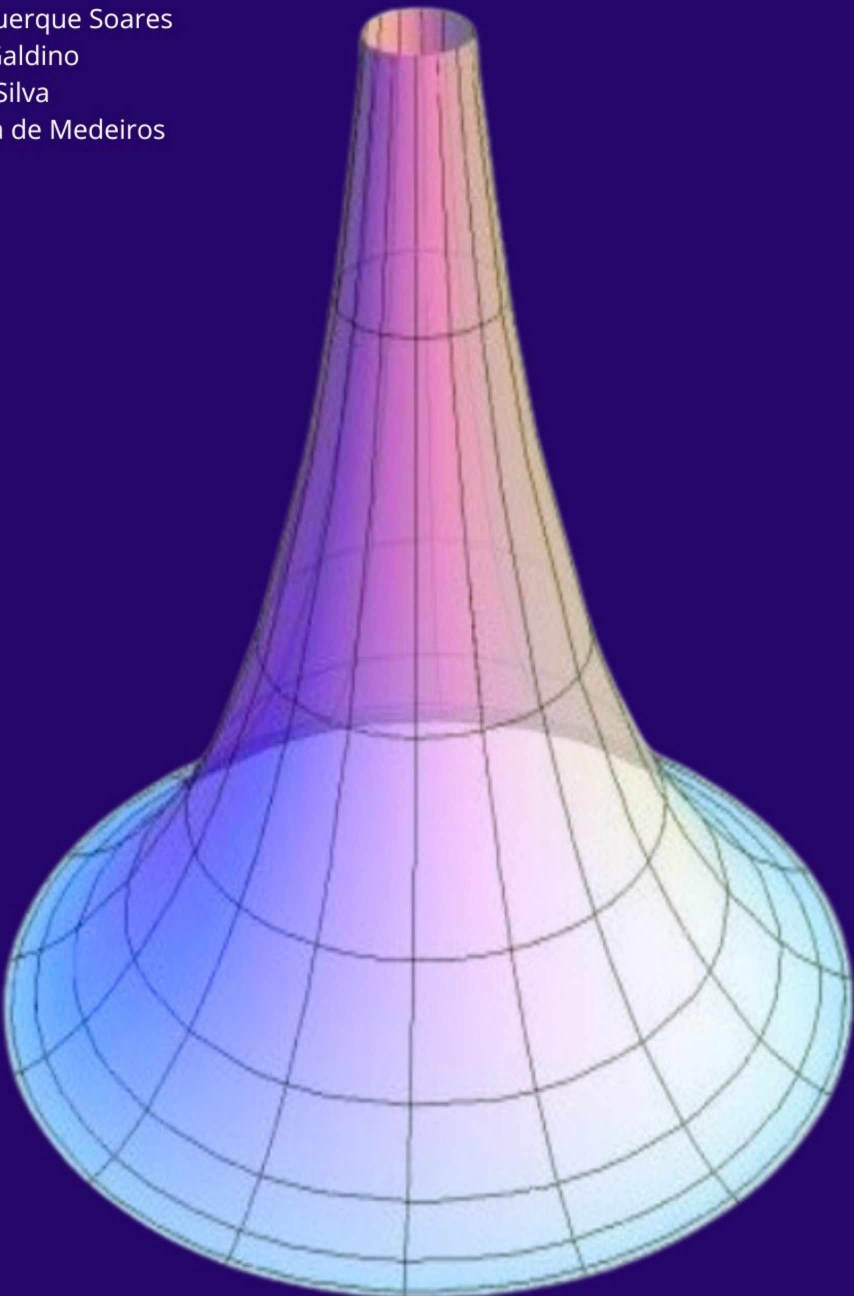
ESPAÇO MÉTRICO E ALGUNS ASPECTOS DA ANÁLISE FUNCIONAL

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

Espaço Métrico e Alguns Aspectos da Análise Funcional

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586E Silva, Cícero José da
Espaço Métrico e Alguns Aspectos da Análise Funcional
/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. Jornandes Dias da Silva. Juan Carlos Oliveira de Medeiros. – Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre, 2023

84 f.: il
DOI: 10.37423/2023.edcl784
ISBN: 978-65-5367-353-3
Modo de acesso: World Wide Web
Incluir Bibliografia

1. espaço-métrico 2. análise-funcional 3. espaço-de-banach 4. espaço-de-hilbert I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Silva, Jornandes Dias da V. Medeiros, Juan Carlos Oliveira de VI. Título

CDU: 510

https://doi.org/10.37423/2023.edcl784

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO
2023

Espaço Métrico e Alguns Aspectos da Análise Funcional

10.37423/2023.edcl784

Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuiram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha), Prof. Dr. Juan Carlos Oliveira de Medeiros e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- Não estaria sendo justo, se não destacasse o nosso amigo Prof. Ms. Roberto Lessa, ao longo de mais de três décadas lecionando álgebra Linear, conversando sobre: como abordaríamos determinados temas, ofertou diversas sugestões, correções e orientações no tocante a escrita.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões ao longo dos anos.
- À UPE, pelo apoio.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais, Filhos, Esposas,Todos os familiares e Ao grande Mestre Olavo Otávio Nunes (In Memoriam)

Prefácio

Introdução a Espaços Métricos e Análise Funcional

A matemática abrange uma vasta gama de áreas e disciplinas, duas delas que desempenham um papel fundamental em várias áreas são os espaços métricos e a análise funcional. Esses conceitos são fundamentais na compreensão e no estudo de estruturas matem·ticas, bem como na análise de funções e operadores.

Um espaço métrico é um conjunto não vazio equipado com uma função de distância, chamada métrica, que mede a distância entre dois elementos do conjunto. Essa métrica satisfaz certas propriedades, como a não-negatividade, a simetria e a desigualdade triangular. A partir dessas propriedades, podemos deduzir várias outras e teoremas sobre os espaços métricos, como continuidade, convergência e completude.

Os espaços métricos têm uma ampla aplicação em diferentes áreas da matemática e além dela. Eles são usados para estudar topologia, teoria dos conjuntos, análise real e complexa, geometria, teoria das probabilidades e muitas outras disciplinas. Além disso, os espaços métricos fornecem a base para outros conceitos importantes, como espaços normados e espaços métricos completos, como os espaços de Banach e os espaços de Hilbert.

A análise funcional, por sua vez, é um ramo da matem·tica que estuda espaços vetoriais de funções e os operadores entre esses espaços. Ela combina os conceitos da álgebra linear com a análise para entender as propriedades e comportamentos das funções e seus espaços. A análise funcional tem uma ampla gama de aplicações, desde física teórica até engenharia e a economia.

Os espaços de funções estudados na análise funcional podem variar desde espaços de funções contínuas até espaços de funções diferenciáveis ou integráveis. A análise funcional também investiga operadores lineares definidos em espaços de funções e estuda suas propriedades, como continuidade, limites, comportamento espectral e propriedades de adjunção.

Um dos resultados fundamentais na análise funcional é o Teorema do Espaço de Sobolev, que estabelece condições sob as quais é possível diferenciar funções não diferenciáveis. Além disso, a análise funcional tem uma conexão íntima com a teoria de distribuições, que é uma generalização do conceito de função.

Em resumo, os espaços métricos e a análise funcional são dois ramos importantes da matemática que desempenham um papel central em várias áreas. Eles fornecem ferramentas e conceitos fundamentais para a compreensão e o estudo de estruturas matem·ticas, funções e operadores, e são amplamente utilizados em diversas aplicações teóricas e práticas.

Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa uma certo cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, correções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endere os:

cjs@poli.br
was@poli.br
galdino@poli.br
jornandesdias@poli.br
juca@ufc.br

Recife, 27 de julho de 2023

Conteúdo

Capítulo Introdução

Frases de Henri Lebesgue

"O único ensinamento que um professor pode dar, na minha opinião, é o de pensar na frente de seus alunos."
"Na minha opinião um matemático, na medida em que ele é um matemático, não precisa se preocupar com a filosofia - uma opinião, além disso, que foi expressa por muitos filósofos."
"Os matemáticos nunca estiveram em pleno acordo sobre sua ciência, embora seja dito ser a ciência das verdades auto-evidentes - absoluta, indiscutível e definitiva. Eles sempre estiveram em controvérsia sobre o desenvolvimento de aspectos da matemática, e sempre consideraram sua própria idade para estar em um período de crise."
"... Se alguém se recusasse a ter *insights* diretos, geométricos e intuitivos, se um fosse reduzido à lógica pura, o que não permite a escolha entre todas as coisas que são exatas, dificilmente pensaria em muitas questões, e certas noções ... nos escaparia completamente."

Henri Léon Lebesgue nasceu em Beauvais (É uma comuna localizada no norte da França e a capital do departamento de Oise . Dista aproximadamente 79 km de Paris .)
$(1875-1941, 66$ anos, Paris, França$)$

O que é Análise Funcional? Essa é, sem dúvida, uma boa pergunta e, como tantas outras, o conjunto das respostas é infinito. Informalmente, podemos dizer que trata-se de um tipo de análise matemática sobre objetos de dimensão infinita. Mas, o que é um objeto de dimensão infinita? Também é uma pergunta com possibilidades enumeráveis de respostas. Escolhamos um foco para fixar as ideias. Em álgebra Linear , estudamos os espaços vetoriais e, em seguida, os espaços de dimensão finita . Nesse âmbito, os "objetos", vetores, são representáveis por uma combinação linear finita .

Assim, muito do que se faz em matemática (mensurar, comparar, classificar, caracterizar, provar a existência de algo) pode ficar mais tratável. Isso é bem razoável pois lidar com "coisas" finitas é lidar com o controlável, em princípio. Entretanto, ao considerar, por exemplo, funções como vetores de um espaço vetorial, a ideia de representação finita perde o sentido. Por exemplo, será que existe um subconjunto finito e linearmente independente do espaço $C[0,1]$ das funções contínuas no intervalo $[0,1]$ em que todas as funções do espaço possam ser representadas por uma combinação linear finita de seus elementos? Suponha que existisse tal conjunto, digamos

$$B=\{f_1,...,f_n\}.$$

Então, $C[0,1]$ seria um espaço vetorial de dimensão n, ou seja, $dimC[0,1]=n$.

Afirmação:

O conjunto
$$\mathbb{S} = \{1, t^1, t^2, ..., t^n\}$$
é um conjunto L.I. em $C[0,1]$.

Com efeito, dada a equação, temos:
$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 t^1 + \lambda_2 t^2 + \ldots + \lambda_n t^n = 0,$$
então, da igualdade de polinômios segue-se que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Dessa forma, $C[0,1]$ conteria um subespaço de dimenão $n+1$, a saber, o espaço gerado por $\mathbb{S}$. *Contradição*.

Sob essa perspectiva, pode-se dizer que Análise Funcional é uma análise em espaços de dimensão infinita. De um modo geral, em um modo simples de dizer, trata-se de uma das áreas mais fascinantes da Matemática. Além de sua própria importância teórica, como sendo uma generalização natural da álgebra Linear Clássica, por exemplo, ela destaca-se por desempenhar um papel crucial nos mais diversos ramos da Matemática como Análise Não-Linear, Otimização, EDP e sobre tudo na moderna Teoria dos Espaços de Banach. o curso de Análise Funcional como uma Análise Matemática em espaços de dimensão infinita.

1.1 Conjuntos Finitos e Infinitos

Conjuntos finitos e infinitos são dois conceitos fundamentais na teoria dos conjuntos. Um conjunto finito é aquele que possui um número limitado de elementos, enquanto um conjunto infinito é aquele que possui um número ilimitado de elementos.

Um conjunto finito pode ser contado ou enumerado, o que significa que seus elementos podem ser colocados em uma sequência ordenada. Por exemplo, o conjunto A = {1, 2, 3} é um conjunto finito com três elementos, e podemos enumerar seus elementos na ordem em que aparecem: 1, 2, 3.

Por outro lado, os conjuntos infinitos não podem ser contados em uma sequência ordenada, pois não têm um fim. Existem diferentes tipos de infinitos, e um conceito importante relacionadoÀ enumeração de conjuntos infinitos é a noção de enumerabilidade.

Um conjunto é enumerável se seus elementos podem ser colocados em uma sequência infinita, ou seja, se existe uma correspondência um-para-um entre os elementos do conjunto e os números naturais (1, 2, 3, ...). Isso significa que podemos atribuir um número natural a cada elemento do conjunto, de forma que todos os elementos sejam eventualmente contados.

Por exemplo, o conjunto dos números naturais (0, 1, 2, 3, ...) é um conjunto infinito enumerável, pois podemos atribuir um número natural a cada elemento do conjunto em uma sequência ordenada. Da mesma forma, o conjunto dos números inteiros também é enumerável, pois podemos criar uma sequência ordenada que inclui todos os números inteiros.

No entanto, nem todos os conjuntos infinitos são enumeráveis. Um exemplo de conjunto infinito não-enumerável é o conjunto dos números reais entre 0 e 1. Este conjunto é chamado de intervalo unitário e não pode ser colocado em uma sequência ordenada que enumere todos os seus elementos. Isso ocorre porque existem "muitos mais"números reais entre 0 e 1 do que números naturais.

Em resumo, conjuntos finitos podem ser enumerados, pois possuem um número limitado de elementos que podem ser contados em uma sequência ordenada. Já os conjuntos infinitos podem ser enumeráveis se seus elementos podem ser colocados em uma sequência infinita, correspondendo um-para-um com os números naturais. No entanto, existem conjuntos infinitos não-enumeráveis que não podem ser colocados em uma sequência ordenada correspondente aos números naturais.

1.1.1 Enumerabilidade

Admitimos conhecidos as notações usuais da teoria dos conjuntos: relação de conjuntos, etc.. Denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais isto é

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Definição 1.1

Um conjunto A é dito enumerável se existe uma correspondência injetiva entre os elementos de A e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{N}, \text{ injetiva, 1-1.}$$

♣

Noutras palavras: um conjunto A é enumerável se seus elementos podem ser indexados na forma $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots$.

Exemplo 1.1

O conjunto, $\mathbb{N}$, dos números naturais, é enumerável. A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \varphi(n) = n. \end{array}$$

Exemplo 1.2

O conjunto, $\mathbb{Z}$, dos números inteiros é enumerável.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

A aplicação $\varphi\ : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2n+1, & \text{se} \quad n \geq 0 \\ -2n, & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

é injetiva.

Exemplo 1.3

O conjunto, P, dos naturais pares é enumerável. A aplicação

$$\varphi : P \longrightarrow \mathbb{N},\ \varphi(n) = \frac{n}{2}$$

é injetiva.

Exemplo 1.4

O conjunto, $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é enumerável.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Todo número racional pode ser escrito na forma de uma fração irredutível $\alpha = \frac{p}{q},\ q > 0$.
A soma $n = |p| + q$ é chamada de “altura"do número racional α . O número de frações tendo altura n é finito. Por exemplo, o único racional de altura um é o zero. $(0 = \frac{0}{1})$
Tem altura dois os números $\frac{1}{1}$ e $\frac{-1}{1}$, e altura três, os números,$\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{-2}{1},\ \frac{-1}{2}$, e assim por diante.
Assim todos os números racionais podem ser escritos numa ordem de altura não-decrescente:

$$\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \cdots \tag{$*$}$$

A função $\varphi : \longrightarrow \mathbb{N}$, injetiva, é a função que associa, a cada número em $(*)$, um natural.

Proposição 1.1

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é finito ou enumerável.

♠

Demonstração

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável. Seja B um subconjunto de A. Como $B \subset A$ existem naturais $n_1,\ n_2, \cdot$ que correspondem aos elementos de B, dentro da enumeração de A. Se existir um maior dentre os naturais: $n_1,\ n_2, \ldots,\ B$ é finito. Caso contrário B é enumerável.

Proposição 1.2

A união, enumerável, de conjuntos enumeráveis, é um conjunto enumerável. ♠

Demonstração

Sejam $A_1,\ A_2, \ldots$ conjuntos enumeráveis. Podemos listar os elementos de cada um desses conjuntos, na forma:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

onde a $1^{\underline{a}}$ linha da tabela representa os elementos de A_1, na segunda linha, estão os de A_2, etc... Enumeramos todos os elementos dessa tabela, pelo "método diagonal": a_{11} é o primeiro elemento, a_{12} é o segundo, a_{21} o terceiro, a_{31} o quarto, a_{22} o quinto,... com esta ordenação, a cada elemento na tabela correspondente um único número natural, o que estabelece uma correspondência injetiva entre $\bigcup A_i$ e $\mathbb{N}$.

Exemplo 1.5

O conjunto de todos os polinômios a coeficientes racionais é enumerável.

De fato, para cada coeficiente, em tais polinômios, tem-se a chance de escolher uma quantidade enumerável de racionais. Isto feito em cada coeficiente e no têrmo independente, obtemos uma quantidade enumerável de escolha dos coeficientes. Portanto uma quantidade enumerável de polinômios a coeficientes racionais.

Exemplo 1.6

O conjunto de todos os intervalos racionais, i.é., intervalos com extremos racionais, é enumerável.
Como o conjunto,$\mathbb{Q}$, dos números racionais, é enumerável, podemos supor que

$$\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Para $a_1 \in \mathbb{Q}$, como um extremo, podemos construir uma quantidade enumerável de intervalos, tendo como outro extremo, qualquer racional diferente de a_1. Repetimos o processo agora com a_2. Repetindo o processo em $a_j \in \mathbb{Q}$, encontramos uma união enumerável de conjuntos enumeráveis ou seja o conjunto de todos os intervalos racionais é enumerável.

Proposição 1.3

Todo conjunto infinito contém um subconjunto enumerável. ♠

Demonstração

Um conjunto é dito infinito se após a retirada de qualquer quantidade finita de elementos do conjunto, ainda permanecem elementos no conjunto. Seja M um conjunto infinito. Tomemos um elemento $a_1 \in M$. Como M é infinito, encontramos $a_2 \in M, a_2 \neq a_1$. Considerando o conjunto $\{a_1,\ a_2\}$, e o fato de M ser infinito, encontramos $a_3 \in M$, talque $a_3 \neq a_2,\ a_3 \neq a_1$. Este processo constrói um subconjunto enumerável $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\}$ de M

Nota

Deduz-se da Proposição 1.3 *que entre os conjuntos infinitos, os "menores"são os conjuntos enumeráveis.*

Definição 1.2

Dois conjuntos S e T são ditos equivalentes ($S \sim T$) se existir uma correspondência biunívoca entre seus elementos. ♣

Pela Definição 1.2 um conjunto é enumerável se é equivalente ao conjunto, $\mathbb{N}$, dos números naturais.

Exemplo 1.7

O conjunto de pontos em $[0, 1]$ é equivalente ao conjunto de pontos em $[a, b]$.

De fato, consideremos a função

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ & t & \longmapsto & ta + (1-t)b. \end{array}$$

φ é injetiva. Na verdade φ é bijetiva.

Proposição 1.4

Todo conjunto infinito é equivalente a algum subconjunto próprio de si mesmo. ♠

Demonstração

Seja M um conjunto infinito. Então, pela Proposição 1.4, M tem um subconjunto enumerável $A = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\}$. Como A e A_1 são enumeráveis, existe uma correspondência, $\varphi : A \longrightarrow A_1$, injetiva.
Seja

$$\begin{array}{cccc} \Theta : & A \cup (M \setminus A) & \longrightarrow & A_1 \cup (M \setminus A) \\ & x & \longmapsto & \Theta(x) \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in M \setminus A \\ \varphi(x), & \text{se} \quad x \in A \end{cases} \end{array}$$

Θ é injetiva, $A \cup (M \setminus A) = M$ e $A_1 \cup (M \setminus A) = M \setminus A_2 \subsetneq M$.
Assim M e $M \setminus A_2$ são equivalentes.

1.1.2 Conjuntos Não Enumeráveis

Nossa idéia, agora, é provar que existem conjuntos que não são enumeráveis.
Antes, consideremos a seguinte questão: $0,5000\ldots$ é igual a $0,4999\ldots$?
Inicialmente provamos que $0,999\ldots = 1$.
De fato: seja $x = 0,999\ldots$. Então $10x = 9,999\ldots$
Daí $10x - x = 9$. Logo $x = 1$.
Agora deduzimos que $0,5000\ldots$ é igual a $0,4999\ldots$.
Veja, $0,4999\ldots$ é igual a $0,5000\ldots$ se e somente se $4,999\ldots$ é igual a $5,000\ldots$, se e somente se $4 + 0,999\ldots = 5 \Longleftrightarrow 0,999\ldots = 1$.
Isto nos auxiliará em nosso primeiro resultado sobre não enumerabilidade.

Teorema 1.1

O conjunto de números no intervalo fechado $[0, 1]$ é não enumerável. ♡

Demonstração

Suponhamos, por contradição, que os reais de $[0,1]$ sejam enumeráveis, e que estão todos arranjados na forma

$$\begin{array}{cccc} 0\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \cdots & . & . & . \\ 0\cdot a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ \cdots & . & . & . \end{array} \tag{1}$$

Na forma exposta em (1) cada a_{ik} é algum dos números $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 9$.

Seja $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$, onde, para b_1, tomamos qualquer dos números de 0 a 9, diferente daquele assumido por a_{11}, e repete-se o processo para os demais $b_i's$. Note que x é diferente de todos os números na tabela (1) no número por dígito. Portanto $[0,1]$ é não enumerável.

Nota

Precisamos de um pouco mais de exatidão na prova do Teorema 1, em face do que expomos no ínicio deste parágrafo.

Será que não podia acontecer com o números $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$ *o que aconte com* $0,4999\ldots$ *e* $0.5000\ldots$*?*

Bem que poderia !! Para esta possibilidade, basta tomar os decimais, em x*, diferentes de 0 e 9. Por exemplo, podemos construir o número* x*, com* $b_n = 2$ *se* $a_{nn} = 1$*,e* $b_n = 1$ *se* $a_{nn} \neq 1$.

Exemplo 1.8

O conjunto de pontos, no intervalo fechado $[a,b]$ é não enumerável. Da mesma forma o conjunto de pontos no intervalo aberto (a,b) é não enumerável $(a < b)$.

Exemplo 1.9

O conjunto de todos os números reais é não enumerável.

Definição 1.3

Se dois conjuntos finitos são equivalentes, diz-se que tem o mesmo número de elementos. Se S *e* T *são conjuntos equivalentes, arbitrários, diz-se que* S *e* T *tem o mesmo número cardinal e escreve-se* $card(S) = card(T)$.

♣

A cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é denotada por $\aleph_0$. Portanto todo conjunto enumerável tem cardinalidade *aleph zero*.

Conjuntos que são equivalentes ao conjuntos cuja cardinalidade é a "potência do contínuo", denotada por c. Assim $card(0,1) = c$, $card(\mathbb{R}) = c$.

Prova-se que se um conjunto, M, tem cardinalidade maior que m então o conjunto de todos os subconjuntos de M, tem cardinalidade maior que m. Portanto c não é a maior cardinalidade.

1.2 Funções

Seja X um subconjunto de números reais. Uma função f é definida, sobre X, se para cada $x \in X$ corresponde um número bem definido, $y = f(x)$.

O elemento y é dito a imagem de x, pela função f. O conjunto $f(x) = \{f(x);\ x \in X\}$ é dito imagem de X. O conjunto dos elementos, de X, cuja imagem é o elemento b, é dita imagem inversa de b, e escrito $f^{-1}(b)$. Assim

$$f^{-1}(b) = \{x \in X;\ f(x) = b\}$$

.

O conjunto $f^{-1}(B)$ é definido como sendo o conjunto de os elementos de X, cuja imagem está em B.

Se $f\ :M\longrightarrow\mathbb{N}$ é uma função e $f(M)=\mathbb{N}$, diz-se que f é sobrejetiva ou sobre $\mathbb{N}$. Em geral $f(M)\subseteq\mathbb{N}$.

Proposição 1.5

A imagem inversa da união de dois conjuntos é igual a união das imagens inversas.

Demonstração

Sejam A e B dois subconjuntos de X. Queremos provar que

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$

$x\in f^{-1}(A\cup B)\Rightarrow f(x)\in A\cup B\Rightarrow f(x)\in A$ ou $f(x)\in B\Rightarrow$
$x\in f^{-1}(A)$ ou $x\in f^{-1}(B)\Rightarrow x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$
Assim $f^{-1}(A\cup B)\subset f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$
Se $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\Rightarrow x\in f^{-1}(A)$ ou $x\in f^{-1}(B)\Rightarrow f(x)\in A$ ou $f(x)\in B\Rightarrow f(x)\in A\cup B\Rightarrow x\in f^{-1}(A\cup B)$. Assim $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B)$.
Conclusão:$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

Proposição 1.6

A imagem inversa da interseção de dois conjuntos é igual a interseção das imagens inversas.

