) \equiv 0$.

Demonstração

De fato,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

Se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que: $f(x_0) = 0$, então, segue-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f[(x - x_0) + x_0] \\ &= f(x - x_0) \cdot f(x_0) \\ &= f(x - x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ∎

5. Se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é identicamente nula e satisfaz

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \Longleftrightarrow a^{x+y} = a^{x}.a^{y},$$

então, f é necessariamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Com efeito,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^{2} > 0.$$

Ou ainda,

$$f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dito de outro modo, à luz dessa propriedade

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

tanto faz dizer que o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$:

$$CD(f) = \mathbb{R} \text{ como } CD(f) = \mathbb{R}^{+}.$$

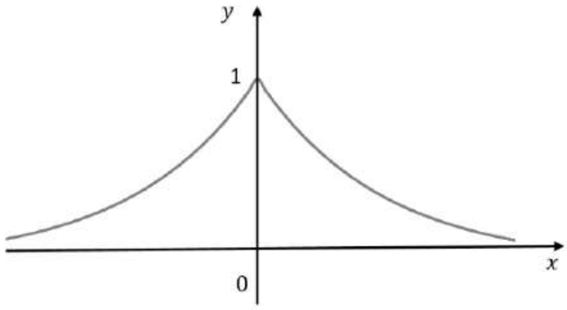
A vantagem de tomar o contra-domínio de f como $\mathbb{R}^{+}$ reside na sobrejetividade de f. ∎

Exemplos

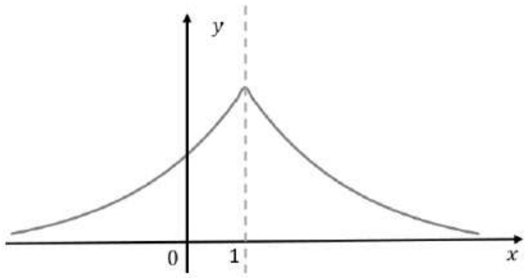
1. (i) $f(x) = 2^{-|x-1|}$ $\qquad$ (ii) $f(x) = 2^{-|x+1|}$

(i)

$$y_1 = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^{-(-x)} & x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y_1 = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^{x} & x < 0 \end{cases}$$



$y_2 = 2^{-|x-1|}$ este gráfico é o mesmo do gráfico anterior, destacando a translação de uma unidade à direita

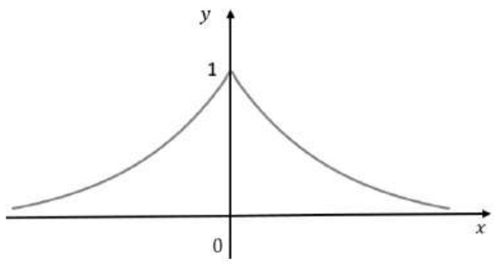


Destacando:

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 1\} \end{cases}$$

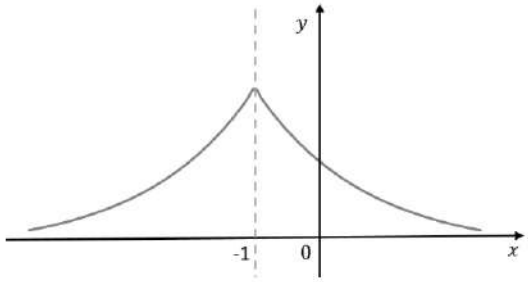
(ii) $f(x) = 2^{-|x+1|}$

$$y_1 = 2^{-|x|} = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^{-(-x)} & x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y_1 = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ 2^{x} & x < 0 \end{cases}$$



$$y_2 = f(x) = 2^{-|x+1|}$$

$y_2 = 2^{-|x+1|}$ este gráfico foi obtido de $y_1 = 2^{-|x|}$, sendo transladado uma unidade à esquerda.



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 1\} \end{cases}$$

4.2 Função Logarítmica

Definição 4.2

Seja a um número real, tal que: $0 < a \neq 1$ e seja $g = f^{-1} : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é logaritmo de x na base a se:

$$g(x) = \log_a x$$

e satisfaz as seguinte condições:

A função inversa da exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *descrita por*

$$f(x) = a^x$$

de base a é a função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por:*

$$g(x) = f^{-1}(x) = \log_a x.$$

♣

Consequências da definição

$$g[f(x)] = \log_a [a^x] = x \Longleftrightarrow \log_a [a^x] = x$$

e

$$f[g(x)] = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x \Longleftrightarrow a^{\log_a x} = x.$$

Afirmação

$$0 < a \neq 1,\ \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 : \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

Demonstração

Sejam $w = \log_a x^\alpha$ e $y = \log_a x$, então, queremos mostrar que:

$$w = \alpha y.$$

Vejamos,

$$\left\{ \begin{array}{c} w = \log_a x^\alpha \\ \text{e} \\ y = \log_a x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^w = x^\alpha \\ \text{e} \\ a^y = x \end{array} \right. \Longleftrightarrow a^w = (a^y)^\alpha .$$

Daí, segue-se que:

$$a^w = (a^y)^\alpha = a^{\alpha y} \Longleftrightarrow w = \alpha y.$$

Portanto,

$$w = \alpha y \Longleftrightarrow \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

■

1)

$$(i)\ \ y = a^x \Longleftrightarrow \log_a (y) = \log_a (a^x) = x$$

$$(ii)\ \ \log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x \Longleftrightarrow a^{\log_a x} = x.$$

■

2)

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 \Longleftrightarrow a^0 = 1. \\ &\text{e} \\ \log_a a &= y \Longleftrightarrow a^y = a^1 \Longleftrightarrow y = 1. \end{aligned}$$

■

3)

$$f(x.y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Ou ainda,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

4) f é uma função injetora:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

5) f é uma função sobrejetora:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = a^y \in \mathbb{R}^+ : f(a^y) = \log_a(a^y) = y$$

6) Mudança de base para logaritmos: $\forall a, b, x \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \neq 1$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Sejam $w = \log_b x$ $y = \log_a x$ e $k = \log_a b$, então, queremos mostrar que:

$$w = \frac{y}{k} \Longleftrightarrow y = wk.$$

Demonstração

1^o Modo:

Se $w = \log_b x$ $y = \log_a x$ e $k = \log_a b$, então, tem-se: $\left\{\begin{array}{c} x = b^w \\ x = a^y \\ \text{e} \\ b = a^k \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a^y = b^w \\ \text{e} \\ b = a^k \end{array}\right.$.

Daí, obtemos:

$$a^y = \left(a^k\right)^w = a^{kw}.$$

Por conseguinte, vem:

$$y = kw \Longleftrightarrow w = \frac{y}{k}.$$

Logo,

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

■

2^o Modo:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Seja $\log_b x = y$, então temos: $x = b^y$. Assim,

$$\log_a x = \log_a (b^y) = y.\log_a b \Longleftrightarrow y = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

De sorte que:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

■

7) Sejam $x_1, x_2, a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, então tem-se:

$$\begin{array}{ll} (i) & \log_a (x_1 x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2) \\ (ii) & \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a (x_1) - \log_a (x_2). \end{array}$$

Demonstração

(i) Sejam $\log_a (x_1 x_2) = w$, $\log_a (x_1) = y_1$ e $\log_a (x_2) = y_2$, então, queremos mostrar que:

$$w = y_1 + y_2.$$

Vejamos,

$$\left\{ \begin{array}{c} \log_a (x_1 x_2) = w \\ \log_a (x_1) = y_1 \\ \text{e} \\ \log_a (x_2) = y_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 x_2 = a^w \\ x_1 = a^{y_1} \\ \text{e} \\ x_2 = a^{y_2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 x_2 = a^w \\ \text{e} \\ x_1 x_2 = a^{y_1} a^{y_2} \end{array} \right.$$

Decorre daí que:

$$a^w = a^{y_1 + y_2}$$

Portanto,

$$w = y_1 + y_2.$$

Ou ainda,

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2).$$

■

(ii) 1^o Modo:

Sejam $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = w$, $\log_a (x_1) = y_1$ e $\log_a (x_2) = y_2$, então, queremos mostrar que:

$$w = y_1 - y_2.$$

De fato,

$$\left\{ \begin{array}{c} \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = w \\ \log_a (x_1) = y_1 \\ \text{e} \\ \log_a (x_2) = y_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x_1}{x_2} = a^w \\ x_1 = a^{y_1} \\ \text{e} \\ x_2 = a^{y_2} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{x_1}{x_2} = a^w \\ \text{e} \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}, \end{array} \right.$$

e, por conseguinte, vem:

$$a^w = a^{y_1 - y_2} \Longleftrightarrow w = y_1 - y_2.$$

2^o Modo:

Bastaria notar que:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\left(x_1 x_2^{-1}\right) = \log_a(x_1) + \log_a\left(x_2^{-1}\right).$$

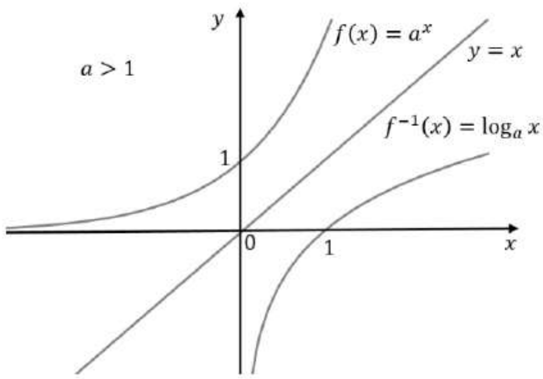
Agora, como $\log_a\left(x_2^{-1}\right) = -\log_a(x_2)$, segue-se:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\left(x_1 x_2^{-1}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2).$$

■

8) 1^o Caso: $a > 1$: f é crescente:

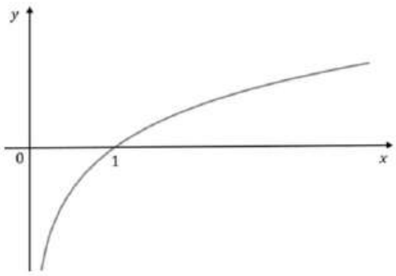
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$



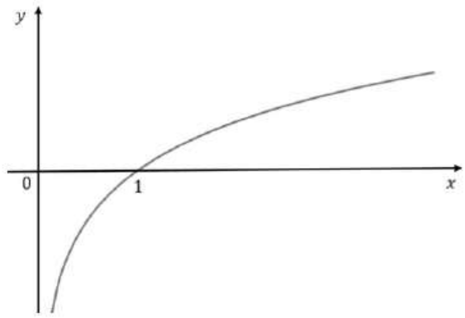
$f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$