Demonstração

Muito similar à demonstração da Proposição 1.5.

Proposição 1.7

A imagem da união de dois conjuntos é igual a das imagens.

Demonstração

Queremos provar que, se A e B são subconjuntos de X, então

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

$y\in f(A\cup B)\Rightarrow y=f(x), x\in A\cup B$. Se $x\in A$, então $y=f(x)\in f(A)$, e daí, $y\in f(A)\cup f(B)$. Se $x\in B$, então $y=f(x)\in f(B)$, e daí, $y\in f(B)\cup f(A)$.

Assim, $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

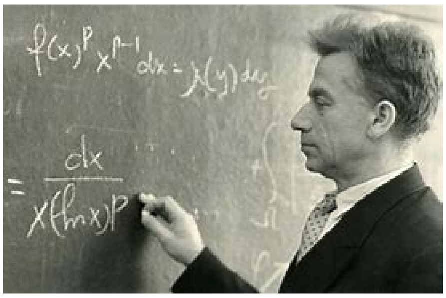
$y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ ou $y\in f(B)$. Se $y\in f(A)$, então $y=f(x),\ x\in A$. Daí $y=f(x), x\in A\cup B$.
Se $y\in f(B)$, então $y=f(x),\ x\in B$. Daí $y=f(x),\ x\in B\cup A$, ou seja $y\in f(A\cup B)$.
Assim, $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.
Conclusão: $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

Nota

Sejam $\pi\ :\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\pi(x,y)=(x,0)$, $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1,\ y=0\}$, $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\leq x\leq 1, y=1\}$.
Note que $A\cap B=\emptyset$ *e* $\pi(A\cap B)=\emptyset$.
Por outro lado $\pi(A)\cap\pi(B)=\{(x,y);\ 0\leq x\leq 1, y=0\}$.

Capítulo Espaços Métricos

Sobolev introduziu fundamentos para várias áreas da matemática. Os espaços de Sobolev e seus teoremas de imersão são destaques na análise funcional. As funções generalizadas (mais tarde conhecidas como distribuições) foram introduzidas por Sobolev em 1935 para soluções fracas e posteriormente desenvolvidas por Laurent Schwartz. Sobolev abstraiu a noção clássica de diferenciação, expandindo assim o campo de aplicação da técnica de Newton e Leibniz. A teoria das distribuições é considerada agora como o cálculo da época moderna.



Sergei Lvovich Sobolev nasceu em São Petersburgo (Em 1914, o nome da cidade foi mudado para Petrogrado e, em 1924, para Leningrado. Em 1991, a cidade volta ter seu nome original.)
$(1908 - 1989, 80$ anos, Moscou, Rússia)

Um espaço métrico, também conhecido como espaço métrico completo, é um conceito fundamental na teoria das métricas e análise matemática. Ele descreve um conjunto onde é possível medir a distância entre seus elementos de forma precisa.

Formalmente, um espaço métrico é uma estrutura matemática composta por um conjunto não vazio X e uma função de distância $d : X \times X- > R$ que atribui um número real não negativo a cada par de elementos em X. Essa função de distância deve satisfazer as seguintes propriedades:

Não-negatividade: Para todos os x, y em X, a distância entre x e yé sempre não negativa, ou seja, $d(x, y) \geq 0$.

Identidade dos indiscerníveis: A distância entre dois elementos é zero se, e somente se, esses elementos são iguais, ou seja, $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

Simetria: Para todos os x, y em X, a distância entre x e y é a mesma que a distância entre y e x, ou seja, $d(x, y) = d(y, x)$.

Desigualdade triangular: Para todos os x, y, z em X, a distância entre x e y é menor ou igualÀ soma das distâncias entre x e z e entre z e y, ou seja, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Essas propriedades são conhecidas como axiomas métricos e garantem que a função de distância definida em X possui algumas propriedades fundamentais que esperamos de uma medida de distância.

Um exemplo clássico de espaço métrico é o espaço euclidiano n-dimensional, onde os elementos são vetores n-dimensionais e a função de distância é a distância euclidiana, dada pela fórmula:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

onde x_i e y_i são as coordenadas dos vetores x e y, respectivamente. Além disso, os espaços métricos podem ser completos ou incompletos. Um espaço métrico completo é aquele em que toda sequência de Cauchy (uma sequência em que a distância entre termos subsequentes se aproxima de zero) converge para um ponto dentro do próprio espaço métrico. Já um espaço métrico incompleto possui sequências de Cauchy que não convergem dentro do espaço.

Os espaços métricos têm um papel importante em várias áreas da matemática, incluindo análise funcional, topologia, geometria e teoria das probabilidades. Eles fornecem uma estrutura essencial para estudar propriedades de convergência, continuidade, compacidade e muito mais.

2.1 Definição e Exemplos

Boa parte, dos fatos da Análise Real, está ligadaÀs propriedades de números reais relacionadas ao conceito de distância. Por exemplo, passagem ao limite, para citar apenas uma.

A noção de distância, ou métrica, pode ser estendida para conjuntos abstratos.

Definição 2.1

Seja X um conjunto arbitrário de pontos. Uma métrica, em X, é uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo:

(i) $d(x,y) \geq 0, \ \forall x,y \in X$

(ii) $d(x,y) = 0$ *se e só se* $x = y$

(iii) $d(x,y) = d(x,y), \forall x,y \in X$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y \in X.$

♣

A condição iv), na definição de métrica, recebe o nome de desigualdade triangular.

Definição 2.2

Um espaço metrico é um par (X,d) onde X é um conjunto arbitrário e d é uma métrica definida em X. Em geral nos referimos ao espaço métrico X, subentendo-se que existe uma métrica definida, em X, cuja símbolo omitimos.

♣

Exemplo 2.1

Qualquer conjunto não vazio pode tornar-se um espaço métrico. Seja X um conjunto não vazio. A função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x = y \\ 1, & \text{se} \quad x \neq y \end{cases}$$

define uma métrica em X.

Portanto $X = (X, d)$ é um espaço métrico.

A métrica do Exemplo 2.1 recebe a denominação especial de métrica zero-um ou mérica discreta.

Exemplo 2.2

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço métrico.
A métrica, em $\mathbb{R}$, é dada por:

$$d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Exemplo 2.3

O espaço métrico euclidiano $\mathbb{R}^n$.
Um ponto, x, do $\mathbb{R}^n$, é escrito como $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
A função $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ define uma métrica, sobre $\mathbb{R}^n$, dita *métrica euclideana.*
Para demonstrar que a desigualdade triangular é verificada por d, é instrutivo usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Exemplo 2.4

$\mathbb{R}^n$ com a métrica do máximo.

Para quaisquer $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, pontos do $\mathbb{R}^n$, define-se a função

$$d_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ d_0 = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|.$$

Verifica-se que d_0 é uma métrica sobre o $\mathbb{R}^n$, de modo que o par $(\mathbb{R}^n, d_0)$ é um outro espaço métrico.

Exemplo 2.5

$\mathbb{R}^n$ com a métrica da soma.

Para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$, define-se, $d_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|$. d_1 é uma métrica, sobre $\mathbb{R}^n$, e o par $(\mathbb{R}^n, d_1)$ é um outro espaço métrico.

Nota

Como o $\mathbb{R}^n$ é um só, o que os exemplos, acima, mostram, é que existem, pelo menos, três modos distintos de se medir a distância entre pontos do $\mathbb{R}^n$. O espaço métrico $C[a, b]$. Lembramos que

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ é contínua}\}.$$

Consideremos a função $d : C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.
Verifica-se que d é uma métrica. Portanto $(C[a, b], d) = C[a, b]$ é um espaço métrico.

Exemplo 2.6

O espaço métrico ℓ_2.

Denota-se por ℓ_2 o conjunto de todas as sequências, infinitas, de números reais, cuja soma, dos quadrados de todos os seus elementos, é finita.

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots);\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \ldots \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

Se $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$ são pontos arbitrários de ℓ_2, define-se a distância d entre eles, pontos:

$$d(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

d é bem definida.

A função d, que queremos seja uma métrica em ℓ_2, estará bem definida se a expressão $\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^2 - y_i^2)\right\}^{\frac{1}{2}}$ representar um número real, isto é se a série é convergente.

Isto, de fato, ocorre.

Sejam $x = ((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)$ pontos de ℓ_2. Então

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty.$$

Consideremos, por um instante, os pontos $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, do $\mathbb{R}^n$. Considerando, em $\mathbb{R}^n$, a métrica euclideana, pela desigualdade, temos:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, 0) + d(0, \bar{y}), 0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

Assim,

$$\begin{aligned} \{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\}^{\frac{1}{2}} &\leq \{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i^2)\}^{\frac{1}{2}} + \{\textstyle\sum_{i=1}^{n}(y_i^2)\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^2)\}^{\frac{1}{2}} + \{\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}(y_i^2)\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

independente de n.

Então, fazendo n tender para ∞, obtemos

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Portanto d é bem definida.

Agora precisamos verificar se d satisfaz às quatro condições que definem uma métrica. Destas, a única que oferece resistência é a desigualdade triangular:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \ell_2. \tag{2}$$

Provar (2) é o mesmo que provar que

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Seja $x_i - z_i = a_i$, $z_i - x_i = b_i$. Então $x_i - y_i = a_i + b_i$

Podemos escrever (3) na forma.

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Se provamos a veracidade de (4), (2) fica provado.

Ora, sabemos que (1) é verdadeira, para todo $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e todo $x = (y_1, y_2, \ldots)$ de ℓ_2. Então (1) contínua verdadeira se trocamos por $-y$, isto é y_1 por $-y_1$, $\forall i = 1, 2, \ldots$ Fazendo assim, obtemos

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

que é desigualdade (4).

Exemplo 2.7

O espaço métrico ℓ_∞.

Denota-se por ℓ_∞, ao conjunto:

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots), \sup_{i=1,2,\ldots} |x_i| < \infty\right\}.$$

Para quaisquer $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$ de ℓ_∞, define-se:

$$d(x, y) = \sup_{k=1,2,\ldots} |x_k - y_k|.$$

é, realmente, simples mostrar que d é uma métrica em ℓ_∞.

Exemplo 2.8

Subespaços métrico.

Sejam (X,d) um espaço métrico e M um subconjunto de X. Como as propriedades de d são válidas em todo X. Particularmente valem em M. Então (M,d) é um espaço métrico, dito subsespaço métrico de X.

Exemplo 2.9

Os espaços métricos ℓ_p, $1 \le p \le \infty$.

Já vimos (Exemplos 2.6 e 2.7) que para $p = 2$, ℓ_2 é um espaço métrico, e para $p = \infty$, ℓ_∞ é um espaço métrico. O caso $p = 1$, é deixado, como exercício, a verificação de que ℓ_1 é um espaço métrico.
Vamos nos ater ao $1 < p < \infty$.

Desigualdade de Young

Sejam $x \ge o,\ y \ge 0$. Se $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q. \tag{5}$$

Existem na literatura matemática vários demonstraçoes dessa desigualdade, todas acessíveis e interessantes. Faremos uma demonstração usando extremos de funções de uma variável.
Seja, para $y > 0$, fixado, $F(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$
Tem-se: $F(0) > 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = +\infty$ e $F(y^{\frac{p}{q}}) = 0$
Com isto F deve ter um número em algum ponto x_0 de $(0,\infty)$, ou seja $F(x) \ge F(x_0)$, $\forall\, x \in (0,\infty)$.
Devemos ter, então, $F'(x_0) = 0$. Mas $F'(x_0) = 0$, acarreta $x_0^{p-1} - y = 0$ ou seja $x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$.
Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos $1 + \frac{q}{q} = p$, e $\frac{p}{q} = p - 1$.
Daí, $x_o = y^{\frac{q}{p}}$.
Temos $F(x) \ge F(y^{\frac{p}{q}})$, $\forall\, x \in (0,\infty)$.
Então, $F(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \ge \frac{x^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{q}{p}}y = y^q - y^q = 0$.
Logo

$$xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q.$$

é claro que se $y = 0$, a desigualdade acima permanece válida.

Desigualdade de Hölder.

Sejam $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pontos arbitrários do $\mathbb{R}^n$. Então

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{6}$$

Demonstração

Na desigualdade (5) façamos

$$x = \frac{|x_i|}{(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}},\quad y = \frac{|y_i|}{(\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}.$$

Temos

$$\frac{|y_i||x_i|}{(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}$$

Somando, de 1 a n, em ambos os lados da desigualdade acima, lembrando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $|\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|$, segue-se a desigualdade (6)

Desigualdade de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{7}$$

para quaisquer $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertencente a $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Sejam $a > 0$, $b > 0$ e considere a identidade:

$$(|a| + |b|)^p = (|a| + |b|)^{p-1} |a| + (|a| + |b|)^{p-1} |b|. \qquad (7)'$$

Fazendo $a = x_k$ e $b = y_k$, em $(7)'$ de 1 a n, encontramos.

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} |y_k| \qquad (7)''$$

Análise de $\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} |x_k|$.

Veja que $\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k||x_k|$, $z_k = (|x_k| + y_k|)^{p-1}$

Pela Desigualdade de Höder, obtemos,

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Análise semelhante mostra que,

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p-1} |y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Levando estes resultados em $(7)''$, temos:

$$\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Dividindo ambos os lados por

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p}\right)^{\frac{1}{q}},$$

temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + y_k|)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por ℓ_p, $1 < p < \infty$, entendemos o conjunto de todos as sequências, infinitas, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, tais que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$.

$$\ell_p = \{x = (x_1, x_2, \ldots); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}.$$

Para $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ em ℓ_p, define-se

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como no caso ℓ_2, a primeira preocupação é saber se a função d está bem definida, isto é, saber se a série $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p$ é convergente.

Da Desigualdade de Minkowski, segue-se que,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + (-y_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

Daí

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

pois $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$ estão em ℓ_p.

Assim $(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$, independentemente de n.

Tomando limite, com $n \longrightarrow \infty$, obtemos,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p < \infty.$$

Portanto d é bem definida.

Das condições para que d seja de fato uma distância verificamos, apenas, a desigualdade triangular, por ser a única que apresenta alguma dificuldade.

Devemos provar que,

$$d(x, y) \leq d(x, y) + d(x, y), \forall x, y, z \in \ell_p.$$

Isto é equivalente a provar que,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Fazendo $x_i - z_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$, reencontramos a Desigualdade de Minkowski, que já mostramos ser verdadeira.

Logo d é uma métrica em ℓ_p, $1 < p < \infty$.

2.2 Noção de Convergência

Definição 2.3

Uma bola (esfera) aberta, de um espaço métrico X, centrada em $x_0 \in X$, e raio $r > 0$, é o conjunto.

$$B_r[x_0] = \{x \in X; d(x, x_0) \leq r\}$$

Uma $\epsilon-$vizinhança do ponto $x \in X$ é uma bola aberta, entrada em x, de raio ϵ. ♣

Seja M um subconjunto de X. Um ponto $x \in X$ é dito ponto de aderência de M, se toda $\epsilon-$vizinhança de x, contém, no mínimo, um ponto de M.
O conjunto de todos os pontos de aderêrencia de M é chamado o fecho de M e denotado $\overline{M}$. Tem-se $M \subset \overline{M}$.

Proposição 2.1

O fecho do fecho de M é igual ao fecho de M. ($\overline{\overline{M}} = \overline{M}$).

Demonstração

Seja $x \in \overline{\overline{M}}$. Qualquer $\epsilon-$vizinlhança, $B_\epsilon(x)$, de x, contém um ponto $x_1 \in \overline{M}$. Seja $\epsilon_1 = \epsilon - d(x_1, x)$ e consideremos a ϵ_1-vizinhança $B_{\epsilon_1}(x_1)$. $B_{\epsilon_1}(x_1) \subset B_\epsilon(x)$: pois se $z \in B_{\epsilon_1}(x_1)$, então $d(z, x_1) < \epsilon_1$ e

$$d(z, x) \leq d(z, x_1) + d(x_1, x) < \epsilon + \epsilon - \epsilon_1 = \epsilon.$$

Logo $z \in B_\epsilon(x)$. Como $x_1 \in \overline{M}$, $B_{\epsilon_1}(x_1)$ contém um ponto $x_2 \in M$. Então $x_2 \in B_\epsilon(x)$. Logo $x \in \overline{M}$, $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$, como sempre temos $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$.

Proposição 2.2

Se $M_1 \subset M$, então $\overline{M_1} \subset \overline{M}$.

Demonstração

Seja $x \in \overline{M_1}$. Toda $\epsilon-$vizinhança, $B_\epsilon(x)$, de x, contém, pelo menos, um ponto de M_1.Como $M_1 \subset M$, $B_\epsilon(x)$ contém, pelo menos, um ponto de M. Logo $x \in \overline{M}$.

Proposição 2.3

O fecho da união de dois conjuntos é igual a união dos fechos, isto é,

$$\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$$

Demonstração

Seja $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$. Toda $\epsilon-$vizinhança, $B_\epsilon(x)$, contém no número, um elemento $y \in M_1 \cup M_2$. Então $B_\epsilon(x)$ contém no minimo, um elemento y de M_1 ou de M_2. Se y pertence a M_1, então $x \in \overline{M_1}$ e daí $x \in \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Se y pertence a M_1, então $x \in \overline{M_1}$ e daí $x \in \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Se y pertence a M_2, então $x \in \overline{M_2}$ e daí $x \in \overline{M_2} \cup \overline{M_1}$. Em qualquer caso se $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ então $x \in \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$. Por outro lado, se $x \in \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$, então $x \in \overline{M_1}$ ou $x \in \overline{M_2}$. Se $x \in \overline{M_1}$, então toda $\epsilon-$vizinhança, $B_\epsilon(x)$, de x, contém pelo menos, um ponto de M_1. Logo $B_\epsilon(x)$ contém, no mínimo, um ponto de $M_1 \cup M_2$, e assim $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$. Se $x \in \overline{M_2}$, concluimos, do mesmo modo, que $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$.
Portanto $\overline{M_1} \cup \overline{M_2} \subset \overline{M_1 \cup M_2}$.
Conclui-se, então, que $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$.

Definição 2.4

Seja $M \subset X$. Um ponto $x \in X$ é dito ponto limite, ou ponto de acumulação, de M, se toda $\epsilon-$vizinhança de x, tem infinitos pontos de M.
Um ponto $x \in X$ é dito isolado se existe uma vizinhança de x a qual não contém nenhum ponto de M, diferente de x.

Proposição 2.4

Todo ponto de aderência de um subconjunto $M \cup X$ é um ponto de acumulação ou um ponto isolado de M.

Demonstração

Seja x um ponto de aderêrencia de M. Toda $\epsilon-$vizinhança, $B_\epsilon(x)$, contém, pelo menos, um ponto de M.
Se $B_\epsilon(x)$ contém infinitos pontos de M, x é um ponto de acumulação de M.
Se $B_\epsilon(x)$ contém apenas um número finito de pontos de M, então x é um ponto isolado de M.

Definição 2.5

Seja M um subconjunto de espaço métrico X. Um ponto $x \in X$ é dito ponto fronteira de M, se toda $\epsilon-$vizinhança de x contém pontos de M e do complementar de M. ♣

Definição 2.6

Seja $\{x_n\}_n$ uma sequência de pontos de um espaço métrico X. Diz-se que a sequência converge para o ponto x, se toda $\epsilon-$vizinhança, $B_\epsilon(x)$, contém todos os pontos x_n, a partir de um determinado índice. ♣

Neste caso escreve-se: $x_n \longrightarrow x$, com $n \longrightarrow \infty$, ou ainda, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Também é comum escrever-se apenas $x_n \longrightarrow x$.
Podemos, então, escrever, $x_n \longrightarrow x$, se e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe um índice natural n_0, tal que todos os termos da sequência $\{x_n\}$, a contar a partir do índice n_0, estão na $\epsilon-$vizinhança, $B_\epsilon(x)$, de x.
Resumindamente:
$x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow$ dado $\epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_n, x) < \epsilon,\ \forall n \geq n_0$.

Definição 2.7

sejam A e B subconjuntos de espaço métrico X. Diz-se que A é denso em B se $\overline{A} = B$,isto é, se se B é igual ao fecho em A. ♣

Um espaço métrico X é dito separável se admite um subconjunto, denso, enumerável.
Equivalentemente, dizer que o espaço métrico X é separável, significa que existe um subconjunto, $M \subset X$, enumerável, talque dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$, existe $x_m \in M$, de modo que $d(x, x_m) < \epsilon$.

Exemplos

Exemplo 2.10

O conjunto dos números reais é separável.
O conjunto, $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é enumerável.
Devemos mostrar que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. é claro que $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$.
Seja $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que toda $\epsilon-$vizinhança, $B_\epsilon(x)$, contém algum número racional. Então x é aderente a $\mathbb{Q}$, isto é, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Conclusão $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.11

O plano, $\mathbb{R}^2$, é separável. o espaço $\mathbb{R}^n$ é separável.

Exemplo 2.12

O espaço $C[a, b]$ é separável.

2.3 Funções Contínuas

Sejam (X, d),(Y, d') dois espaços métricos. Uma função $f :\to Y$ é dita contínua no ponto $x_0 \in X$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x_0, \epsilon) > 0$, tal que $d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, sempre que $d(x, x_0) < \delta$.
f é dita contínua se é contínua em todo ponto de X.
f é dita uma isometria se $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, para todo $x, y \in X$.
f é dita um homeomorfismo se é uma bijeção contínua, cuja inversa também é contínua. Dois espaço são ditos homeomorfisfos, quando existe um homeomorfismo entre eles.

Proposição 2.5

Sejam $f : (X, d) \to (Y, d')$ uma função dada e $x_0 \in X$. Então f é contínua em x_0 se e só se, para toda sequência, $\{x_n\}$, que converge a x_0, tem-se $f(x_n) \to f(x_0)$. ♠

Demonstração

Exercicío.

Definição 2.8

Uma sequência, $\{x_n\}$, de um espaço métrico X, é dita fundamental, ou de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe um natural $\mathbb{N}_\epsilon$, tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall m, n \geq \mathbb{N}_\epsilon$.
Se toda sequência fundamental, em X, converge para um elemento de X, diz-se que X é completo. ♣

Exemplos

Exemplo 2.13

$\mathbb{R}^n$ é completo

Exemplo 2.14

ℓ_2 é completo. $\ell_p,\ 1 \leq p \leq \infty$, é completo.

Exemplo 2.15

$(C[0, 1], d_0)$ é completo.

Exemplo 2.16

$\mathcal{B}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R};\ |f(x)| \leq M_f,\ \forall x \in [a, b]\}$ é completo.

Exemplo 2.17

$C_2[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}; f$ é contínua$\}$. Para f, g em $C_2[a, b]$, defina-se
$d_2(f, g) = \left\{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}$, $(C_2[a, b], d_2)$ não é completo.

Princípio das Bolas Encaixadas

Um espaço métrico X é completo se e somento se toda sequência de bolas fechadas, encaixadas, com raios tendendo a zero, tem interseção não vazia.

Demonstração

Suponhamos X, um espaço métrico completo e $B_1(x_1), B_2(x_2), \ldots$,
uma sequência de bolas fechadas. Seja $d_n = diam\ S_n$.
Por hipótese, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.
Consideremos a sequência, $\{x_n\}$, onde x_j é o centro da bola fechada $B_j(x_j)$.
$-\{x_n\}$ é uma sequência fundamental.

Se $m > n$ e n suficientemente grande, tem-se $d(x_n, x_m) < d_n$. Mas $d_n \to 0$, com $n \to \infty$, logo para $m > n$ e n suficiente grande, tem-se

$$d(x_n, x_m) \to 0, \text{ou seja } \{x_n\}_n \text{ é fundamental.}$$

Então existe $x \in X$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, e $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, pois como cada bola B_n, contém infinitos termos da sequência $\{x_n\}$, com a possível excessão de um número finito deles, x é ponto de acumulação de B_n. Sendo B_n, fechada, $x \in B_n, \forall n$. Para demonstar a suficiência, mostraremos que se X não é completo, é possível construir uma sequência de bolas fechadas encaixadas, cujos diâmetros tendem a zero e cuja interseção é vazia.
Seja $\{x_n\}_n$ uma sequência de Cauchy, em X, que não tenha ponto limite.
Seja $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_{n_1}, x_m) < \frac{1}{2}$, $\forall\, m > n_1$ e considere a bola fechada, $B_1(x_{n_1})$, centrada em x_{n_1}, de raio 1.
Seja $n_2 > n_1$ tal que $d(x_{n_2, x_m}) < \frac{1}{4}$, $\forall\, m > n_2$ e defina a, $B_{\frac{1}{2}}(x_{n_2})$, a bola fechada de centro x_{n_2} e raio $\frac{1}{2}$.
$B_{\frac{1}{2}}(x_n) \subset B_1(x_1)$
Seja $n_3 > n_2$; $d(x_{n_3}, x_m) < \frac{1}{8}$, $\forall\, m > n_3$ e constinua a bola fechada $B_{\frac{1}{4}}(x_{n_3})$. Prosseguindo, temos uma sequência B_n de bolas fechadas encaixadas, com raio, $\frac{1}{2^{n-1}}$, tendendo a zero.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \varnothing.$$

Se $x \in \cap B_k$, então $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. De fato, B_k contém todos os pontos x_n, a partir de x_{n_k}. Como $x \in B_k$, $d(x, x_n) < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$, $\forall\, n > n_k$, ou seja $x_n \to x$. Contradição!!

Definição 2.9

Seja X um espaço métrico arbitrário. Um espaço métrico $\widehat{X}$ é dito o completo de X se:
i) $X \subset \widehat{X}$
ii) $\overline{X} = \widehat{X}$. $\widehat{X}$ é dito uma completação de X.

♣

Teorema 2.1

Todo espaço métrico X tem um completação e todas as completações de X são isométricas.

♡

Demonstração

Exercício.

2.4 Funções Contrativas: Aplicações

Seja X um espaço métrico. Uma aplicação $A : X \to X$ é dita uma contração, se existe um número real α, $0 < \alpha < 1$, tal que

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha\, d(x, y),\ \forall\, x, y \in X.$$

Toda contração é uma aplicação contínua (uniformente).

Princípio da Contração: Sejam X um espaço métrico completo e $A : X \to X$, uma contração. Então A tem um único ponto fixo.

Dem: Seja $x_0 \in X$. Consideremos a sequência $x_n = Ax_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Usando a contratividade de A e a desigualdade do triângulo, prova-se que se, $m > n$, então

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

Como $0 < \alpha < 1$, tomando-se limite com $n \to \infty$, obtemos
$d(x_n, x_m) < \epsilon$, se $n, m \geq n_0$.
Assim$(x_n)_n$ é de Cauchy, em X. Como X é completo, existe $x \in X$; $x_n \to x$.
Tem-se $x_n \to x,\ Ax_n \to Ax,\ xn+1 \to Ax$. Logo $x = Ax$, ou seja A tem um ponto fixo.
Suponha $y \in X$ e $Ay = y$. Então $d(x, y) = d(Ax, Ay) \leq \alpha\, d(x, y)$.
Daí $(1-\alpha)\, d(x, y) \leq 0$. Isto acarreta $d(x, y) = 0$ ou $x = y$.

Exemplo 2.18

A equação integral, linear, não homogênia, de Fredholm, de $2^{\underline{a}}$ espécie.

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x) \qquad (?)$$

$K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua, é dita núcleo.

$$|K(x, y)| \leq M,\ \forall\, x, y \in [a, b].$$

$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, contínua,
f é a solução (função) procurada.
Consideremos o operador

$$\begin{aligned} A : C[a, b] &\longrightarrow C[a, b] \\ f &\longmapsto Af \end{aligned}$$

onde a função Af é definida por

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy + \varphi(x)$$

Resolver a problema (?), consiste em verificar se o operador A tem um ponto fixo.
- A é bem definido
Para isto é preciso mostrar que $Af \in C[a, b]$, ou seja Af é uma funão contínua.
Ora,

$$\begin{aligned} |(Af)(x_1) - (Af)(x_2)| &= |\lambda \int_a^b [K(x_1, y) - K(x_2, y)] f(y) dy + \varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |K(x_1, y) - K(x_2, y)||f(y)| dy + |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \\ &\leq |\lambda| \int_a^b \max_{a \leq y \leq b} |f(y)||K(x_1, y) - K(x_2, y)| dy \\ &+ |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $|x_1 - x_2| < \delta$, então

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e } |K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{|\lambda| \max\limits_{a \leq y \leq b} |f(y)|} \frac{1}{(b-a)}$$

Segue-se, daí, que

$$|(Af)(x_1) - (Af)(x_2)| < \epsilon, \text{ se } |x_1 - x_2| < \delta,$$

ou seja Af é uma função contínua.

- A é uma contração

$$\begin{aligned} d(Af_1, Af_2) &= \max_{a\leq x\leq b} |(Af_1)(x) - (Af_2)(x)| \\ &= \max_{a\leq x\leq b} |\lambda \int_a^b K(x,y)(f_1(x) - f_2(x)dx| \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \max_{a\leq x\leq b} |f_1(x) - f_2(x)| \end{aligned}$$

$$d(Af_1, Af_2) \leq |\lambda| M(b-a) d(f_1, f_2)$$

Tomando λ, de modo que $|\lambda|\ M\ (b-a) < 1$, a aplicação A é uma contração.
Sendo $(C[a,b], d_{max})$ um espaço completo e A uma contração de $C[a,b]$, em si-próprio, segue-se que A tem um único ponto fixo.

Proposição 2.6

Sejam X, um espaço métrico e $A : X \to X$, uma aplicação contínua. Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$, a aplicação A^n seja uma contração. Então A tem um único ponto fixo. ♠

Demonstração

Escolha $x \in X$ e coside re a sequência $\{A^{kn}x\}_{k=0,1,2,\dots}$. Usando o fato de que A^n é uma contração, temos

$$d(A^{kn}Ax, A^{kn}x) \leq \alpha\ d(A^{(k-1)n}Ax, A^{(k-1)n}x) \leq \cdots \leq \alpha^k\ d(Ax, x)$$

Este argumento mostra que $\{A^{kn}x\}_{k=0,1,\dots}$ é uma sequência de Cauchy. Daí, como X é completo, $A^{kn}x \to x_0$.
$\mapsto)$ $Ax_0 = x_0$
$Ax_0 = \lim_{k\to\infty} A^{kn}Ax = \lim_{k\to\infty} A^{kn}x = x_0$.
Portanto A tem um ponto fixo.
Acho melhor a dem. seguinte: Seja $\overline{x}$ o único ponto fixo de A^n.
Tem-se: $A(A^n x) = A^n(Ax), \forall\ x \in X$.
Então $A\overline{x} = A(A^n\overline{x}) = A^n(A\overline{x})$. Logo $A\overline{x}$ é ponto fixo de A^n. Por unicidade $A\overline{x} = \overline{x}$, ou seja $\overline{x}$ é ponto fixo de A.
Se x é ponto fixo de A, então

$$\begin{gathered} Ax = x \quad A(Ax) = Ax = x \\ A^2x = x \\ \vdots \\ A^n x = x \end{gathered}$$

Logo x é ponto fixo de A^m. Como A^m só tem um ponto fixo, A só pode ter um ponto fixo.

Exemplo 2.19

A equação integral de Volterna

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$$

.

$-K$ é o mesmo núcleo da equação de Fredholm, com a condição $K(x,y) = 0$, se $y > x$.

$$\begin{aligned} \text{Seja } A : C[a,b] &\to C[a,b] \\ f &\mapsto Af, \text{ onde} \end{aligned}$$

$$(Af)(x) = \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy + \varphi(x)$$

- Para algum valor de $n \in \mathbb{N}$, A^n é uma contração.
Prova-se, diretamente, que

$$\begin{aligned} d(A^n f_1, A^n f_2) &= \max_x |(A^n f_1)(x), (A^n f_2)(x)| \\ &\leq \lambda^n \max_{x,y} |K(x,y)| \max_x |f_1(x) - f_2(x)| (b-a)^n \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Escolhe n de tal modo que

$$\lambda^n \max_{x,y} |K(x,y)|\, (b-a)^n \frac{1}{n!} < 1.$$

Então A^n é uma contração. Pela proposição, recem-de-monstrada A tem um único ponto fixo.

Definição 2.10

Um subconjunto M, de um espaço métrico X, é dito relativamente compacto, se toda sequência de elementos, em M, contém uma subsequência que converge para algum $x \in X$. ♣

Definição 2.11

Seja M um subconjunto de um espaço métrico X e seja $\epsilon > 0$. Um conjunto A, de pontos de X, é dito uma ϵ-net de M, se dado qualquer $x \in M$, existe $a \in A$, tal que $d(a, x) < \epsilon$. ♣

M é dito totalmente limitado, se, *para todo* $\epsilon > 0$, existe uma ϵ-net, de M, finita.

Definição 2.12

Um subconjunto M, de um espaço métrico X, é dito compacto se toda sequência de elementos, em M, tem uma subsequência convergente para algum elemento de M. ♣

Exemplo 2.20

Seja $X = \ell_2$. Seja $S = \{x \in \ell_2;\ d(x, 0) = 1\}$.

S é subconjunto limitado de ℓ_2, mas S não é totalmente limitado.

Os pontos

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

permite a $S, d(e_i, e_j) = \sqrt{2}, i \neq j$.
Em S não existe ϵ-net finito, se $\epsilon \leq 2^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 2.2

Um subconjunto M de um espaço métrico completo X é compacto se e só se é totalmente limitado e fechado. ♡

Demonstração É interessante rever esta parte da topologia métrica. Consulte Espaços Métrico, E.Lima - Projeto Euclides.

Capítulo Espaços Métricos Compactos

Cesare Arzelà foi um matemático italiano que lecionou na Universidade de Bolonha e é reconhecido por suas contribuições na teoria das funções, particularmente por sua caracterização de sequências de funções contínuas, generalizando a dada anteriormente por Giulio Ascoli no teorema de Arzelà-Ascoli.

Cesare Arzelà nasceu em Santo Stefano di Magra (É uma comuna italiana da região da Ligúria, Província da Spezia.)

$(1847 - 1912, 65$ anos, Santo Stefano di Magra $)$

Em matemática, as funções reais em espaços métricos compactos e os espaços lineares normados são dois tópicos importantes na análise funcional.

Funções reais em espaços métricos compactos:

Um espaço métrico compacto é um espaço onde é possível definir uma noção de distância entre seus elementos e, ao mesmo tempo, possui a propriedade de compacidade. As funções reais em espaços métricos compactos referem-se ao estudo das propriedades e comportamento de funções que mapeiam elementos desse espaço para números reais.

Nesse contexto, pode-se investigar questões como continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade e outras propriedades das funções. Um dos teoremas fundamentais relacionados a esse tema é o Teorema de Weierstrass, que afirma que toda função contínua definida em um espaço métrico compacto atinge seus valores máximo e mínimo.

Além disso, existem resultados importantes como o Teorema de Arzelà-Ascoli, que estabelece condições para a existência de subsequências convergentes para uma família de funções em espaços métricos compactos.

Espaços lineares normados:

Um espaço linear normado é um espaço vetorial equipado com uma norma, que é uma função que atribui uma medida de "comprimento"a cada elemento do espaço. Essa norma deve satisfazer certas propriedades, como a positividade, a homogeneidade e a desigualdade triangular.

O estudo de espaços lineares normados envolve a análise de propriedades das normas e das operações definidas no espaço, como soma de vetores e multiplicação por escalares. Além disso, pode-se investigar conceitos como convergência de sequências, continuidade de operadores lineares e espaços completos.

Exemplos comuns de espaços lineares normados incluem o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, equipado com a norma euclidiana, e o espaço das funções contínuas em um intervalo fechado, equipado com a norma do supremo.

A análise de funções reais em espaços métricos compactos e o estudo de espaços lineares normados são fundamentais em análise funcional e têm aplicações em diversos ramos da matemática e em áreas como física, engenharia e economia.

3.1 Arzelá - Ascoli

O teorema de Ascoli-Arzelá, inicialmente, é um critério de compacidade para subconjuntos de $C[a, b]$.

Definição 3.1

Uma família, $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, de funções definidas no intervalo compacto $[a, b]$, é uniformemente limitada , se existe uma constante, $M > 0$, tal que

$$|A_\alpha(x)| \leq M, \forall x \in [a, b], \forall\ \alpha \in I.$$

A família A é dita equicontínua se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que

$$|A_\alpha(x_1) - A_\alpha(x_2)| < \epsilon, \text{ para todo } x_1, x_2 \text{ com } |x_1 - x_2| < \delta, \ \forall\ \alpha \in I$$ ♣

Teorema 3.1 (Ascoli-Arzelá)

Um subconjunto fechado $K \subset C[a, b]$ é compacto $\Leftrightarrow$ K é equicontínuo e uniformemente limitado. ♡

Demonstração

Seja $\Phi = \{\phi\}$ um subconjunto compacto de $C[a, b]$.

Existe uma $\frac{\epsilon}{3}$ $-$ net $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\}$ de Φ. Como cada ϕ_i é contínua, em $[a, b]$,

tem-se $|\varphi_i(x)| \leq M_i,\ i = 1, \ldots, k,\ \forall\, x \in [a, b]$.

Seja $M = \max_{i=1,\ldots,k} M_i + \frac{\epsilon}{3}$.

Sendo $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\}$ uma $\frac{\epsilon}{3}$-net, em Φ, para toda $\phi \in \Phi$, existe $\phi_i;\ d(\phi, \phi_i) < \frac{\epsilon}{3}$

Então,$|\phi(x) - \phi_i(x)| < \frac{\epsilon}{3},\ \forall\, x \in [a, b]$.

Daí

$$|\phi(x)| - |\phi_i(x)| \leq |\phi(x) - \phi_i(x)| < \frac{\epsilon}{3},\ \forall\, x \in [a, b]$$

ou

$$|\phi(X)| \leq M_i = \frac{\epsilon}{3},\ \forall\, x \in [a, b],\ \forall\, \phi \in \Phi.$$

Isto prova que Φ é uniformemente limitada.

Além disso, cada ϕ_i, sendo contímua no compacto $[a, b]$, é uniformemente contínua. Então dado $\frac{\epsilon}{3}$ existe $\delta_i > 0$ tal que

$$|\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| < \frac{\epsilon}{3},\ \text{se } |x_1 - x_2| < \delta_i$$

Seja $\delta = \min\limits_{i=1,\ldots,k} \delta_i$.

Então $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| < \frac{\epsilon}{3},\ \forall\, i = 1, \ldots, k$.

Para qualquer $\phi \in \Phi$, existe ϕ_i, tal que $d(\phi, \phi_i) < \frac{\epsilon}{3}$

Então,

$$\begin{aligned}
|\phi(x_1) - \phi(x_2)| &= |\phi(x_1) - \phi_i(x_1) + \phi_i(x_1) - \phi_i(x_2) + \phi_i(x) - \phi(x_2)| \\
&\leq |\phi(x_1) - \phi_i(x_1)| + |\phi_i(x_1) - \phi_i(x_2)| + |\phi_i(x) - \phi(x_2)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto Φ é equicontínuo.
Suponhamos Φ uniformemente limitada e equicontínuo. Para provar que Φ é relativamente compacto em $C[a, b]$, basta mostrar que Φ é totalmente limitado.

Suponhamos $|\varphi(x)| \leq K,\ \forall\, x \in [a, b],\ \forall\, \varphi \in \Phi$, e seja $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\epsilon}{5},\ \forall\, \varphi \in \Phi,\ \text{sempre que } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Através de uma partição, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, subdivida o intervalo $[a, b]$ em intervalos de comprimento menor que δ.

Por cada ponto dessa partição trace uma linha vertical.

Agora consideremos o intervalo $-k \leq y \leq k$, ao longo do eixo y, e uma partição $-k = y_0 < y_1 < \cdots < y_{p-1} < y_p = k$, de modo que cada subintervalo, tenha comprimento menor que $\frac{\epsilon}{5}$, e tracemos, pelos pontos dessa partição, linhas horizontais.

O retângulo $[a, b] \times [-k, k]$ está subdividido em np células de comprimento horizontal $< \delta$ e vertical $< \frac{\epsilon}{5}$.

A cada $\varphi \in \Phi$, associamos uma poligonal $y = \psi(x)$, com vértices nos pontos da forma (x_k, y_ℓ), diferindo de φ, menos de $\frac{\epsilon}{5}$, em todo ponto x_k.

Temos:

$$|\varphi(x_k) - \psi(x_k)| < \tfrac{\epsilon}{5}$$
$$|\varphi(x_{k+1}) - \psi(x_{k+1})| < \tfrac{\epsilon}{5}$$
$$|\varphi(x_k) - \psi(x_{k+1})| < \tfrac{\epsilon}{5}$$

Assim,

$$|\psi(x_k) - \psi(x_k + 1)| < \frac{3\epsilon}{5}$$

e

$$|\psi(x_k) - \psi(x)| < \frac{3\epsilon}{5},\ x_k \leq x \leq x_{k+1},$$

pela linearidade de ψ, em (x_k, x_{k+1}).

Seja $x \in [a, b]$. Seja x_k o ponto da subdivisão que está mais próximo de x, pela esquerda.

Então,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_k)| + |\varphi(x_k) - \psi(x_k)| + |\psi(x_k) - \psi(x)| \leq \epsilon.$$

Isto mostra que o conjunto das poligonais, ψ, formam um ϵ-net para Φ, e existe apenas finitas poligonais ψ, pois existem finitos vértices (x_k, x_ℓ).

3.2 Funções Reais em Espaços Métricos Compactos.

Se X é um espaço métrico, uma função $f : X \to \mathbb{R}$, é dita uma função real.
Se, por exemplo, $X = C[a, b]$, então f atua sobre funções, isto é, as "variáveis"são funções.

Exemplo 3.1

$$\begin{aligned} F:\quad & C[a,b] \to \mathbb{R} \\ & g \mapsto F(g) = \sup_{x\in[a,b]} g(x) \end{aligned}$$

F é uma função real, contínua:
Devemos provar que $|F(g) - F(h)| < \epsilon$, sempre que $d(g, h) < \delta,\ \epsilon > 0$, dado.
Agora $d(g, h) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x) - h(x)|$.

Temos: $|F(g) - F(h)| = |\sup\limits_{x\in[a,b]} g(x) - \sup\limits_{x\in[a,b]} h(x)| \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x) - h(x)|$

ou seja $|F(g) - F(h)| \leq d(g, h)$.

Exemplo 3.2

Denote por $C^1[a, b]$ o subconjunto de $C[a, b]$, formado por funções deriváveis em $[a, b]$.
Seja $x_0 \in [a, b]$, um ponto arbitrário, fixado, e definamos $T : C^1[a, b] \to \mathbb{R}, T(f) = f'(x_0)$.
T é uma função real, não contínua.
De fato, seja $g \in C^1[a, b];\ g'(x_0) = 1,\ |g(x)| < \epsilon,\ \forall\, x \in [a, b]$.
Considere a função $f = f_0 + g$.
Então $d(f, f_0) < \epsilon$ e $|T(f) - T(f_0)| = |f_0'(x_0) + 1 - f_0'(x_0)| = 1$.

Proposição 3.1

Sejam X um espaço métrico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é uniformemente contínua. ♠

Demonstração

Suponha que f é contínua, mas não é uniformemente contínua. Então existem sequências (x_n), (x'_n) tais que,

$$d(x_n, x'_n) < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon\,,$$

para algum $\epsilon > 0$.
Como X é compacto, existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$, tal que $x_{n_k} \to x$.
Então, de $x'_{n_k} = x'_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k}$, segue-se que $x'_{n_k} \to x$.
Daí, ou $|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ ou $|f(x'_{n_k}) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}$.
Isto contradiz a continuidade de f.

Proposição 3.2

Sejam X um espaço métrico, $K \subset X$ um compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é limitada em K.

Demonstração

Se f não fosse limitada, em K, existiria uma sequência $(x_n)_n$ em K, tal que $f(x_n) \to \infty$.
Como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$, de (x_n), tal que $x_n \to x, x \in K$. Então, numa vizinhança arbitrariamente pequena de x, f assume valores arbitrariamente grandes. Isto contradiz a continuidade de f.

Proposição 3.3

Uma função contínua definida num compacto k, alcança um mínimo e um máximo, em K.

Demonstração

Seja $A = \sup\limits_{x \in K} f(x)$.

Dado $\epsilon = \frac{1}{n}$, existe $x_n \in K$; $A - \frac{1}{n} < f(x_n) < A$
$(x_n)_n$ é uma sequência em K. Como K é compacto, existe uma subsequência $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$, tal que $x_{n_k} \to x$, $x \in K$.
Temos $A - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) < A$ e $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(x) = A$

Definição 3.2

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é dita semicontínua inferiormente (sci), em $x_0 \in X$, se dado $\epsilon > 0$, existe uma δ-vizinhança de x_0, na qual $f(x) > f(x_0) - \epsilon$.

f é semicontínua superiormente (scs) em x_0, se dado $\epsilon > 0$, existe uma δ-vizinhança de x_0, na qual $f(x) < f(x_0) + \epsilon$.
f é sci(scs) se é sci(scs) em todo seu domínio.

Exemplo 3.3

Toda função contínua é semicontínua inferior e superiormente.

Exemplo 3.4

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x] =$ maior inteiro menor ou igual a x, é semicontínua superiormente.

Exemplo 3.5

Alterando, pra mais, o valor de uma função contínua f, no ponto x_0, obtemos uma função scs. Alterando, pra menos obtemos uma função sci.

Exemplo 3.6

Se f é scs, então - f é sci.

Definição 3.3

O limite superior, $\overline{f}(x_0)$, da função f, no ponto x_0, é definido por

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\sup_{x\in B_\epsilon(x_0)} f(x)\right\}.$$

O limite inferior, $\underline{f}(x_0)$, da função f, no ponto x_0, é definido por

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\inf_{x\in B_\epsilon(x_0)} f(x)\right\}.$$

A diferença $w_f(x_0) = \overline{f}(x_0) - \underline{f}(x_0)$ é a oscilação de f em x_0. ♣

Nota

Qualquer que seja a função f, a função $\overline{f}$ é scs e $\underline{f}$ é sci.

Exemplo 3.7

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real.
Considere f restrito ao intervalo compacto $[a, b]$.

A variação total, $V_a^b(f)$, de f em $[a, b]$, é definida por

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|, \text{onde } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

e o supremo é tomado sobre todas as partições de $[a, b]$.

Seja $\mathcal{B}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}; f \text{é limitada}\}$. Em $\mathcal{B}[a, b]$ consideremos a métrica $d(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

A função $V_a^b : \mathcal{B}[a, b] \to \mathbb{R}, f \mapsto V_a^b(f)$, é sci.

De fato: dados $f \in \mathcal{B}[a, b]$ e $\epsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$, tal que $V_a^b(g) > V_a^b(f) - \epsilon$, desde que $d(f, g) < \delta$.

Da definição de $V_a^b(f)$ é possível escolher uma subdivisão de $[a, b]$, tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^b(f) - \frac{\epsilon}{2}$$

Seja, $\delta = \frac{\epsilon}{4n}$.
Se $d(f, g) < \delta = \frac{\epsilon}{4n}$, então

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| - \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| < \frac{\epsilon}{2}$$

De fato:
1. $|f(x_0) - g(x_0)| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x_1)| - |g(x_0) - g(x_1)| - |g(x_1) - f(x_1)| < \delta$
2. $|f(x_1) - g(x_1)| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| - |g(x_1) - g(x_2)| - |g(x_2) - f(x_2)| < \delta$

$\vdots$

n. $|f(x_n) - g(x_n)| < \delta \Rightarrow |f(x_{n-1}) - f(x_n)| - |g(x_{n-1}) - g(x_n)| - |g(x_n) - f(x_n)| < \delta$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| - \sum_{k=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| < n\delta + \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - f(x_k)|$$

ou seja

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|-\sum_{k=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\frac{\epsilon}{2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})| &> \sum_{k=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|-\frac{\epsilon}{2}\\ &> V_a^b(f)-\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon}{2}=V_a^b(f)-\epsilon\end{aligned}$$

e $V_a^b(g)>V_a^b(f)-\epsilon$.

Nota

O resultado ainda permanece se $V_a^b(f)=\infty$. é preciso, entretanto, conceituar este fato.

Nota

V_a^b, em geral, não é contínua.
Sejam $f(x)\equiv 0$, $g_n(x)=\frac{1}{n}\sin(nx)$. Então $d(f,g_n)=\frac{1}{n}$
Mas $V_0^\pi(g_n)=2$ e $V_0^\pi(f)=0$. Funções f para as quais $V_a^b(f)<\infty$, são ditas funções de variação limitada.