Exemplos:

(A) $f(x) = \log_2 x$

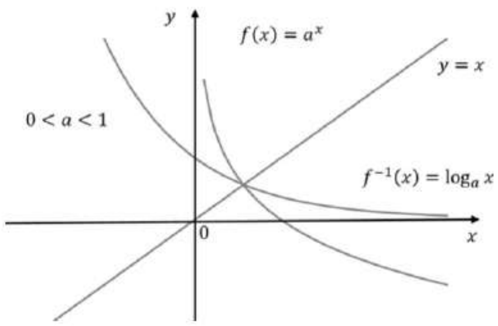


(B) $f(x) = \ln x = \log_e x$



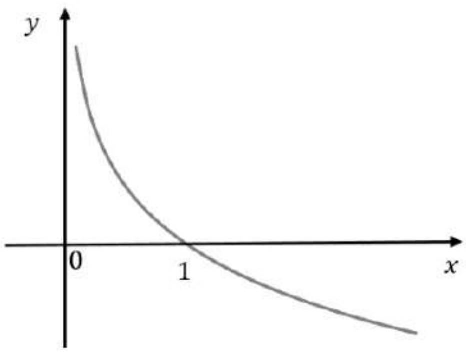
2^o Caso: $0 < a < 1$: f é decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

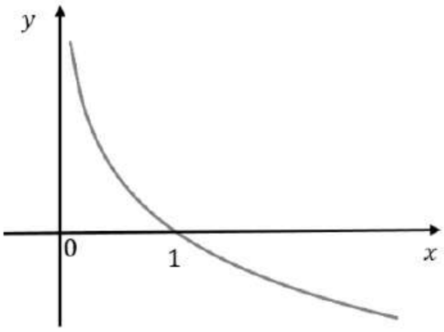


Exemplos

(A) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



$(B)\ f(x) = -\ln x$



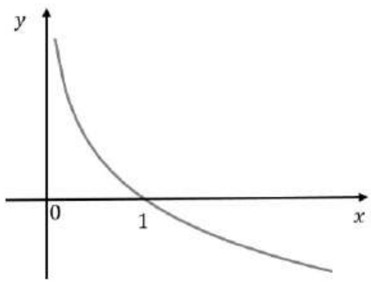
Nota

Usando a mudança para base a do logaritmo dado.
Sejam $x, a > 0$, $a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, então, temos:

$$\log_{a^\alpha} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k}.\frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k}.\log_a x,\ \textit{pois,}\ \log_a a = 1.$$

A título ilustrativo, tome como exemplo:

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log_e x}{\log_e\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\ln x}{\ln\left(e^{-1}\right)} = \frac{\ln x}{-\ln e} = -\ln x\ \textit{pois,}\ \ln e = 1.$$



Problema 4.1

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:
$(i)\ e^{2x} - 2.e^x + 1 = 0 \quad (ii)\ \ln\left(x^2 - 1\right) = 1 \quad (iii)\ 2^{|x-4|} = 32.$

Solução

(i) *Façamos $t = e^x$, então a equação toma a forma:*

$$\begin{aligned} \left(e^x\right)^2 - 2.e^x + 1 &= 0 \Longleftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow\ t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.1}}{2} \\ &\Longrightarrow\ t = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Agora, voltando e substituindo o valor de $t = 1$, *obtemos:*

$$t = e^x = 1 \Longrightarrow e^x = e^0 \Longrightarrow x = 0.$$

■

(ii)

$$\begin{aligned} \ln\left(x^2 - 1\right) &= 1 \Longleftrightarrow x^2 - 1 = e^1 \Longleftrightarrow x^2 = e + 1 \\ &\Longrightarrow x = \pm\sqrt{e+1}. \end{aligned}$$

■

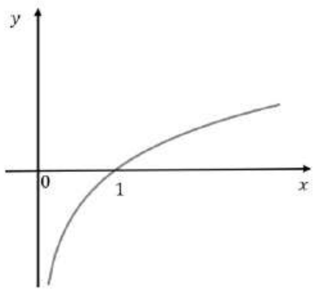
(iii)

$$\begin{aligned} 2^{|x-4|} &= 32 \Longleftrightarrow 2^{|x-4|} = 2^5 \\ &\Longrightarrow |x-4| = 5 \Longrightarrow \begin{cases} x - 4 = 5 \\ ou \\ x - 4 = -5 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} x = 5 + 4 \\ ou \\ x = -5 + 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ ou \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

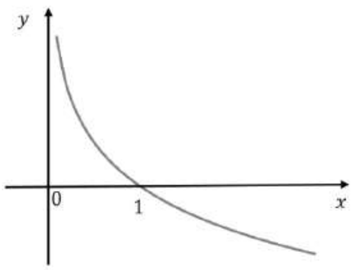
■

Exemplos

1. (i) $f(x) = \ln x$



(ii) $f(x) = -\ln x$



Observe que:

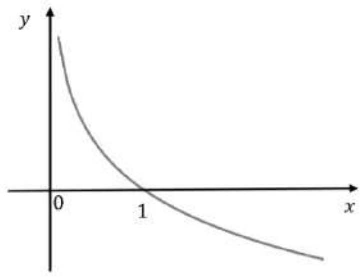
Usando a mudança para base a do logaritmo dado, temos:

$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k}.\frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k}.\log_a x, \text{ pois, } \log_a a = 1,$$

com $x, a > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.

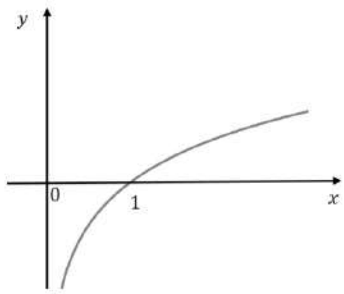
A título ilustrativo, tome como exemplo:

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log_e x}{\log_e \left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\ln x}{\ln\left(e^{-1}\right)} = \frac{\ln x}{-\ln e} = -\ln x \text{ pois, } \ln e = 1.$$

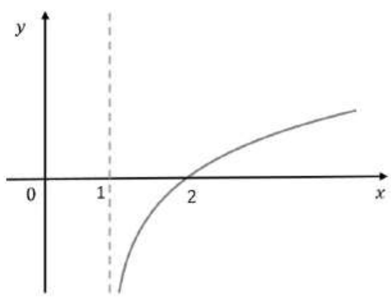


2. $f(x) = |\log_{10}(x-1)|$

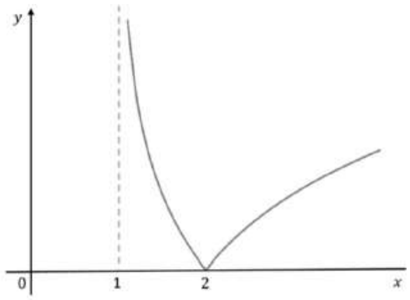
(i) $y_1 = \log_{10}(x)$



(ii) $y_2 = \log_{10}(x-1)$



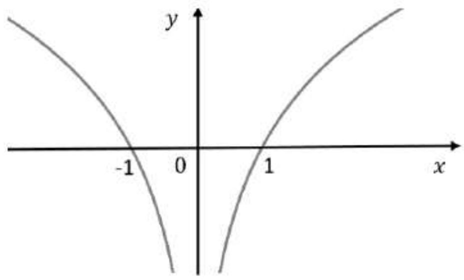
$(iii)\ y_3 = |\log_{10}(x-1)|$



Destacando

Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$
Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$. ■

3. $f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



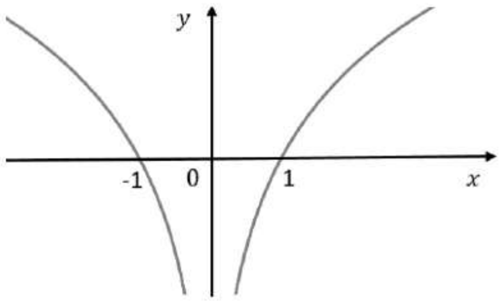
Cálculos auxiliares:

$$f(x) = 0 \iff \ln|x| = 0 \iff \ln_e|x| = 0 \iff |x| = e^0 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

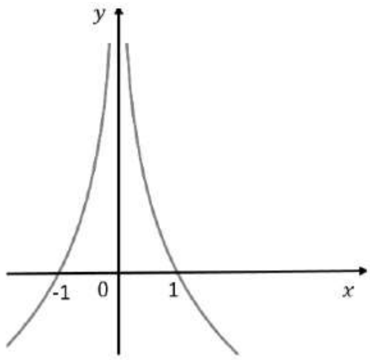
São os valores que cortam o eixo x (ou zero da função f) ■

4. $f(x) = |2 - \ln|x||$

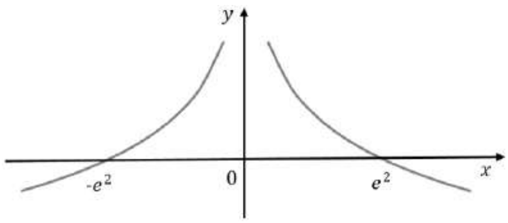
$y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



$y_2 = -\ln|x|$, este gráfico, foi obtido de $y_1 = \ln|x|$ fazendo uma *reflexão* em torno do eixo x, ou seja, a parte positiva ficou negativa e a parte negativa ficou positiva, graficamente, temos:



$y_3 = 2 - \ln|x|$, este gráfico, foi obtido do gráfico anterior $y_1 = -\ln|x|$ transladando duas unidades para cima, graficamente, temos:



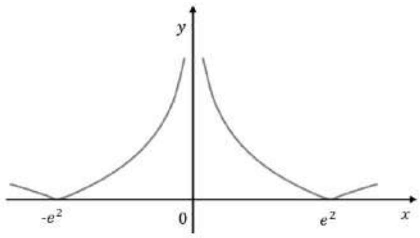
Cálculos auxiliares

Determinando os valores que cortam o eixo x

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Longleftrightarrow 2 - \ln|x| = 0 \Longleftrightarrow \ln|x| = 2 \Longleftrightarrow \ln_e|x| = 2 \Longleftrightarrow \\ |x| &= e^2 \Longrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ \text{ou} \\ x = -e^2. \end{cases} \end{aligned}$$

São os valorer que cortam o eixo x (ou zero da função f).
E, finalmente, obtendo o gráfico de $f(x) = |2 - \ln|x||$, vale destacar que:

este gráfico foi obtido do anterior, refletindo a parte negativa em torno do eixo x, ou ainda, a parte positiva ou nula permanece a mesma e a parte negativa girou em torno do eixo x e ficou positiva.

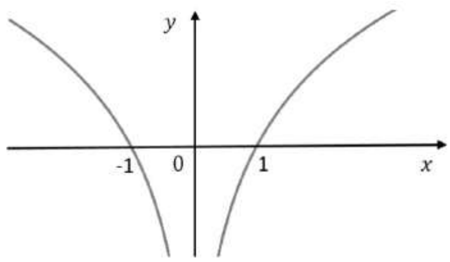


Destacando

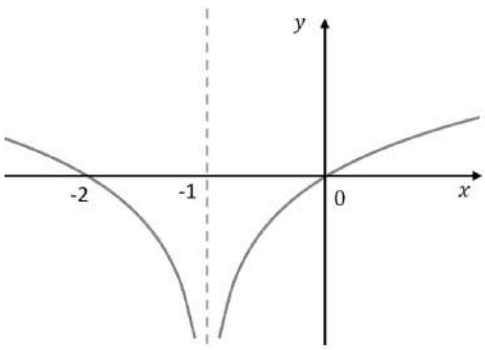
$$\begin{cases} D(f) = \{y \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}. \end{cases}$$ ■

5. $f(x) = \ln|x+1|$

(i) $y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



(ii) $y_2 = \ln|x+1|$, este gráfico é obtido de $y_1 = \ln|x|$ anterior deslocando ou transladando uma unidade à esquerda

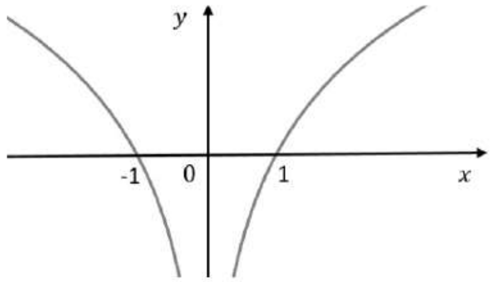


Destacando

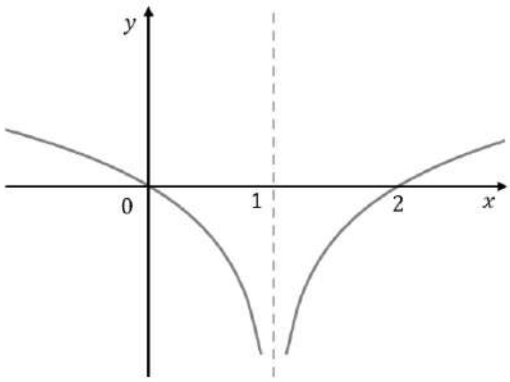
$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}. \end{cases}$$ ■

6. $f(x) = \ln|x-1|$

(i) $y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



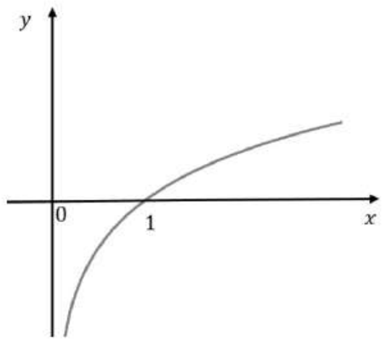
$y_2 = \ln|x-1|$, este gráfico é obtido de $y_1 = \ln|x|$ deslocando ou transladando uma unidade à direita



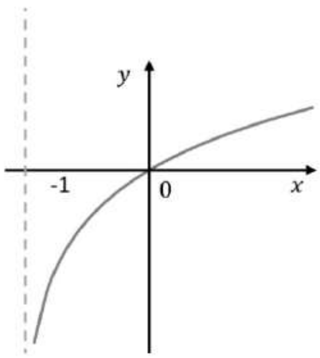
Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} - \{1\} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}. \end{cases}$$ ■

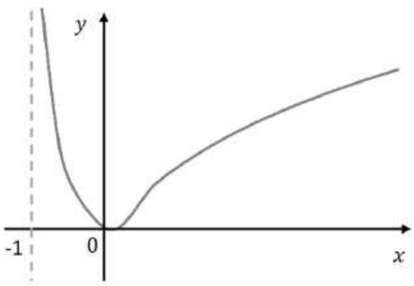
7. $f(x) = |\ln(x+1)|$
$y_1 = \ln x$



$y_2 = \ln(x+1)$, este gráfico é obtido do gráfico anterior transladando uma unidade à esquerda.



$y_3 = |\ln(x+1)|$, este gráfico é obtido do gráfico anterior, fazendo a reflexão em torno do eixo x a parte positiva ou nula, permanece a mesma, a parte negativa refletida em torno do eixo x fica positiva.



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}. \end{cases}$$

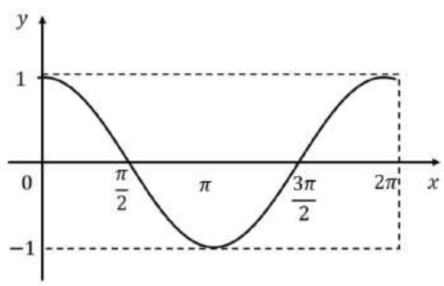
■

Capítulo Apêndice C

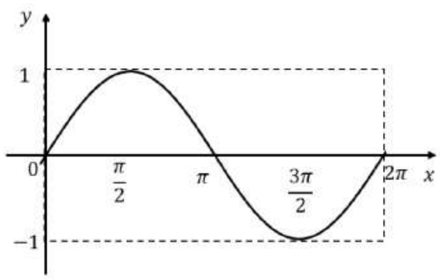
5.1 Esboço dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno de período fundamental 2π

$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ e $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

1. A função *cosseno* $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \cos x$

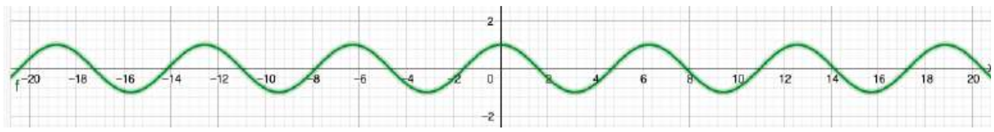


2. A função *seno* $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \sin x$



Esboço dos gráficos das funções trigonométricas

1. A função *cosseno* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \cos x$

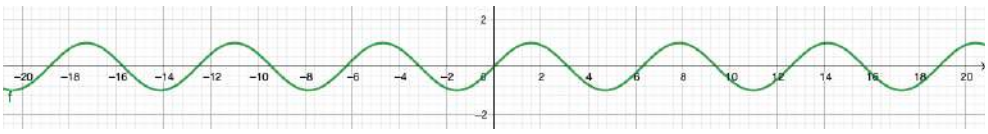


Destacamos

(i) Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$,
(ii) Imagem de $f : -1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow \text{Im}(f) = [-1, 1]$ e
(iii) Período de $f : p(f) = 2\pi$.

2. A função *seno* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sin x$$



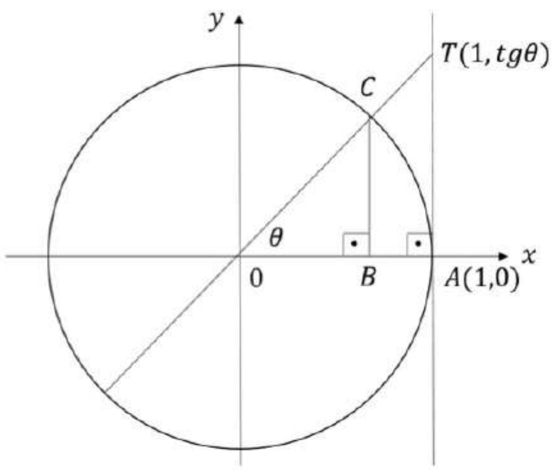
Destacamos

(i) Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$,
(ii) Imagem de $f : -1 \leq \sin x \leq 1 \Longrightarrow \text{Im}(f) = [-1, 1]$ e
(iii) Período de $f : p(f) = 2\pi$.

A seguir, consideremos os triângulos $\triangle OBC$ e $\triangle OAT$
são semelhantes pelo caso $L.A.L.$ (lado, ângulo e lado)
Daí, obtemos:

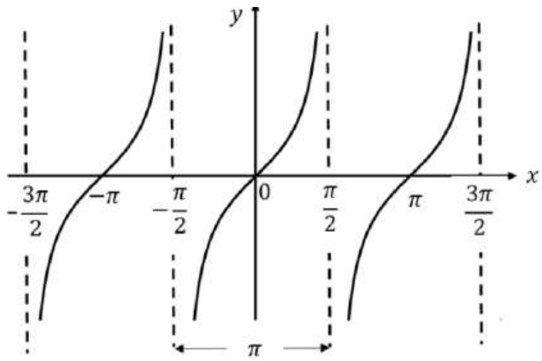
$$\triangle OBC \quad \sim \quad \triangle OAT \Longrightarrow \frac{\overline{AT}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AT}}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\Longleftrightarrow \quad AT = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = tg\theta.$$

Veja figura a seguir:



3. A função *tangente* $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

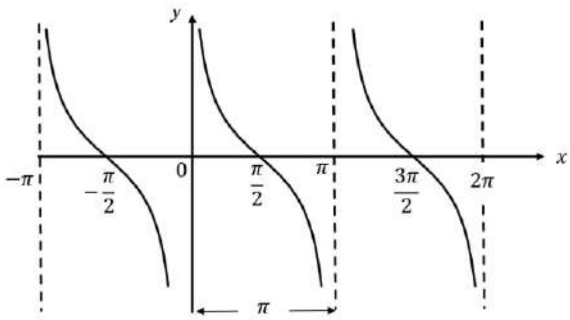


Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ e
(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

4. A função *cotangente* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{cotg} x.$$

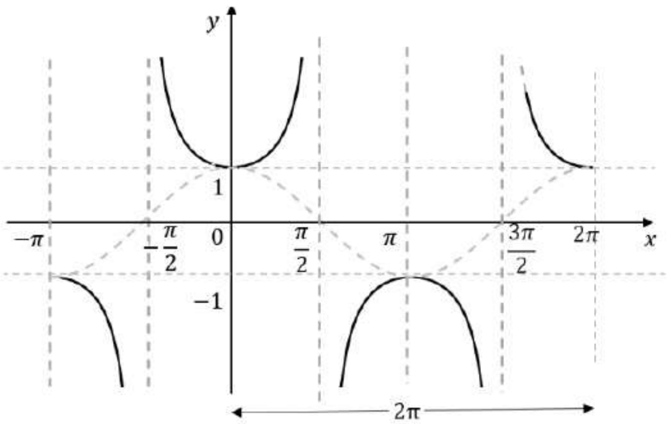


Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ e
(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