Nota

Se uma função f é tal que $f(x_0)=+\infty$, dizemos que f scs em x_0. Se $f(x_0)=-\infty$, dizemos que f é sci em x_0.

Uma maneira equivalente de dizer que f é sci em x_0, é: dado qualquer $h\in\mathbb{R}$, existe uma vizinhança de x_0, na qual $f(x)>h$. Isto equivale a dizer que $f^{-1}(h,\infty)$ é aberto, $\forall h\in\mathbb{R}$.
f é scs em x_0 se dado $h\in\mathbb{R}$, existe uma vizinhança de x_0, na qual $f(x)<h$. Isto é $f^{-1}(-\infty,-h)$ é aberto , $\forall h\in\mathbb{R}$.

Teorema 3.2

Sejam x um espaço métrico compacto e $f:X\to\mathbb{R}$ uma função sci.
Então:
i) f é limitada inferiormente
ii) existe $x_0\in X; f(x_0)=\inf_{x\in X} f(x)$.

Demonstração

i) Para cada $n=1,2,\dots$, os conjuntos $f^{-1}(-n,\infty)$ são abertos em X e
$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-n,\infty)$.

Como X é compacto, podemos supor $X=\bigcup_{n=1}^{N} f^{-1}(-n,\infty)$, para algum inteiro positivo N.

Assim $f(x)>-N,\forall\, x\in X$.
ii) Seja $-\infty<\ell=\inf_{x\in X} f(x)$. Suponha que não exista $x\in X$, tal que $f(x)=\ell$.

Então $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\ell+\frac{1}{n},\infty)$. Como X é compacto $X=\bigcup_{n=1}^{k} f^{-1}(\ell+\frac{1}{n},\infty)$, para algum $k\in\mathbb{N}$.
Logo $f(x)>\ell+\frac{1}{k},\forall\, x\in X$.
Daí, $\inf_{x\in X} f(x)\geq\ell+\frac{1}{k}$, ou seja $\ell\geq\ell+\frac{1}{k}$. Contradição!

3.3 Espaços Lineares Normados

Definição e Exemplos

Um espaço vetorial (ou espaço linear) é um conjunto V, munido de uma operação de soma e de uma operação de produto por escalar, satisfazendo:

i) (V,+) é um grupo abeliano
ii) se $x \in V$, α e β são números reais, então $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
iii) $(\alpha + \beta).x = \alpha x + \beta x, \forall\, x \in V, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
iv) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x, y \in V$
v) $1.x = x, \forall\, x \in V$

Os elementos de V são ditos vetores e os números reais, α, β, etc, são ditos escalares.
Nestas condições V é dito um espaço vetorial real.
Se os escalares são números complexos, V é dito um espaço vetorial complexo.
Um espaço vetorial V é dito ser normado se existe uma função $\|\cdot\|$: $V \to \mathbb{R}$, tal que

1. $\| x \| \geq 0, \forall\, x \in V$
2. $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in V$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall\, x, y \in V$

A função $\|\cdot\|$ é dita uma norma sobre V.

Nota

Se $\|\cdot\|$ é uma norma sobre V, então a função $d(x, y) = \| x - y \|$ define uma métrica em V. Assim todo espaço vetorial normado é também um espaço métrico.
Um espaço normado completo é dito um espaço de Banach, ou um $\mathbf{B}$-espaço. A completeza é medida pela métrica induzida pela norma do espaço.

Exemplo 3.8

$V = \mathbb{R} =$ conjunto dos números reais.
A norma de um vetor $x \in \mathbb{R}$, é seu valor absoluto, isto é, se $x \in \mathbb{R}$, então $\| x \| = | x |$.
$\mathbb{R}$ é um espaço vetorial normado e completo.

Exemplo 3.9

$V = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ define uma norma sobre $\mathbb{R}^n$, dita norma euclideana.
Note que a norma euclideana induz a métrica euclideana de $\mathbb{R}^n$. Portanto $\mathbb{R}^n$ é um $\mathbf{B}$-espaço.

Exemplo 3.10

$V = \mathbb{R}^n$.
$\| x \|_0 = \max_{1 \leq i \leq n} | x_i |$
Esta norma induz a métrica do máximo em $\mathbb{R}^n$, que o torna um espaço métrico completo, ou seja $\mathbb{R}^n$, munido da norma $\|\cdot\|_0$ é um espaço de Banach.

Exemplo 3.11

$V = \mathbb{R}^n$.
$\| x \|_1 = | x_1 | + \cdots + | x_n |$
A $\|\cdot\|_1$ induz a métrica da soma, em relação a qual $\mathbb{R}^n$ é completo.

Exemplo 3.12

$V = \mathbb{R}^n, p \geq 1$

$\| x \|_p^p = | x_1 |^p + \cdots + | x_n |^p$

$\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach, em relação à métrica induzida pela norma $\| \cdot \|_p$.

Exemplo 3.13

$V = C[a, b]$.

$\| f \| = \max_{a \leq t \leq b} | f(t) |$

Essa norma é conhecida como “norma da convergência uniforme", ou “norma uniforme".

$C[a, b]$, munido da norma uniforme, é um **B**-espaço.

Exemplo 3.14

$$V = \ell_2 = \left\{ x = (x_n)_n ; \sum_{i=1}^{\infty} x_n^2 \right\}$$

$$\| x \| = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_n^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ℓ_2 é um espaço de Banach. (Veja os apontamentos de Análise Real - $2001 - 1$).

Definição 3.4

Uma variedade linear em um espaço vetorial V é um subconjunto L, de V, tal que se $x, y \in L$, então $\alpha x + \beta y \in L$ para todo α e β, escalares. ♣

Reservamos o têrmo “subespaço"para as variedades lineares que passam pela origem.

Como no caso de dimensão finita, em dimensão infinita existem variedades lineares que não são subespaços, isto é, que não passam na origem.

Exemplo 3.15

Seja $L = \{x \in \ell_2,$ tais que x tem apenas um número finito de coordenadas não nulas$\}$

L é uma variedade linear em ℓ_2. Entretanto L não contém a origem.

Notemos também que:
$$\begin{aligned} &(1, 0, 0, 0, \ldots) \in L \\ &(1, \tfrac{1}{2}, 0, 0, \ldots) \in L \\ &(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 0, \ldots) \in L \\ &\quad\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

e observe que esta seqüência converge para $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots)$, que não pertence a L.

Exemplo 3.16

Seja V um espaço de Banach. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ vetores fixados, de V.

A totalidade de vetores, de V, da forma $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ é una variedade linear, em V, denotado por $[M]$.

$[M]$ é um subespaço de V, dito subespaço gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

3.4 Convexidade

Sejam x e y dois pontos de um espaço vetorial V. O segmento ligando x a y é a totalidade de pontos da forma $\alpha x + \beta y,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1$.

Definição 3.5

Um subconjunto M de um espaço vetorial V é dito convexo, se dados dois pontos arbitrários, x e y, de M, o segmento ligando x a y está todo contido em M.
Um conjunto convexo é dito um corpo convexo se contém, pelo menos, um ponto interior. ♣

Exemplo 3.17

Um cubo, no $\mathbb{R}^3$, é um corpo convexo. Um triângulo, no $\mathbb{R}^3$, é um conjunto convexo, que não é um corpo convexo.

Proposição 3.4

a) o fecho de um conjunto convexo é um conjunto convexo.
b) A intersecão de conjuntos convexos é um conjunto convexo.
Dem: Simples. ♠

Definição 3.6

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, (n+1)$ pontos de um espaço vetorial V. Diz-se que $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ estão em posição geral se $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_{n+1} - x_1$ são linearmente independentes. ♣

Definição 3.7

Dado um subconjunto $A \subset V$, chama-se fecho convexo de A, ao menor conjunto convexo, fechado, que contém A. ♣

Definição 3.8

Se $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ estão em posição geral, o fecho convexo de $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ é dito um simplexo de dimensão n, cujos vértices são os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. ♣

Nota

Se $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ estão em posição geral, então qualquer $k+1$ $(k < n)$ deles também estão em posição geral.

Proposição 3.5

Um simplexo com vértice $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ é a totalidade dos pontos x,

tais que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k, a_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} a_k = 1.\ (*)$ ♠

Demonstração

Seja $M = \left\{ x;\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k,\ a_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{n} a_k = 1 \right\}$. Claro que M é um conjunto convexo, fechado, contendo $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$.
O simplexo com vértices $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ é o maior convexo fechado contendo $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Logo está contido em M.
Por outro lado, todo convexo contendo $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, deve conter pontos da forma $(*)$. Portanto a simplexo com vértices em $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, contém M.

3.5 Funcionais Lineares

Funções numéricas, definidas sobre espaços vetoriais normados, são ditas funcionais.

Definição 3.9

Um funcional $f : V \to \mathbb{R}$, definido num espaço vetorial V. é dito linear se

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x, y \in V.$$

Neste caso f é dito um funcional linear real. ♣

Definição 3.10

Um funcional linear, $f : V \to \mathbb{R}$, é dito contínuo na origem se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| < \epsilon$, sempre que $\| x \| < \delta$. ♣

Proposição 3.6

Seja $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo na origem. Então f é contínuo em V. ♠

Demonstração

Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em V, talque $x_n \to 0$, em V. Então $f(x_n) \to f(0) = 0$, em $\mathbb{R}$, pela continuidade de f em 0. Tomemos $y \in V$, arbitrários e seja $(y_n)_n$ uma seqüência em V tal que $y_n \to y$.
Da identidade, $y_n = y_n - y + y$, e da linearidade de f resulta que $f(y_n) = f(y_n - y) + f(y)$. Note que $y_n - y \to 0$. Tomando limite com $n \to \infty$, obtemos $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$. Logo f é contínua em y.

Definição 3.11

Um funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ é dito limitado se existe uma constante $M \geq 0$, tal que $|f(x)| \leq M \| x \|$ $, \forall\, x \in V$. ♣

Teorema 3.3

Um funcional linear $f : V \to \mathbb{R}$ é contínuo se e só se é limitado. ♡

Demonstração

Se f não é limitado, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in V$, tal que $|f(x_n)| > n \| x_n \|$.
Seja $y_n = \frac{x_n}{n\|x\|}, n = 1, 2, \ldots$. Então, $\| y_n \| = \frac{1}{n}$ e $y_n \to 0$. Mas

$$f(y_n) = \frac{1}{n \| x \|} f(x_n) > 1, \forall\, n.$$

Logo $f(y_n) \nrightarrow 0$ e f não é contínua.
Reciprocamente, se f é limitada, então existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M \| x \|, \forall\, x \in V$.
Se $(x_n)_n$ é tal que $x_n \to 0$, em V, então $|f(x)| \leq M \| x \| \Rightarrow f(x_n) \to 0$, com $n \to \infty$. Logo f é contínua.

Definição 3.12

Seja $f : V \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Define-se a norma do funcional f, como sendo o número,

$$\| f \| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\| x \|}.$$

♣

Exemplo 3.18

Seja $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ fixado. Defina $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = (x, a)$, o produto interno dos vetores x e a.

$\cdot f$ é linear (pela bilinearidade do produto interno)

$\cdot \parallel f \parallel = \parallel a \parallel$

$|f(x)| = |(x, a)| \leq \parallel x \parallel \parallel a \parallel \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq a, \forall\, x \in V, x \neq 0.$

Daí $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\parallel x \parallel} \leq a$, isto é, $\parallel f \parallel \leq \parallel a \parallel$. (I)

Por outro lado, $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\parallel x \parallel} \geq \dfrac{|f(a)|}{\parallel a \parallel} = \dfrac{|(a, a)|}{\parallel a \parallel} = \parallel a \parallel$, ou seja $\parallel f \parallel \geq \parallel a \parallel$. (II)

De (I) e (II), tem-se $\parallel f \parallel = \parallel a \parallel$.

Exemplo 3.19

Seja $f : C[a, b] \to \mathbb{R}, f(x) = \int_a^b x(t)dt, a < b$.

$\cdot f$ é linear (linearidade da integral)

$\cdot \parallel f \parallel = b - a$.

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| \int_a^b dt \leq \parallel x \parallel_{C[a,b]} (b - a)$$

$$\frac{|f(x)|}{\parallel x \parallel_{C[a,b]}} \leq (b - a) \text{e} \parallel f \parallel \leq b - a \quad (\#)$$

Seja $x(t) \equiv 1, \forall\, t \in [a, b]$.

Então $\parallel f \parallel = \sup\limits_{y \neq 0} \dfrac{|f(y)|}{\parallel y \parallel_{C[a,b]}} \geq f(x(t)) = f(1) = \displaystyle\int_a^b dt = b - a \quad (\#)_1$

De $(\#)$ e $(\#)_1$, segue-se que $\parallel f \parallel = b - a$.

Exemplo 3.20

Seja $\delta_{t_0} : C[a, b] \to \mathbb{R}, \delta_{t_0} = x(t_0), t_0 \in [a, b]$, fixado

$\delta_{t_r 0}$ é um funcional linear contínuo.

O funcional δ_{t_0}, muito comum em mecânica quantica, é comumente escrito na forma,

$\delta_{t_0} = \int_a^b x(t)\delta(t - t_0)dt$, onde δ é *distribuição δ de Dirac*, a ser estudada posteriormente.

3.6 Espaço Dual

Seja V um espaço vetorial normado e consideremos a totalidade, V^*, dos funcionais lineares contínuos, sobre V.

Para $f, g \in V^*$, tem-se que $f + g \in V^*$. Além disso, se α é um escalar, então $\alpha f \in V^*$.

Portanto V^* é um espaço vetorial, dito espaço dual de V. é conhecido que , se $f \in V^*$, então f é um funcional linear contínuo e $\parallel f \parallel_{V^*} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\parallel x \parallel}$ é a norma de f.

Na verdade $\parallel \cdot \parallel_{V^*}$ é uma norma sobre o espaço vetorial V^*. Assim, V^* é um espaço vetorial normado.

Teorema 3.4

Se V é um espaço vetorial normado , então V^* é um espaço vetorial normado completo (um espaço de Banach). ♡

Demonstração

Seja $(f_n)_n$ uma seqüência fundamental em V^*. Então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\| f_n - f_m \|_{V^*} < \epsilon, \forall\, n, m \geq n_0.$$

Daí, $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \| x \|, \forall\, x \in V$.
Para cada $x \in V$, fixado, a seqüência $(f_n(x))_n$ é fundamental, em $\mathbb{R}$, portanto converge para, digamos, $f(x) \in \mathbb{R}$, isto é

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

i) f é linear.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} [\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)] = \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x, y \in V. \end{aligned}$$

ii) f é limitada
Dado $\epsilon = 1$, existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que

$$\| f_n - f_{n+j} \|_{V^*} < 1, \forall\, n \geq n_o, \forall\, j$$

Daí $\| f_{n+j} \|_{V^*} \leq \| f_n \|_{V^*} + 1, \forall\, j, \forall\, n \geq n_0$

ou

$$\frac{|f_{n+j}(x)|}{\| x \|} \leq (\| f_n \|_{V^*} + 1), \forall\, j, \forall\, n \geq n_0, x \neq 0$$

e

$$|f_{n+j}(x)| \leq (\| f_n \|_V^* + 1), \forall\, j, \forall\, n \geq n_0, \forall\, x \in V$$

Tomando limite, com $n \to \infty$, obtemos

$$|f(x)| \leq (\| f_n \|_{V^*} + 1) \| x \|, \forall\, x \in V.$$

Logo f é limitada.
iii) $f_n \to f$, em V^*.
Temos $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \| x \|, \forall\, x \in V, \forall\, n, m \geq n_0$.
Fixemos $n \geq n_0$, arbitrário, e tomemos o limite nessa desigualdade com $m \to \infty$.
Obtemos,

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \| x \|, \forall\, n \geq n_0, \forall\, x \in V.$$

Daí

$$\frac{|f_n(x) - f(x)|}{\| x \|} < \epsilon, \forall\, n \geq n_0, \forall\, x \in V, x \neq 0,$$

o que acarreta

$$\| f_n - f \|_{V^*} < \epsilon, \forall\, n \geq n_0.$$

Exemplo 3.21

Seja $V = \mathbb{R}^n$, e consideremos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo.
Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.
Então, $f(x) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$.
Temos, $|f(x)| = |x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n| \leq \| x \| \| (f_1, \ldots, f_n) \|$

$\therefore \| f \| \leq \| (f_1, \ldots, f_n) \|$.
Denotamos por F o vetor $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$.
Temos

$$\| f \|_{(R^n)^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(F)|}{\| x \|_{R^n}} \geq \frac{|f(F)|}{\| F \|_{R^n}} = \| F \|_{R^n} = \| (f_1, \ldots, f_n) \|_{R^n} .$$

Logo $\| f \|_{(R^n)^*} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$.

Exemplo 3.22

Considere a mesma situação do Ex. 3.21, mas tomemos para norma, em $\mathbb{R}^n$, a norma do máximo:

$$\| x \| = \max_i |x_i|.$$

Temos,

$$\begin{aligned} |f(x)| = |x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n| &\leq |x_1||f_1| + \cdots + |x_n||f_n| \\ &\leq \max_i |x_i|(|f_1| + \ldots + |f_n| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} f_i |f_i| \right) \| x \| \| f \| \end{aligned}$$

$$\therefore \| f \| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i|.$$

Por outro lado, se $x_0 = (x_1, \ldots, x_n)$, onde $x_i = \begin{cases} +1, & \text{se } f_i > 0 \\ -1, & \text{se } f_i < 0 \\ 0, & \text{se } f_i = 0 \end{cases}$ temos,

$$\| f \| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\| x \|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\| x_0 \|} = (sgn f_1) f_1 + \cdots + (sgn f_n) f_n = |f_1| + \cdots + |f_n|.$$

Portanto, $\| f \|_{V^*} = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$.

Exemplo 3.23

Mesma situação dos exemplos anteriores, agora com a norma, em $\mathbb{R}^n$, dada

por $\| x \|_p \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, p > 1$.

Tem-se,

$$|f(x)| = |x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n| \leq \left(= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ou

$$|f(x)| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \| x \|_p$$

Daí,

$$\| f \|_{V^*} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (\alpha)$$

Por outro lado,

$$\| f \|_{V^*} = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\| x \|_p} \geq \frac{f(y)}{\| y \|_p}, \text{ onde } y = \left(|f_1|^{q-1} sgn f_1, \ldots, |f_1|^{q-1} sgn f_n\right).$$

Temos,

$$\| y \|_p = \left\{|f_1|^{(q-1)p} + \cdots + |f_n|^{(q-1)p}\right\}^{\frac{1}{p}} = \{|f_1|^q + \cdots + |f_n|^q\}^{\frac{1}{p}} = f(y) = |f_1|^q + \cdots + |f_n|^q.$$

Assim,

$$\| f \|_{V^*} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q}{\left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right)} = \left\{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right\}^{1-\frac{1}{p}} = \left\{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right\}^{\frac{1}{q}} \qquad (\beta)$$

Por (α) e (β), segue-se que

$$\| f \|_{V^*} = \left\{\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Exemplo 3.24

Funcionais lineares sobre C

$C = \{x = (x_1, x_2, \ldots);\ x_n \to 0, \text{com } n \to \infty\}$

$\| x \| = \sup_n x_n$

Seja $f : C \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| < \infty$$

um fucional linear contínuo.

Então $\| f \|_{C^*} = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|$.

De fato:

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i\right| \leq= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i||f_i| \leq= \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| \, \| x \| \qquad (a)$$

$$\| f \|_{C^*} \leq= \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|$$

Por outro lado, se $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = a$, dado $\epsilon > 0$, existe $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{N} |f_i| > a - \epsilon$.

Seja

$$x_n = \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 1, \text{ se } f_n > 0 \\ -1, \text{ se } f_n < 0 \\ 0, \text{ se } f_n = 0 \end{array}\right\} n \leq N \\ 0, \text{ se } n > N \end{cases}$$

$x^* = (x_n)_n \in \mathbb{N}$

Então

$$f(x^*) = \sum_{i=1}^{N} sgn(f_n) f_n = \sum_{i=1}^{N} |f_i| > a - \epsilon$$

Daí,

$$\|f\|_{C^*} = \sup \frac{|f(x)|}{\| x \|_C} \geq |f(x^*)| \geq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| - \epsilon, \forall\, \epsilon > 0 \qquad (b)$$

De (a) e (b) segue-se que $\| f \|_{C^*} = \sum_{i=1}^{\infty} |f_i|$

Todo fucional linear contínuo, sobre C, é da forma descrita acima.

De fato: Seja $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ a seqüência com 1 na n-ésima posição e zero nas demais.

Seja $f \in C^*$, e denotemos $f(e_n)$ por f_n.

Se $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, então $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ e $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$.

Se f é limitado, então $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i| < \infty$, pois se $\sum_{i=1}^{\infty} |f_n| = \infty$, então $\forall\, H$, existiria N tal que

$$\sum_{i=1}^{N} |f_n| > H.$$

Mas aí,

$$\text{se } x = (x_n) \text{ e } x_n = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{r} 1, \text{ se } f_n > 0 \\ -1, \text{ se } f_n < 0 \\ 0, \text{ se } f_n = 0 \end{array} \right\} n \leq N \\ \;\;0, \text{ se } n > N \end{array} \right.$$

teriamos, $|f(x)| = \sum_{i=1}^{n} (sgn f_i) f_i = \sum_{i=1}^{n} |f_i| > H = H \| x \|$. (Contradição !!).

O conjunto dos elementos $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$ é denso em C.

Um funcional linear contínuo é unicamente definido por seus valores numa parte densa.

Isto mostra que $C^* = \left\{ (f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots); \sum_{i=1}^{\infty} |f_n| < \infty \right\} = \ell_1$.

Prova-se que o espaço dual de ℓ_1 é o espaço de todos as sequências limitadas.

Teorema 3.5

Seja X um espaço de Banach, sobre $\mathbb{R}$. Sejam $D \subset X$ um subespaço linear, xEspaço!subespaço densodenso em X, e $f : D \subseteq X \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo, $|f(x)| \leq C \| x \|, \forall\, x \in D$. Então, f se estende de maneira única a um funcional linear contínuo $F : X \to \mathbb{R}$, tal que $|F(x)| \leq C \| x \|, \forall\, x \in X$. ♡

Demonstração

Seja $u \in X - D$. Existe $(u_n)_n$ em D, tal que $u_n \to u$, com $n \to \infty$. Então $(u_n)_n$ é uma seqüência fundamental e

$$|f(u_n) - f(u_m)| = |f(u_n - u_m)| \leq C \| u_n - u_m \|,$$

acarreta que $(f(u_n))_n$ é uma seqüência fundamental em $\mathbb{R}$.

Seja $F(u) = \lim_{n \to \infty} f(u_n)$

· F é bem definida.

Para isto devemos mostrar que o valor de F em u, independa da seqüência (u_n) que converge a u.

Seja pois $(v_n)_n$ uma outra seqüência em D, tal que $v_n \to u$, com $n \to \infty$.

Temos,

$$|f(u_n) - f(v_n)| \leq C \| u_n - v_n \| \leq \{\| u_n - v \| + \| v - v_n \|\}$$

Daí,

$$\begin{aligned} |f(v_n) - f(u)| &\leq |f(v_n) - f(u_n)| + |f(u_n) - f(u)| \\ &\leq C \parallel u_n - v \parallel + \parallel v - v_n \parallel + |f(u_n) - f(u)| \end{aligned}$$

e

$|f(v_n) - f(u)| \to 0$, com $n \to \infty$, ou seja $f(v_n) \to f(u)$, com $n \to \infty$.

$\cdot$ F é linear

$f(\alpha u + \beta v) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} f(u_n) + \beta \lim_{n\to\infty} f(v_n) = \alpha F(u) + \beta F(v)$.

$\cdot F \diagup D = f$.

$\cdot F$ é único.

Seja G uma extensão de f. Então para todo $u \in X$,

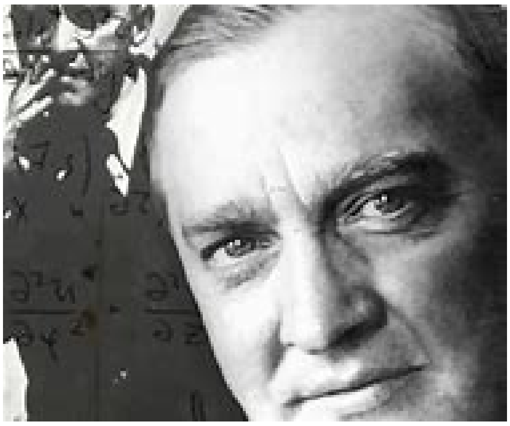
$$G(u) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = F(u).$$

Logo $G \equiv F$.