5. A função *secante* $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \sec x.$$

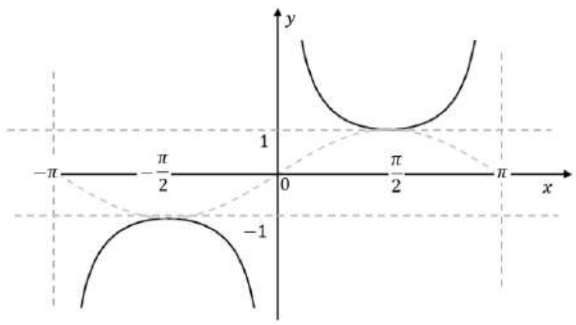


Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
(iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

6. A função *cossecante* $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{cossec} x.$$



Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$ e
(iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

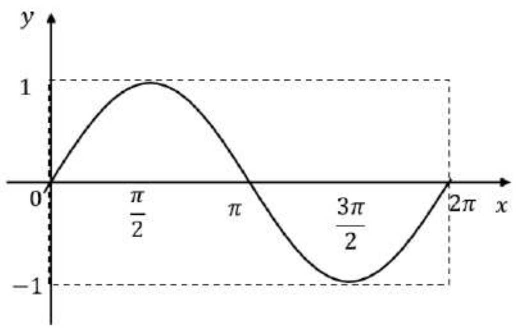
5.2 Período de cada Função Trigonométrica dada

1.
$$f(x) = \sin(kx+b), k > 0 : p(f) = \frac{2\pi}{k}$$

Exemplos:

A. $f(x) = \sin(2x)$

$$y_1 = \sin x,\ p(y_1) = 2\pi$$

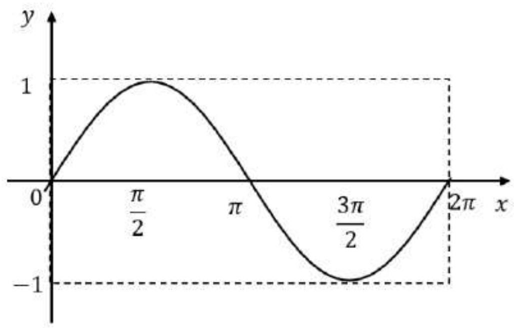


Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \mathrm{Im}(f) = [-1, 1] \end{cases}$$

(ii)
$$y_2 = \sin(2x),\ p(y_2) = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

O esboço do gráfico foi obtido do anterior, com cada ponto do gráfico de $y_1 = \sin x$ foi dividido por 2.

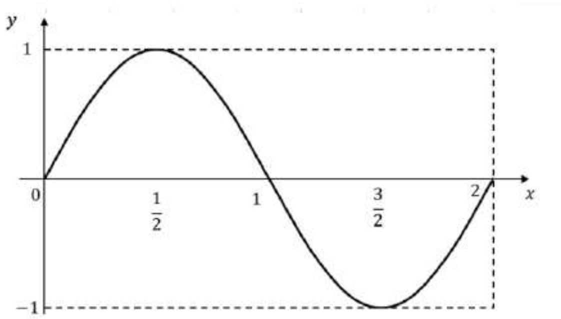


Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = \pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-1, 1] \end{cases}$$

B. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
(i)

$$y_1 = 3\sin x,\ p(y_1) = 2\pi$$



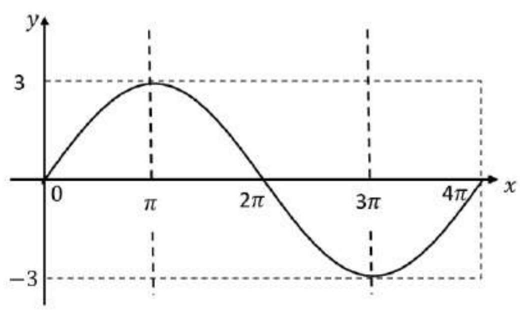
Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

(ii)

$$y_2 = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right),\ p(y_1) = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

O esboço deste gráfico, foi obtido, onde: cada ponto do gráfico de $y_1 = 3\sin x$ foi multiplicado por 2.



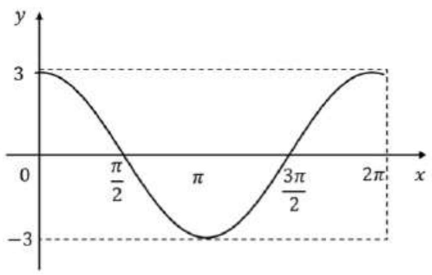
Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 4\pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

2.
$$f(x) = \cos(kx + b), k > 0 : p(f) = \frac{2\pi}{k}$$

Exemplos:

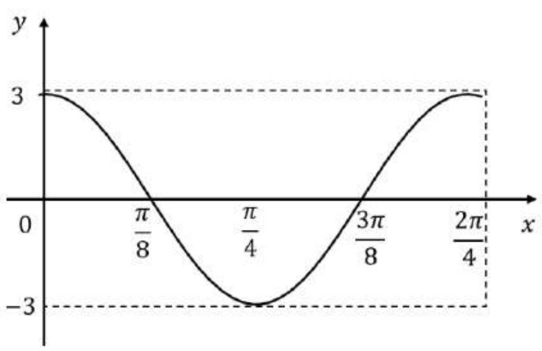
A. $f(x) = 3\cos(4x)$
(i)
$$y_1 = 3\cos x,\ p(y_1) = 2\pi.$$



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases} \qquad (ii)$$

$$y_2 = 3\cos(4x),\ p(y_2) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

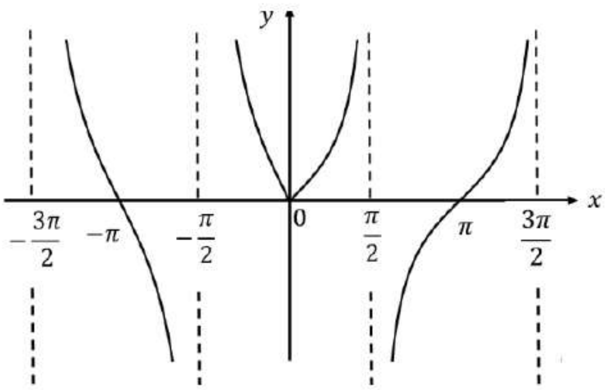
Problema 5.1

Use translações e reflexões para esboçar o gráfico da função f definida por:

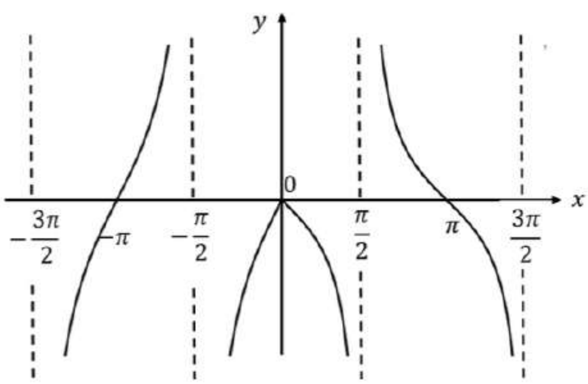
$$f(x) = |1 - 2\operatorname{tg}|x||$$

A priori, usando a definição de módulo, tem-se:

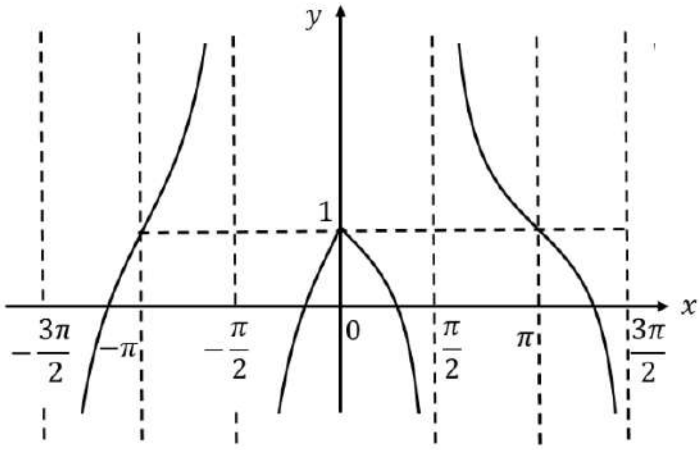
$$y_1 = 2\operatorname{tg}|x| = \begin{cases} 2\operatorname{tg}x, & x \geq 0 \\ 2\operatorname{tg}(-x), & x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y_1 = \begin{cases} 2\operatorname{tg}x, & x \geq 0 \\ -2\operatorname{tg}x, & x < 0 \end{cases}$$



$$y_2 = -2\operatorname{tg}|x| = \begin{cases} -2\operatorname{tg}x, & x \geq 0 \\ -2\operatorname{tg}(-x), & x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y_1 = \begin{cases} -2\operatorname{tg}x, & x \geq 0 \\ 2\operatorname{tg}x, & x < 0 \end{cases}$$

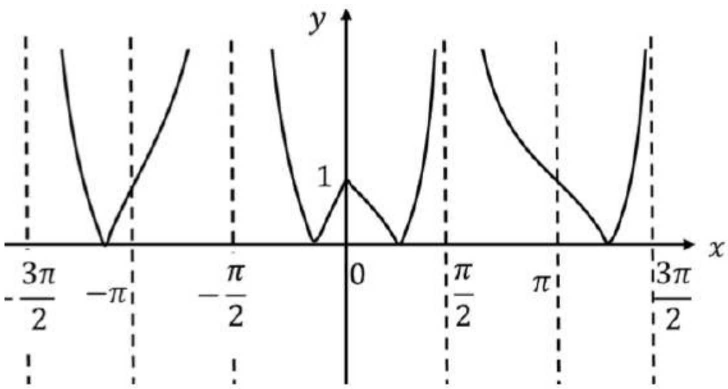


$$y_3 = 1 - 2\operatorname{tg}|x| = \begin{cases} 1 - 2\operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ 1 + 2\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$



Agora, obtemos um esboço do gráfico de f :

$$f(x) = |1 - 2\operatorname{tg}|x||$$



5.3 A distância de um ponto e uma reta

Teorema 5.1

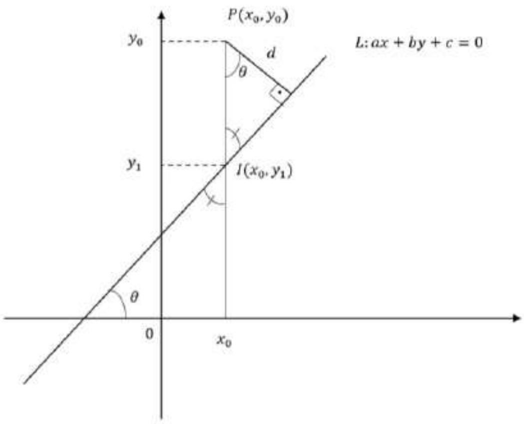
Seja $L : ax + by + c = 0$ *a equação de uma reta não-vertical e seja* $P_0\,(x_0, y_0) \in L$*. Então, temos:*

$$d\,(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

♡

Demonstração

De acordo com a figura, tem-se:



$$\cos\theta = \frac{d\,(P_0, L)}{|P_0 I|} \Longrightarrow d\,(P_0, L) = |P_0 I|\,.\cos\theta \Longrightarrow d\,(P_0, L) = |y_0 - y_1|\,.\cos\theta. \tag{1}$$

Agora,

$$I\,(x_0, y_1) \in L \Longleftrightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \Longleftrightarrow y_0 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}. \tag{2}$$

Observe que:

$$tg\theta = -\frac{a}{b} \Longrightarrow 1 + tg^2\theta = \sec^2\theta = 1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2},$$

ou ainda,

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{3}$$

Além disso, substituindo (2) e (3) em (1), obtemos:

$$d\,(P_0, L) = \left|y_0 - \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right)\right|.\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|\,.\,|b|}{|b|\,.\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

De sorte que:

$$d\,(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

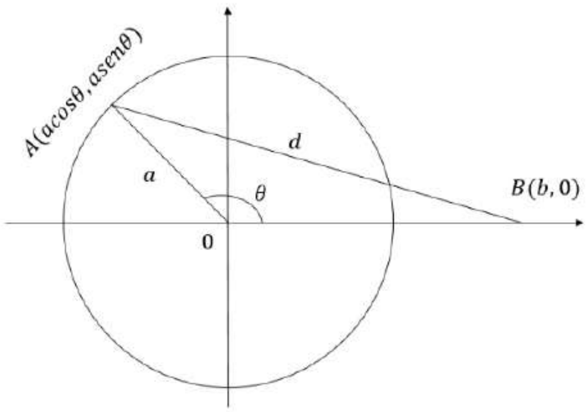
5.4 Lei dos cossenos usando a distância entre dois pontos

Teorema 5.2

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ *o ângulo* $A\hat{O}B$ *e sejam* $A\,(a\cos\theta, a\sin\theta)\,,\, B\,(b, 0)$ *em* $x^2 + y^2 = a^2$, *com* $b > a$, *então, temos:*

$$d^2(A, B) = a^2 + b^2 - 2a.b\cos(\theta)$$

♡



Demonstração

Basta calcular a distância entre A e B, vejamos:

$$\begin{aligned} d^2(A, B) &= (a\cos\theta - b)^2 + (a\sin\theta - 0)^2 \\ &= a^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - 2a.b\cos(\theta)\,. \end{aligned}$$

Agora, como $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ segue-se que:

$$d^2(A, B) = a^2 + b^2 - 2a.b\cos(\theta)$$

■

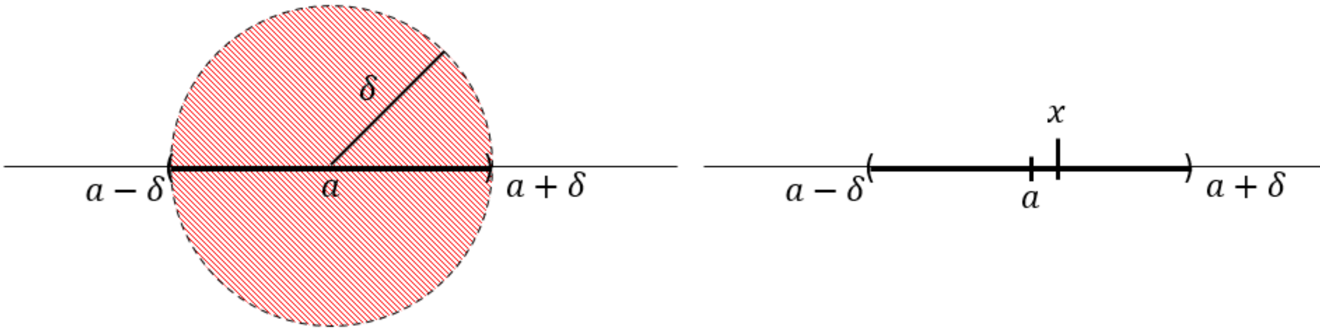
5.5 Uma prova simples do cos(a-b) usando a distância entre dois pontos e a lei dos cossenos

Teorema 5.3

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ *e sejam* $A(\cos a, \sin a)$, $B(\cos b, \operatorname{sen} b)$ *e* $C(1,0)$ *em* $x^2 + y^2 = 1$, *então, temos:*

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \sin b$$

♡



Demonstração

A priori, a distância de A até B, será descrita por:

$$\begin{aligned} [d(A,B)]^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 \\ &= \left(\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a\right) + \left(\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b\right) - 2[\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b] \\ &= 2 - 2[\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b] \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por outro lado, a lei dos cossenos para o triângulo ΔAOB, nos dá:

$$[d(A,B)]^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(a-b). \tag{5.2}$$

Agora, comparando (1) e (2), obtem-se:

$$2 - 2\cos(a-b) = 2 - 2[\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b].$$

Portanto,

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

■

Consequências:

$C_1)$ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Demonstração

Com efeito,

$$\cos[a-(-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b).$$

Como $\cos(-b) = \cos b$ e $\sin(-b) = -\sin b$ segue-se que:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos(b) - \sin a \sin b.$$

■

Notação: $\sin x = \operatorname{sen} x$ (seno do ângulo x)

Consequência:

Fazendo $a = b$ em $\cos(a+b) = \cos a \cos(b) - \sin a \sin b$, obtemos:

$$a = b \Longrightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$C_2)$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Demonstração

De fato,

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b \\
&= \sin a \cos b - \sin b \cos a.
\end{aligned}$$

De sorte que:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

■

$C_3)$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Demonstração

De fato,

$$\sin[a - (-b)] = \sin a \cos(-b) - \sin(-b)\cos a.$$

Agora, sabendo-se que $\cos(-b) = \cos b$ e $\sin(-b) = -\sin b$, obtemos:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

■

Consequência:

Fazendo $a = b$ em $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, vem:

$$a = b \Longrightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos b.$$

■

C_4) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b \neq \frac{\pi}{2}$, então, temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Demonstração

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Agora, dividindo numerador e denominador por $\cos a \cos b \neq 0$, vem:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos(b)}{\cos a \cos(b)} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} \\
&= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

■

Consequência:

Fazendo $a = b$ em $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$, obtemos:

$$a = b \Longrightarrow \operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

■

C_5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b \neq \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Demonstração

Basta notar que: $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg}(b)$

$$\operatorname{tg}[a + (-b)] = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

■

C_6) Para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(i) \quad \cos^2 a = \tfrac{1+\cos(2a)}{2} \qquad (ii) \quad \sin^2 a = \tfrac{1-\cos(2a)}{2}$$

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned}
(i)\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \text{ e } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \\
&\Longrightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right) \\
&\Longrightarrow 2\cos^2 a = 1 + \cos(2a) \\
&\Longrightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}.$$

■

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned}
(ii) \ \ \cos(2a) \quad &= \quad \cos^2 a - \sin^2 a \text{ e } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a \\
&\Longrightarrow \quad \cos(2a) = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a \\
&\Longrightarrow \quad \cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a \\
&\Longrightarrow \quad 2\sin^2 a = 1 - \cos(2a) \\
&\Longrightarrow \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.
\end{aligned}$$

De sorte que:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

■

Capítulo Nem tudo são flores

Como diz o matemático Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais: em seu livro, Manual de Redação Matemática: Sociedade Brasileira de Matemática: SBM, 2018.

"*Cuidado para definir realmente aquilo que se deseja:*
Não compre nem venda gato por lebre"

No Ensino Médio, é comum os textos afirmarem: toda função trigonométrica é periódica, podemos ter $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \sin(\alpha x)$, com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (irracional).

"Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é
que elas são períodicas."

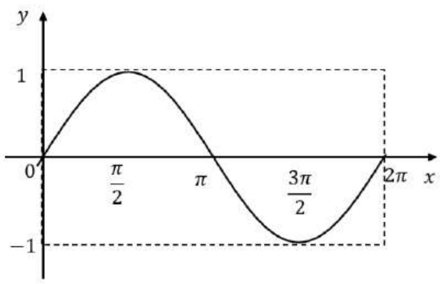
Refletindo um pouco sobre o tema, se encontra um contra-exemplo, basta escolher, de forma mais geral, escolhendo $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional), podemos caracterizar infinitos contra-exemplos, para tanto, basta mudar o valor do α

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

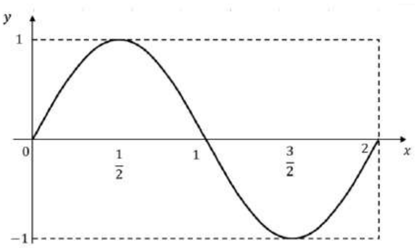
com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional). Mostre que: f não é uma função periódica.

A priori, considere duas funções periódicas, por exemplos:

(i) $f(x) = \sin x$,com período fundamental $p(f) = 2\pi$



e seja $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional), em particular, escolha $\alpha = \pi$ e a função g dada por:
(ii) $g(x) = \sin(\pi x)$, com período fundamental é $p(f) = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.



Generalizando g com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional), temos:

$$g(x) = \sin(\alpha x), \alpha > 0$$

Afirmação:

Seja g com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional), a função definida por:

$$g(x) = \sin(\alpha x), \alpha > 0.$$

Então, g é periódica e tem período fundamental:

$$p(g) = \frac{2\pi}{\alpha}$$

Demonstração

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \Longleftrightarrow f(x+p) - f(x) = 0 \\ \sin(\alpha x + \alpha p) &= \sin(\alpha x) \Longleftrightarrow [\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] = 0. \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{cases} \Longrightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b \cos a.$$

Agora, fazendo $\begin{cases} a+b = u \\ a-b = v \end{cases}$, obtemos: $\begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{u-v}{2} \end{cases}$. Assim.

$$\sin(u) - \sin(v) = 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] &= 0 \\ 2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Se $\alpha x = \frac{\pi}{2}$, então,

$$\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\alpha p}{2} = k_1\pi \Longrightarrow \alpha p = 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}, \Longrightarrow p = \frac{2k_1\pi}{\alpha}, k_1 \in \mathbb{Z},$$

De sorte que f é periódica. Além disso, o menor valor positivo de p é quando $k_1 = 1$.