Capítulo Espaço de Banach

Frases de Stefan Banach

"Um matemático é uma pessoa que pode encontrar analogias entre os teoremas. Um melhor matemático é aquele que pode ver analogias entre provas e o melhor matemático pode perceber analogias entre as teorias."
"Matemática é a criação mais bonita e poderosa do espírito humano."
"Eu te digo que estudar humanidades no ensino médio é mais importante do que a matemática - a matemática é muito afiada Um instrumento, não é bom para as crianças."
"Matemática é tão antiga quanto o homem."



Stefan Banach nasceu na Cracóvia (Império Austro-Húngaro - cidade no sul da Polônia)
$(1892 - 1945, 53$ anos, Leópolis, União Soviética , atual , Ucrânia)

O Teorema de Hahn-Banach é um resultado importante na teoria funcional dos espaços vetoriais normados. Ele fornece uma maneira de estender uma função linear limitada definida em um subespaço para uma função linear limitada definida em todo o espaço vetorial, preservando certas propriedades.

Existem diferentes versões do Teorema de Hahn-Banach, e aqui vamos nos concentrar no caso vetorial. A versão vetorial do teorema estabelece o seguinte:

Teorema 4.1 (Hahn-Banach - Caso Vetorial)

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K (que pode ser os números reais, os números complexos ou um corpo localmente convexo) e seja W um subespaço vetorial de V. Se f é uma forma linear limitada definida em W, então existe uma extensão de f para uma forma linear limitada g definida em V, ou seja, $g : V- > K$, tal que $g(x) = f(x)$ para todo x em W, e $||g|| = ||f||$, onde $\|.\|$ | denota a norma da função linear. ♡

Uma consequência importante desse teorema é que ele permite a construção de funcionais lineares contínuos em espaços normados a partir de funcionais lineares definidos em subespaços. Isso tem várias aplicações significativas, como:

Separabilidade de conjuntos: O Teorema de Hahn-Banach é frequentemente usado para separar conjuntos convexos. Por exemplo, dado um ponto e um conjunto fechado convexo que não o contém, é possível usar uma forma linear para separar o ponto do conjunto, estendendo a forma linear de um subespaço que contém o ponto.

Existência de extensões contínuas: O teorema é usado para estender funções definidas em subespaços de um espaço vetorial normado para o espaço inteiro, preservando certas propriedades, como continuidade ou limitação.

Dualidade de Espaços!vetoriais normadosespaços vetoriais normados: O Teorema de Hahn-Banach estabelece uma conexão importante entre um espaço vetorial normado e seu espaço dual, que consiste em todos os funcionais lineares contínuos definidos no espaço original. Ele garante que o espaço dual é não vazio e fornece um método para construir funcionais lineares contínuos no espaço dual.

Essas são apenas algumas das aplicações do Teorema de Hahn-Banach. Sua versatilidade e importância na teoria funcional dos espaços vetoriais normados o tornam um resultado fundamental para o estudo desses espaços.

4.1 Teorema de Hahn-Banach: Caso Vetorial

Seja X um espaço linear e consideremos um funcional $p : X \to \mathbb{R}$, com as propriedades,
(1) $p(x) \geq 0, \forall\, x \in X$
(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall\, x, y \in X$
(3) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0, \forall\, x \in X.$

Definição 4.1

Um funcional, como p, satisfazendo $(1) - (3)$ é dito um funcional convexo.
Se apenas as condições (2) e (3) ocorrem, então p é dito um funcional sublinear.
Toda norma é um funcional convexo.

♣

Lema 4.1

Sejam M um subespaço, próprio, de um espaço vetorial X e $x_0 \in X - M$. Sejam M_0 o espaço gerado por M e $\{x_0\}$, $M_0 = [M \cup \{x_0\}]$, $f : M \to \mathbb{R}$ um funcional linear e $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear, tal que

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in M.$$

Então f pode ser estendido a um funcional linear $F : M_0 \to \mathbb{R}$, de modo que

$$F(x) \leq p(x), \forall\, x \in M_0.$$

♡

Demonstração

$$\begin{array}{ll} M_0 \xrightarrow{F} \mathbb{R} & (F(x) \leq p(x), \forall\, x \in M_0) \\ | & \\ M \xrightarrow{f} \mathbb{R} & (f(x) \leq p(x), \forall\, x \in M) \end{array}$$

A hipótese $f(x) \leq p(x), \forall\, x \in M$, acarreta

$$\begin{aligned} f(y_1) - f(y_2) = f(y_1 - y_2) &\leq p(y_1 - y_2) = p(y_1 + x_0 - y_2 - x_0) \\ &\leq p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0), \forall\, y_1, y_2 \in M \end{aligned}$$

Daí,

$$-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1), \forall\, y_1, y_2 \in M \qquad (\star)_4$$

Em $(\star)_4$, fixemos y_1, e deixemos y_2 variar em M.
Então, o conjunto $\{-p(-y_2 - x_0) - f(y_2); y_2 \in M\}$ é um conjunto de números reais, limitado superiormente, logo tem um supremo.
Seja $a = \sup\{-p(-y_2 - x_0) - f(y_2); y_2 \in M\}$
Em $(\star)_4$, fixando $y_2 \in M$, e deixando y_1 variar em M,
Obtemos

$$b = \inf\{p(y_1 + x_0) - f(y_1); y_1 \in M\}.$$

Assim, $a \leq b$
Existe um número real c_0, tal que $a \leq c_0 \leq b$
Daí, para todo $y \in M$, tem-se,

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq c_0 \leq p(y + x_0) - f(y) \qquad (\star)_5$$

Como $x_0 \notin M$, qualquer $x \in M_0$ pode ser escrito na forma $x = y + \alpha x_0$, de modo único, onde $\alpha \in \mathbb{R}, y \in M$.
Consideremos a função

$$F : M_0 \to \mathbb{R},\ F(x) = F(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha c_0$$

F é linear:

Se $x' = y' + \alpha x_0$ e $x'' = y'' + \beta x_0$ pertencem a M_0, então $x' + x'' = y' + y'' + (\alpha + \beta)x_0 \in M_0$ e

$$F(x' + x'') = f(y' + y'') + (\alpha + \beta)c_0 = f(y') + \alpha c_0 + f(y'') + \beta c_0 = F(x') + F(x'')$$

Também,

$$F(\lambda x) = F(\lambda y + \lambda \alpha x_0) = f(\lambda y) + \lambda \alpha c_0 = \lambda f(y) + \lambda \alpha c_0 = \lambda[f(y) + \alpha c_0] = \lambda f(x), \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se $y \in M$, então $y = y + 0x_0$ e $F(y) = f(y)$. Assim F é um funcional linear que estende f. Resta mostrar que $F(x) \leq p(x), \forall\, x \in M_0$. Seja $x = y + \alpha x_0 \in M_0$. Se $\alpha = 0$, então $F(x) = f(y) \leq p(y) = p(y + \alpha x_0) = p(x)$. se $\alpha > 0$, então, de $(\star)_5$, obtemos,

$$c_0 \leq p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \alpha c_0 &\leq p(y + \alpha x_0) - f(y) \\ f(y) + \alpha c_0 &\leq p(y + \alpha x_0) \\ F(y + \alpha x_0) &\leq p(y + \alpha x_0) \\ F(x) &\leq p(x). \end{aligned}$$

Se $\alpha > 0$, então, de $-p(-y - x_0) - f(y) \leq c_0$, obtemos

$$\begin{aligned} -p\left(-\tfrac{y}{\alpha} - x_0\right) - f\left(\tfrac{y}{\alpha}\right) &\leq c_0 \\ -p\left(-\tfrac{y}{\alpha} - x_0\right) &\leq c_0 + f\left(\tfrac{y}{\alpha}\right) \\ -\alpha p\left(-\tfrac{y}{\alpha} - x_0\right) &\geq \alpha c_0 + \alpha f\left(\tfrac{y}{\alpha}\right) \\ p(y + \alpha x_0) &\geq \alpha c_0 + f(y) = F(x) \end{aligned}$$

ou seja, $F(x) \geq p(x)$.
Logo $F(x) \geq p(x), \forall\, x \in M_0$.

Teorema 4.2 (Hahn-Banach)

Seja X um espaço vetorial real, M um subspaço de X, $p : X \to \mathbb{R}$, um funcional sublinear, e $f : M \to \mathbb{R}$ um funcional linear, satisfazendo $f(x) \geq p(x), \forall\, x \in M$. Então existe um funcional linear $F : X \to \mathbb{R}$, tal que $F(x) = f(x), \forall\, x \in M$, e $F(x) \geq f(x), \forall\, x \in X$. ♡

Nota

Seja X um conjunto e suponhamos definida uma relação $\mathcal{R}$ entre os elementos de X. O conjunto X é dito "parcialmente ordenado"por $\mathcal{R}$, se
(i) $a\mathcal{R}a$ (Reflexividade), $\forall\, a \in X$
(ii) $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$ (Transitividade), $\forall\, a, b, c \in X$
(iii) $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b, \forall\, a, b \in X$
$\mathcal{R}$ é dita uma relação de ordem parcial, definida em X. Se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial, em X, e, dados quaisquer dois elementos a e b, em X, tem-se $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$, diz-se que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem total, em X. Neste caso X é dito um conjunto totalmente ordenado.

Exemplo 4.1

Seja $X = \mathbb{R}$ e definamos a relação $\mathcal{R}$ como sendo a relação $\leq$ (menor ou igual).
A relação $\leq$ é de ordem parcial em $\mathbb{R}$, pois:
$a \leq a, \forall\, a \in \mathbb{R}$
$a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c, \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$
$a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
Portanto o conjunto dos números reais é parcialmente ordenado, segundo a relação de ordem $\leq$.
Além disso a relação de ordem $\leq$, em $\mathbb{R}$, é total, pois quaisquer dois números reais podem, sempre, ser comparados.
Assim $\mathbb{R}$ é um conjunto totalmente ordenado, segundo a relação de ordem $\leq$.
Sejam X um conjunto parcialmente ordenado, pela relação de ordem $\mathcal{R}$, e A um subconjunto de X. Um elemento $a \in X$, é dito um limite superior de A se $y\mathcal{R}a, \forall\, y \in A$, isto é todo elemento de A está relacionado com a.
Se X é um conjunto parcialmente ordenado, um elemento $a \in X$ é dito elemento maximal de X se $a\mathcal{R}y$ implica $a = y$.
Um conjunto parcialmente ordenado X, segundo a relação de ordem $\mathcal{R}$, é dito indutivamente ordenado se qualquer subconjunto totalmente ordenado de X, tem um limite superior.

Lema 4.2 (Lema de Zorn)

Todo conjunto não-vazio, indutivamente ordenado, tem um elemento maximal.

Demonstração

Do Teorema de Hanh-Banach)
Consideremos o conjunto $\mathcal{S} = \{\widehat{f}; \widehat{f}$ é linear , $\widehat{f}$ estende $f, \widehat{f}(x) \leq p(x), \forall\, x \in D\widehat{f}\}$, onde $D\widehat{f}$ é o espaço vetorial domínio de $\widehat{f}$.
· $\mathcal{S}$ é não vazio.
Note que o próprio funcional linear $f \in \mathcal{S}$. Além disso, pelo Lema 4.2, $\mathcal{S}$ contém outros elementos afora f. Em $\mathcal{S}$ consideremos a relação de ordem: $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2 \in \mathcal{S}$, então $\widehat{f}_1 < \widehat{f}_2 \Leftrightarrow \widehat{f}_2$ estende $\widehat{f}_1$. $\widehat{f}_2$ estende $\widehat{f}_1$ significa: $D_{\widehat{f}_1} \subset D_{\widehat{f}_2}$ e $\widehat{f}_2/D_{\widehat{f}_1} = \widehat{f}_1$
· $\mathcal{S}$ é parcialmente ordenado, segundo a relação $<$.
(i) $\widehat{g} < \widehat{g}, \forall\, \widehat{g} \in \mathcal{S}$.
Ora, $D_{\widehat{g}} = D_{\widehat{g}}$, donde $D_{\widehat{g}} \subset D_{\widehat{g}}$ e $\widehat{g}/D_{\widehat{g}} = \widehat{g}$
(ii) se $\widehat{g} < \widehat{h}$ e $\widehat{h} < \widehat{\ell}$, então $\widehat{g} < \widehat{\ell}$

$$\widehat{g} < \widehat{h} \Leftrightarrow \begin{cases} D_{\widehat{g}} \subset D_{\widehat{h}} \\ \widehat{h}/D_{\widehat{g}} = \widehat{g} \end{cases} \qquad \widehat{h} < \widehat{\ell} \Leftrightarrow \begin{cases} D_{\widehat{h}} \subset D_{\widehat{\ell}} \\ \widehat{\ell}/D_{\widehat{h}} = \widehat{h} \end{cases}$$

Daí, $D_{\widehat{g}} \subset D_{\widehat{\ell}}$ e $\widehat{\ell}(x) = \widehat{h}(x), \forall\, x \in D_{\widehat{h}}$.
Como $D_{\widehat{g}} \subset D_{\widehat{h}}$, temos $\widehat{\ell}(x) = \widehat{h}(x), \forall\, x \in D_{\widehat{g}}$.

Em $D_{\widehat{g}}$, $\widehat{h}(x) = \widehat{g}(x)$. Logo $\widehat{\ell}(x) = \widehat{g}(x), \forall\, x \in D_{\widehat{g}}$.
Assim $D_{\widehat{g}} \subset D_{\widehat{\ell}}$ e $\widehat{\ell}/D_{\widehat{g}} = \widehat{g}$, ou seja $\widehat{g} < \widehat{\ell}$.
(iii) Se $\widehat{g} < \widehat{h}$ e $\widehat{h} < \widehat{g}$, então $\widehat{g} = \widehat{h}$

$$\widehat{g} < \widehat{h} \Leftrightarrow \begin{cases} D_{\widehat{g}} \subset D_{\widehat{h}} \\ \widehat{h}/D_{\widehat{g}} = \widehat{g} \end{cases} \quad , \quad \widehat{h} < \widehat{g} \Leftrightarrow \begin{cases} D_{\widehat{h}} \subset D_{\widehat{g}} \\ \widehat{g}/D_{\widehat{h}} = \widehat{h} \end{cases}$$

Então $D_{\widehat{g}} = D_{\widehat{h}}$ e $\widehat{g}(x) = \widehat{h}(x), \forall\, x \in D_{\widehat{h}}$
$\widehat{h}(x) = \widehat{g}(x), \forall\, x \in D_{\widehat{g}}$
Logo, $D_{\widehat{g}} \subset D_{\widehat{h}}$ e $\widehat{g}(x) = \widehat{h}(x), \forall\, x \in D_{\widehat{h}} = D_{\widehat{g}}$.
Seja $\tau = \{\widehat{f}_\alpha\}$ um subconjunto, arbitrário, totalmente ordenado de $\mathcal{S}$. τ é parcialmente ordenado, e quaisquer dois elementos de τ são comparáveis, segundo a relação $<$.
$\cdot$ τ tem um limite superior.

Seja $\widehat{f}$ o funcional definido em $\cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$ da seguinte forma: se $x \in \cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$, então $x \in D_{\widehat{f}_\alpha}$, para algum α. Defini-se $\widehat{f}(x) = \widehat{f}_\alpha(x)$.
$-$ $\cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$ é um subespaço vetorial.

Se $x \in \cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$, então $x \in D_{\widehat{f}_\alpha}$, para algum α. Mas $D_{\widehat{f}_\alpha}$ é um subespaço de X, logo $\beta x \in D_{\widehat{f}_\alpha}, \forall\, \beta \in \mathbb{R}$. Daí $\beta x \in \cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$.

Se $x, y \in \cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$, então $x \in D_{\widehat{f}_\alpha}$, para algum α, $y \in D_{\widehat{f}_\gamma}$, para algum γ. Sendo τ um conjunto totalmente ordenado, $D_{\widehat{f}_\alpha} \subset D_{\widehat{f}_\gamma}$ ou $D_{\widehat{f}_\gamma} \subset D_{\widehat{f}_\alpha}$.
Suponhamos $D_{\widehat{f}_\alpha} \subset D_{\widehat{f}_\gamma}$. Então $x, y \in D_{\widehat{f}_\gamma}$ e $x + y \in D_{\widehat{f}_\gamma}$.
Daí, $x + y \in \cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$.
$-\widehat{f}$ é bem definida

Se $x \in D_{\widehat{f}_\alpha}$ e $x \in D_{\widehat{f}_\lambda}$, então $\widehat{f}(x) = \widehat{f}_\alpha(x)$ e $\widehat{f}(x) = \widehat{f}_\lambda(x)$.
Agora ou $\widehat{f}_\alpha$ estende $\widehat{f}_\lambda$ ou o contrário. Em qualquer caso $\widehat{f}_\alpha(x) = \widehat{f}_\lambda(x)$. Logo $\widehat{f}(x)$ é bem definido.
$-\widehat{f}$ é linear, estende f e $\widehat{f}(x) \leq p(x), \forall\, x \in \cup_\alpha D_{\widehat{f}_\alpha}$
$-\widehat{f}_\alpha < \widehat{f}, \forall\, \alpha$

$D_{\widehat{f}_\lambda} \subset D_{\widehat{f}}$ e $\widehat{h}/D_{\widehat{f}_\alpha} = \widehat{f}$.
Então $\widehat{f}$ é um limite superior de τ, em $\mathcal{S}$. Portanto $\mathcal{S}$ é indutivamente ordenado.
Pelo Lema de Zorn, existe $F \in \mathcal{S}$, elemento maximal de $\mathcal{S}$.
Então F é um funcional linear, estendendo f, tal que $F(x) \leq p(x), \forall\, x \in D_F$.
$\cdot$ $D_F = X$.

Se $D_F \subsetneq X$, existe $x_0 \in X, x_0 \notin D_F$. Pelo lema 1 F pode ser estendida a um funcional linear F', o qual estende f e $F'(x) \leq p(x), \forall\, x \in [D_F \cup \{x_0\}]$.
Assim $F' \in S$ e também estende F. Contradição!!. Então x_0 não pode existir e $D_F = X$.

Teorema 4.3 (Teorema de Hahn-Banach - Caso Normado - 1)

Sejam, X um espaço linear normado, M um subespaço de X e $f : M \to \mathbb{R}$, um funcional linear limitado. Existe um funcional linear limitado $F : X \to \mathbb{R}$, extensão de f, com $\| F \| = \| f \|$. ♡

Demonstração

Seja $p : X \to \mathbb{R}$, $p(x) = \| f \| \| x \|$.
Então, $f(x) \leq |f(x)| \leq \| f \| \| x \| = p(x), \forall\, x \in M$.
Tem-se: $p(x) \geq 0, \forall\, x \in X$
$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall\, x, y \in X$
$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \in X$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $F : X \to \mathbb{R}$, tal que $F/M = f$ e $F(x) \leq p(x), \forall\, x \in X$
Assim $|F(x)| \leq\| f \|\| x \|, \forall\, x \in X$ e F é um funcional linear contínuo, com

$$\| F \|\leq\| f \| . \quad (\star)_6$$

Por outro lado, sendo F uma extensão de f, tem-se

$$\| f \|\leq\| F \| . \quad (\star)_7$$

De $(\star)_6$ e $(\star)_7$, seguese que $\| F \|=\| f \|$.

Teorema 4.4 (Teorema de Hahn-Banach - Caso Normado - 2)

Seja x_0 um vetor não nulo de um espaço linear normado X. Então existe um funcional linear limitado $F : X \to \mathbb{R}$, tal que $\| F \|= 1$ e $F(x_0) =\| x_0 \|$. ♡

Demonstração

Seja $M = [\{x_0\}]$ e $f : M \to \mathbb{R}$

$$\lambda x_0 \mapsto f(\lambda x_0) = \lambda \| x_0 \|$$

f é um funcional linear, $f(x_0) =\| x_0 \|$.
Além disso, $f(\lambda x_0) = \lambda \| x_0 \|=\| \lambda x_0 \|\Rightarrow\| f \|\leq 1$.
Por outro lado,

$$\| f \|= \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in M}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(\lambda x_0)|}{\| \lambda x_0 \|} = 1$$

Assim, $\| f \|= 1$
Pelo Teorema 4.3, existe $F : X \to \mathbb{R}$ linear, contínuo, tal que $F/M = f$ e $\| F \|=\| f \|= 1$
Claro que $F(x_0) = f(x_0) =\| x_0 \|$.

Teorema 4.5 (Teorema de Hahn-Banach - Caso Normado - 3)

Seja M um subespaço de um espaço linear normado X e suponha $x_1 \in X$ é tal que $d(x_1, M) = d > 0$. Então existe um funcional linear limitado F, $\| F \|= 1$, tal que $F(x_1) = d$ e $F(x) = 0, \forall\, x \in M$. ♡

Demonstração

Seja $M_1 = [M \cup \{x_1\}]$ o subespaço gerado por M e $\{x_1\}$.
Para qualquer $y \in M_1$, tem-se $y = x + \alpha x_1, x \in M, \alpha \in \mathbb{R}$, de modo único.
Seja $f : M_1 \to \mathbb{R}, f(y) = \alpha d$.
f é bem definida, linear e $f(y) = 0, \forall\, y \in M, f(x_1) = d$.
$\cdot$ f é limitada.
Seja $\alpha \neq 0$. Então $\| y \|=\| x + \alpha x_1 \|=\| -\alpha(-\frac{x}{\alpha} - x_1) \|= |\alpha| \| -\frac{x}{\alpha} - x_1 \|$
$-\frac{x}{\alpha} \in M$ e $d = d(x_1, M) = \inf_{x\in M} \| x_1 - x \|\Rightarrow\| -\dfrac{x}{\alpha} - x_1 \|\geq d$ ou seja $\| y \|\geq |\alpha|d$
Daí $|f(y)| = |\alpha|d \leq\| y \|, \forall\, y \in M_1$. Portanto f é limitado e $\| f \|\leq 1$.
Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in M; \| x - x_1 \|< d + \epsilon$.
Seja $z = \frac{x-x_1}{\|x-x_1\|}$. Tem-se $\| z \|= 1$ e $|f(z)| = \frac{|f(x-x_1)|}{\|x-x_1\|} = \frac{d}{\|x-x_1\|}$ e $|f(z)| > \frac{d}{d+\epsilon}$
Logo $\| f \|> \frac{d}{d+\epsilon}$. Como $\epsilon > 0$, segue-se que $\| f \|\geq 1$.
Assim $\| f \|= 1$.
Existe $F : X \to \mathbb{R}$, linear contínua, tal que $F/M = f$ e $\| F \|=\| f \|$.
Logo existe $F : X \to \mathbb{R}$ linear contínua, tal que $F(x) = d, F(x) = 0, \forall\, x \in M, \| F \|= 1$.

4.2 Espaço Dual do Dual

Seja X um espaço linear normado real. Denotamos por X^* o espaço (de Banach) de todos os funcionais lineares contínuos, definidos em X.
X^* é dito espaço dual de X.
Como X^* é um espaço linear normado, faz sentido falar no espaço dual de X^*, dito segundo dual de X, denotado por X^{**}.
Um elemento de X^{**} é, então, um funcional linear contínuo, definido em X^*.
Seja $J : X \to X^{**}, J(x) = x'' \in X^{**}$, onde $x'' : X^* \to \mathbb{R}$ atua da seguinte forma: $x''(f) = f(x), \forall\, f \in X^*$

$\cdot\; J_x \in X^{**}$

J_x define um funcional linear contínuo, sobre X^*.

$$J_x(f+g) = x''(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = J_x(f) + J_x(g), \forall\, f, g \in X^*.$$
$$J_x(\alpha f) = x''(\alpha f) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha J_x(f), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, f \in X^*.$$

Além disso,

$$\|J_x\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ f \neq 0}} \frac{|J_x(f)|}{\|f\|_{X^*}} = \sup_{f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\| f \|_{X^*}} \leq \sup_{f \neq 0} \| x \| = \| x \|$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, se $x \neq 0$, existe $f_0 \in X'$, tal que $f_0(x) = \| x \|, \| f_0 \| = 1$.
Assim

$$\| x \| = f_0(x) \leq \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in X^*}} \frac{|J_x(f)|}{\|x\|} = \|J_x\|_{X^{**}}$$

Logo: $\|J_x\|_{X^{**}} = \| x \|$
Isto mostra que J é contínuo e, mais ainda, é uma isometria.
Em resumo: $J : X \to X^{**}$ é um operador linear, contínuo, isométrico, injetivo.