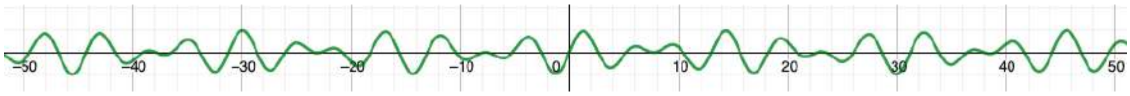
Logo, o período fundamental da função g é:

$$p = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

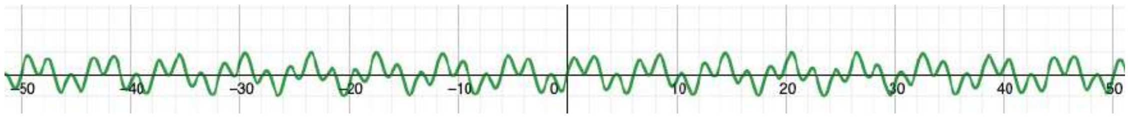
■

6.1 Algumas simulações com valores de $\alpha \in R \backslash Q$, onde: $f(x) = \sin x + \sin(\alpha x)$

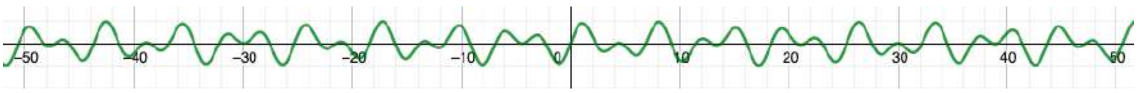
1. $f(x) = \sin x + \sin\left(\sqrt{2}x\right)$, $\alpha = \sqrt{2}$.



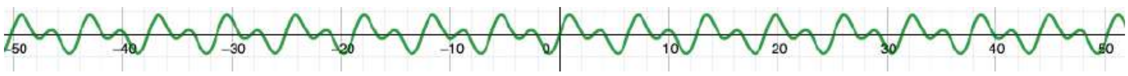
2. $f(x) = \sin x + \sin(\pi x)$, $\alpha = \pi$.



3. $f(x) = \sin x + \sin\left(\sqrt{3}x\right)$, $\alpha = \sqrt{3}$.



4. $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ esta função é periódica.



Depois de algumas simulações, vamos arriscar um palpite ou inferir que seja provável (conjecturar). Será que a função f , definida por:

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$(irracional) é não periódica?

Conjectura:

Seja f uma função definida por:

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$(irracional). f não é uma função periódica.

Demonstração

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \\ \sin(x+p) + \sin(\alpha x + \alpha p) &= \sin x + \sin(\alpha x) \Longleftrightarrow \\ \sin(x+p) - \sin x &= -\left[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)\right]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Vale a pena observar que:

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{cases} \Longrightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b \cos a.$$

Agora, fazendo $\begin{cases} a+b = u \\ a-b = v \end{cases}$, obtemos: $\begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{u-v}{2} \end{cases}$. Assim.

$$\sin(u) - \sin(v) = 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sin(u) - \sin(v) &= 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right). \\ \sin(x+p) - \sin x &= 2\sin\left(\frac{x+p-x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+p}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

e de forma análoga, temos:

$$\begin{aligned} \sin(u) - \sin(v) &= 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right). \\ -\left[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)\right] &= -2\left[\sin\left(\frac{(\alpha x + \alpha p) - \alpha x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha x + \alpha p + \alpha x}{2}\right)\right] \\ &= 2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right)\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Agora, levando

$$\begin{aligned} \sin(x+p) - \sin x &= -\left[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)\right] \\ 2\sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) &= -2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right). \\ \sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos(x) &= -\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos(\alpha x). \end{aligned}$$

Se $x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\alpha p}{2} = k_1\pi \Longrightarrow \alpha p = 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$,
por outro lado, temos:
Se $\alpha x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{p}{2} = k_2\pi \Longrightarrow p = 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$.
Daí, vem: $\alpha 2k_2\pi = 2k_1\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{k_1}{k_2}$, com $k_2 \neq 0$. Absurdo! Visto que:
α é irracional.
De sorte que f não é periódica.

∎

6.2 Algumas proposições sobre funções periódicas

Proposição 6.1

Seja f uma função periódica de período $p>0$ e seja $g(x)=f(ax)$, com $a>0$, então, g é periódica de período $\frac{p}{a}$.

Demonstração

Com efeito, f uma função periódica de período $p>0$, então, tem-se:

$$f(ax+p)=f(ax),$$

para todo $x\in D(f)$ (domínio de f).

Agora,

$$g\left(x+\frac{p}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{p}{a}\right)\right]=f(ax+p)=f(ax)=g(x).$$

De sorte que: g é periódica de período $\frac{p}{a}$. ■

Proposição 6.2

Seja f uma função periódica de período $p>0$ e seja $g(x)=f(ax+b)$, com $a>0$ e $b\in\mathbb{R}$, então, g é periódica de período $\frac{p}{a}$.

Demonstração

Com efeito, f uma função periódica de período $p>0$, então, tem-se:

$$f((ax+b)+p)=f(ax+b),$$

para todo $x\in D(f)$ (domínio de f).

Agora,

$$\begin{aligned} g\left(x+\frac{p}{a}\right) &= f\left[a\left(x+\frac{p}{a}\right)+b\right]=f((ax+p)+b)\\ &= f((ax+b)+p)=f(ax+b)=g(x). \end{aligned}$$

Portanto, g é periódica de período $\frac{p}{a}$. ■

Exemplos

Exemplo 6.1

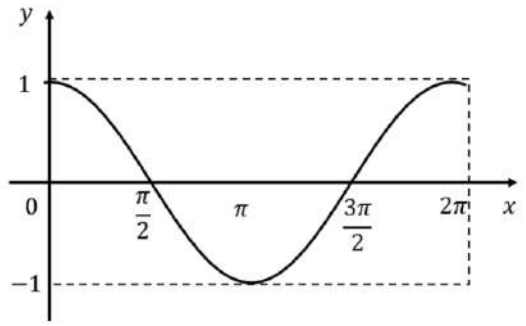
$f(x)=\cos(2x)$, período de f :

$$p(f)=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$

Façamos os esboços gráficos de $y_1=\cos x$ e $y_2=\cos(2x)$. Salientando que: y_2 é obtido de y_1 dividindo cada ponto do gráfico deste por 2.

Vejamos

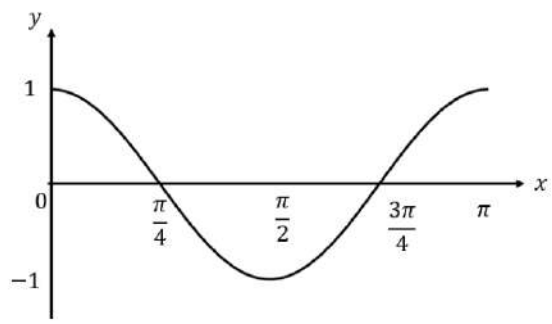
(i) $y_1 = \cos x$



(ii) $y_2 = \cos(2x)$

Observe que p período de y_2 é:

$$p(y_2) = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



Destacando

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$
Imagem de $f : \mathrm{Im}(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} : -1 \le y \le 1\}$.
Período de $f : p(f) = \pi$. ■

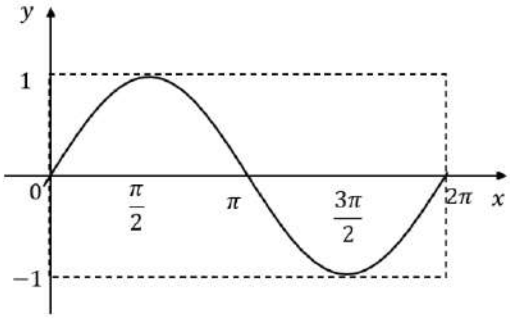
Exemplo 6.2

$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, período de f :

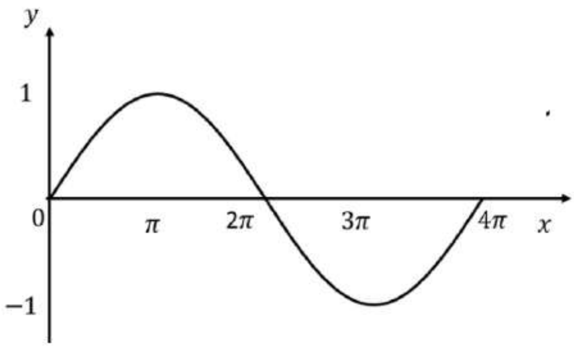
$$p(f) = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Façamos os esboços gráficos $y_2 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ obtido de $y_1 = \sin x$ onde cada ponto do gráfico de y_2 é obtido de y_1 multiplicado por 2. Vejamos

(i) $y_1 = \sin x$, período de $y_1 : p(y_1) = 2\pi$



(ii) $y_2 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, período de $y_2 : p(y_2) = 4\pi$



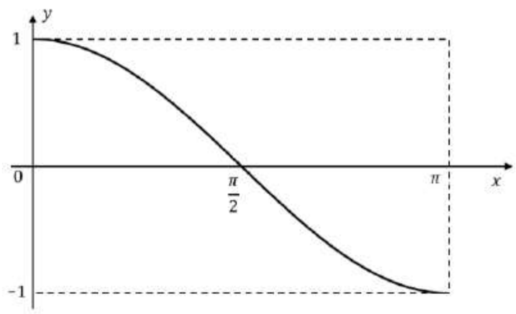
Destacando:

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$
Imagem de $f : \text{Im}(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$.
Período de $f : p(f) = 4\pi$. ■

6.3 Funções Trigonométricas Inversas

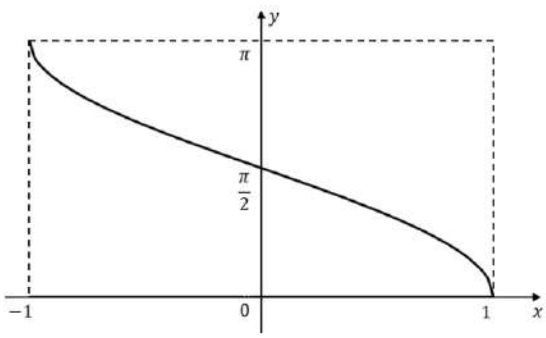
1. (i) $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

$$f(x) = \cos x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1] \Longleftrightarrow f$ é bijetora.
A função inversa de f, $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, é dada por:

$$f^{-1}(x) = \arccos x$$



Exemplo 6.3

Calcule:

$$(i) \quad \sin\left[2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \qquad (ii) \quad tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Solução

(i)

$$\sin\left[2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \sin(2u) = 2\sin u \cos u$$

Seja $u = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *então, temos:*

$$\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall u \in [0, \pi].$$

Agora,

$$\begin{aligned}\sin^2 u &= 1-\cos^2 u\\ &= 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\ &= 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sin u = \pm\frac{1}{2}, \forall u \in [0,\pi]$$

Assim,

$$\sin u = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sin\left[2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] &= \sin(2u) = 2\sin u\cos u\\ &= 2\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

■

(ii)

$$tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = tgu = \frac{\sin u}{\cos u}$$

Seja $u=\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, *então,* $\cos u = \frac{1}{3}, \forall u \in [0,\pi]$.
Assim,

$$\begin{aligned}\sin^2 u &= 1-\cos^2 u\\ &= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &= 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sin u = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Como $\sin u \geq 0$, $\forall u \in [0,\pi]$, *segue-se que:*

$$\sin u = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}tgu &= \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}.\frac{3}{1} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

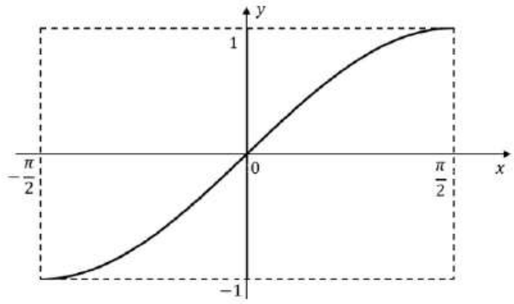
Portanto,

$$tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = tgu = 2\sqrt{2}$$

■

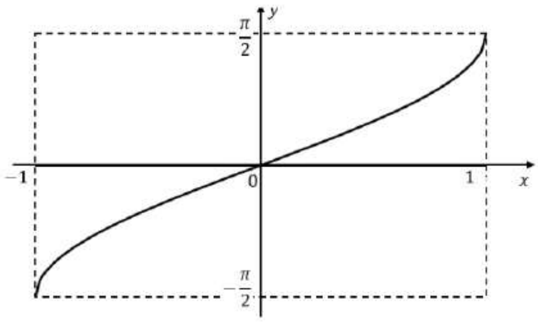
2. (i) $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[-1,1]$

$$f(x)=\sin x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\operatorname{Im}(f)=[-1,1]\Longleftrightarrow f$ é bijetora.
A função inversa de f, $f^{-1}:[-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, é dada por:

$$f^{-1}(x)=\arcsin x$$



Exemplo 6.4

Calcule:

$$(i)\quad \cos\left[2\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]\qquad (ii)\quad tg\left[2\arcsin\left(\tfrac{1}{4}\right)\right]$$

Solução

(i)

$$\cos\left[2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\cos(2u)=\cos^2 u-\sin^2 u$$

Com efeito, $u=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ *se, e somente se,* $\sin u=\frac{1}{2}, \forall u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
Agora,

$$\begin{aligned}\cos^2 u &= 1-\sin^2 u\\ &= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos u \geq 0$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *segue-se que:*

$$\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\cos\left[2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] &= \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u\\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\cos\left[2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

(ii)

$$tg\left[2\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right] = tg\,[2u] = \frac{2tgu}{1+tg^2u}$$

Seja $u = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$, *então,* $\sin u = \frac{1}{4}$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Assim,

$$\begin{aligned}\cos^2 u &= 1 - \sin^2 u\\ &= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\\ &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Como $\cos u \geq 0$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *segue-se que:*

$$\cos u = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}tgu &= \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\\ &= \frac{1}{4}.\frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.\end{aligned}$$

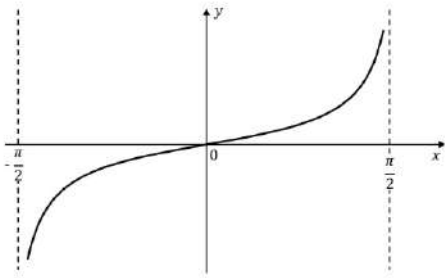
Portanto,

$$\begin{aligned}tg\left[2\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right] &= tg\,[2u] = \frac{2tgu}{1+tg^2u}\\ &= \frac{2\frac{1}{\sqrt{15}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{15}}}{1+\frac{1}{15}}\\ &= \frac{\frac{2\sqrt{15}}{15}}{\frac{16}{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{15}.\frac{15}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

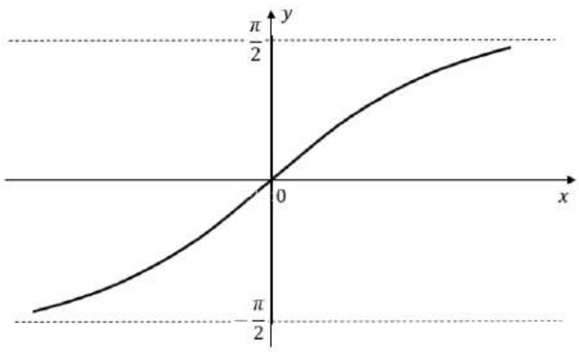
3. (i) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f\left(x\right) = \operatorname{tg} x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\operatorname{Im}\left(f\right) = \mathbb{R} \Longleftrightarrow f$ é bijetora.
A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é dada por:

$$f\left(x\right) = \operatorname{arctg} x$$



Exemplo 6.5

Mostre que:

$$(i) \quad \sec\left[\operatorname{arctg}\left(-3\right)\right] = \sqrt{10} \qquad (ii) \quad \sec\left[\operatorname{arctg} x\right] = \sqrt{1 + x^2}.$$

Solução

(i)

$$\sec\left[\operatorname{arctg}\left(-3\right)\right] = \sqrt{10}$$

Seja $u = \operatorname{arctg}\left(-3\right)$, *então,* $\operatorname{tg} u = -3, \forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Assim,

$$\begin{aligned} \sec^2 u &= 1 + \operatorname{tg}^2 u \\ &= 1 + \left(-3\right)^2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sec u = \pm\sqrt{10}.$$

Como $\sec u > 0$*,* $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, segue-se que:*

$$\sec u = \sqrt{10}.$$

Portanto,

$$\sec\left[\operatorname{arctg}(-3)\right] = \sqrt{10}$$

■

(ii)

$$\sec\left[\operatorname{arctg} x\right] = \sec u$$

Seja $u = \operatorname{arctg} x$*, então,* $\operatorname{tg} u = x, \forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Assim,

$$\begin{aligned} \sec^2 u &= 1 + \operatorname{tg}^2 u \\ &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sec u = \pm\sqrt{1 + x^2}.$$

Como $\sec u > 0$*,* $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, segue-se que:*

$$\sec u = \sqrt{1 + x^2}.$$

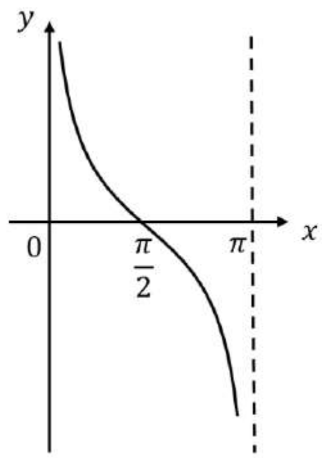
Portanto,

$$\sec\left[\operatorname{arctg} x\right] = \sec u = \sqrt{1 + x^2}$$

■

4. (i) $f : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$

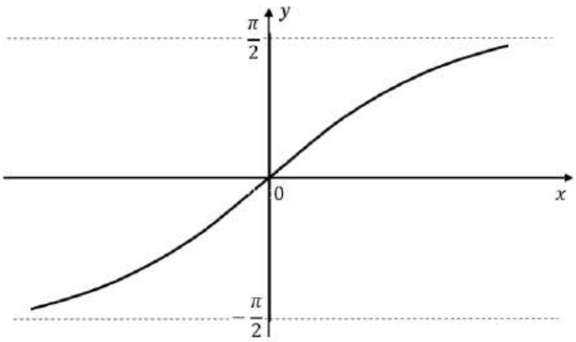
$$f(x) = \operatorname{cotg} x$$



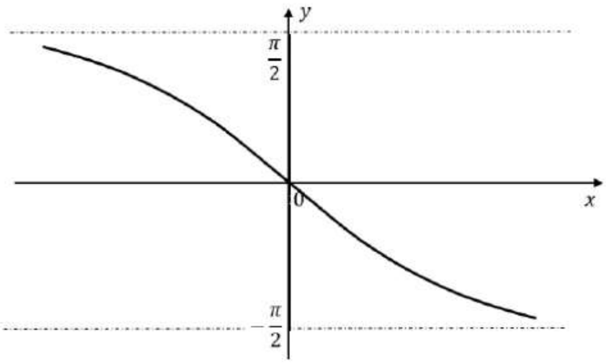
(ii) f é injetora, sobrejetora $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \Longleftrightarrow f$ é bijetora.
A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{Arccotg} x$$

$y_1 = \operatorname{Arctg} x$



$y_2 = -\operatorname{Arctg} x$



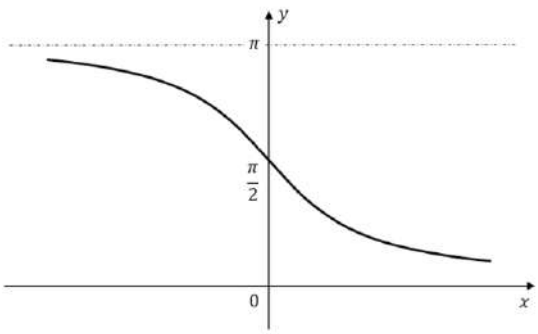
Nota

$$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x$$

(Será provado no exemplo a seguir)

A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$ é dada por:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$$



Exemplos

Exemplo 6.6

Mostre que:

$$(i) \quad \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x, \ \forall y \in (0, \pi) \qquad (ii) \quad \sin\left[\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)\right].$$

Solução

(i)

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x, \ \forall y \in (0, \pi)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x, \iff \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - y \iff \\
x &= tg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \frac{\cos y}{\sin y} = \operatorname{cotg} y \\
&\iff x = \operatorname{cotg} y \iff y = \operatorname{arccotg} x, \ \forall y \in (0, \pi)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)\right] = \sin u$$