Definição 4.2

Se o operador $J : X \to X^{**}$, acima, é também sobrejetivo, diz-se que X é reflexsivo. ♣

Exemplo 4.2

O espaço ℓ_2.

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots); \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

$$\| x \|_{\ell_2} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ℓ_2 é um espaço de Banach.(Hilbert).

$\to$) Todo funcional linear limitado $f : \ell_2 \to \mathbb{R}$, é da forma $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i$, onde $f_i = f(e_i)$, sendo e_i o elemento de ℓ_2 com 1 na i-ésima coordenada e zero nas demais.

$\cdot$ Se $f : \ell_2 \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i$, é limitado, então $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 < \infty$.

Caso contrário, para todo M, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $\sum_{i=1}^{N} f_i^2 = M_0 \geq M$

Seja $x = (f_1, \ldots, f_N, 0, \ldots), \|x\| = M_0^{\frac{1}{2}}$.

Então $f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i^2 = M_0 = M_0^{\frac{1}{2}} M_0^{\frac{1}{2}} = M_0^{\frac{1}{2}} \|x\| \geq M^{\frac{1}{2}} \|x\|$.
Contrádição com a continuidade de f.

$\cdot \; \|f\| = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_{\ell_2}$$

$$\therefore \; \|f\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\square)$$

Por outro lado, $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$.

Tomando $x = ((sgn f_i)|f_1|, \ldots, (sgn f_n)|f_n|, \ldots)$, obtemos

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \geq |f(x)| = \sum_{i=1}^{\infty} (sgn f_i) f_i |f_i| = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \qquad (\square\square).$$

De $(\square)$ e $(\square\square)$, $\|f\|_{\ell_{2^*}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

$\cdot$ A aplicação

$T : \ell_2 \to \ell_2^*, (f_1, f_2, \ldots) \in \ell_2 \mapsto T(f_1, f_2, \ldots) = f$

onde $T(f_1, f_2, \ldots)(x) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_i$ é linear, isométrica e sobrejetiva.

$\cdot$ A aplicação $J : \ell_2 \to \ell_2^{**}$

$x \mapsto J_x$, onde $J_x(f) = f(x)$ é sobre.

Sejam $g \in \ell_2^*$ e $x \in \ell_2$. Fixado $x \in \ell_2$ a aplicação

$\ell_2^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é um elemento de ℓ_2^{**}.

$g \mapsto g(x)$

Seja $F \in \ell_2^{**}$. Defina $g : \ell_2 \to \mathbb{R}, g(x) = F(Tx)$.

$g \in \ell_2^*$ e existe um único $z = (g_1, g_2, \ldots) \in \ell_2$, tal que $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i g_i$

$\mapsto) \; F = J_z$.

$$J_z(T_x) = (T_x)(z) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i g_i$$

$$J_z(h) = h(z) = F(T_x) = F(h) \quad \therefore J_z = F$$

. Portanto ℓ_2 é reflexivo.

Teorema 4.6 (Teorema da Representação de Riesz)

Sejam X um espaço de Hilbert, com produto interno denotado por $<,>$, e $f : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado. Então existe um único $y \in X$, tal que $f(x) =< x, y >, \forall\, x \in X$. Além disso, $\|f\|_{X^*} = \|y\|_X$. ♡

Demonstração Dem: Unicidade:

Se $z \in X$ e $f(x) =< x, z >, \forall\, x \in X$, então $< x, y - z >= 0, \forall\, x \in X$.

Em particular, tomando $x = y - z \in X$, temos $\|y - z\|^2 =< y - z, y - z >= 0$.
Logo $y - z = 0$ ou seja $y = z$.
Existência.
Seja $M = \{x \in X; f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$. Como f é contínua, M é fechado.
Se $f \equiv 0$, então $M = X$, e, nesse caso, tomamos $y = 0$.
Se $f \not\equiv 0$, então $M \subsetneq X$.
Sendo M um subespaço fechado e próprio, existe $w \in X$ tal que w é ortogonal a M.
Existe um único escalar α, tal que o vetor $y = \alpha w$, satisfaz o teorema, isto é

$$f(x) =< x, \alpha w >, \forall\, x \in X.$$

Se $x \in M$, então $0 = f(x) = \alpha < x, w >$, é verdadeiro para qualquer α, uma vez que w é ortogonal a M.
Se x é múltiplo de w, isto é, se $x \in [\{w\}]$, então $x = \beta w$, e podemos supor $\beta \neq 0$.
Então

$f(x) = \beta f(\beta w) = \beta f(w) = \beta < w, \alpha w >= \beta\alpha < w, w >$

ou seja

$f(\beta w) =< \beta w, y > \Leftrightarrow f(w) = \alpha < w, w >$.

Logo $\alpha = \frac{f(w)}{<w,w>} = \frac{f(w)}{\|w\|^2}$.
Desta forma o vetor $y = \frac{f(w)}{<w,w>} = \frac{f(w)}{\|w\|^2} w$, satisfaz

$f(x) =< x, y >, \forall\, x \in M, \forall\, x \in [w]$.

Seja $x \in X$. O vetor $x - \beta w$, com $\beta = \frac{f(x)}{f(w)}$, pertence a M.
Temos $x = \underbrace{x - \beta w}_{\in M} + \underbrace{\beta w}_{\in [w]}$.
Daí,

$$f(x) = f(x - \beta w) + f(\beta w) =< x - \beta w, \alpha w > + < \beta w, \alpha w >=< x, \alpha w >=< x, y >, \forall\, x \in X.$$

Além disso,

$$|f(x)| = |< x, y >| \leq \|x\|\|y\| \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|y\|, x \neq 0 \text{ e } \|f\|_{X^*} \leq \|y\|.$$

Também $\|f\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0} \neq 0 \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{< y, y >}{\|y\|} = \|y\|$

Portanto $\|f\|_{X^*} = \|y\|$.

Teorema 4.7

Todo espaço de Hilbert, X, é reflexivo. ♡

Demonstração

Devemos provar que $J : X \to X^{**}, x \mapsto J_x$, onde $J_x(g) = g(x), \forall\, g \in X^*$, é sobrejetiva.
Seja $\in X^{**}$. Devemos encontrar $z \in X$, tal que $J_z = F$,isto é, $J_z(g) = F(g), \forall\, g \in X^*$.
Seja $T : X \to X^*, T_y = f$, onde $T_y(x) = f(x) = (x, y)$.
T é uma função linear contínua e isométrica e sobrejetiva. O funcional $g : X \to \mathbb{R}$,
$g(x) = F(T_x)$ é linear e

$|g(x)| = |F(T_x)| \leq \|F\|\|x\|$.

Assim $g \in X^*$.
Pelo teorema de Riesz, existe um único $z \in X$, tal que $g(x) =< x, z >, \forall\, x \in X$.
Como $g(x) = F(T_x)$, temos $F(T_x) =< x, z >, \forall\, x \in X$.
Daí, $J_z(T_x) = T_x(z) =< z, x >=< x, z >= F(T_x), \forall\, x \in X$.

Então $J_z = F$.

4.3 Operadores Lineares

Sejam X e Y espaços de Banach. Qualquer função definida em X, ou em parte de X, com valores em Y é dito um operador (aplicação, transformação, etc...)
Um operador $A : D(A) \subset X \to Y$ é dito linear se:
$i)$ $D(A)$ é um subespaço de X
$ii)$ $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \forall\, \alpha, \beta$ escalar, $\forall\, x, y \in X$.

Definição 4.3

Um operador linear $A : X \to Y$ é dito limitado se existe uma constante $M > 0$, $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall\, x \in X$. ♣

Definição 4.4

Um operador linear $A : X \to Y$ é dito contínuo, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\|Ax - Ax'\|_Y < \epsilon, \quad \textit{sempre que} \|x - x'\| < \delta$$

♣

Proposição 4.1

Um operador linear $A : X \to Y$ é contínuo $\Leftrightarrow$ é limitado. ♠

Definição 4.5

Seja $A : X \to Y$ um operador linear limitado. A norma de A é definida como sendo o ínfino dos números $M > 0$, tais que $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall\, x \in X$.
Por $\mathcal{L}(X, Y)$ denotamos o "espaço vetorial"de todos os operadores lineares contínuos $A : X \to Y$.
Assim, se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, define-se,

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \inf\{M > 0; \|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall\, x \in X\}$$

♣

Proposição 4.2

Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, então
$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup\{\|Ax\|; \|x\| \leq 1\} = \sup\{\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}, x \neq 0\} = \sup\{\|Ax\|; \|x\| = 1\}$. ♠

Demonstração

Semelhante ao caso $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

Proposição 4.3

Se Y é um 'espaço de Banach, então $\mathcal{L}(X, Y)$ é um espaço de Banach. ♠

Demonstração

Semalhante ao caso $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$

Definição 4.6

Seja $T : X \to Y$ um operador linear. Diz-se que T tem um inverso, se para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $Tx = y$.
O operador inverso de T é denotado por T^{-1}. ♣

Proposição 4.4

Se T é linear e T^{-1} existe, então T^{-1} é linear. ♠

Demonstração
Seja $Tx_1 = y_1, Tx_2 = y_2$
Como T é linear $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_2$
Agora $x_1 = T^{-1}y_1, x_2 T^{-1} y_2 \Rightarrow \alpha_1 T^{-1} y_1 + \alpha_2 T^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$
Logo T^{-1} é linear.

Teorema 4.8

Sejam X um espaço de Banach e $U \in \mathcal{L}(X, X)$.
Se $\|U\| \leq q < 1$, então o operador $I - U$ tem um inverso contínuo e

$$\|(I-U)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$$

♡

Demonstração
A condição $\|U\| < 1$ acarreta a convergência da série $I + U + U^2 + \cdots + U^n + \cdots$
Seja $V = \sum_{n=0}^{\infty} U^n$.
Então $V(I-U) = (I + U + \cdots + U^n + \cdots)(I-U) = (I + U + \cdots + U^n + \cdots) -$
$-(U + U^2 + \cdots + U^{n+1} + \cdots) = I$
Também $(I-U)V = I$.
Logo, $(I-U)^{-1} = V$.
Além disso, $\|V\| \leq \|I\| + \|U\| + \cdots + \|U^n\| + \cdots \leq 1 + q + \cdots + q^n + \cdots \leq \frac{1}{1-q}$.

Teorema 4.9

Seja $U_0 : X \to Y$ um operador linear contínuo, onde X e Y são espaços de Banach. Suponha que U_0 tem um inverso $U_0^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Se $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $\|U\| < \frac{1}{\|U_0^{-1}\|}$, então o operador $V = U_0 + U$ tem um inverso contínuo V^{-1} e
$\|V^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}\|\|\|U_0\|}$

♡

Demonstração
Seja $W = U_0^{-1}V = I_x + U_0^{-1}U$.
Tem-se $\|U_0^{-1}U\| \leq \|U_0^{-1}\|\|U\| < 1$
Então, pelo teorema anterior, W tem uma inversa contínua
W^{-1} e $\|W^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|U_0^{-1}U\|} \leq \frac{1}{1 - \|U_0^{-1}\|\|\|U\|}$
Temos, $U_0^{-1}VW^{-1} = I_x$ e daí, $VW^{-1} = U_0$ e $VW^{-1}U_0^{-1} = I_y$.
Então,

$$VW^{-1}U_0^{-1} = I_y \text{ e } W^{-1}U_0^{-1}V = I_x$$

Logo, $W^{-1}U_0^{-1}$ é um inverso de V. $V^{-1} = W^{-1}U_0^{-1}$.
Além disso,
$\|V^{-1}\| = \|W^{-1}U_0^{-1}\| \leq \|W^{-1}\|\|U_0^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1-\|U_0^{-1}\|\|U\|}$.

Nota

O Teorema 4.9 está afirmando que o conjunto dos operadores lineares contínuo, de um espaço de Banach X no espaço de Banach Y, que são invertíveis, é aberto.

Definição 4.7

Sejam X e Y espaços de Banach e $A : X \to Y$ um operador linear. Se $g \in Y^*$, então $f = g \circ A \in X^*$.
O operador $A^* : Y^* \to X^*, g \mapsto A^*g = g \circ A$ é dito adjunto do operador A.
A^* é um adjunto do operador linear.

Proposição 4.5

O adjunto da soma de dois operadores lineares é a soma dos adjuntos de cada operador.

Demonstração

$A : X \to Y$, linear; $B : X \to Y$, linear
$A + B : X \to Y$, linear
$(A + B)^* : Y^* \to X^*$, linear
$\mapsto$) $(A + B)^* = A^* + B^*$.
$(A + B)^*(g) = g \circ (A + B) = g \circ A + g \circ B = A^*g + B^*g = (A^* + B^*)g$

Proposição 4.6

$(kA)^* = kA^*, k \in \mathbb{R}$.

Demonstração

$(kA)^*g = g(kA) = kg(A) = kA^*(g)$

Nota

$I^* = I$
$I^*g = g \circ I = I \circ g$

Teorema 4.10

Seja $A : X \to Y$, linear contínuo, onde X e Y são espaços de Banach.
Então A^* é contínuo e $\|A^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$

Demonstração

Temos, $A^*g = f, g \in Y^*$.
Então $|A^*g(x)| = |g(Ax)| \leq \|g\|\|Ax\| \leq \|g\|\|A\|\|x\|$

$$\begin{aligned}\|A^*\| = \sup_{g\neq 0} \frac{\|A^*g\|}{\|g\|_{Y^*}} &= \sup_{g\neq 0} \frac{\sup_{x\neq 0} \frac{|A^*g(x)|}{\|x\|_x}}{\|g\|_{Y^*}} \\ &\leq \sup_{g\neq 0} \frac{\|g\|_{Y^*}\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{\|g\|_{Y^*}} = \sup_{g\neq 0} \|A\| = \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\end{aligned}$$

Assim, $\|A^*\| \leq \|A\|$. $(\star)$
Por outro lado,

$$\|Ax\|_Y = \sup_{\substack{g\in Y^* \\ \|g\|\leq 1}} |g(Ax)| = \sup_{\substack{g\in Y^* \\ \|g\|\leq 1}} |A^*g(x)| \leq \sup_{\substack{g\in Y^* \\ \|g\|\leq 1}} \|A^*\|\|g\|\|x\| \leq \|A^*\|\|x\|$$

$\sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|} \leq \|A^*\|$ ou seja $\|A\| \leq \|A^*\|$ $\quad(\star\star)$
De $(*)$ e $(**)$, segue-se que $\|A^*\| = \|A\|$.

4.4 Operadores Lineares Compactos

Sejam X e Y espaços lineares normados. Um operador linear $A : X \to Y$ é dito compacto se transforma conjuntos limitados de A.
Todo operador compacto, é contínuo, pois transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados.
Se X é um espaço linear normado de dimensão finita, e $A : X \to Y$ é linear, então A é compacto.
De fato: Note $dim A(X)$ é finita. Note ainda que A é limitada.
Se $C \subset X$ é limitado, então $A(C)$ é limitado num espaço de dimensão finita. Logo $A(C)$ é relativamente compacto.
Se X é um espaço normado, de dimensão infinita, então o operador identidade $I : X \to X$ é limitado, mas não é compacto.

Lema 4.3
*Sejam X um espaço normado e E um subespaço fechado de X, E distinto de X.
Então existe $y \in X$, tal que $\|y\| = 1$ e $\|y - x\| > \frac{1}{2}$ para todo $x \in E$.* ♡

Demonstração
Seja $y_0 \in X - E$, e seja $d = d(y_0, E)$. Devemos ter $d > 0$ (Por quê)
Seja $x_0 \in E$; $\|y_0 - x_0\| < 2d$.
Tomemos $y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$.
Temos

$$\begin{aligned} \|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| &= \left\| \frac{y - x_0 - \|y_0 - x_0\|x}{\|y_0 - x_0} \right\| = \\ &= \frac{1}{\|y_0 - x_0\|} \|y_0 - (y_0 - (x + \|y_0 - x_0\|x)\| > \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}. \, \forall\, x \in E. \end{aligned}$$

Lema 4.4
A bola unitária de um espaço normado de dimensão infinita X não é compacta. ♡

Demonstração Construimos uma seqüência $(x_n)_n$ na bola unitária de um espaço normado X, tal que $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}, \forall\, n, m$.
Seja $x_1 \in X$; $\|x_1\| = 1$.
Considere os subespaço fechado $E_1 = [x_1] \subsetneq X$
Pelo Lema 1, existe $x_2 \in X$, $\|x_2\| = 1$, tal que $d(x_2, E_1) > \frac{1}{2}$
Seja $E_2 = [x_1, x_2] \subsetneq X$. Existe $x_3 \in X$, $\|x_3\| = 1$, tal que $d(x_3, E_2) > \frac{1}{2}$, etc...
Construímos uma sequência $(x_n)_n$ na esfera unitária de X, tal que $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}, \forall\, n, m$
Então (x_n), não tem qualquer subsequência convergente.

Lema 4.5
*Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $A : X \to Y$ um operador compacto e $B : Y \to Z$ linear limitado.
Então $B \circ A$ é um operador compacto.* ♡

Demonstração

Seja $K \subset X$ um conjunto limitado. Então $A(K)$ é relativamente compacto em Y, ou seja $\overline{A(K)}$ é compacto em Y. Como B é contínuo, $B(\overline{A(K)})$ é compacto em Z.
Como $B(A(K)) \subset B(\overline{A(K)})$, segue-se que $(B \circ A)(K)$ é relativamente compacto em Z.

Nota *Se $X \overset{B}{\to} Y \overset{A}{\to} Z$, A compacto e B limitado, então AB é compacto.*

Teorema 4.11

Se $A, B : X \to Y$ são operadores compactos, então
$i)$ $A + B$ é compacto
$ii)$ λA é compacto, $\lambda \in \mathbb{R}$

Demonstração

$i)$ Sejam, $K \subset X$, um conjunto limitado, e (x_n) uma seqüência em K.
$(\|x_n\| \leq M, \forall\, n)$
Existe uma subseqüência $(x_{n_j})_j$ de (x_n) tal que (Ax_{n_j}) é convergente.
Como B é compacto, existe uma subseqüência $(x_{n_{j_k}})_k$ de (x_{n_j}), tal que $(Bx_{n_{j_k}})$ é convergente.
Note que $(Ax_{n_{j_k}})$ é uma subseqüência de (Ax_{n_j}), e portanto convergente.
Assim, $(x_{n_{j_k}})_k$ é subseqüência (x_n), tal que $(A + B)(x_{n_{j_k}})$ é convergente. Logo $A + B$ é compacto.

Teorema 4.12

Seja $A : X \to Y$ um operador compacto. Então $A(X)$ é um espaço separável.

Demonstração

Seja $B_n(0) = \{x \in X; \|x\| < n\}$. Temos

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0) \text{ e } Y_0 = A(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n, Q_n = A(B_n)$$

Como A é compacto, $\overline{Q}_n$ é compacto, portanto separável.

Daí $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Q}_n$ é separável e $Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ é separável.

Teorema 4.13

Se $A : X \to Y$ é um operador compacto, então $A^* : Y^* \to X^*$, o adjunto de A, é também um operador compacto.

Demonstração

Adiado até o estudo das convergências fraca e fraca-$\star$.

4.5 Princípio da Limitação Uniforme: Convergência Fraca

Seja $\mathbf{M}$ um subconjuto de um espaço normado $\mathbf{X}$. Então,

$i)$ $\mathbf{M}$ é dito nunca denso em $\mathbf{X}$, se int$\overline{\mathbf{M}} = \emptyset$

$ii)$ $\mathbf{M}$ é dito ser de primeira categoria em $\mathbf{X}$, se $\mathbf{M}$ é a união enumerável de conjuntos nunca densos em $\mathbf{X}$

Conjuntos de $1^{\underline{a}}$ categoria são também chamados conjuntos magros.

$iii)$ $\mathbf{M}$ é dito ser de $2^{\underline{a}}$ categoria em $\mathbf{X}$, se $\mathbf{M}$ não é de $1^{\underline{a}}$ categoria.

Exemplo 4.3

1-Todo conjunto finito $\{x_{1,...,}x_n\}$ em $\mathbf{R}$ é nunca denso em $\mathbf{R}$

2- Em $\mathbf{R}$, todo conjunto, no máximo, enumerável é de $1^{\underline{a}}$ categoria.

3- $\mathbf{Q}$ é de $1^{\underline{a}}$ categoria, em $\mathbf{R}$

Princípio dos Intervalos Encaixados

Sejam $\mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2 \supseteq \mathbf{M}_3 \supseteq \cdots$ uma seqüência d sbconjuntos fechados não vazios, de um espaço de Banach $\mathbf{X}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} diam(M_n) = 0$. Então existe um único ponto $u \in \mathbf{M}_n, \forall\, n$.

Teorema 4.14 (Teorema de Baire)

Todo subconjunto aberto não vazio, $\mathbf{U}$*, de um espaço de Banach* $\mathbf{X}$*, é de* $2^{\underline{a}}$ *categoria.* ♡

Demonstração

Se $\mathbf{U}$ não fosse de $2^{\underline{a}}$ categoria, então $\mathbf{U}$ seria de $1^{\underline{a}}$ categoria. Assim existiria

$\{\mathbf{M}_n\}$, uma seqüência de subconjuntos de $\mathbf{X}$, tal que $\mathbf{U} = \cup_n^{\infty}\mathbf{M}$, $int\overline{\mathbf{M}_n} = \emptyset, \forall\, n$.

Consideremos a bola fechada $\mathbf{B}_r\,[a] = \{u \in \mathbf{X};\, \|u - a\| \leq r\}$

Seja $a \in \mathbf{U}$. Existe uma bola fechada $\mathbf{B}_r\,[a]$, centrada em a, tal que $\mathbf{B}_r\,[a] \subset \mathbf{U}$,

para algum $r > 0$. Como $int\overline{\mathbf{M}}_1 = \emptyset$, existe $a_1 \in int\mathbf{B}_r\,[a]$ tal que $d(a_1,\overline{\mathbf{M}}_1) > 0$.

Note que se $d(b_1,\overline{\mathbf{M}}_1) = 0, \forall\; b \in int\mathbf{B}_r\,[a]$, então, como $\overline{\mathbf{M}}_1$ é fechado, tem-se que

$b \in \overline{\mathbf{M}}_1, \forall\, b \in int\mathbf{B}_r\,[a]$. Logo $int\overline{\mathbf{M}}_1 \neq \emptyset$. Contradição!!

Então existe $0 < r_1 < \frac{r}{2}$, tal que $\overline{\mathbf{M}} \cap \mathbf{B}_{r_1}\,[a] = \emptyset$.

Repetimos o raciocínio, agora, a partir da bola fechada $\mathbf{B}_{r_1}\,[a]$, obtendo uma bola fechada

$\mathbf{B}_{r_2}\,[a]$, tal que $\overline{\mathbf{M}}_2 \cap \mathbf{B}_{r_2}\,[a] = \emptyset, 0 < r_2 < \frac{r_1}{2}$

Indutivamente, encontramos

$$\mathbf{B}_r\,[a] \supseteq \mathbf{B}_{r_1}\,[a] \supseteq \mathbf{B}_{r_2}\,[a] \supseteq \cdots,\ \lim_{n\to\infty} r_n = 0\ \ \overline{\mathbf{M}}_n \cap \mathbf{B}_{r_2}\,[a] = \emptyset, \forall\, n$$

Pelo princípio dos intervalos encaixados, existe um único ponto $u \in \mathbf{B}_{r_n}\,[a_n]\,, \forall\, n = 1, 2, \ldots$

Como $\overline{\mathbf{M}}_n \cap \mathbf{B}_{r_n}\,[a_n] = \emptyset, \forall\, n$, segue-se que $u \notin \mathbf{M}_n, \forall\, n$. Mas $u \in \mathbf{B}_r\,[a] \subseteq \mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{M}_n$. Logo $u \in \mathbf{M}_n$, para algum n. Note que ,de início, $u \notin \overline{\mathbf{M}}_n, \forall\, n$. Mas $\overline{\mathbf{M}}_n = int\mathbf{M}_n \cup (\partial\mathbf{M}_n)$ e se $u \notin \overline{\mathbf{M}}_n$, então $u \notin int\ \mathbf{M}_n$, e $u \notin \partial\ \mathbf{M}_n$. Portanto podemos afirmar que $u \notin \mathbf{M}_n$.

Proposição 4.7

Seja $\mathbf{M}$ um subconjunto de um espaço de Banach $\mathbf{X}$, e suponha $\mathbf{M}$ de 1$\frac{a}{}$ categoria em $\mathbf{X}$. Então existe um ponto $u \in \mathbf{X}$, tal que $u \notin \mathbf{M}$. Além disso $\mathbf{X} - \mathbf{M}$ é de 2$\frac{a}{}$ categoria. ♠

Demonstração

Pelo Teorema de Baire, $\mathbf{X}$ é de 2$\frac{a}{}$ categoria. Como $\mathbf{X} = \mathbf{M} \cup (\mathbf{X} - \mathbf{M})$, e $\mathbf{M}$ é de 1$\frac{a}{}$ categoria, segue-se que $\mathbf{X} - \mathbf{M}$ é de 2$\frac{a}{}$ categoria, pois a união de dois conjuntos de 1$\frac{a}{}$ categoria , é de 1$\frac{a}{}$ categoria .
Assim se $\mathbf{X} - \mathbf{M} = \cup \mathbf{M}_n$, então $int\overline{\mathbf{M}}_n \neq \emptyset$, para algum n, ou seja $\mathbf{X} - \mathbf{M} \neq \emptyset$.
Consideremos o conjunto,
$\mathbf{M} = \{f \in C\,[0,1]\,; existe\ x_* \in [0,1)$ tal que $f'_+(x_*)$ existe$\}$
Lembremos que $C\,[0,1]$ é um espaço de Banach (em relação a norma da sup).

Proposição 4.8

O conjunto $\mathbf{M}$ é de 1$\frac{a}{}$ categoria em $C\,[0,1]$. ♠

Demonstração

Seja $\mathbf{M}_n = \{f \in C\,[0,1]\,;$ existe $x_* \in [0,1)$, com $|f(x_* + h) - f(x_*)| \leq nh$,
$\forall\, h \in [0,1]$, com $x_* + h \leq 1\}$
Se $f \in \mathbf{M}$, então $f'_+(x_*)$ existe e f é contínua em $[0,1]$. $f'_+(x_*)$ existe, significa que
$\lim\limits_{\substack{h \to o \\ h>0}} \dfrac{|f(x_* + h) - f(x_*)|}{h}$ existe , finito, bem determinado.
Então , existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $|f(x_* + h) - f(x_*)| \leq nh, \forall\, h \in [0,1]$, tal que $x_* + h \leq 1$.
Assim $f \in \mathbf{M}_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e $M \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}_n$.
$\mapsto$) Cada $\mathbf{M}_n$ é nunca denso em $C\,[0,1]$.

$\cdot$ $\mathbf{M}_n$ é fechado.

Seja $f \in \overline{\mathbf{M}}$. Existe uma seqüência (f_k), em $\mathbf{M}_n$, tal que $f_k \to f$, em $C\,[0,1]$.
Para cada $k = 1, 2, \ldots,$ existe $x_k \in [0,1]$, tal que $|f_k(x_k + h) - f_k(x_k| \leq nh, \forall\, h \in [0,1]\,, x_k + h \leq 1$ $\quad (*)$

A seqüência $(x_k)_k \subset [0,1]$, admite uma subseqüência convergente, ainda denotada (x_k). Suponhamos $x_k \to x_*, k \to \infty$.

Fazendo $k \to \infty$, em $(*)$, obtemos $|f(x_* + h) - f(x_*)| \leq nh, \forall\, h \in [0,1]$, $x_* + h \leq 1$

Logo $f \in \mathbf{M}_n$ e $\mathbf{M}_n$ é fechado.

$\cdot$ $int\mathbf{M}_n = \emptyset$.

Seja $f \in \mathbf{M}_n$. Existe uma função contínua, linear por partes

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que

$$\|f - g\| \equiv \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| < \epsilon$$

$$\left|g'_+(x)\right| > n, \forall\, x \in [0,1)$$

Logo $g \notin \mathbf{M}_{n}$. Assim nenhuma bola de raio ϵ, centrada em $f \in \mathbf{M}_{n}$, está totalmente contido em $\mathbf{M}_n$, ou seja $f \notin \overset{\circ}{\mathbf{M}}_n$.

Corolário 4.1 (Weierstrass)

Existe uma função contínua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que não é diferenciável em todo ponto de $[0,1]$. ♡

Demonstração

$C[0,1] - \mathbf{M}$ é de $2^{\underline{a}}$ categoria em $C[0,1]$.

Teorema 4.15 (Princípio da Limitação Uniforme)

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dois espaços de Banach e $\mathfrak{F}$ um conjunto não vazio de aplicações contínuas de $\mathbf{X}$ em $\mathbf{Y}$.
Suponhamos que $\sup\limits_{F \in \mathfrak{F}} \|Fu\| < \infty, \forall\, u \in \mathbf{X}$.
Então existe uma bola fechada $\mathbf{B}$, em $\mathbf{X}$, de raio positivo, tal que $\sup\limits_{u \in B}(\sup\limits_{F \in \mathfrak{F}} \|Fu\|) < \infty$. ♡

Demonstração

Seja $\mathbf{M}_k = \bigcap\limits_{F \in \mathfrak{F}} \{u \in \mathbf{X}; \|Fu\| \leq k\}, k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{X} = \bigcup_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{M}_k$$

Cada conjunto $\mathbf{M}_k$ é fechado, pois trata-se da interseção de fechados.

Como $\mathbf{X}$ é um espaço de Banach, pelo Teorema de Baire, $int\mathbf{M}_k \neq \emptyset$, para algum k.

Então $\mathbf{M}_k$ contém uma bola fechada $\mathbf{B}$, com raio positivo.

Logo $\sup\limits_{F \in \mathfrak{F}} \|Fu\| < k, \forall\, u \in \mathbf{B}$, ou seja

$$\sup_{u \in B}(\sup_{F \in \mathfrak{F}} \|Fu\|) \leq k.$$

Note que k independe da família $\mathfrak{F}$ e de $u \in \mathbf{B}$. Daí o nome ”limitado uniforme ”.

Teorema 4.16 (Teorema de Banach-Steinhaus)

Seja , $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$, espaços de Banach, $\mathfrak{L}$ um conjunto

não vazio de aplicações lineares contínuas de $\mathbf{X}$ em $\mathbf{Y}$.

Suponhamos que $\sup\limits_{L \in \mathfrak{L}} \|L\| < \infty$, para todo $u \in \mathbf{X}$.

Então $\sup\limits_{L \in \mathfrak{L}} \|L\| < \infty$. ♡

Demonstração

As condições no Teorema de B-S são as mesmas como no Princípio da Limitação Uniforme.
Então existe uma bola fechada $\mathbf{B}$, de raio > 0, tal que

$$\sup_{u \in B}(\sup_{L \in \mathfrak{L}} \|Lu\|) < \infty$$

Seja $\mathbf{B} = \mathbf{B}_r[u_0], r > 0$. Temos $\sup\limits_{L \in \mathfrak{L}} \|Lu\| \leq \mathbf{M}, \forall\, u\, \mathbf{B}$.

Se $u \in \mathbf{B}$, então $w = \frac{1}{r}(u - u_0) \in \mathbf{B}_1[0]$.

Assim

$$\|Lw\| = \frac{1}{r}\|Lu - Lu_0\| \leq \frac{1}{r}\|Lu\| + \frac{1}{r}\|Lu_0\| \leq \frac{2\mathbf{M}}{r}, \forall\, w \in \mathbf{B}_1[0], \forall\, L \in \mathfrak{L}.$$

logo $\displaystyle\sup_{L\in\mathfrak{L}}\big(\sup_{w\in\mathbf{B}_1[0]} \|Lu\|\big) \leq C$

ou seja

$\displaystyle\sup_{L\in\mathfrak{L}} \|L\| < \infty,$

Nota

No Princípio da Limitação Uniforme e no Teorema de Banach-Steinhaus, a condição de $\mathbf{Y}$ ser um espaço de Banach é supérflua.

Definição 4.8

Seja $(A_n)_n$ uma seqüência em $\mathfrak{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espaços normados. ♣

$i)$ Diz-se que $\{A_n\}_n$ converge uniformemente para A , se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \geq \mathbb{N}$, tal que $n \geq n_0$ acarreta

$$\|A_n - A\|_{\mathfrak{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} < \epsilon.$$

Se $\mathbf{B} \in \mathfrak{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, define-se $\|\mathbf{B}\|_{\mathfrak{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = \displaystyle\sup_{x\neq 0} \frac{\|\mathbf{Bx}\|_Y}{\|\mathbf{B}\|_{\mathbf{X}}}$. Isto define uma norma em $\mathfrak{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

$ii)$ Diz-se que $\{A_n\}_n$ converge fortemente para A, se para qualquer $x \in \mathbf{X}$, tem-se $A_n x \to Ax$, em $\mathbf{Y}$.

Proposição 4.9

Sejam $\mathbf{X}$, um espaço de Banach, $\mathbf{Y}$ um espaço normado e $\{A_n\}_n$ uma seqüência, $\mathfrak{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, convergindo fortemente para A. Então existe uma constante positiva M, tal que $\|A_n\| < M, \forall\, n$. ♠

Definição 4.9

Seja $\{x_n\}_n$ uma seqüência do espaço normado $\mathbf{X}$. Diz-se que $(x_n)_n$ converge fracamente para x, em $\mathbf{X}$, se

$$f(x_n) \to f(x), \forall\, f \in \mathbf{X}^*.$$

Neste caso a notação usada é: $x_n \xrightarrow{w} x, n \to \infty;$

$x_n \rightharpoonup x$, com $n \to \infty$ ou $w - \displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$

(w vem de weak = fraco, em inglês). ♣

Nota

Uma sequência $\{x_n\}_n$ de um espaço normado $\mathbf{X}$, pode convergir de duas maneiras:

· $\{x_n\}$ converge fortemente para x, se $\{x_n\}$ converge para x, na norma de $\mathbf{X}$, isto é, dado $\epsilon > 0$,existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|x_n - x\| < \epsilon, \forall\, n \geq n_0.$$

A convergência forte é denotada por $x_n \longrightarrow x, n \to \infty$.

· $\{x_n\}$ converge fracamente para x, como na definição 4.9, denotada por $x_n \rightharpoonup x, n \to \infty$.

Demonstração

Toda sequência fortemente convergente é fracamente convergente. A recíproca é falsa. Em dimensão finita, convergência forte é equivalente a convergência fraca.

Teorema 4.17

Seja $\mathbf{X}$ um espaço normado. Supondo $(x_n)_n$ uma seqüência fracamente convergente, em $\mathbf{X}$. Então $(x_n)_n$ é fortemente limitada, i.é, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C, \forall\, n$. ♡

Demonstração

Seja $(x_n)_n$ uma seqüência fracamente convergente em $\mathbf{X}$. Então $\{\ f(x_n)\}_n$ é de Cauchy, para todo $f \in \mathbf{X}^*$. Temos, $\mathbf{J} : \mathbf{X} \to \mathbf{X}^{**}, \mathbf{J}x(y) = y(x), \|\mathbf{J}x\| = \|x\|\,, \forall\, x \in \mathbf{X}$.

Consideremos a seqüência de funcionais lineares,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{x_n} \quad &: \quad \mathbf{X}^* \to \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto \quad \mathbf{J}_{x_n}(f) = f(x_n) \end{aligned}$$

A seqüência $(\mathbf{J}_{x_n})$ está nas condições do Teorema de Banach-Steinhaus.
Logo, $\sup\limits_n \|\mathbf{J}_{x_n}\| < \infty$, ou seja $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$.
Portanto, $\|x_n\| \leq C, \forall\, n$.

Definição 4.10

Uma seqüência $(x_n)_n$ de um espaço normado $\mathbf{X}$, é dito ser uma seqüência de Cauchy fraca, se $\{\ f(x_n)\}_n$ é uma seqüência de cauchy, para todo $f \in \mathbf{X}^*$. ♣

Definição 4.11

Um espaço linear normado $\mathbf{X}$ é dito ser fracamente completo se toda seqüência de cauchy fraca, de elementos de $\mathbf{X}$, converge fracamente para algum elemento de $\mathbf{X}$. ♣

Nota

Seja $\mathbf{X}$ um espaço linear normado. Seja $(f_n)_n$ uma seqüência em $\mathbf{X}^*$.
Para uma tal seqüência em $\mathbf{X}^*$ distinguémos três tipo de convergência.
Diz-se que $(f_n)_n$ converge forte (na norma) para f, se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|f_n \to f\|_{\mathbf{X}^*} < \epsilon, \forall\, n \geq n_0.$$

Diz-se que (f_n) converge fraca para f, em $\mathbf{X}^*$, se

$$f_n(w) \to f(w), \forall\, x \in \mathbf{X}^{**}.$$

Diz-se que $(f_n)_n$ converge fraco-$\star$ para f, em $\mathbf{X}^*$, se

$$f_n(x) \to f(x), \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Capítulo Espaço de Hilbert

Frases de David Hilbert

"O infinito! Nenhuma outra questão jamais comoveu tão profundamente o espírito do homem."
"Algumas pessoas têm um horizonte mental de raio zero e chamar seu ponto de vista."
"Matemática é um jogo jogado de acordo com algumas regras simples com marcas sem sentido no papel."
"Comece com os exemplos mais simples."
"Se eu despertar depois de ter dormido por mil anos, minha primeira pergunta seria: a hipótese de Riemann foi comprovada?"

David Hilbert nasceu em Königsberg (Reino da Prússia, foi um reino alemão de 1701 a 1918. Atualmente Kaliningrado, enclave russo entre a Polónia e a Lituânia, à beira do Mar Báltico.)
$(1862 - 1843, 81$ anos, Göttingen, Alemanha $)$

5.1 Fundamentação Teórica

O Teorema do Gráfico Fechado é um resultado importante em análise matemática que estabelece uma condição para a continuidade de uma função definida em um conjunto fechado. Esse teorema está relacionado ao estudo das propriedades das funções contínuas.

Formalmente, o Teorema do Gráfico Fechado afirma que se um conjunto X é um subconjunto fechado de um espaço topológico, e se uma função$f : X- > Y$ é contínua, onde Y é outro espaço topológico, então o gráfico da função, que é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$, onde x pertence a X, é um conjunto fechado em $X \times\ Y$.

Em outras palavras, se a função f é contínua em X, então o gráfico de fé fechado em $X \times Y$. Isso significa que, se você tiver uma sequência de pontos em $X \times Y$ que converge para um ponto (x, y) em $X \times Y$, então (x, y) também pertence ao gráfico de f.

O Teorema do Gráfico Fechado é um resultado fundamental na teoria da análise funcional e é frequentemente usado para provar outros resultados importantes, como o Teorema da Função Inversa e o Teorema da Função Implícita. Ele desempenha um papel crucial no estudo da continuidade e das propriedades das funções contínuas em espaços topológicos.

Vale ressaltar que existem várias versões do Teorema do Gráfico Fechado, dependendo do contexto em que ele é aplicado e das hipóteses adicionais consideradas. As formulações precisas podem variar, mas a ideia geral é sempre garantir que o gráfico de uma função contínua em um conjunto fechado seja também um conjunto fechado.

Teorema 5.1 (Teorema do Gráfico Fechado)

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espaços vetoriais normados. Uma aplicação $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ linear, é dita um operador linear. Se existe uma constante $C > 0$ tal que $\|\mathbf{A}x\|_{\mathbf{Y}} \leq C\,\|\mathbf{X}\|_{\mathbf{X}}\,, \forall\, x \in \mathbf{X}$, então $\mathbf{A}$ é dito um operador linear contínuo. Nesse caso escreve-se: $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}(\,\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y})$.

Se $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}(\,\mathbf{X}\,,\,\mathbf{Y})$, define-se: $\|\mathbf{A}\|_{\mathfrak{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|\mathbf{A}x\|_{\mathbf{Y}}}{\|\mathbf{X}\|_{\mathbf{X}}}$.

♡

Teorema 5.2 (Teorema da Aplicação Aberta)

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dois espaços de Banach e $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ um operador linear contínuo e sobrejetivo. Então $\mathbf{A}$ é uma aplicação aberta.

♡

Demonstração

Veja qualquer livro de Análise Funcional.

Definição 5.1

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espaços normados e $\mathbf{D}$ um subespaço de $\mathbf{X}$. Um operador linear $\mathbf{A} : \mathbf{D} \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ é dito fechado se para toda seqüência convergente $\{x_n\}$ de pontos de $\mathbf{D}$, onde $x_n \to x \in \mathbf{X}$, tal que $\{\mathbf{A}_{x_n}\}_n$ é uma seqüência convergente de pontos de $\mathbf{Y}$, digam $\mathbf{A}x_n \to y \in \mathbf{Y}$, tam-se $x \in \mathbf{D}$ e $y = \mathbf{A}x$.

Por $\mathbf{G_A}$ denota-se o gráfico do operador $\mathbf{A}$. Assim $\mathbf{G_A} = \{(x, \mathbf{A}x); x \in \mathbf{D}\}$

♣

Proposição 5.1

$\mathbf{A} : \mathbf{D} \to \mathbf{Y}$ linear é fechado se e so se $\mathbf{G_A}$ é fechado em $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

♠

Demonstração

Exercício.

Nota

Toda transformação linear contínua é fechada. A recíproca não é verdadeira.

Proposição 5.2

Seja $\mathbf{A} : \mathbf{D} \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uma transformação linear fechada. Se $\mathbf{A}^{-1}$ existe, é também linear fechada.

♠

Demonstração

Sendo $\mathbf{A} : \mathbf{D} \to \mathbf{Y}$ linear fechada, tem-se que $\mathbf{G_A} = \{(x, \mathbf{A}x) | x \in \mathbf{D}\}$ é fechado em $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Seja $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ a imagem de $\mathbf{D}$ por $\mathbf{A}$. Como $\mathbf{A}^{-1}$existe, para qualquer $y \in \mathbf{A}(\mathbf{D})$, existe um único $x \in \mathbf{D}$; $y = \mathbf{A}x$ ou $x = \mathbf{A}^{-1}y$.

Daí, $\mathbf{G_A} = \{(\mathbf{A}^{-1}y, y); y \in (\mathbf{D})\}$.
A aplicação $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y} \times \mathbf{X}, (x, y) \longmapsto (y, x)$ é uma isometria. Como isometrias levam fechados, o $\{(y, \mathbf{A}^{-1}y); y \in \mathbf{A}(\mathbf{D})\}$ é fechado em $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$.
Logo $\{(y, \mathbf{A}^{-1}y); y \in \mathbf{A}(\mathbf{D})\} =$ é fechado em $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$.

Teorema 5.3 (Teorema da Inversa Limitada)

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espaços normados, sendo $\mathbf{X}$ um espaço de Banach. Seja $\mathbf{A} : \mathbf{D} \subset \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ uma transformação linear fechada, e suponhamos $\mathbf{A}(\mathbf{D})$ de $2^{\underline{a}}$ categoria . Então

$i)$ $\mathbf{A}$ é sobre

$ii)$ Existe $m > 0$; para qualquer $y \in \mathbf{Y}$, existe $x \in \mathbf{D}$ tal que $\mathbf{A}x = y$ e $\|x\| \leq m\,\|y\|$

$iii)$ Se $\mathbf{A}^{-1}$ existe é linear limitada. ♡

Teorema 5.4 (Teorema do Gráfico Fechado.)

Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ espaços de Banach e $\mathbf{A} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ linear fechada. Então $\mathbf{A}$ é contínua. ♡

Demonstração

$\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ espaços de Banach e $\mathbf{G_A}$ é um subespaço fechado de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Logo $\mathbf{G_A}$ é um espaço de Banach.

Seja $\mathbf{B} : \mathbf{G_A} \to \mathbf{X}$
$\quad (x, \mathbf{A}x) \longmapsto \mathbf{B}(x, \mathbf{A}x) = x$

$\cdot$ $\mathbf{B}$ é linear

$\cdot$ $\mathbf{B}$ é contínua

$\|\mathbf{B}(x, \mathbf{A}x)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|\mathbf{A}x\| = \|(x, \mathbf{A}x)\|$

$\cdot$ $\mathbf{B}$ é sobre

$\cdot$ $\mathbf{B}$ é 1-1

se $\mathbf{B}(x, \mathbf{A}x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \mathbf{A}x = 0 \Rightarrow (x, \mathbf{A}x) = (0, 0)$

Pelo Teorema da Inversa Limitada, $\mathbf{B}^{-1}$é limitada

Seja $x_n \to x$, em $\mathbf{X}$. Então $\mathbf{B}^{-1}x_n \to \mathbf{B}^{-1}x$,ou seja $(x_n, \mathbf{A}x_n) \to (x, \mathbf{A}x)$

Logo $\mathbf{A}x_n \to \mathbf{A}x$ e $\mathbf{A}$ é contínuo.

5.2 Espaço de Hilbert

Seja H um espaço vetorial, sobre $\mathbb{C}$, também dito espaço vetorial (linear) completo.

Um produto interno, sobre H, é uma aplicação

$\langle \, , \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$
$\quad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$, satisfazendo

$i)$ $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ (a barra significa complexo conjugado)
$ii)$ $\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1 \langle f_1, f \rangle + \alpha_2 \langle f_2, g \rangle$
$iii)$ $\langle f, f \rangle \geq 0$ e $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

A raiz quadrada positiva $\sqrt{\langle f,f\rangle}$ é dita a norma do vetor f, denotado por
$\|f\| = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Um espaço linear, H, munido de p.i $\langle\ ,\rangle$, é dito um espaço pre-hilbertiano. Algumas vezes a notação $\langle\ ,\rangle\, H$ é usado para enfatizar o produto interno de H.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Se f, g são elementos de um espaço pre-hilbertiano H, então $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|$.

Demonstração

Temos, $\langle \theta f + \lambda g, \theta f + \lambda g\rangle \geq 0, \forall\, \theta \in \mathbb{C}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, f,g \in H$

Daí, $\theta\overline{\theta}\,\langle f,f\rangle + \theta\lambda\,\langle f,g\rangle + \lambda\overline{\theta}\,\langle g,f\rangle + \lambda\lambda\,\langle g,g\rangle \geq 0$

Tomando, $\theta = \frac{\langle f,g\rangle}{|\langle f,g\rangle|}$, $|\langle f,g\rangle| \neq 0$, obtemos.

$\frac{\overline{\langle f,g\rangle}}{|\langle f,g\rangle|}\frac{\langle f,g\rangle}{|\langle f,g\rangle|}\,\langle f,f\rangle + \lambda\frac{\overline{\langle f,g\rangle}}{|\langle f,g\rangle|}\,\langle f,g\rangle + \lambda\frac{\langle f,g\rangle}{|\langle f,g\rangle|}\,\langle g,f\rangle + \lambda^2\,\langle g,g\rangle \geq 0$

$\|f\|^2 + 2\lambda|\langle f,g\rangle| + \lambda^2\,\|g\|^2 \geq 0$

Então $\triangle \leq 0$, ou seja $4|\langle f,g\rangle|^2 \leq 4\,\|f\|^2\,\|g\|^2$

Donde, $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|$

Se $\langle f,g\rangle = 0$, então $|\langle f,g\rangle| = 0 \leq \|f\|\,\|g\|$.

Donde se conclui que $|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|\,, \forall\, f,g \in H$.

Proposição 5.3

Seja H um espaço pre-hilbertiano com produto interno $\langle\ ,\rangle$. Então $\|f\| = \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$ é de fato uma norma sobre H. ♠

Demonstração

Mostraremos apenas a ”desigualdade triangular ”

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle = \\ = \|f\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle f,g\rangle + \|g\|^2 \\ \leq \|f\|^2 + 2\,\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2, \text{ onde,}\end{aligned}$$

nessa passagem, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Daí, $\|f+g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2$ e $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Nota

Se H é um espaço pre-hilbertiniano, então H é também um espaço normado e, consequentemente, um espaço métrico, cuja métrica é dada por: $d(f,g) = \|f-g\|$.
Dessa forma toda a topologia métrica se transfere para qualquer espaço pre-hilbertiniano.

No que se segue H denota, salvo mensão em contrário, um espaço pre-hilbertiniano.

Se $f,g \in H$, diz-se que f é ortogonal a g se $\langle f,g\rangle = 0$ f é ortogonal a um subconjunto $G \subset H$, se $\langle f,g\rangle = 0, \forall\, g \in G$.

Definição 5.2

Um espaço de Hilbert é um espaço linear H, munido de um produto interno $\langle , \rangle$, completo em relação a métrica induzida por esse produto interno. ♣

Um exemplo importante de espaço de Hilbert é o espaço ℓ_2.

$\ell_2 = \{f = (x_1, x_2, \ldots); x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \langle \infty \rangle\}$

O produto interno em ℓ_2 é definido por :

$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i, f = (x_1, x_2, \ldots) \;\; g = (y_1, y_2, \ldots)$

Na verdade ℓ_2 é um espaço de Hilbert separável.(O conjunto de todos os vetores, com apenas um n$\underline{\text{o}}$ finito de componentes não-nulas, sendo estas componentes racionais complexas $(\xi + i\eta, \xi, \eta \in \mathbb{Q}$ é denso em $\ell_2)$.

Além disso, $\dim \ell_2 = \infty$, pois $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $e_3 = (0, 0, 1, \ldots), \ldots$ são vetores (unitários) e L.I. , em ℓ_2.

Proposição 5.4

Seja G um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H. Se $h \in H$, existe um único $g \in G$, tal $d(h, G) = \|h - g\|$. ♠

Demonstração

Se $h \in G$, então tomamos $g = h$.

Suponhamos $h \in H - G$. Então $d(h, g) = \delta > 0$, ou seja $\inf\limits_{g \in G} \|h - g\| = \delta > 0$.

De acordo com a definição de ínfino, existe uma seqüência $(g_n)_n$,em G, tal que $\lim\limits_{n \to \infty} \|h - g_n\| = \delta$

A seqüência $(g_n)_n$ é de Cauchy, em $(g_n)_n H$.

De fato:

$$\delta \leq \left\|h - \frac{g_m + g_n}{2}\right\| = \left\|\frac{1}{2}(2h - g_m - g_n)\right\| = \left\|\frac{1}{2}(h - g_m) + \frac{1}{2}(h - g_n)\right\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|h - g_m\| + \frac{1}{2}\|h - g_n\|$$

Verifica-se, diretamente, que, se $u, v \in H$, então

$2\|u\|^2 + 2\|v\| = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2$ (Lei do Paralelogramo)

Tomando $u = h - g_m, v = h - g_n$, temos

$2\|h - g_m\|^2 + 2\|h - g_n\|^2 = \|2h - (g_m + g_n)\|^2 + \|g_n - g_m\|^2$, ou

$\|g_n - g_m\|^2 = 2\|h - g_m\|^2 + 2\|h - g_n\|^2 - 4\left\|h - \frac{g_m + g_n}{2}\right\|^2$

Daí, $\|g_n - g_m\|^2 \leq 2\|h - g_m\|^2 + 2\|h - g_n\|^2 - 4\delta$

Assim $\lim\limits_{n,m \to \infty} \|g_n - g_m\| = 0$. Portanto (g_n) é de Cauchy, em H.

Como G é fechado, existe $g \in G$, tal que $g_n \to g$, em H.

Agora,

$\delta \leq \|h - g\| \leq \|h - g_n\| + \|g_n - g\| \Rightarrow \delta \leq \|h - g\| \leq \lim\limits_{n \to \infty} \|h - g_n\| + \lim\limits_{n \to \infty} \|g_n - g\| = \delta$

$\therefore \|h - g\| = \delta = d(h, G)$.

Se $g, g' \in G$, satisfazem a proposição, então

$\|h-g\| = \delta = \|h-g'\|$.

Como $\frac{1}{2}(g+g') \in G$, temos $\left\|h - \frac{g+g'}{2}\right\| \geq \delta$

Por outro lado, $\left\|h - \frac{g+g'}{2}\right\| \leq \frac{1}{2}\|h-g\| + \frac{1}{2}\|h-g'\| = \delta$

Assim $\left\|h - \frac{g+g'}{2}\right\| = \delta = \frac{1}{2}\|h-g\| + \frac{1}{2}\|h-g'\|$ e $\| h-g+h-g'\| = \|h-g\| + \|h-g'\|$

Devemos ter $h-g' = \lambda(h-g)$, para algum $\lambda \geq 0$

se $\lambda = 1$, então $g = g'$,e a resultado segue.

se $\lambda \neq 1$, então $h = \frac{g'-\lambda g}{1-\lambda}$. Então $h \in G$. Contradição!!

Proposição 5.5

O produto interno $\langle\ ,\rangle$, de um espaço de Hilbert H, é uma função contínua.

Demonstração

Se $u_n \to u$, $v_n \to v$, então

$$
\begin{aligned}
|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| &= |\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v_n\rangle + \langle u, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| \\
&\leq |\langle u_n - u, v_n\rangle| + |\langle u, v_n - v\rangle| \leq \\
&\leq \|u_n - u\|\,\|v_n\| + \|u\|\,\|v_n - v\|
\end{aligned}
$$

Proposição 5.6

Sejam G um subspaço fechado de um espaço de Hilbert H, $h \in H$ e $g \in G$, tais que $\|h-g\| = d(h,G)$. Então $h-g$ é ortogonal a todo vetor de G.

Demonstração

Suponha que $h-g$ não seja ortogonal a todo vetor de G. Então existe $0 \neq g_0 \in G$,

tal que $\langle h-g, g_0\rangle = \sigma \neq 0$.

Seja $g^* = g + \frac{\sigma}{\langle g_0, g_0\rangle} g_0$. Claro que $g^* \in G$.

Temos, $\|h-g^*\|^2 = \langle h-g^*, h-g^*\rangle = \left\langle h - g - \frac{\sigma}{\langle g_0,g_0\rangle} g_0, h - g - \frac{\sigma}{\langle g_0,g_0\rangle} g_0 \right\rangle =$

$$\|h-g^*\|^2 = \|h-g\|^2 - \left\langle h-g, \frac{\sigma}{\langle g_0,g_0\rangle} g_0 \right\rangle - \frac{\sigma}{\langle g_0,g_0\rangle}\langle g_0, h-g\rangle +$$

$$+ \frac{\sigma\overline{\sigma}}{\langle g_0,g_0\rangle^2}\langle g_0, g_0\rangle =$$

$$= \|h-g\|^2 - \frac{\overline{\sigma}}{\langle g_0,g_0\rangle}\langle h-g, g_0\rangle - \frac{\sigma}{\langle g_0,g_0\rangle}\langle g_0, h-g\rangle +$$

$$+ \frac{|\sigma|^2}{\langle g_0,g_0\rangle} =$$

$$= \|h-g\|^2 - \frac{\sigma\overline{\sigma}}{\langle g_0,g_0\rangle} - \frac{\sigma\overline{\sigma}}{\langle g_0,g_0\rangle} + \frac{|\sigma|^2}{\langle g_0,g_0\rangle}$$

$$= \|h - g\|^2 - \frac{|\sigma|^2}{\langle g_0, g_0 \rangle}$$

Assim, $\|h - g^*\| \leq \|h - g\|$. Contradição!

Nota

De acordo com a Proposição 5.6, se G é um subespaço fechado de H, então todo vetor $h \in H$ se decompõe na forma $h = g + f$, com $g \in G$ e $f \in G^{\perp}$ (= subespaço dos vetores perpendiculars a G)

De fato: $h = g + (h - g)$.

Além disso tal decomposição é única, isto é, se $h = g' + f'$, então $g = g'$ e $f = f'$, pois teríamos:

$g + f = g' + f' \Rightarrow g - g' = f' - f$ *e daí*

$g - g' \in G \cap G^{\perp} = \{0\}, f' - f \in G \cap G^{\perp} = \{0\}$.

Diz-se, nesse caso, que g é a projeção ortogonal de h sobre G e H é a soma direta de G e $G^{\perp}$, isto é $H = G \oplus G^{\perp}$.

Proposição 5.7

Seja G um subespaço de um espaço de Hilbert H. Então $G^{\perp}$ é um subespaço fechado de H.

Demonstração

Exercício.

Proposição 5.8

Sejam H um espaço de Hilbert de G um subespaço de H. São equivalentes:

$i)$ G é fechado

$ii)$ $(G^{\perp})^{\perp} = G$

Demonstração

$i) \Rightarrow ii)$ $G \subset (G^{\perp})^{\perp}$.

Se $u \in G$, então $\langle u, w \rangle = 0, \forall\, w \in G^{\perp}$. Então $u \in (G^{\perp})^{\perp}$.

$(G^{\perp})^{\perp} \subset G$.

Seja $m \in (G^{\perp})^{\perp}$. Então $m = m_1 + n, m_1 \in G, n \in G^{\perp}$

Daí, $0 = \langle n, m \rangle = \langle n, m_1 + n \rangle = \langle n, n \rangle = \|n\|^2 \Rightarrow n = 0$.

Logo $m = m_1 \in G$ e $G^{\perp})^{\perp} \subset G$.

Portanto $G = (G^{\perp})^{\perp}$.

A aplicacão $P_G : H \to H$,

$$h \mapsto P_G(h) = g, \text{ onde } h = g + f, g \in G, f \in G^{\perp}$$

é linear, contínua e $\|P_G\| = 1$ e $P_G \circ P_G = P_G = P_G^2$.

P_G é dita projeção ortogonal sobre G. Tais aplicações desempenham papéis importantes na teoria espectral de operadores.

5.3 Bases Ortonormais e Séries de Fourier.

Uma família $\{e_i\}_{i\in I}$ de vetores de um espaço de Hilbet H é dita ortogonal se

$\langle e_\ell, e_k\rangle = 0, \forall\, k, \forall\, \ell, k \neq \ell.$

Se, além disso, $\|e_k\| = 1, \forall\, k \in I$, diz-se que a família $\{e_i\}_{i\in I}$ é ortonormal.

Proposição 5.9

Toda família ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ é L.I. ♠

Demonstração

Se $e_k = \sum_{i\in I_0} \alpha_i e_i, I_0 \subset I$, finito, então

$\|e_k\|^2 = \langle e_k, e_k\rangle = \left\langle \sum_{i\in I_0} \alpha_i e_i, e_k\right\rangle = \sum_{i\in I_0} \alpha_i \langle e_i, e_k\rangle = 0$

Contradição!!

Definição 5.3

Uma família ortonormal $\{e_i\}_{i\in I}$ de vetores de um espaço de Hilbert H é dito uma base ortonormal de H se é maximal. $\{e_i\}_{i\in I}$ é maximal, em H, se nenhum vetor $e_0 \in H$, pode ser encontrado, de modo que $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e_0\}$ seja ortonormal.

Equivalentemente,$\{e_i\}_{i\in I}$ é maximal se $\langle e_i, v\rangle = 0, \forall\, i \in I, \Rightarrow v = 0.$ ♣

Suponhamos que um espaço de Hilbert H, tenha uma base ortonormal enumerável $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Seja $G = [e_1, e_2, \ldots]$. Como $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de H, devemos ter $G^\perp = \{0\}$. Então $\overline{G} = (G^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H$. Isto mostra que G é denso em H.

Então todo vetor $v \in H$, existe uma seqüêcia (u_n) em G, tal que $u_n \to v$.

Seja $V_n = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ o subespaço de H, gerado pelos n-primeiros vetores da base ortonormal $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$,de H.

Note que $\dim V_n = n$ e assim V_n é um subespaço fechado de H.

Seja $P_n : H \to H$

$$v \mapsto P_n v = w \in V_n, \text{ onde } v = w + w^\perp, \text{ com } w \in V_n, w^\perp \in V_n^\perp.$$

Afirmação: $P_n v \to v, \forall\, v \in H$.

De fato: Dado $v \in H$, existe $(u_n)_n \subset G = [e_1, e_2, \ldots]$ tal que $u_n \to v$, em H.

Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_k - v\| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

Claro que $u_k \in V_N$, para um N bem determinado.

Então, para $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned}\|P_n v - v\| &\leq \|P_n v - P_n u_k\| + \|P_n u_k - v\| \leq \|P_n\|\,\|v - u_k\| + \|u_k - v\| \\ &\leq \|v - u_k\| + \|v - u_k\| < \epsilon\end{aligned}$$

Agora, se $v_1 = P_1 v, v_n = P_n v - P_{n-1} v, n \geq 2$, então,

$$v = \lim_{n\to\infty} P_n v = \lim_{n\to\infty} \{P_1 v + (P_2 v - P_1 v) + \cdots + (P_n v - P_{n-1} v)\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \{v_1 + v_2 + \cdots + v_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Nota

Como $P_n v \in V_n$, podemos escrever

$$P_n v = v_n^1 e_1 + \cdots + v_n^{n-1} e_{n-1} + v_n^n e_n$$

$$P_{n-1} v = v_n^1 e_1 + \cdots + v_n^{n-1} e_{n-1}$$

Daí, $v_n^n e_n = P_n v - P_{n-1} v = w_n \Rightarrow w_n = v_n e_n$

e $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n$. Note que $v = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{k} v_n e_n$ e $\langle v, e_j \rangle = v_j$ se $i \le j \le k$. Então $v = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \langle v, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, e_n \rangle e_n$

Proposição 5.10

Todo espaço de Hilbert separável H tem uma base ortonormal. ♠

Demonstração

Seja $\{v_n\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência densa em H.

Seja n_1, o menor índice tal que $v_{n_1} \neq 0$. Em seguida seja $n_2 > n_1$, o menor índice

correspondente ao vetor v_{n_2}, que seja L.i. de v_{n_1}.

Prosseguindo, construimos $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_k}$.

Se todo $v_n, n > n_k$ é dependente de $v_{n_1}, \ldots, v_{n_k}$, então $\{v_{n_1}, \ldots, v_{n_k}\}$ é um subconjunto de vetores L.I., maximal.

Por outro lado, pode existir um menor índice $v_{n_{k+1}} > n_k$ tal que $v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots, v_{n_{k+1}}$, seja L.I.

Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, obtemos uma seqüência ortonormal (e_n), onde

$[\,e_1, e_2, \ldots] = [\,v_{n_1}, v_{n_2}, \ldots] = [\,v_1, v_2, \ldots]$.

Então $\overline{[e_1, e_2, \ldots]} = H$, o que mostra que $\{e_1, e_2, \ldots\}$ é uma base ortonormal de H.

Nota

Seja $\{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ uma base ortonormal para um espaço de Hilbert H.

Se $v \in H$, então $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n e_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n e_n$

Daí, como $\left\langle \sum_{i=1}^{N} v_i e_i, e_i \right\rangle = v_j$, se $N \ge j$, temos $v_j = \langle v, e_j \rangle$ e assim $v = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_i, e_i \rangle e_i$, dita série de Fourier (generalizada), onde $v_n = \langle v, e_n \rangle$ são os coeficientes de Fourier de v,

em relação ã base $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Se $u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle e_i, u = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i \rangle e_i \in H$, então

$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} \langle u, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, e_j \rangle e_j \right\rangle =$

$$= \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{i=1}^{N} \langle u, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{N} \langle v, e_j\rangle e_j \right\rangle =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \langle u, e_i\rangle \overline{\langle v, e_i\rangle} \text{ (Fórmula de Perseval)}$$

Tomando $u = v$, na Fórmula de Perseval, obtemos

$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, e_i\rangle|^2$ *(Fórmula de Parseval).*

Proposição 5.11

Sejam H um espaço de Hilbert e $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ um conjunto ortonormal em H. Se $u \in H$, então $\sum_{i=1}^{n} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|u\|^2$ (Desigualdade de Besel) para qualquer $n = 1, 2, \ldots$ ♠

Demonstração

Seja $\alpha_i = \langle u, e_i\rangle$. Tem-se:

$$0 \leq \left\langle u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, u - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, e_j \right\rangle = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \langle u, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, u\rangle +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_j \langle e_i, e_j\rangle =$$
$$= \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

Logo $0 \leq \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$ ou seja $\sum_{j=1}^{n} |\langle u, e_j\rangle|^2 \leq \|u\|^2$.

5.4 Operador Adjunto de um Operador Limitado

Sejam H um espaço de Hilbert complexo, com produto interno $\langle\, ,\rangle$ e $T : H \to H$ um operador linear. Chama-se adjunto de T, ao operador $T^* : H \to H$, linear, tal que $\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle, \forall\, u, v \in H$. A aplicação $T \in L(H) \to T^* \in L(H)$, tem as seguintes propriedades. $i)$ $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ $ii)$ $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ $iii)$ $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$ $iv)$ $T^{**} = T$ $v)$ $\|T^*\| = \|T\|$ $vi)$ $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Prova de $ii)$ $\langle(\alpha T)u, v\rangle = \langle u, (\alpha T)^*v\rangle, \forall\, u, v \in H$ Agora, $\langle(\alpha T)u, v\rangle = \alpha\langle Tu, v\rangle = \alpha\langle u, T^*v\rangle = \langle u, \overline{\alpha}T^*v\rangle, \forall\, u, v \in H$.

Daí, $\langle u, (\alpha T)^*v\rangle = \langle u, \overline{\alpha}T^*v\rangle, \forall\, u, v \in H$ e $\langle u, [(\alpha T)^* - \overline{\alpha}T^*]\rangle = 0, \forall\, u, v \in H$

Assim $[(\alpha T)^* - \overline{\alpha}T^*](v) = 0, \forall\, v \in H$, donde $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$.

Prova de $iv)$

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle, \forall\, u, v \in H \Rightarrow$$

$$\langle Tu, v\rangle = \overline{\langle T^*v, u\rangle}, \forall\, u, v \in H \Rightarrow$$

$$\langle Tu, v\rangle = \overline{\langle v, T^{**}u\rangle}, \forall\, u, v \in H \Rightarrow$$

$$\langle Tu, v\rangle = \langle T^{**}u, v\rangle, \forall\, u, v \in H.$$

daí, $T = T^{**}$.

Um operador $T \in L(H)$ é dito auto-adjunto, se $T = T^*$, isto é

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle, \forall\, u, v \in H.$$

Proposição 5.12

Seja $T \in \mathfrak{L}(H)$ um operador linear tal que $\langle Tu, u\rangle = 0, \forall\, u \in H$. Então $T = 0$.

Demonstração

Basta mostrar que $\langle Tu, v\rangle = 0, \forall\ u, v \in H$. Temos, $\langle T(u+v), u+v\rangle = 0, \forall\ u, v \in H$ Daí, $\langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle = 0, \forall\ u, v \in H$ Então $\langle T(iu), v\rangle + \langle Tv, iu\rangle = 0, \forall\ u, v \in H$ Assim $\begin{cases} \langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle = 0 \\ i\langle Tu, v\rangle - i\langle Tv, u\rangle = 0, \forall\, u, v \in H. \end{cases}$ e $\begin{cases} \langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle = 0 \\ \langle Tu, v\rangle - \langle Tv, u\rangle = 0 \end{cases}$ Donde $2\langle Tu, v\rangle = 0, \forall\, u, v \in H$. Logo $T \equiv 0$.

Proposição 5.13

$T \in \mathfrak{L}(H)$ é operador auto-adjunto $\Leftrightarrow \langle Tu, u\rangle \in \mathbb{R}, \forall\, u \in H$.

Demonstração

1^a Parte:

$\Rightarrow$) Se $T = T^*$, então $\langle Tu, u\rangle = \langle u, Tu\rangle, \forall\, u \in H$ e $\langle Tu, u\rangle = \overline{\langle Tu, u\rangle}, \forall\, u \in H$. Logo $\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{R}$

2^a Parte:

$\Leftarrow$) Se $\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{R}, \forall\ u \in H$, então, $\langle Tu, u\rangle = \overline{\langle Tu, u\rangle} = \overline{\langle u, T^*u\rangle} = \langle T^*u, u\rangle, \forall\ u \in H$ Daí, $\langle (T - T^*)u, u\rangle = 0, \forall\, u \in H$. Pela proposição anterior, $T - T^* \equiv 0$. Um operador $N \in \mathfrak{L}(H)$ é dito normal se comuta com seu adjunto N^*, isto é $NN^* = N^*N$. Todo operador auto-adjunto é normal. Um operador $U \in \mathfrak{L}(H)$ é dito unitário se $UU^* = U^*U = I_d$.

Sugestões de alguns livros clássicos

1. "Análise Funcional: Uma Introdução"por Elon Lages Lima

Este livro é uma introdução clássicaÀ análise funcional, abordando tópicos como espaços vetoriais topológicos, espaços de Banach, espaços de Hilbert, teoria espectral e operadores lineares.

2. "Análise Funcional: Teoria e Aplicações"por João Bosco Prolla

Nesta obra, Prolla apresenta os conceitos fundamentais da análise funcional, incluindo espaços normados, espaços de Banach, espaços de Hilbert, operadores lineares e muito mais. Também inclui aplicações em equações diferenciais parciais.

3. "Espaços Métricos e IntroduçãoÀ Topologia"por Manfredo P. do Carmo

Este livro explora os fundamentos dos espaços métricos e sua relação com a topologia, abordando conceitos como distância, continuidade, compacidade, conectividade e completude. é uma obra essencial para entender a análise em espaços métricos.

4. . "Introduction to Topology and Modern Analysis"por George F. Simmons

Neste livro, Simmons combina tópicos de topologia e análise matemática, fornecendo uma introdução a espaços métricos, topologia geral, séries de funções, funções holomorfas, integração de Lebesgue e mais.

5. "IntroduçãoÀ Análise Funcional eÀs Equações Diferenciais Parciais"por Armando G. M. Neves

Esta obra aborda tanto a análise funcional quanto as equações diferenciais parciais, apresentando conceitos básicos e teoremas fundamentais. Inclui tópicos como espaços de Sobolev, operadores compactos, teoria de Fredholm e muito mais.

6. "Principles of Mathematical Analysis"(3rd Edition) por Walter Rudin

Este livro clássico oferece uma introdução abrangenteÀ análise matemática, incluindo uma abordagem rigorosa dos espaços métricos e da análise funcional.

7. "Functional Analysis"por Walter Rudin

Neste livro, Rudin explora a teoria dos espaços vetoriais normados e espaços de Hilbert, bem como os conceitos de análise funcional, como operadores lineares, espaços duais, teoria espectral e muito mais.

8. "Topology"(2nd Edition) por James R. Munkres

Embora esse livro seja mais focado em topologia, ele também contém uma introdução detalhada aos espaços métricos e suas propriedades fundamentais.

9. "Functional Analysis: An Introduction"por Yuli Eidelman, Vitali Milman e Antonis Tsolomitis

Esta obra fornece uma introdução acessívelÀ análise funcional, abordando tópicos como espaços de Banach, espaços de Hilbert, teoria espectral e operadores lineares compactos.

10. "Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications"(2nd Edition) por Gerald B. Folland

Este livro aborda a análise real de uma perspectiva mais moderna, incluindo espaços métricos, funções contínuas, convergência e completude, além de tópicos mais avançados como espaços de Sobolev e teoria de medida.

Índice

Bibliografia

[1] ARAGONA, J. *Números Reais*: Texto universitário do ime-usp. [S.l.: s.n.], 2010.

[2] BARTLE, R. G. *The Elements of Real Analysis*. New York: J. Wiley, 1964.

[3] BARTLE, R. G. *Introduction to Real Analysis*. [S.l.]: J. Wiley, 2019.

[4] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradutor: Elza F. G., SP: Edgard Blücher, 1974.

[5] DE MORAIS FILHO, D. C. *Um Convite à Matemática*: Coleção professor de matemática. 3a. ed. RJ: SBM, 2016.

[6] DE MORAIS FILHO, D. C. *Manual de Redação Matemática*: Coleção professor de matemática. 2a. ed. RJ: SBM, 2018.

[7] EVES, H. *Introdução à história da matemática*: Texto universitário do IME-USP. Tradutor: Hygino H. Domingues, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[8] FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. 2a. ed. RJ: LTC, 1996.

[9] FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. [S.l.]: Livros Técnicos Científicos, 2016.

[10] LIMA, E. L. *Análise Real*. [S.l.]: Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993.

[11] LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*: Coleção professor de matemática. 4a. ed. RJ: SBM, 2017.

[12] LIMA, E. L. *Espaço Métrico*. [S.l.]: Projeto Euclides, SBM, 18a, IMPA, 2018.

[13] LIMA, E. L. *Análise Funcional: Uma Introdução*. [S.l.]: Matemática Universitária, IMPA, 2019.

[14] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Vol 1*. [S.l.]: Projeto Euclides, SBM, 21a, IMPA, 2019.

[15] OLIVEIRA, C. R. *Introdução à Análise Funcional*. 2a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[16] ROYDEN, H. L. *Real Analysis*. 2a. ed. New York: Macmilan Publishing CO, 1968.

[17] RUDIN, W. *Princípios de Análise Matemática.* Tradutor: Eliana Rocha Henrique de Brito, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A, 1971.

[18] SIMMONS, G. F. *Introduction to Topology and Modern Analysis.* New York: McGraw-Hill, 1963.

[19] USP. O nascimento do cálculo, em 17 de março de 2023 às 12h e 25min. http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm.

[20] ÁVILA, G. *Introdução à Análise Matemática*. [S.l.]: Editora Edgar Blücher Ltda, 1993.