Seja $u = \operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)$, *então,* $\operatorname{cotg} u = \sqrt{3}, \forall u \in \forall y \in (0, \pi)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cossec}^2 u &= 1 + \operatorname{cotg}^2 u \\
&= 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2
\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\operatorname{cossec} u = \pm 2.$$

Como $\operatorname{cossec} u > 0, \ \forall u \in (0, \pi)$, ***segue-se que:***

$$\operatorname{cossec} u = 2 \iff \frac{1}{\sin u} = 2 \iff \sin u = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)\right] = \sin u = \frac{1}{2}.$$

■

Exemplo 6.7

Calcule:

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = ?$$

Solução

Seja $u = \operatorname{arccotg}\left(\frac{-1}{2}\right)$, *então,* $\operatorname{cotg} u = \frac{-1}{2}, \forall u \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} u &= \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{-1}{2} \\
\sin u &= -2\cos u
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}\cos^2 u + \sin^2 u &= 1\\ \cos^2 u + (-2\cos u)^2 &= 1\\ 5\cos^2 u &= 1.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \textit{ou} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Longrightarrow \sin u = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \textit{ou} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Longrightarrow \sin u = \frac{2}{\sqrt{5}}, \ \forall u \in (0, \pi).$$

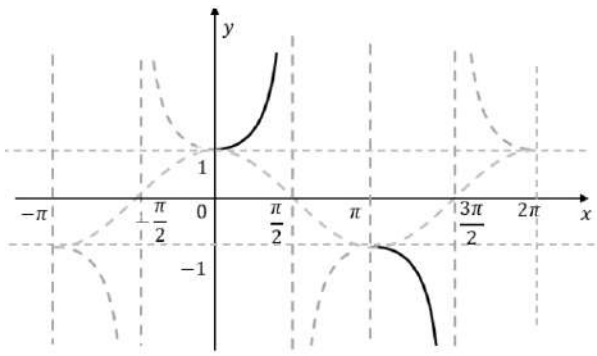
Logo,

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \sin u = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

■

5. $f : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{A}$, dada por:$f(x) = \sec x$
onde: $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$$f(x) = \sec x$$



A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{A} \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$ é dada por:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Prove que

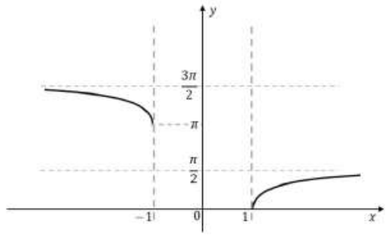
$$y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arcsec} x, |x| \geq 1.$$

Demonstração

$$y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \Longleftrightarrow \cos y = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\cos y} = \sec y \Longleftrightarrow y = \operatorname{arcsec} x.$$

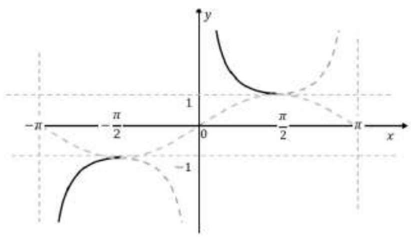
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

■



6. $f:(-\pi,-\frac{\pi}{2}]\cup(0,\frac{\pi}{2}]\longrightarrow\mathbb{A}$, dada por: $f(x)=\operatorname{cossec}x$
onde: $\mathbb{A}=\{y\in\mathbb{R}: y\leq -1 \text{ ou } y\geq 1\}$

$$f(x)=\operatorname{cossec}x$$



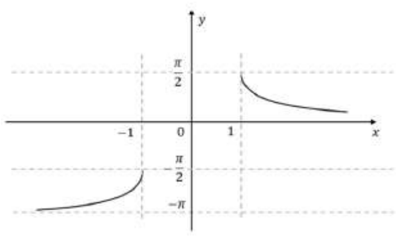
Problema 6.1

$$y=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsec}x=\operatorname{arccossec}x, \forall x:|x|\geq 1$$

Solução

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsec}x \Longleftrightarrow \operatorname{arcsec}x=\frac{\pi}{2}-y \Longleftrightarrow \\
x &= \sec\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\frac{1}{\sin y}\Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow x=\operatorname{cossecy}\Longleftrightarrow y=\operatorname{arccossec}x.
\end{aligned}$$



Bibliografia

[1] De Morais Filho, Daniel Cordeiro. Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3^a Edição, SBM 2016.

[2] Bartle, Robert G. Introduction to Real Analysis. New York, J. Wiley, 2019

[3] Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo, vol.1, 6^a Edição, RJ: LTC, 2018

[4] Lima, Elon Lages. Matemática e Ensino, Coleção do Professor de Matemática, 4^a Edição, RJ, 2017

[5] De Morais Filho, Daniel Cordeiro. Manual de Redação Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2^a Edição, SBM 2018

[6] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, vol. 1, Projeto Euclides, SBM, 21^a Edição, IMPA, 2019

[7] Aragona, Jorge. Números Reais, Texto Universitário do IME-USP, 2010

[8] Eves, Howard. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2004

[9] `http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm`, em 17 de março às 12h e 25min, 2023

[10] Figueiredo, D. G. Análise I, Livros Técnicos Científicos, 2016

[11] Ávila, Geraldo. Introdução à Análise Matemática, Editora Edgar Blücher Ltda, 1993

[12] Boyer, Carl B. História da Matemática; tradução Elza F. G., SP Edgard Blucher, 1974

[13] Bartle, Robert G. The Elements of Real Analysis. New York, J. Wiley, 1964

[14] Lima, E.L. Análise Real, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993

[15] Gonçalves, Adilson. Introdução à álgebra. 4^a Edição, Projeto Euclides, IMPA, 1999

[16] Koblitz, Neal. A Course in Number Theory and Cryptography, Springer 2^a Edição, 1994.

[17] Lequain, Yves e Garcia, Arnaldo. álgebra: Um curso de Introdução, Série II, Projeto Euclides, IMPA, 2020

[18] Neves, Wladimir Augusto, Uma Introdução à Análise Real, RJ-Editora UFRJ, 2014.

[19] Bartle, Robert G - Elementos de Análise Real. Editora Campos, 2014.

[20] `http://clubes.obmep.org.br/blog/b_a-l-cauchy/`, em 01 de junho 2023

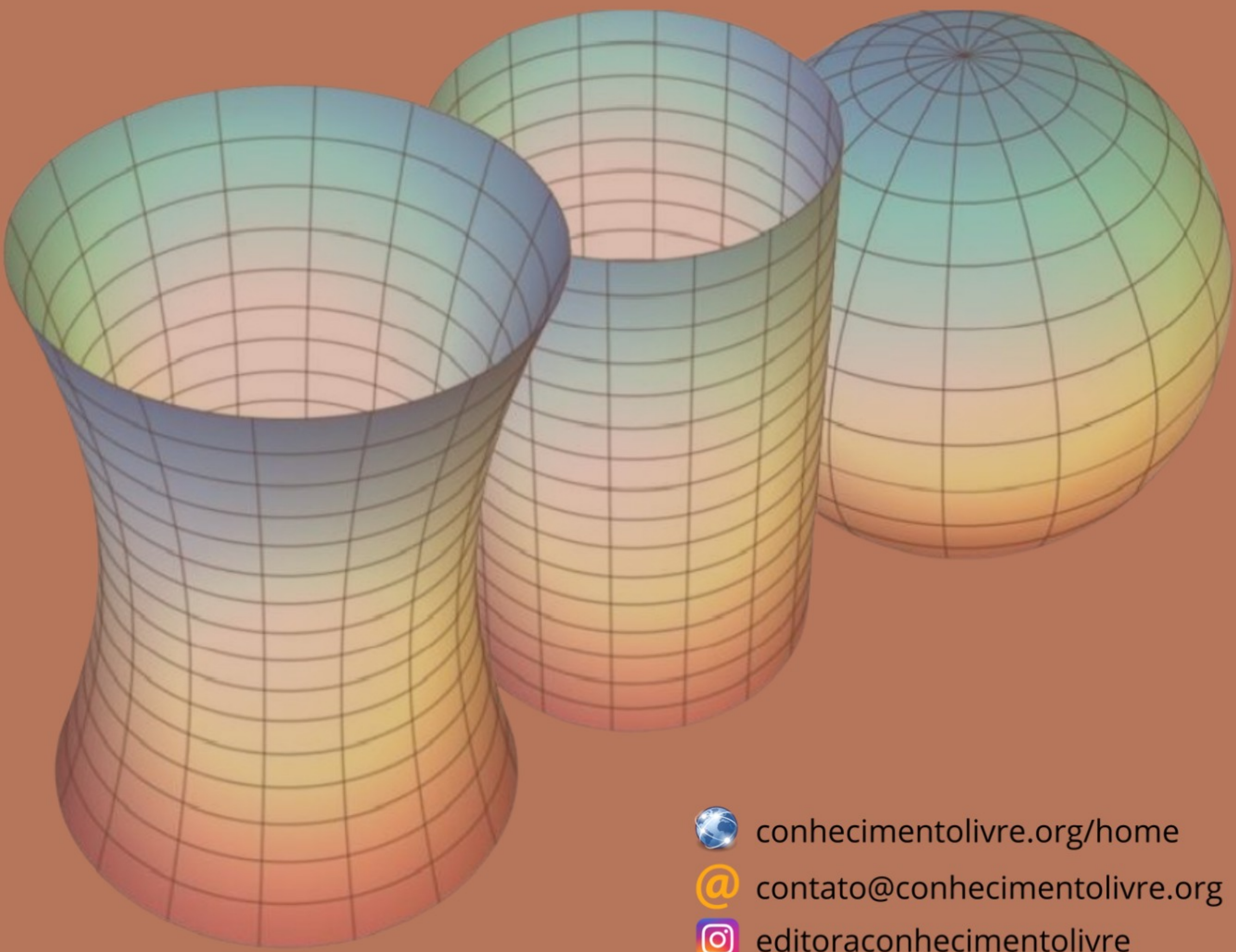
[21] Loibe, Gilberto Francisco-Introdução à topologia-SP: Editora UNESP, 2007.

[22] Matos, Marivaldo Pereira, Séries e Equações Diferenciais, Editora Ciência Moderna, 2017

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

ANÁLISE REAL:
INTRODUÇÃO AS MAJORAÇÕES

VOLUME II



conhecimentolivre.org/home
contato@conhecimentolivre.org
editoraconhecimentolivre

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE