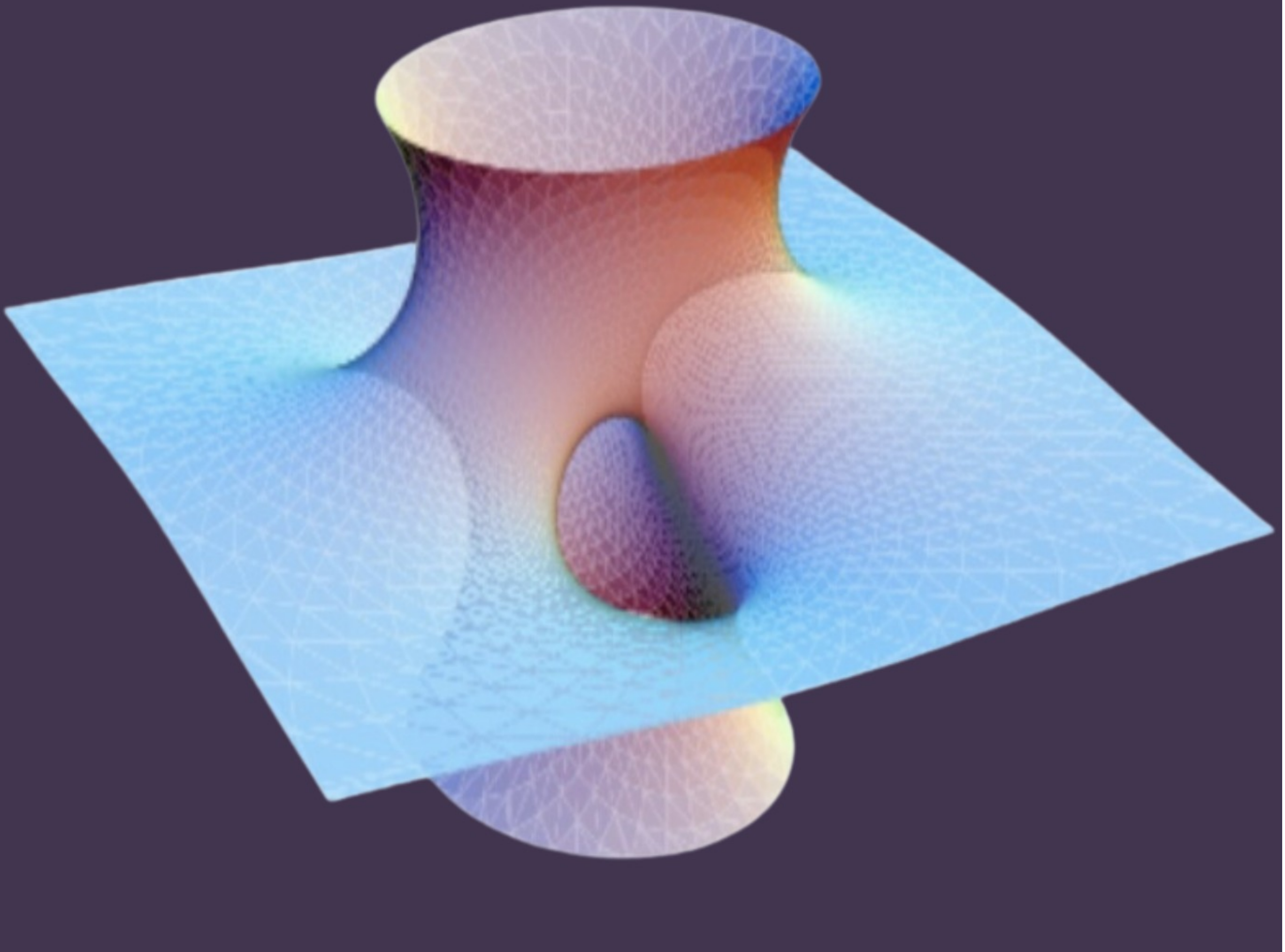
ANÁLISE REAL:

INTRODUÇÃO AS MAJORAÇÕES

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva

Análise Real: Introdução as Majorações

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

Copyright© 2023 por Editora Conhecimento Livre

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586A Análise Real: Introdução as Majorações

/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. Jornandes Dias da Silva. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2023

118 f.: il
DOI: 10.37423/2023.edcl739
ISBN: 978-65-5367-315-1
Modo de acesso: World Wide Web
Incluir Bibliografia

1. análise-real 2. majorações 3. valor-absoluto-ou-módulo I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Silva, Jornandes Dias da V. Título

CDU: 510

https://doi.org/10.37423/2023.edcl739

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

MSc Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior
MSc Humberto Costa
MSc Thays Merçon
MSc Adalberto Zorzo
MSc Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno
PHD Willian Douglas Guilherme
MSc Andrea Carla Agnes e Silva Pinto
MSc Walmir Fernandes Pereira
MSc Edisio Alves de Aguiar Junior
MSc Rodrigo Sanchotene Silva
MSc Wesley Pacheco Calixto
MSc Adriano Pereira da Silva
MSc Frederico Celestino Barbosa
MSc Guilherme Fernando Ribeiro
MSc. Plínio Ferreira Pires
MSc Fabricio Vieira Cavalcante
PHD Marcus Fernando da Silva Praxedes
MSc Simone Buchignani Maigret
Dr. Adilson Tadeu Basquerote
Dra. Thays Zigante Furlan
MSc Camila Concato
PHD Miguel Adriano Inácio
MSc Anelisa Mota Gregoleti
PHD Jesus Rodrigues Lemos
MSc Gabriela Cristina Borborema Bozzo
MSc Karine Moreira Gomes Sales
Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares
MSc Pedro Panhoca da Silva
MSc Helton Rangel Coutinho Junior
MSc Carlos Augusto Zilli
MSc Euvaldo de Sousa Costa Junior
Dra. Suely Lopes de Azevedo
MSc Francisco Odecio Sales
MSc Ezequiel Martins Ferreira
MSc Eliane Avelina de Azevedo Sampaio

Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO
2023

Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuiram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha), Prof. Dr. Juan Carlos Oliveira de Medeiros e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- Não estaria sendo justo, se não destacasse o nosso amigo Prof. Ms. Roberto Lessa, ao longo de mais de três décadas lecionando Álgebra Linear, conversando sobre: como abordaríamos determinados temas, ofertou diversas sugestões, correções e orientações no tocante a escrita.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões ao longo dos anos.
- À UPE, pelo apoio.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais, Filhos, Esposas,Todos os familiares e Ao grande Mestre Olavo Otávio Nunes (In Memoriam)

Prefácio

Neste primeiro volume de Introdução as Majorações em Análise Real, é fundamental mostrar e conjecturar como se constrói algumas majorações, os estudantes de Análise Real conseguem resolver as questões iniciais dos livros didáticos, entretanto se deparam com alguns exercícios mais elaborados, que não conseguem solucionar. Isto ocorre desde os temas iniciais, como em temas mais aprofundados. Tendo em vista que poucos materiais ou quase nada, se tem no tocante as construções de majorações em Análise Real estão disponíveis para os estudantes nesta situação, foi escrito este livro com o propósito de apresentar as majorações antes de se passar as demonstrações de problemas não triviais de Análise Real. Inicialmente, apresentamos a resolução de problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um Letramento Matemático de Mentalidade Crescente, Criativa e Flexível em temas básicos de números racionais como um corpo ordenado, até abordarmos temas não triviais como o corpo ordenado completo de números reais, supremos e ínfimos, ressaltando toda uma preparação das majorações para quando se for demonstrar propriedade operacionais com limites de sequencias, funções e continuidades por definições de épsilon e delta. Vale a pena salientar que buscamos dentro do poss vel, resolver os problemas com todos os passos, detalhando os procedimentos de majora ıes antes de fazer as demonstra ıes. Em alguns casos, inclusive, fazendo comentários matemáticos sobre o que está sendo realizado. Assim, o texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho (ou em grupo), de forma autônoma e com segurança, conferindo não apenas os resultados, mas todo o desenvolvimento lógico operacional. Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa uma certo cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, correções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endere os:

cjs@poli.br
was@poli.br
galdino@poli.br
jornandesdias@poli.br

Recife, 10 de maio de 2023

Análise Real: Introdução as Majorações

10.37423/2023.edcl739

Capítulo 1- Introdução

A Máxima de George Pólya
"Não se pode fazer Matemática sem sujar as mãos."

George Pólya Nasceu em Budapeste
(Hungria) $(1887 - 1985)$

1.1 Um pouco de história dos números Reais

A história dos números reais é longa e complexa, remontando aos primeiros registros da matemática na antiguidade. Ao longo dos séculos, os números reais evoluíram gradualmente, à medida que os matemáticos descobriram novas propriedades e operações.

Os antigos gregos, por exemplo, conheciam os números racionais, ou seja, números que podem ser escritos como frações de números inteiros. No entanto, eles não tinham conceito de números irracionais, como a raiz quadrada de dois, que não pode ser expressa como uma fração exata.

A noção de números reais começou a se desenvolver na Europa no século XVII, quando os matemáticos começaram a investigar as propriedades dos números irracionais. Um marco importante nesta área foi a obra "Os Elementos"de Euclides, que estabeleceu os fundamentos da geometria e das propriedades dos números.

Durante o século XVII e XVIII, os matemáticos começaram a desenvolver a análise matemática, uma disciplina que estuda as propriedades dos números reais e as funções que podem ser definidas com eles. Isaac Newton e Gottfried Leibniz foram os pioneiros nessa área, criando o cálculo diferencial e integral, que são baseados em números reais.

No século XIX, a teoria dos números reais foi formalizada e ampliada. O matemático alemão Georg Cantor introduziu a teoria dos conjuntos, que estabeleceu os fundamentos da análise matemática moderna e permitiu a definição rigorosa dos números reais.

1.2 Corpo dos Números Reais

O objetivo deste Capítulo é estudar, corpo, corpo ordenado, corpo ordenado completo dos números reais, destacando: propriedades básicas, ordenação, propriedades envolvendo desigualdades, módulo ou valor absoluto, desigualdades modulares e majorações como preparação para posteriormente, estudarmos limites, continuidades no ponto, derivadas e integrção à Riemann. Ressaltando; uma aobrdagem de como dar os primeiros passos em construir majorações, provável uma das principais dificuldades ao estudar análise a princípio, deesconstruir as demonstrações questionando o porquê de determinadas escolhas como $\frac{\xi}{2}$ ξ ou $\frac{\xi}{3}$ (tais questionamentos são fundamentais, enfraquecer hipóteses e ver se a conclusão de determinados teoremas continua validas ou apresentar contra-exemplos.

1.3 Estrutura, Ordem e Completeza de $\mathbb{R}$

Adição: $\begin{aligned} + : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$ e Multiplicação: $\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x\cdot y \end{aligned}$

Axioma 1.1

1 Associatividade: (i) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *e* (ii) $x.(y.z)=(x.y).z$
2 Comutatividade: (i) $x+y=y+x$ *e* (ii) $x.y=y.x$
3 Elemento Neutro: (i) $x+0=x$ *e* (ii) $x.1=x$
4 Elemento Inverso: (i) $x+(-x)=0$ *e* (ii) $\forall x\in\mathbb{R}.$, *com* $x\neq 0, \exists x^{-1}\in\mathbb{R}:$

$$x.x^{-1}=1.$$

5 Distributividade: $x\,(y+z)=x.y+x.z, \forall x,y,z,\in\mathbb{R}.$ ♡

Nota

$\forall =$ *Para todo ou quaisquer que sejam*
$\exists =$ *Existe*
$\exists!$ *Existe um único*

1.3.1 Algumas consequências do corpo $\mathbb{R}$

Exemplo 1.1

Lei do Cancelamento:

$\forall x,y,z,\in\mathbb{R}:$ (a) $y+x=y+z \Longrightarrow x=z$ (b) $y.x=y.z$ com $y\neq 0 \Longrightarrow x=z.$

Demonstração

(a) Com efeito, $\forall y\in\mathbb{R}:\exists\,(-y)\in\mathbb{R}: y+(-y)=0.$ Então,

$$y+x=y+z \Longrightarrow [y+(-y)]+x=[y+(-y)]+z \Longrightarrow x=z.$$

■

(b) Basta notar que: $\forall y \in \mathbb{R} : y \neq 0, \exists y^{-1} \in \mathbb{R} : y^{-1}.y = y.y^{-1} = 1$,
e, portanto,

$$y.x = y.z \Longrightarrow \left(y^{-1}.y\right) x = \left(y^{-1}.y\right) z \Longrightarrow x = z.$$

■

Exemplo 1.2

(a) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x.0 = 0$ $\qquad$ (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(-x).(-y) = xy$.

Demonstração

(a) Com efeito, $x.0 = x\,(0+0) = x.0 + x.0$ e $x.0 = x.0 + 0$. Daí, vem:

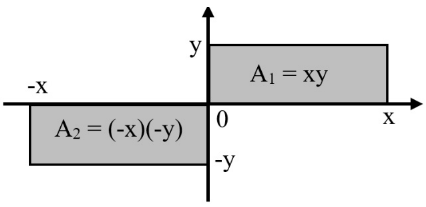
$$x.0 + x.0 = x.0 + 0 \Longrightarrow x.0 = 0.$$

■

(b) $(-x).(-y) = xy$.

Não faremos uma prova; e sim, apenas uma ilustração gráfica, a saber: As áreas limitadas pelos dois retângulos $A_1 = x.y$ e $A_2 = (-x).(-y)$ são iguais, visto que: A_2
foi obtido por reflexão em torno da origem do retângulo A_1 e, portanto,

$$x.y = (-x).(-y)$$



■

Exemplo 1.3

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x.y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Demonstração

De fato, $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x^{-1}.x = x.x^{-1} = 1$, por conseguinte,
obtemos:

$$x.y = 0 \Longrightarrow \left(x^{-1}.x\right).y = \left(x^{-1}.x\right).0 \Longrightarrow y = 0. \tag{1}$$

Analogamente, $\forall y \in \mathbb{R} : y \neq 0, \exists y^{-1} \in \mathbb{R} : y^{-1}.y = 1$, temos:

$$y.x = 0 \Longrightarrow \left(y^{-1}.y\right).x = \left(y^{-1}.y\right).0 \Longrightarrow x = 0. \tag{2}$$

Decorre de (1) e (2) que: $x = 0$ ou $y = 0$. ■

Exemplo 1.4

As equações

$$a + x = b \quad \text{e} \quad a.x = b,$$

esta última com $a \neq 0$ tem solução única.

Demonstração

$$a + x = b$$

Existência

De fato, $w = b - a$ é uma solução. Visto que:

$$w + a = (b - a) + a = b + [(-a) + a] = b.$$

■

Unicidade

Agora, suponha que $\bar{w}$ também é solução, então, temos:

$$\begin{cases} a + w = b \\ a + \bar{w} = b \end{cases} \Longrightarrow a + w = a + \bar{w}.$$

Logo, $w = \bar{w}$. (única) ■

Demonstração

$$ax = b.$$

Existência

De fato, $x_0 = a^{-1}b$ é uma solução. Visto que:

$$ax_0 = a.\left(a^{-1}b\right) = \left(a.a^{-1}\right)b = b.$$

■

Unicidade

Agora, suponha que $\bar{x}_0$ seja outra solução, então, temos:

$$\begin{cases} ax_0 = b \\ a\bar{x}_0 = b \end{cases} \Longrightarrow ax_0 = a\bar{x}_0 \Longrightarrow x_0 = \bar{x}_0.$$

Logo, $x_0 = \bar{x}_0$. (única) ■

1.3.2 Axioma de Ordem

Axioma 1.2

Existe em $\mathbb{R}$ um subconjunto $\mathbb{R}^+$, com as seguintes propriedades:

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, *tem-se:* $(x + y) \in \mathbb{R}^+$ *e* $(x.y) \in \mathbb{R}^+$,

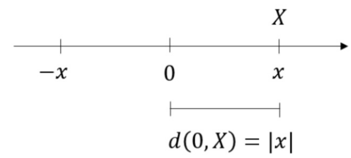
(ii) *Dado* $x \in \mathbb{R}$. *Então, tem-se:* $x \in \mathbb{R}^+$ *ou* $x = 0$ *ou* $-x \in \mathbb{R}^+$ *(**tricotomia**)*

onde: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ *e* $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{R}^+\}$ *são respectivamente, os conjuntos dos números reais positivos e negativos.* ♡

Nota

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-.$$

$x \in \mathbb{R}^+ \iff x > 0 \iff (-x) < 0 \iff (-x) \in \mathbb{R}^-.$



Ordem: $x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}^+ \iff y - x > 0$

Propriedade

(i) ***Transitiva:***
$x < y$ *e* $y < z \implies x < z.$

Demonstração

De fato,

$$\left\{\begin{array}{c} x < y \\ \text{e} \\ y < z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (y - x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ (z - y) \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right. \implies (z - x) \in \mathbb{R}^+ \iff z > x.$$

■

(ii) ***Monotonicidade:***

(a) $x < y$ *e para todo* $z \in \mathbb{R} \implies x + z < y + z.$

Demonstração

Basta notar:

$$\left\{\begin{array}{c} x < y \\ \text{e} \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (y - x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ z \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Logo,

$$[(y + z) - (x + z)] \in \mathbb{R}^+ \iff y + z > x + z.$$

■

(b) $x < y$ *e* $z > 0 \implies x.z < y.z.$

Demonstração

Com efeito,

$$\left\{\begin{array}{c} x < y \\ \text{e} \\ z > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (y - x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ z \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right. \implies (yz - xz) \in \mathbb{R}^+ \iff yz > xz.$$

$\blacksquare$

(c) $x < y$ *e* $z < 0 \Longrightarrow x.z > y.z.$

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{cases} x < y \\ \text{e} \\ z < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (y-x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ (-z) \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Longrightarrow (xz - yz) \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow xz > yz.$$

$\blacksquare$

Capítulo Exercício

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, tem-se: $x^2 > 0$

Demonstração

Basta considerar dois casos

1^o Caso: $x > 0$

$$x \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x.x = x^2 \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x^2 > 0.$$

Analogamente, temos:

2^o Caso: $x < 0$

$$(-x) \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow (-x)\,.\,(-x) = x^2 \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow x^2 > 0.$$

De sorte que:

$$x^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

$\blacksquare$

Nota

(a). $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ *é um corpo não ordenado. De fato,* $i^2 = -1$;

(b). $\langle \mathbb{Z}_2, +, \cdot \rangle$ *é um corpo não ordenado, visto que:* $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, prove que:

A) $\forall x, y > 0 : x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$.

Demonstração

De fato,

$$\begin{cases} x < y \\ \text{e} \\ x, y > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (y-x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ (y+x) \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Longrightarrow \left(y^2 - x^2\right) \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow y^2 > x^2.$$

Destacando : $(y-x)\,.\,(y+x) = y^2 - x^2$ (será provado posterioremnte) $\blacksquare$

B) $x < y \Longrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Demonstração

Basta observar:

$$\left\{\begin{array}{c} x < y \\ \text{e} \\ x, y > 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (y-x) \in \mathbb{R}^{+} \\ \text{e} \\ \frac{1}{xy} \in \mathbb{R}^{+} \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{y-x}{xy}\right) \in \mathbb{R}^{+}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{y-x}{xy}\right) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

■

3. Determine $x \in \mathbb{R}$, tal que: $5x+3 < 2x+8$.

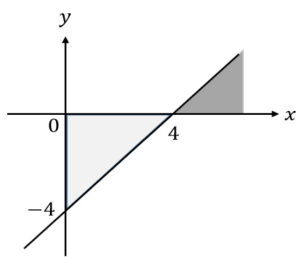
Solução

$$\begin{aligned} 5x+3 &< 2x+8 \Longleftrightarrow 5x+(3-3) < 2x+(8-3) \\ &\Longleftrightarrow 5x < 2x+5 \Longleftrightarrow 5x-2x < 5 \Longleftrightarrow 3x < 5 \\ &\Longleftrightarrow x < \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

■

4. *Estude o sinal da expressão:* $y = x - 4$

(i) $x-4 > 0 \Longleftrightarrow x > 4$
(ii) $x-4 = 0 \Longleftrightarrow x = 4$
(iii) $x-4 < 0 \Longleftrightarrow x < 4$.
esboçando o gráfico, $y = x - 4$, *temos:*



■

5. Seja a um número inteiro. Prove que:
(i) a é ímpar$\Longrightarrow a^2$ também é ímpar.
(ii) a é par$\Longrightarrow a^2$ continua par.
Demonstração
(i) Seja $a = 2k+1$ um número inteiro ímpar, então, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 \\ &= 2\left(2k^2+2k\right)+1 = 2n+1, \end{aligned}$$

com $n = 2k^2+2k \in \mathbb{Z}$.
Logo, "a^2"é ímpar. ■

(ii) Analogamente, se $a = 2k$ é par, tem-se:

$$a^2 = (2k)^2 = 2\left(2k^2\right) = 2n_1, \text{onde: } n_1 = 2k^2,$$

e, portanto, "a^2"continua um número inteiro par. ■

1.4 Supremo e Ínfimo

1.4.1 Supremo

Seja $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $\mathbb{X}$ é "**limitado superiormente**", quando:

$$\text{Existe } M \in \mathbb{R}, \text{ tal que: } x \leq M, \forall x \in \mathbb{X}.$$

Uma tal constante M é denominada "**cota superior de** $\mathbb{X}$"e a menor delas é o "**supremo de** $\mathbb{X}$", representado por: $\sup \mathbb{X}$.

Seja $\alpha = \sup \mathbb{X}$

(i) $x \leq \alpha$, $\forall x \in \mathbb{X}$ (α é uma cota superior de $\mathbb{X}$)

(ii) Se $\beta < \alpha$, então, existe $x \in \mathbb{X}$, tal que: $\beta < x$.

Nota

(A) *A condição* (ii) *é equivalente a:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in \mathbb{X} :\ x > \sup \mathbb{X} - \varepsilon \Longleftrightarrow x > \alpha - \varepsilon.$$

(B) *O máximo de um conjunto* $\mathbb{X}$ *é por definição, um elemento* $x_M \in \mathbb{X}$ *, tal que:*

$$x \leq x_M,\ \forall x \in \mathbb{X}.$$

Exemplo 1.5 Para efeito de ilustação, vejamos um exemplo de supremo, considere:

(i) $x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{X}$,

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, o número $1 - \varepsilon < \frac{2-\varepsilon}{2} \in \mathbb{X} \Longrightarrow \sup \mathbb{X} = 1$.

1.4.2 Ínfimo

Seja $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $\mathbb{X}$ é "**limitado inferiormente**", quando:

$$\text{Existe } m \in \mathbb{R}, \text{ tal que: } m \leq x, \forall x \in \mathbb{X}.$$

Uma tal constante m é denominada "**cota inferior de** $\mathbb{X}$"e a maior delas é o "**ínfimo de** $\mathbb{X}$", denotado por: $\inf \mathbb{X}$

Se $\beta = \inf \mathbb{X}$, então, temos:

(i) $\beta \leq x$, $\forall x \in \mathbb{X}$ (β é uma cota inferior de $\mathbb{X}$)

(ii) Se $\gamma < \beta$, então, existe $x \in \mathbb{X}$, tal que: $\gamma < x$.

Nota

A condição (ii) *é equivalente a dizer:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in \mathbb{X} :\ x < \inf \mathbb{X} + \varepsilon \Longleftrightarrow x < \beta + \varepsilon.$$

1.4.3 Conjunto limitado

$\mathbb{X}$ é limitado quando for inferiormente e superiormente, isto é, existem m, $M \in \mathbb{R}$, tal que:

$$m \leq x \leq M, \ \forall x \in \mathbb{X}.$$

Exemplo 1.6

$\mathbb{X}$ é limitado $\Longleftrightarrow \exists\, C > 0$, $C \in \mathbb{R}$: $|x| \leq C, \forall x \in \mathbb{X}$.

[1]**Axioma da completeza (Postulado de Richard Dedekind)**

Todo subconjunto $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente tem supremo.

Teorema 1.1

(i) $\mathbb{N}$ *não é limitado superiormente;*
(ii) $\inf\left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = 0$;
(iii) *Dados* $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ *existe* $n \in \mathbb{N}$, *tal que:* $nx > y$.

♡

(A condição (iii) caracteriza $\mathbb{R}$ como um **corpo arquimediano**[2]).

Demonstração

(i) Seja $\alpha = \sup \mathbb{N}$, $\alpha \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\alpha \geq n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De sorte que: $\alpha - 1 \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Contradição! Pois, $\alpha - 1$ é uma cota superior para $\mathbb{N}$ menor do que α.
(ii) É claro que: $0 \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $m = 0$ é uma cota inferior para $\mathbb{X} = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Além disso, suponha que $\frac{1}{n} \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $\frac{1}{a} \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde, vem: $\frac{1}{a}$ é cota superior para $\mathbb{N}$, por conseguinte, temos: $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Logo, $\mathbb{N}$ tem supremo em $\mathbb{R}$. Absurdo! e, portanto, $0 \leq \frac{1}{n} < a$. Isto é, $\inf \mathbb{X} = 0$.
(iii) Como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que: $n > \frac{y}{x} \Longrightarrow nx > y$. ■

1.4.4 Comentários sobre o conjunto $\mathbb{Q}$

1. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
   $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\}$, onde: $\{-\mathbb{N}\} = \{-n,\ n \in \mathbb{N}\}$
   $\varphi : \mathbb{N} \to -\mathbb{N}$

   $n \longmapsto \varphi(n) = -n$, $\mathbb{Z}$ é enumerável;
2. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\right\}$ é enumerável e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;
3. $\varphi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$

   $(m, n) \longmapsto \varphi(m, n) = \frac{m}{n}$ é sobrejetora;
   2cm

[1]Este postulado pode ser apresentado como teorema, com o seguinte enunciado:
Se $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente. Então, $\mathbb{X}$ tem supremo em $\mathbb{R}$.

[2]Na realidade, o item (iii) é devido ao matemático grego Eudoxo, que viveu alguns séculos antes de Arquimedes.

4. $\mathbb{Q}$ é "denso"em $\mathbb{R}$, isto é, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que; $x < r < y$.
Demonstração
Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que:
$$n > \frac{1}{y-x} \Longrightarrow ny - nx > 1. \tag{1}$$
Seja $m \in \mathbb{Z}$, tal que:
$$m - 1 < nx < m. \tag{2}$$
Agora, decorre de (2) que $nx < m \Longrightarrow x < \frac{m}{n}$. Além disso, de (1) e (2), temos: $m \leq nx + 1 < ny \Longrightarrow \frac{m}{n} < y$ e, portanto, $x < \frac{m}{n} < y$. ■

5 $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ é "denso"em $\mathbb{R}$, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe z irracional, tal que: $x < z < y$.
Demonstração
Basta usar o resultado do item anterior, destacando os números reais $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$, obtendo um número racional $r \neq 0$, tal que:
$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$
Então, $z := r\sqrt{2}$ é irracional satisfazendo $x < z < y$. ■

Reflexões e Comentários:
Uma forma alternativa de provar a densidade $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ é *denso* em $\mathbb{R}$.
Sejam $r, s \in \mathbb{Q}$, tais que: $r < s$, mostre que:
$$\alpha = r + \frac{s-r}{\sqrt{2}}.$$
é irracional e $r < \alpha < s$. Conclua daí que $\mathbb{I} = \mathbb{R}|\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.
Demonstração
Suponha α racional., então, temos:
$$\alpha - r = \frac{s-r}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{s-r}{\alpha - r} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}.$$
Absurdo! Por outro lado,
$$\sqrt{2} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{s-r}{\sqrt{2}} < s - r \Rightarrow r < \alpha = r + \frac{s-r}{\sqrt{2}} < s \Leftrightarrow r < \alpha < s$$
■

1.5 Justificativa lógica da demonstração por redução a um absurdo

Como o valor lógico de uma sentença do tipo $\tilde{}Q \wedge Q$ é F (falso), é fácil ver que:
$$H \Rightarrow T \Leftrightarrow (H \wedge \tilde{}T) \Rightarrow (\tilde{}Q \wedge Q)$$
para uma sentença Q qualquer.

Antes de começarmos a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional, vamos discorrer um pouco sobre a importância histórica deste fato. É provável e indícios históricos de que $\sqrt{2}$ foi o primeiro número irracional descoberto. Mas acredita-se também que possa ter sido $\sqrt{5}$ ([Boyer, 1974] p. 54). Já na Antiga Grécia, a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$ gerou a primeira grande crise da Matemática. Diante do que entendemos hoje por números, os pitagóricos, devotos de um misticismo numérico, acreditavam que todos eles eram racionais. Na Grécia daquele tempo, os números eram considerados como comprimentos de segmentos de reta; eles entendiam que dois segmentos quaisquer eram sempre mensuráveis, isto é, existia sempre um terceiro segmento, do qual esses dois eram múltiplos inteiros. Mas parece que a Matemática, pregou-lhes uma peça: $\sqrt{2}$ é um número que aparece naturalmente ao se usar o Teorema de Pitágoras, por ser a diagonal de um quadrado de lado medindo 1, e não é número racional! Diz a lenda que foi um pitagórico quem descobriu a irracionalidade de $\sqrt{2}$ (ou seja, que a diagonal e o lado de um quadrado nunca são mensuráveis) e que seus companheiros o afogaram para não divulgar esse fato que punha por terra toda crença pitagórica. Outra história, menos trágica, reza que foi o pitagórico Hipasus de Metaponto quem descobriu a irracionalidade de $\sqrt{2}$ e que os pitagóricos o teriam expulso da seita. Mas qualquer que tenha sido o fato real que ocorreu, os pitagóricos não conseguiram manter essa descoberta em segredo.

Teorema 1.2

$\sqrt{2}$ é um número irracional

Demonstração

Suponha por contradição que, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, existem existem $p, q \in \mathbb{Z}$, tais que: $q \neq 0$ e $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que p e q sejam primos entre si, ou seja, que não possuam divisores comuns além da unidade. Dá última igualdade, temos: $\frac{p^2}{q^2} = 2$ e, daí, vem: $p^2 = 2q^2$. Como 2 divide o lado direito da última igualdade, ele divide p^2. garantindo que este último número é divisível por 2. Por conseguinte, vem: p é divisível por 2 (verifique este fato!). O absurdo tem seu valor! (As demonstrações por redução a um absurdo) portanto, da forma $p = 2k$, para algum número k inteiro. Substituindo p por $2k$ e fazendo a devida simplificação, encontramos $2k^2 = q^2$. Aplicando o raciocínio anterior para essa nova igualdade, se conclui que q é divisível por 2. Mas isso contradiz o fato de p e q serem primos entre si.Portanto, $\sqrt{2}$ n ão pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com p e $q \neq 0$. Assim, nossa suposição inicial de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ é falsa, ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.5.1 Outra demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$: usando o teorema fundamental da aritmética

A seguir, daremos um roteiro de outra demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, bem mais curta:

i) Do Teorema fundamental da Aritmética, deduza que, se n for um número inteiro, então os fatores de 2 que aparecem na decomposiçao de n^2 é em número par de vezes. (Em verdade, o resultado e válido trocando-se 2 por um número primo qualquer!)

ii) Do item anterior, prove que, para p e q inteiros, não pode ocorrer uma igualdade do tipo $2p^2 = q^2$

iii) Agora dê uma nova demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.
Nesta demonstração, não é preciso supor que "p e q sejam primos entre si".

1.5.2 Pausa para uma pequena análise do Teorema 1.2

Analisando atentamente, perceba que no teorema anterior apenas provamos que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Nossa demonstração não garante que $\sqrt{2}$ existe, ou seja, que exista um número x tal que $x^2 = 2$. Provamos apenas que, se $x^2 = 2$, então x não é um número racional. Nada foi comentado sobre a existência de um número x que satisfizesse a equaçã $x^2 = 2$. (A prova passa pelo o assim chamado corte de Dedekind : conjuntos limitados superiormente e inferiormente que não tem nem o supremo e nem o ínfimo vivendo nos racionais).

1.6 Princípio da Boa Ordenação

Todo subconjunto não-vazio $\mathbb{S}$ de $\mathbb{Z}$ de elementos não-negativos possui um primeiro elemento. Em símbolo, temos:

$$\phi \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{Z} \text{ e } \exists\, x_0 \in \mathbb{S} : \; x_0 \leq x, \; \forall x \in \mathbb{S}.$$

x_0 é o menor elemento de $\mathbb{S}$ ou o elemento mínimo de $\mathbb{S}$.

Exemplo 1.7

Façamos uma aplicação do princípio da boa ordenação. Antes, porém, é natural perguntar: Será que existe inteiro m, de modo que: $0 < m < 1$? A resposta é falsa, o que será visto no teorema a seguir.

Teorema 1.3

Não existe inteiro m, tal que: $0 < m < 1$. ♡

Demonstração

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que existe $m \in \mathbb{Z}$, de modo que: $0 < m < 1$.
Assim,

$$\mathbb{S} = \{m \in \mathbb{Z} : 0 < m < 1\} \neq \phi,$$

e pelo princípio da boa ordenação, existe $x_0 \in \mathbb{S} : \; x_0 \leq x, \forall x \in \mathbb{S}$, ou seja,

$$x_0 = mín\mathbb{S}.$$

Agora, como $x_0 \in \mathbb{S}$, temos: $0 < x_0 < 1$. Conseqüentemente, vem:

$$0 < x_0^2 < x_0 < 1.$$

Isso, contradiz o fato de x_0 ser mínimo de $\mathbb{S}$. ■

Corolário 1.1

O conjunto $\mathbb{S} = \{m \in \mathbb{Z} : 7 < m < 8\}$ é vazio. ♡

Demonstração

(Fica para o leitor exercer o seu papel intelectual caminhando para seu próprio estilo de redação matemática.)
Sugestão: Faça uma translação e proceda como no prescrito no teorema

1.6.1 Método de Indução Finita

Teorema 1.4

Teorema (Indução Finita 1ª forma):
Suponha que seja dada $a(n)$ dependendo de n, tal que:
(i) *$a(0)$ é verdadeira;*
(ii) *Para cada $k \in \mathbb{N}$, $a(k+1)$ é verdadeira desde que $a(k)$ seja verdadeira. Então, $a(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.*

♡

Demonstração

Seja $\mathbb{S} = \{m;\ m \in \mathbb{N}\}$, tais que: $a(m)$ é falso, e suponha que $\mathbb{S} \neq \phi$. Então, pelo princípio da boa ordenação, existe um elemento mínimo $x_0 \in \mathbb{S}$, tal que: $x_0 \leq m$, $\forall\ m \in \mathbb{S}$. Agora, como $a(0)$ é verdadeiro por hipótese, segue-se que $0 \notin \mathbb{S}$ e, portanto, $1 \leq x_0 \leq m$. Mais ainda, como $(x_0 - 1) \notin \mathbb{S}$. (Por quê ?) segue-se que $a(x_0 - 1)$ é verdadeira. Assim, pela hipótese (ii), temos:

$$a(x_0) = a\left((x_0 - 1) + 1\right)$$

é verdadeira, o que é uma contradição! (Visto que: $x_0 \in \mathbb{S} \Rightarrow a\left(x_0\right)$ é falso).

Logo, $\mathbb{S} = \phi$ o que prova a proposição. ■

Exemplo 1.8

Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica. Então, mostre que:

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n,$$

é simétrica.

Demonstração

Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica, então, por definição, tem-se:
$\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$.
Queremos provar que:

$$\mathbb{S}^T = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}.$$

Inicialmente, provemos por indução finita sobre n que: $\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \left(\mathbb{A}^T\right)^n$ e $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Daí, segue-se que: $\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \mathbb{A}^n$, vamos mostrar!
De fato,
(i) Para $n = 2$, tem-se:

$$\left(\mathbb{A}^2\right)^T = \left(\mathbb{A}\mathbb{A}\right)^T = \mathbb{A}^T\mathbb{A}^T = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}^2.$$

(ii) Suponha válido para n, isto é, $\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \mathbb{A}^n$, então, queremos mostrar para $n+1$

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Vejamos

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = \left(\mathbb{A}^n\mathbb{A}\right)^T = \mathbb{A}^T.\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \mathbb{A}\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^T &= \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j\right)^T = (I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n)^T \\
&= \left(I^T + \mathbb{A}^T + \ldots + (\mathbb{A}^n)^T\right) \\
&= I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}.
\end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\mathbb{S}$ é uma matriz simétrica.

■

Exemplo 1.9 2. Prove usando indução finita sobre n que:

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}_n^T.\mathbb{A}_{(n-1)}^T \ldots \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.$$

Demonstração

E fácil ver que:

(i) Para $n = 2$, temos:

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2)^T = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T$$

(Imeditato)

De fato,

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2)_{ji}^T = (\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{A}_{1i\alpha}\mathbb{A}_{2\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{A}_{2j\alpha}^T\mathbb{A}_{1\alpha i}^T = \left(\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T\right)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2)^T = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T$$

(ii) Suponha válido para n, ou seja,

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}_n^T.\mathbb{A}_{(n-1)}^T \ldots \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.$$

(Hipótese de indução)

Então, falta mostrar para $n + 1$.

Basta notar que:

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\overbrace{(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n)^T}^{\text{hipótese de indução}} = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\overbrace{\mathbb{A}_n^T \ldots \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T}^{\text{hipótese de indução}}.$$

Logo,

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\mathbb{A}_n^T \ldots \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.$$

■

A próxima proposição é um resultado sobre Indução Finita, contemplando a situação de desigualdade.

Teorema 1.5

Teorema (Indução Finita 2^a forma):
Suponhamos que seja dada $a(n)$ dependendo de $n \in \mathbb{N}$, tal que:
(i) $a(0)$ é verdadeira;
(ii) Para cada inteiro $m > 0$, $a(m)$ é verdadeira desde que $a(k)$ o seja para $0 \leq k \leq m$. Então, $a(n)$ é verdadeira
$\forall n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

♡

Demonstração

Seja $\mathbb{S} = \{m;\ m \in \mathbb{N}\}$, tais que: $a(m)$ é falso, e suponha que $\mathbb{S} \neq \phi$. Como o descrito anteriormente, existe $x_0 \in \mathbb{S}$ (Pois, $\mathbb{S} \neq \phi$), tal que:

$$x_0 \leq x, \forall\, x \in \mathbb{S},$$

e pela hipótese (i) $x_0 > 0$. Pela hipótese (ii), $a(k)$ é verdadeira $\forall\, k$, $0 \leq k < x_0 \leq x$. Donde, obtemos: $a(m)$ é verdadeira, para todo m, o que produz uma contradição! Portanto, $\mathbb{S} = \Phi$, o que queríamos demonstrar. ■

Nota

Se fossem tomadas as proposições 1 e 2 à luz da axiomática de Peano, partiríamos do inteiro 1 *em vez de zero. Nesse caso, a hipótese* 1 *seria: $a(1)$ verdadeira. Assim, as demonstrações funcionam com as devidas adaptações.*

Exemplo 1.10 (Desigualdade de Bernoulli)

Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Demonstração

(i) Com efeito, para $n = 2$, temos:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x, \text{ visto que } x^2 \geq 0.$$

(ii) Suponha válido para $n : (1 + x)^n \geq 1 + nx$.
Então, falta mostrar parta $n + 1$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\, x.$$

De fato,

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \,.\, (1 + x) \geq (1 + nx) \,.\, (1 + x)\,. \tag{1}$$

Agora,

$$\begin{aligned}(1 + nx) \,.\, (1 + x) &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n + 1)\, x + nx^2\end{aligned}$$

Como $nx^2 \geq 0$ segue-se que:

$$\begin{aligned}(1 + nx) \,.\, (1 + x) &= 1 + (n + 1)\, x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)\, x.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Daí, combinando (1) e (2) segue-se que:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\, x.$$

■

Exemplo 1.11 (**O.B.M.-Olimpíada Brasileira de Matemática**)

Prove que, para todo n natural, vale a desigualdade:

$$P_n : \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Demonstração

Afirmação Para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, prove que:

$$\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Sugestão:

Basta fazer algumas manipulações básicas para obter:

$$\begin{aligned}
(2n+1)\sqrt{3n+4} &\leq (2n+2)\sqrt{3n+1} \\
&\Longleftrightarrow (2n+1)^2(3n+4) \leq (2n+2)^2(3n+1) \\
&\Longleftrightarrow \left(4n^2+4n+1\right)(3n+4) \leq \left(4n^2+8n+4\right)(3n+1) \\
&\Longleftrightarrow \left(12n^3+28n^2+18n+4\right) \leq 12n^3+28n^2+20n+2 \\
&\Longleftrightarrow 18n \leq 20n,\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

Agora, voltando ao problema dado usando indução finita sobre n, temos:

(i) Para $n=1$, tem-se: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3.1+1}}$.

(ii) Suponha válido para n. Isto é,

$$P_n : \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

(hipótese da indução)

Então, tem-se que:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

À luz da **afirmação**,

$$\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}},$$

segue-se que:

$$P_{(n+1)} : \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{(2n+1)}{(2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Portanto, P_n é válido via indução finita sobre n.

$\blacksquare$

Capítulo 2 - Corte de Dedekind

Pensamento de Gauss.
“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta. ”

Carl Friedrich Gauss Nasceu em Brunsvique (em alemão: Braunschweig) (Alemanha) $(1777 - 1855)$

2.1 Ilustração de um Corte de Dedekind

Exemplo 2.1

Mostre que

$$\mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{Q} | \ x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\right\}$$

não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

Majorações:

Considere $x \geq 0$ e $x^2 < 2$, não haverá problemas, uma vez que: só queremos provar que $\mathbb{A}$ não tem supremo em $\mathbb{Q}$. Escolha um racional $r < 1$, daí, vem: $r^2 < r$. Além disso, observe que:
$(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + 2xr + r = x^2 + (2x + 1)\, r < 2 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow 0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1} \Longrightarrow (2x + 1)\, r < 2 - x^2$.
Queremos mostrar que: $\forall x \in \mathbb{A}$, com $r < 1$ e $0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1} \Longrightarrow (x + r) \in \mathbb{A}$.

Demonstração

De fato,

$$(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + (2x + 1)\, r < x^2 + 2 - x^2 = 2.$$

Ou ainda,

$$(x+r)^2 < 2.$$

Portanto,

$$(x+r) \in \mathbb{A}.$$

■

Exemplo 2.2

Procedendo de forma análoga, se mostra que

$$\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{Q} |\ y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}$$

não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Majorações:

Consideremos $y > 0$ e $y^2 > 2$ não haverá problemas, uma vez
que: só queremos provar que $\mathbb{B}$ não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$. Escolha
um racional $0 < r < \frac{y^2-2}{2y}$ (**como foi realizada esta escolha que parece mágica**),
Vejamos $(y-r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2$.
Daí, vem:

$$y^2 - 2 > 2ry \iff 0 < r < \frac{y^2-2}{2y}.$$

Além disso, observe que:
$(y-r)^2 = y^2 - 2xr + r^2 > x^2 - 2xr > 2$

Queremos mostrar que: $\forall y \in \mathbb{B}$, com $0 < r < \frac{y^2-2}{2y} \implies (y-r) \in \mathbb{B}$.

Demonstração

Consideremos $y > 0$ e $y^2 > 2$ não haverá problemas, uma vez
que: só queremos provar que $\mathbb{B}$ não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$. Escolha
um racional

$$0 < r < \frac{y^2-2}{2y} \implies y^2 - 2 > 2ry \implies y^2 - 2ry > 2$$

Além disso,

$$r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y} < \frac{y}{2} < y \implies y - r > 0.$$

Dado $y \in \mathbb{B}$ podemos obter $y - r \in \mathbb{B}$, $y - r < y$.
Agora,

$$(y-r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2.$$

Logo,

$$(y-r) \in \mathbb{B}.$$

■

2.2 Fatoração

Dizemos que uma expressão $\mathbb{E}$ está na forma fatorada, se existem $E_1, E_2, \ldots, E_n$; com $m.d.c.\,(E_1, E_2, \ldots, E_n) = 1$, tais que:

$$\mathbb{E} = E_1.E_2 \ldots E_n.$$

Exemplo 2.3

Fatore: $\mathbb{E} = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Solução

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2\,(x-2) - (x-2) \\ &= (x-2)\left(x^2-1\right) = (x-2)\,(x-1)\,(x+1)\,. \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.4

Fatore: $\mathbb{E} = A^2 - B^2$.

Solução

Observe que:

$$\mathbb{E} = A^2 - B^2 = (A-B)\,(A+B)\,.$$

(Será provado em seguida) ■

Exemplo 2.5

Fatore: $\mathbb{E} = x^3 + y^3$.

Solução

Com efeito,

$$\mathbb{E} = x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right).$$

Será provado em seguida, com os axiomas do conjunto dos números reais. ■

Exemplo 2.6

(i) Fatore: $\mathbb{E} = (x+h)^2 - (x-h)^2\,.$

Solução

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= A^2 - B^2 = (A-B)\,(A+B) \\ &= (x+h)^2 - (x-h)^2 \\ &= [(x+h)-(x-h)]\,.\,[(x+h)+(x-h)] \\ &= 2h.2x = 4xh. \end{aligned}$$

■

(ii) Seja $f(x) = x^2$, supondo $h \neq 0$, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

Solução

Com efeito, $f(\square) = (\square)^2$, $f(x+h) = (x+h)^2$ *e* $f(x-h) = (x-h)^2$, *então, temos:*

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{h} = \frac{4xh}{h} = 4x.$$

■

2.3 Produtos Notáveis

Exemplo 2.7

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

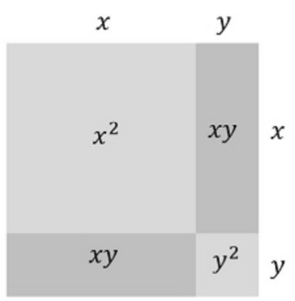
Demonstração

Facilmente, temos:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$



■

Exemplo 2.8

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

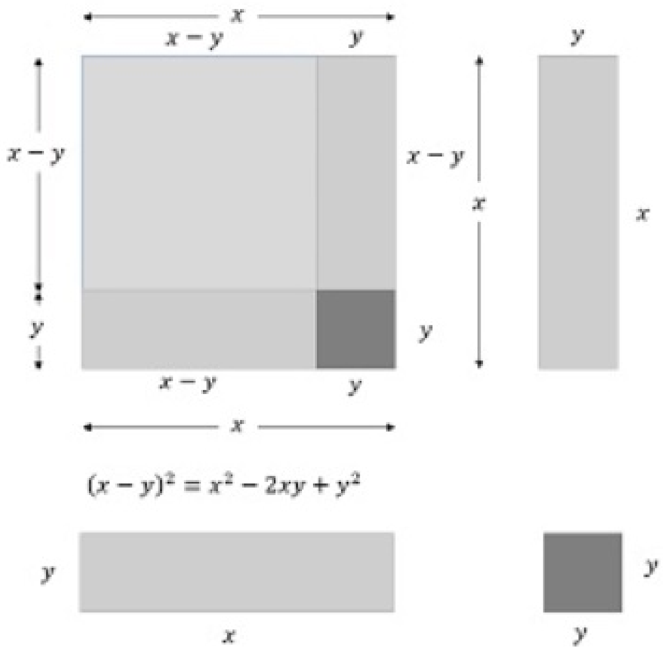
Demonstração

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= (x-y)(x-y) = x(x-y) - y(x-y) \\ &= x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$



Exemplo 2.9

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

Demonstração

De fato,

$$\begin{aligned}(x-y)(x+y) &= x(x+y) - y(x+y) = x^2 + xy - yx - y^2. \\ &= x^2 + xy - yx + y^2 = x^2 - y^2.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2.$$

Nota *Se $x \neq y$, então, temos:*

$$\frac{x^2 - y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x + y.$$

Aplicação:

Calcule a expressão e simplifique, com $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

1º modo: $(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x + h.\end{aligned}$$

2º modo: $(x+h)^2 - x^2 = [(x+h)-x]\,[(x+h)+x]$. Daí, vem:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{h\,[(x+h)+x]}{h} = 2x+h.$$

■

Exemplo 2.10

$P_4)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = x^3 - y^3$.

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned}(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) &= x\left(x^2+xy+y^2\right) - y\left(x^2+xy+y^2\right)\\ &= x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3\\ &= x^3-y^3.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = x^3-y^3.$$

Nota

Se $x \neq y$, então, temos:

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = \frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{x-y} = x^2+xy+y^2.$$

■

Exemplo 2.11

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) = x^3+y^3$.

Demonstração

Com efeito,

$$\begin{aligned}(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) &= x\left(x^2-xy+y^2\right) + y\left(x^2-xy+y^2\right)\\ &= x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3\end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) = x^3+y^3.$$

Nota

Se $x \neq -y$, então, temos:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x+y} = x^2-xy+y^2.$$

■

Aplicação:

Calcule e simplifique, com $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

1º modo: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2.\end{aligned}$$

■

2º modo: $A^3 - B^3 = (A - B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$. Assim,
$(x+h)^3 - x^3 = [(x+h) - x]\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]$. Por conseguinte, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \frac{h\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]}{h} \\ &= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2.\end{aligned}$$

■

Para facilitar a compreensão, vamos mostrar que:

$$(x+h)^2 + (x+h)x + x^2 = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}(x+h)^2 + (x+h)x + x^2 &= x^2 + 2xh + h^2 + x^2 + xh + x^2 \\ &= 3x^3 + 3xh + h^2.\end{aligned}$$

■

Capítulo Exercício

1. Sejam x, y números reais positivos. Prove que:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Demonstração

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tais que: $x, y > 0$, temos:

$$x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y.$$

Em quaisquer dos casos, tem-se:

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &\geq 0 \iff x^2 + y^2 \geq 2xy \iff x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\ &\iff (x+y)^2 \geq 4xy \iff xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \iff \sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}}\end{aligned}$$

$$\iff \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \tag{1}$$

Por outro lado, temos:

$$\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} \leq \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \Longleftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{2} \leq \sqrt{xy} \tag{2}$$

Agora, de (1) e 2), segue-se que:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

■

2. Mostre que

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

está compreendido entre o menor e o maior dos números $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, desde que: $b_1, b_2, \ldots b_n$ sejam todos positivos.

Demonstração

Sejam $b_j > 0$ com $j = 1, 2, \ldots, n$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, então temos:

$$\begin{cases} m \leq \frac{a_1}{b_1} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \mathbb{M} \\ \vdots \\ m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \mathbb{M} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mb_1 \leq a_1 \leq \mathbb{M}b_1 \\ mb_2 \leq a_2 \leq \mathbb{M}b_2 \\ \vdots \\ mb_n \leq a_n \leq \mathbb{M}b_n. \end{cases}$$

Dito de outro modo, temos:

$$m(b_1+b_2+\ldots+b_n) \leq a_1+a_2+\ldots+a_n \leq \mathbb{M}(b_1+b_2+\ldots+b_n).$$

Logo,

$$m \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leq \mathbb{M} \Longrightarrow m \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \leq \mathbb{M}.$$

■

(Por simplicidade faça o caso $n = 2$)

3. Sejam a, b e c pertencentes a $\mathbb{R}$. Prove que:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac.$$

Demonstração

Com efeito, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left\{\begin{array}{l}(a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}a^2+b^2 \geq 2ab \\ b^2+c^2 \geq 2bc \\ c^2+a^2 \geq 2ca.\end{array}\right. \tag{I}$$

Agora, somando membro a membro as desigualdades de (I), obtemos:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(ab+bc+ac\right).$$

De sorte que:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac.$$

■

Aplicação:

Calcule e simplifique:

(i) $\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$ (ii) $\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$ (iii) $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ (iv) $\frac{4x^2-9}{2x+3}$ (v) $\frac{x^3+1}{x-1}$

Fatos que Ajudam:

$$\left\{\begin{array}{cc}x^2-a^2= & (x-a)(x+a) \\ x^3-a^3= & (x-a)\left(x^2+xa+a^2\right) \\ x^3+a^3= & (x+a)\left(x^2-xa+a^2\right) \\ (2x)^2-3^2= & (2x-3)(2x+3) \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{a}= & \frac{a-x}{xa}=\frac{-(x-a)}{xa}.\end{array}\right. .$$

Daí, vem:

(i)

$$\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}=\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+xa+a^2)}=\frac{x+a}{x^2+xa+a^2},\ x \neq a$$

(ii)

$$\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\frac{-(x-1)}{x}.\frac{1}{(x-1)}=\frac{-1}{x},\ x \neq 0 \text{ e } x \neq 1$$

(iii)

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}=\frac{\frac{-(x-a)}{xa}}{x-a}=\frac{-(x-a)}{xa}.\frac{1}{(x-a)}=\frac{-1}{xa},\ x \neq a \neq 0.$$

(iv)

$$\frac{4x^2-9}{2x+3}=\frac{(2x-3)(2x+3)}{2x+3}=2x-3,\ x \neq \frac{-3}{2}$$

(v)

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1^2\right)}{x-1}=x^2+x+1,\ x \neq 1.$$

■

2.4 Proposição 1

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e n um número inteiro positivo, tal que: $n \geq 2$. Então, tem-se:

$$x^n - y^n = (x-y) \,.\, \left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \ldots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$$

Demonstração

(Daniel Cordeiro de Morais, Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3^a Ed.,SBM, 2016 ref.[1] sobre indução finita sobre n.

Alguns Casos Particulares da Proprosição 1:

Não faremos uma demostração, apenas exemplos, de casos particulares:

$$\begin{aligned}
&x^2 - y^2 = (x-y) \,.\, (x+y)\\
&x^3 - y^3 = (x-y) \,.\, \left(x^2 + xy + y^2\right)\\
&x^4 - y^4 = (x-y) \,.\, \left(x^3y^0 + x^2y^1 + xy^2 + x^0y^3\right)\\
&x^5 - y^5 = (x-y) \,.\, \left(x^4y^0 + x^3y^1 + x^2y^2 + xy^3 + x^0y^4\right)\\
&x^6 - y^6 = (x-y) \,.\, \left(x^5y^0 + x^4y^1 + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + x^0y^5\right)\\
&x^7 - y^7 = (x-y) \,.\, \left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + x^0y^6\right).
\end{aligned}$$

$$x^n - y^n = (x-y) \,.\, \left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \ldots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$$

Nota

À medida que o expoente de x decresce de $n-1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y, só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 ate $n-1$.

Exemplo 2.12

Seja $f(x) = x^n$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1},\ x \neq 1.$$

Solução

Decorre da proposição anterior que:

$$x^n - 1^n = (x-1) \,.\, \left(x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \ldots + x1^{n-2} + x^01^{n-1}\right).$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{x^n - 1^n}{x-1} = \frac{(x-1) \,.\, \left(x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \ldots + x1^{n-2} + x^01^{n-1}\right)}{x-1}\\
&= x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \ldots + x1^{n-2} + x^01^{n-1}\\
&= x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.
\end{aligned}$$

Vale a pena observar: o expoente de x decresce de $n-1$ até 0, ou seja, teremos n termos. De sorte que:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

■

Exemplo 2.13

Seja $f(x) = x^4$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+1) - f(1)}{x}, \; x \neq 0.$$

Solução

Se $f(x) = x^4$, *então,* $f(\square) = (\square)^4$ *e* $f(x+1) = (x+1)^4$. *Assim,*

$$\frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \frac{(x+1)^4 - 1}{x}.$$

Agora, da proposição 1 sabemos:

$x^4 - y^4 = (x-y) \, . \left(x^3y^0 + x^2y^1 + xy^2 + x^0y^3\right)$

$(x+1)^4 - 1^4 = [(x+1) - 1] \left[(x+1)^3 1^0 + (x+1)^2 1^1 + (x+1)^1 1^2 + (x+1)^0 1^3\right].$

Daí segue-se:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} &= \frac{(x+1)^4 - 1}{x} = \frac{x\left[(x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1\right]}{x} \\ &= (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1. \end{aligned}$$

■

2.5 Proposição 2

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e n um número inteiro positivo ímpar, tal que: $n \geq 3$. Então, tem-se:

$$x^n + y^n = (x+y) \, . \left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \ldots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$$

Demonstração

(Daniel Cordeiro de Morais, Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3^a Ed.,SBM, 2016 ref.[1] sobre indução finita sobre n)

Alguns Casos Particulares da proprosição 2:

Não faremos uma demostração, apenas exemplos, de casos particulares:

$x^3 + y^3 = (x+y) \, . \left(x^2 - xy + y^2\right)$

$x^5 + y^5 = (x+y) \, . \left(x^4y^0 - x^3y^1 + x^2y^2 - xy^3 + x^0y^4\right)$

$x^7 + y^7 = (x+y) \, . \left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + x^0y^6\right)$

$x^9 + y^9 = (x+y) \, . \left(x^8y^0 - x^7y^1 + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + x^0y^8\right).$

Assim, continuando com o processo, obtemos:

$$x^n + y^n = (x+y) \, . \left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \ldots - xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$$

Nota

À medida que o expoente de x decresce de $n-1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y, só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 até $n-1$. Aém disso, os sinais são alternados.

Exemplo 2.14

Seja $f(x) = x^9$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1},\ x \neq -1.$$

Solução

Decorre da proposição anterior que:

$$\begin{aligned} x^9 + y^9 &= (x+y) \,.\, \left(x^8y^0 - x^7y^1 + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + x^0y^8\right). \\ x^9 - (-1)^9 &= x^9 + 1 = (x+1) \,.\, \left(x^8 1^0 - x^7 1^1 + \ldots - x1^7 + x^0 1^8\right). \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(1)}{x+1} &= \frac{x^9 + 1^9}{x+1} = \frac{(x+1) \,.\, \left(x^8 1^0 - x^7 1^1 + \ldots - x1^7 + x^0 1^8\right)}{x+1} \\ &= \left(x^8 1^0 - x^7 1^1 + \ldots - x1^7 + x^0 1^8\right) \end{aligned}$$

Vale a pena observar: o expoente de x decresce de 8 até 0, ou seja, teremos 9 termos.
De sorte que:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Os sinais são alternados e notemos: os termos de expoente ímpares são negativos. ■

Exemplo 2.15

Seja $f(x) = x^3$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2},\ x \neq -2.$$

Solução

Se $f(\square) = (\square)^3$, $f(x) = x^3$ e $f(-2) = (-2)^3 = -8$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} &= \frac{x^3 - (-8)}{x+2} = \frac{x^3 + 8}{x+2} = \frac{(x+2) \,.\, \left(x^2 - x.2 + 2^2\right)}{x+2} \\ &= x^2 - 2x + 4. \end{aligned}$$

■

2.6 Racionalização

Fator Racionalizante

Chama-se fator racionalizante de uma expressão I, a outra expressão R, tal que:

$$I.R$$

seja uma expressão sem radical.

Exemplo 2.16

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x}$.

Solução

Seja $R = \sqrt[3]{x^2}$, *então, facilmente, obtemos:*

$$I.R = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x.x^2} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

■

Exemplo 2.17

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt{x}$-$\sqrt{a}$

Solução

Seja $R = \sqrt{x} + \sqrt{a}$, *então, tem-se:*

$$I.R = \left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right).\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right) = x - a.$$

Cálculos Auxiliares:

$(A - B).(A + B) = A^2 - B^2$

$(\sqrt{x} - \sqrt{a}).(\sqrt{x} + \sqrt{a}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2 = x - a$, *pois* $x, a \geq 0$.

O ***fator racionalizante****, neste caso,*

$$R = \sqrt{x} + \sqrt{a}.$$

■

Exemplo 2.18

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}$.

Solução

Basta observador que:

$(A - B).\left(A^2 + AB + B^2\right) = A^3 - B^3$

$(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}).\left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2\right] = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = x - a.$

O ***fator racionalizante****, neste caso,*

$$R = \left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a}\right)^2\right].$$

Logo,

$$I.R = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}\right).\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a}\right)^2\right] = x - a.$$

■

Exemplo 2.19

Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}$.

Solução

Basta observador que:

$(A+B).\left(A^2-AB+B^2\right)=A^3+B^3$
$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}).\left[(\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+(\sqrt[3]{a})^2\right]=(\sqrt[3]{x})^3+(\sqrt[3]{a})^3=x+a.$
*O **fator racionalizante**, neste caso,*

$$R=\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\right].$$

Logo,

$$I.R=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a}\right).\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\right]=x+a.$$

■

Capítulo Exercício

1. Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $h\neq 0$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

onde:

1) $f(x)=ax+b$	2) $f(x)=x^2+x$	3) $f(x)=\frac{1}{x}$	4) $f(x)=x^3+1$
5) $f(x)=-2x$	6) $f(x)=x^2+1$	7) $f(x)=\sqrt{x}$	8) $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Solução

1) *Consideremos dois casos:* $a=0$ *e* $a\neq 0$
1º Caso: $a=0: f(\square)=b$.*(note que qualquer valor do "quadrado" o resultado será sempre b).*
Ilustrativamente, $f(\square)=f(x+k+n)=b$ *e* $f(\square)=f(x+h)=b$. *Assim,*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{b-b}{h}=\frac{0}{h}=0.$$

2º Caso: $a\neq 0: f(\square)=a\square+b$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{[a(x+h)+b]-(ax+b)}{h}=\frac{ax+ah-ax}{h}=\frac{ah}{h}=a.$$

■

2) $f(x)=x^2+x$, $f(\square)=(\square)^2+(\square)$.*(Observe que o "quadrado"é apenas um símbolo representando o significado.*

$$f(k)=k^2+k, f(\triangle)=(\triangle)^2+(\triangle), f(x+h)=(x+h)^2+(x+h).$$

Além disso, fazendo alguns cálculos auxiliares, obtemos:

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=(x+h)^2+(x+h)-\left(x^2+x\right)\\&=x^2+2xh+h^2+h-x^2\\&=h(2x+h+1).\end{aligned}$$

Por conseguinte, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2+(x+h)-\left(x^2+x\right)}{h}=\frac{h(2x+h+1)}{h}\\ &= 2x+h+1.\end{aligned}$$

■

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, *usando a mesma ideia do "quadrdo"* $f(\square)=\frac{1}{\square}$.
$f(k)=\frac{1}{k}$, $f(\triangle)=\frac{1}{\triangle}$, $f(x+h)=\frac{1}{x+h}$. *Daí vem:*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{\frac{h}{1}}=\frac{-h}{(x+h)x}.\frac{1}{h}=\frac{-1}{(x+h)x}.$$

■

4) $f(x)=x^3+1$,*usando a mesma ideia do "quadrdo"* $f(\square)=(\square)^3+1$.
Para ilustração, vamos simular alguns valores para o "quadrado"
$f(x+t+1)=(x+t+1)^3+1$, $f(\triangle)=(\triangle)^3+1$ *e* $f(x+h)=(x+h)^3+1$.
Logo,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left[(x+h)^3+1\right]-\left[x^3+1\right]}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &= \frac{[(x+h)-x]\left[(x+h)^2+(x+h)x+x^2\right]}{h}\\ &= \frac{h\left[(x+h)^2+(x+h)x+x^2\right]}{h}\\ &= (x+h)^2+(x+h)x+x^2\\ &= 3x^3+3xh+h^2.\end{aligned}$$

■

5) $f(x)=-2x$ *usando a mesma figurinha do "quadrdo"* $f(\square)=-2(\square)$.
$f(\triangle)=-2\triangle$, $f(x+t+k)=-2(x+t+k)$ *e* $f(x+h)=-2(x+h)$.
Atenção especial no cálculo $-f(x)=-[-2x]=2x$
$f(x+h)-f(x)=-2(x+h)-[-2x]=-2x-2h+2x=-2h.$
De sorte que:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-2(x+h)-[-2x]}{h}=\frac{-2h}{h}=-2.$$

■

6) $f(x)=x^2+1$, *a ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si* $f(\square)=(\square)^2+1$. *Ilustrado a ideia da figurinha, temos:*

$$f(x+t+1)=(x+t+1)^2+1 \text{ e } f(x+h)=(x+h)^2+1.$$

Voltando ao problema inicial, temos:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left[(x+h)^2+1\right]-\left(x^2+1\right)}{h}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \frac{[(x+h)-x]\,[(x+h)+x]}{h}=\frac{h\,[2x+h]}{h}\\ &= 2x+h.\end{aligned}$$

■

7) $f(x)=\sqrt{x}$, $f(\square)=\sqrt{\square}$.
A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si.
Ilustrando a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p)=\sqrt{x+p},\, f(\triangle)=\sqrt{\triangle}\ e\ f(x+h)=\sqrt{x+h}.$$

Voltando ao problema dado, tem-se:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Vejamos um argumento de mudanças de variáveis, façamos:

$$\left\{\begin{array}{c} t=\sqrt{x+h}\\ e\\ k=\sqrt{x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2=x+h\\ e\\ k^2=x\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2-k^2=h\\ e\\ k^2=x.\end{array}\right.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{t-k}{t^2-k^2}=\frac{t-k}{(t-k)(t+k)}\\ &= \frac{1}{(t+k)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}(A-B)\,.\,(A+B) &= A^2-B^2\\ &= \left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)\\ &= \left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)\\ &= x+h-x=h.\end{aligned}$$

*Óbvio, sendo $x>0$ e $h>0$ (**porquê não consideramos** $x\geq 0$ e $h\geq 0$?).*
Agora, procedendo usando a racionalização, obtemos:

$$\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2=x+h-x=h$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{h}.\frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

■

8) $f(x)=\sqrt[3]{x}.f(\Box)=\sqrt[3]{\Box}.$
A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra que usamos.
Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p)=\sqrt[3]{x+p}, f(\triangle)=\sqrt[3]{\triangle} \text{ e } f(x+h)=\sqrt[3]{x+h}.$$

Voltando ao delineado, temos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}.$$

Poderia usar racionalização. Vejamos usando mudanças de variáveis, tem-se:

$$\begin{cases} t=\sqrt[3]{x+h} \\ e \\ k=\sqrt[3]{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t^3=x+h \\ e \\ k^3=x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t^3-k^3=h \\ e \\ k^3=x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{t-k}{t^3-k^3}=\frac{t-k}{(t-k)(t^2+tk+k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2+tk+k^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

Observe que:
Determinando o ***fator racionalizante,*** *tem-se:*

$$\begin{aligned} (A-B).\left(A^2+AB+B^2\right) &= A^3-B^3 \\ \left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right).\left[\left(\sqrt[3]{(x+h)}\right)^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right] &= \left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \\ &= x+h-x=h. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)}{h}.\frac{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \\ &= \frac{h}{h.\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

■

2. Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

onde:

1) $f(x)=kx+b$ 2) $f(x)=x^2+x$ 3) $f(x)=\frac{1}{x}$ 4) $f(x)=x^3+1$
5) $f(x)=-2x$ 6) $f(x)=x^2+1$ 7) $f(x)=\sqrt{x}$ 8) $f(x)=\sqrt[3]{x}.$

Solução

1) *Consideremos dois casos:* $k = 0$ *e* $a \neq 0$

1º Caso: $a = 0 : f(\square) = b$.*(note que qualquer valor do "quadrado"o resultado será sempre b). Ilustrativamente,* $f(\square) = f(x + n + 1) = b$ *e* $f(\triangle) = b$. *Desta forma, obtemos:*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{b - b}{x - a} = \frac{0}{x - a} = 0.$$

2º Caso: $k \neq 0 : f(\square) = k\square + b$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{kx + b - (ka + b)}{x - a} = \frac{k(x - a)}{x - a} = k.$$

■

2) $f(x) = x^2 + x$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^2 + x - \left(a^2 + a\right)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a) + (x - a)}{x - a} \\ &= \frac{(x - a)\left[(x + a) + 1\right]}{x - a} = x + a + 1.\end{aligned}$$

■

3) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{\frac{-(x - a)}{xa}}{x - a} = \frac{-(x - a)}{xa}.\frac{1}{(x - a)} \\ &= \frac{-1}{xa},\ x \neq a \neq 0.\end{aligned}$$

■

4) $f(x) = x^3 + 1$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)\left(x^2 + xa + a^2\right)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

■

5) $f(x) = -2x$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-2x - (-2a)}{x - a} = \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2.$$

■

6) $f(x) = x^2 + 1$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + 1 - \left(a^2 + 1\right)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

■

7) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}.$$

Agora, façamos as mudanças de variáveis, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ e \\ k = \sqrt{a} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2 = x \\ e \\ k^2 = a. \end{array}\right.$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^2 - k^2} = \frac{t - k}{(t - k)(t + k)} \\ &= \frac{1}{t + k} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Este processo é o mesmo; neste caso, que racionalizar. ■

8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}. \tag{1}$$

Assim, fazendo as mudanças de variáveis necessárias, vem:

$$\left\{\begin{array}{c} t = \sqrt[3]{x} \\ e \\ k = \sqrt[3]{a} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^3 = x \\ e \\ k^3 = a. \end{array}\right. \tag{2}$$

Daí, levando (2) *em* (1)*, segue-se que:*

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^3 - k^3} = \frac{t - k}{(t - k)(t^2 + tk + k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2 + tk + k^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}. \end{aligned}$$

■

✍ Exercício 2.1

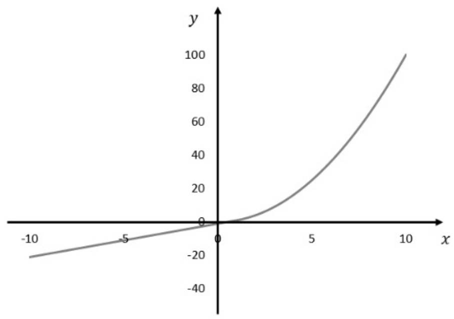
Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \text{ com } x \neq 1,$$

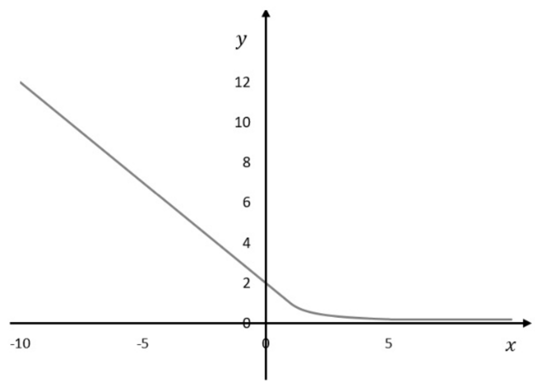
onde:

$$(i) \quad f(x) = \left\{\begin{array}{ll} x^2, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{array}\right. \qquad (ii) \quad f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -x + 2, & x \leq 1. \end{array}\right.$$

Esboçando os gráficos em cada caso, temos:
(i)



(ii)



(i) **1^o Caso:** $x \geq 1 : f(1) = 1^2$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x^2 - 1^2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x - 1$$

2^o Caso: $x < 1 : f(1) = 1^2$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto dado $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{2x - 1 - 1^2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$

■

(ii) **1^o Caso:** $x > 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$.

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = \frac{\frac{(1-x)}{x}}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x} \cdot \frac{1}{(x-1)} = -\frac{1}{x}$$

2^o Caso: $x \leq 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto, neste caso $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{-x + 2 - 1}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

■

2.7 Um pouco da História do Matemático Karl Friedrich Gauss

https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Gauss-KF
(Capturado em 05 de setembro de 2022 às 14h 20min)

Matemático, astrônomo e físico alemão, criador da geometria diferencial, conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos", a ele se devem importantíssimos estudos de matemática, física, geometria e astronomia. Entre outras coisas, desenhou o heptadecágono, inventou o telégrafo e definiu o conceito de números complexos.

Karl Friedrich Gauss nasceu a 30 de Abril de 1777 em Brunswick, Alemanha. Filho de uma família humilde, desde muito cedo foi visto como uma criança prodígio. Aprendeu a ler e a somar sozinho. Aos três anos corrigiu um erro do pai quando este calculava os salários dos operários.

Quando estudava na escola primária, o professor pediu aos alunos que tentassem resolver a soma de todos os números compreendidos entre 1 e 100. O professor pensou que assim iria manter os alunos ocupados durante um bom tempo mas, para seu espanto, em poucos minutos Gauss resolveu o problema.

Gauss conseguiu chegar ao resultado correto porque reparou que somando todos os pares $1+100; 2+99; 3+98; \ldots 50+51$ somavam sempre 101 então, a soma de todos os pares seria $50x101 = 5050$. Desta forma encontrou, sem saber, a propriedade da simetria das progressões aritméticas.

A fama de Gauss chegou aos ouvidos do Duque de Brunswick, o qual lhe facilitou recursos econômicos para que Gauss continuasse os seus estudos, pois era um desperdício este jovem rapaz não continuar a estudar. Em 1795 frequentou a Universidade de Göttingen. Em 1796 descobriu o método de desenhar com régua e compasso o heptadecágono, polígono com 17 lados, que desde o tempo dos gregos os geometras tentavam desenhar. Publicou Disquisitiones Arithmeticae em 1801, que é um dos livros de matemática mais importante da história da matemática, no qual reúne as ideias que desenvolveu desde os 17 anos de idade. Entre elas está a demonstração matemática de que é possível desenhar alguns polígonos regulares utilizando apenas esquadros e compasso, mas não qualquer polígono. Ainda nesta obra Gauss apresenta a lei de reciprocidade quadrática, classificada por ele, como a "jóia da aritmética"e demonstrado o teorema segundo o qual todo inteiro positivo pode ser representado de uma só maneira como produto de primos.

No começo do século XIX abandonou a aritmética para se dedicar á astronomia, criando um método para acompanhar a órbita dos satélites, usado até hoje.

Obteve o doutoramento na Universidade de Helmstädt, tendo começado em 1807 a leccionou como professor de astronomia (apesar de detestar dar aulas) e director do Observatório de Göttingen, durante 40 anos.

Desenvolveu o método dos mínimos quadrados em 1812 que, aplicado na resolução das distribuições de probabilidade nos campos da mecânica, estatística e economia, e na abordagem da forma das superfícies curvas mediante expressões matemáticas, permitiu-lhe determinar pela primeira vez o tamanho e forma aproximados da Terra. Em 1833 com a ajuda de Weber construiu o primeiro telégrafo o qual só foi usado entre a sua casa e o observatório de Göttingen.

No campo da Estatística, Gauss é famoso pela descoberta da distribuição normal, também conhecida pela distribuição Gaussiana, que trata da distribuição de certos valores ao longo de uma curva em forma de sino (contribuição extremamente valiosa no campo da estatística).

Gauss foi nomeado membro da Royal Society em 1804 e recebeu Medalha de Copley em 1838. Publicou várias obras entre as quais Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium em 1809; Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi em 1816; Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae em 1823.

Casou aos 23 anos, com Johanna Osthoff, que faleceu ao dar à luz o seu terceiro filho. Casou novamente em 1810, tendo tido mais três filhos, um rapaz e duas raparigas. A sua segunda esposa faleceu em 1831.

A 23 de Fevereiro de 1855, aos 78 anos de idade, Gauss morre durante o sono, vítima de uma doença prolongada. Deixou-nos como recordação o seu trabalho imenso que viverá para sempre na matemática, fruto do mais extraordinário espírito matemático de todos os tempos.

Capítulo 3 - Cálculo

‘

Frases de Isaac Newton - Pensador

“A gravidade explica os movimentos dos planetas, mas não pode explicar quem colocou os planetas em movimento.”
“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”
“Construímos muros ‘demais e pontes de menos. ”
“Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes. ”

Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe-by-Colsterworth
(Inglaterra) $(1643 - 1727)$

3.1 Introdução

Neste Capítulo, faremos alguns problemas básicos de quacioente de Newton que sevirá aposteriori para o estudo das derivadas como caráter local, revitando as equações das retas, destacando retas pararelas e perperdiculares, função polinomial do 2^o grau e sua correlação com as raízes e para a forma fatorada, A dedução da equação do 2^o grau por Viète e Um pouco de História. Importante ressaltar que: não existe em textos clássicos a chamada "**fórmula de Báskara** "é uma coisa "criada por autores brasileiros"que copiam uns dos outros, visto que: **Báskara** viveu muito antes da existência da dedução da referida fórmula.

3.2 Um pouco de História e Nascimento do Cálculo

http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm em 1. de agosto de 2022 às 12h e 25min)

"Para realizar um estudo completo sobre as origens, desenvolvimento e consequências do Cálculo, necessitaríamos de uma pesquisa muito extensa cujo resultado final seria, sem dúvida, um texto longo que estaria além do propósito deste trabalho como um todo. O nosso intuito é o de dar uma apresentação geral que contenha alguns fatos importantes que permeiam os acontecimentos históricos relacionados com a construção desta poderosa ferramenta da matemática: o Cálculo. Além disso, gostaríamos que ficasse claro que essa construção é o resultado de diversas contribuições de muitos personagens, como ocorre de modo geral, com o conhecimento humano.

Convidamos também o usuário a apreciar alguns fatos interessantes que estão presentes no site, assim como encorajá-lo na visita às páginas dos matemáticos que aqui aparecem para conhecer um pouco a história de cada um.

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles, mesmo que de forma imprecisa ou não rigorosa, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas - por exemplo, Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler. Nesse tempo ainda não havia uma sistematização, no sentido de uma construção logicamente estruturada. A união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.

O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas ou Cálculo Diferencial e outra parte relacionada às integrais, ou Cálculo Integral.

O Cálculo Diferencial: alguns fatos históricos

O aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos intimamente ligados à questão das tangentes. Desde a época dos Gregos antigos, já se conhecia a reta tangente como sendo uma reta que intersecta "corta"uma curva em um único ponto, generalizando a situação observada no caso da circunferência. Na realidade, essa ideia é muito imprecisa e precisamos de um tratamento bem mais rigoroso para a questão da tangente à uma curva.

Arquimedes e Apolônio utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes a parábolas, elipses e hipérboles. Vários outros métodos para resolver o problema de encontrar a tangente a uma curva em um ponto foram desenvolvidos ao longo da história.

Na realidade, após os Gregos, o interesse por tangentes a curvas reapareceu no século $XVII$, como parte do desenvolvimento da geometria analítica. Como equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentou bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica. A introdução de símbolos algébricos como uma ferramenta para estudar a geometria das curvas também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de derivada. Com o tempo, o tratamento se tornou mais algébrico e menos geométrico, proporcionando um contínuo progresso no desenvolvimento dos conceitos de funções, derivadas, integrais e outros tantos tópicos relacionados ao Cálculo.

Pierre de Fermat foi o primeiro a considerar a idéia de famílias de curvas. Ele chamou, por exemplo, de "parábolas maiores", as curvas cujas equações eram do tipo, , onde k é constante e $n = 2, 3, 4$, etc.

Fermat elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e os pontos de mínimo de uma função. Ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo. Escreveu a Descartes explicando o seu método que é basicamente utilizado ainda hoje. Na realidade, devido a esse trabalho, que estava intimamente relacionado com as derivadas, Lagrange afirmou considerar Fermat o inventor do Cálculo.

A questão de encontrar a tangente a uma curva é, historicamente, de especial importância, pois, ao que parece, foi o que Newton pensou quando teve um insight sobre como utilizar tangentes para estudar o movimento dos planetas. O método para a determinação foi desenvolvido pelo antecessor de Newton, Isaac Barrow, e consistia no limite de uma corda com os pontos aproximando-se entre si.

Acredita-se que um dia, enquanto observava o movimento dos planetas, Newton tenha-se perguntado porque as órbitas dos planetas eram curvas, pois se fossem formadas por segmentos de retas seriam muito mais fáceis de serem estudadas. Por que não considerá-las como um conjunto de pequenas retas que, aproximadamente, representariam o movimento daquela curva? Este simples, porém genial insight significou para Newton o começo de uma longa e frutífera produção científica que englobou, entre outras coisas, as derivadas, as integrais e toda a base da mecânica clássica.

O estudo do movimento dos corpos havia começado de maneira sistemática com Galileo. Entretanto ele estudara o movimento geometricamente, utilizando as proposições de Euclides e as propriedades das cônicas de Apolônio para chegar a relações entre distância, velocidade e aceleração, que, hoje em dia, são aplicações básicas da derivada.

Vários matemáticos estavam, a essa altura, estudando problemas relacionados ao movimento. Torricelli e Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. Já se sabia que a taxa de variação pontual - derivada - do deslocamento era a velocidade e que a operação inversa da velocidade era o deslocamento. Isso mostra que já existia uma certa noção da operação inversa da derivada, sendo que a idéia de que a integral era inversa da derivada era familiar a Barrow.

Para Newton, o movimento era a base fundamental para o estudo das curvas e de outros tópicos relacionados ao Cálculo. Newton escreveu o seu tratado sobre fluxions em 1666. Ele pensou em uma partícula descrevendo uma curva com duas linhas que se movimentavam e que representavam o sistema de coordenadas. A velocidade horizontal e a velocidade vertical eram as fluxões de x e y associadas ao fluxo do tempo. Os fluents eram x e y. Em linguagem moderna, seria a derivada de x com relação ao tempo, ou simplesmente x'(t) e seria analogamente a derivada de y com relação ao tempo ou ainda y'(t). Tanto os nomes quanto as notações de Newton foram deixadas de lado ao longo dos anos, prevalecendo a notação criada por Leibniz. Vale a pena notar, entretanto, que é ainda bastante utilizada pelos físicos quando a derivada em questão é em relação ao tempo e é dada a função deslocamento $x = x(t)$; nesse caso, será a velocidade e será a aceleração.

Embora Newton tenha desenvolvido e revisto o seu Cálculo entre 1666 e 1671, nada foi publicado até 1736. Ele havia apenas mostrado os seus manuscritos para alguns colegas e amigos.

Leibniz, em 1672, enquanto vivia em Paris, encontrou-se com Huygens e com ele aprendeu muito e recebeu muitos conselhos que constituíram um forte impulso para que viesse a desenvolver o seu Cálculo Diferencial e Integral. Nesse período, ele estabeleceu contato com muitos dos matemáticos respeitados da Royal Society e, dentre eles, destaca-se Barrow. Leibniz teve acesso aos seus trabalhos e estabeleceu um longo período de correspondências. Seu Cálculo Diferencial tinha uma fundamentação bem diferente daquele de Newton. Leibniz não estudou o movimento para chegar aos conceitos de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos. Introduziu dx e dy como a diferença entre esses valores sucessivos. Embora Leibniz não tenha usado como definição de derivada, ele sabia que representava o coeficiente angular da tangente.

Há um capítulo especial na história do Cálculo: uma longa e quase sempre inescrupulosa disputa entre Newton e Leibniz sobre quem havia "criado"o Cálculo. Ambos não pouparam acusações picantes para descrever o outro e os seus feitos e geraram uma discussão acalorada no meio científico da época sobre quem seria a mais importante autoridade em Cálculo. Essa situação chegou a tal ponto que os matemáticos que viviam no Reino Unido se distanciaram durante um período bastante longo dos matemáticos do continente. Enquanto o Cálculo "Leibniziano"ganhava cada vez mais adeptos na Europa - entre esses a família Bernoulli - os matemáticos da "ilha", como dizem alguns historiadores, davam mais atenção às pompas e circunstâncias criadas para a cerimônia fúnebre de Newton na Abadia de Westminister. Durante ainda algum tempo, esses matemáticos ficaram um pouco "ilhados"e, quando voltaram a estabelecer relações com os europeus do continente, haviam não só perdido parte do avanço do Cálculo como também não compreendiam muito bem a notação "Leibniziana"então largamente utilizada.

Carl B. Boyer, em seu livro A History of Mathematics , afirma: Como consequência da infeliz disputa entre Newton e Leibniz, os matemáticos britânicos ficaram de certa forma alienados dos trabalhos do continente (...) e o desenvolvimento da Matemática não conseguiu acompanhar o rápido progresso dos outros países da Europa ao longo do século $XVIII$.

Apesar das diferenças, tanto Newton quanto Leibniz reconheceram até certo ponto a importância do "adversário". Leibniz disse: Considerando a Matemática desde o início do mundo até a época de Newton, o que ele fez é sem dúvida a melhor metade. Newton, por sua vez, na primeira edição do Principia, admitiu que Leibniz possuía um método semelhante ao seu. Infelizmente, na terceira edição, após o ápice das desavenças, Newton retirou a referência a Leibniz.

O desenvolvimento do Cálculo continuou com muitos outros matemáticos, como, por exemplo, Jacques Bernoulli, Johann Bernoulli, MacLaurin, Agnesi, Euler, d'Alembert, Lagrange e Cauchy."

Problema 3.1

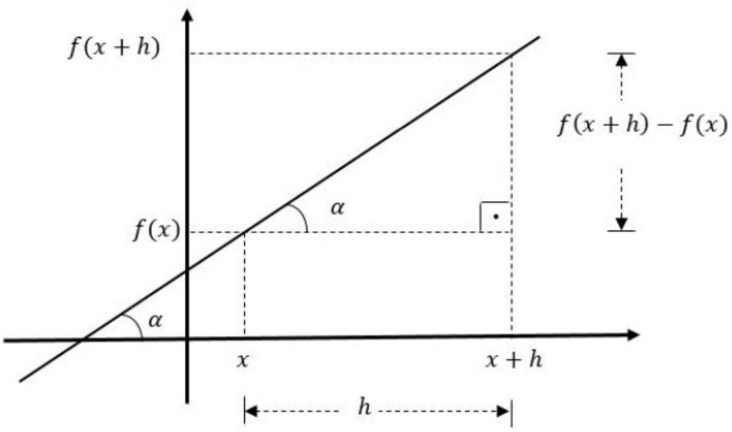
Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0,$$

onde:

$$(i) \quad f(x) = 2x + 4 \qquad (ii) \quad f(x) = x^2 \quad (ii) \quad f(x) = x^3.$$

(Dê uma interpretação geométrica para q)[1]



A inclinação da reta que passa pelos pontos distintos $P(x, f(x))$ e $Q(x+h, f(x+h))$ chamada posteriormente de quociente de Newton é de fundamental importância para

[1]Há 300 anos, os grandes cientistas Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (que também era filósofo) travavam uma célebre disputa pela paternidade do cálculo infinitesimal. Por causa desta controvérsia, Newton declarou a famosa frase: "Os segundos inventores não têm direitos".

O que o torna o cálculo infinitesimal tão versátil é a grande variedade de áreas em que pode ser aplicado, como na matemática, na física, na tecnológica e na economia. A derivada é, por exemplo, um conceito fundamental da física, pois explica acelerações, velocidades instantâneas e forças.

O conflito chamou atenção por mostrar o que havia "nos bastidores"da matemática e como esses gênios se comportavam. Newton se apresentou como religioso e vingativo, enquanto Leibniz era mais sibilante e incisivo, embora menos obsecado e até menos brincalhão.

A disputa teve seu fim em 1727, com a morte de Newton. O que se sabe com certeza é que ambos descobriram o cáculo infinitesimal de maneira independente e publicaram em momentos diferentes da vida.

o Cálculo, será dada por:

$$q\left(x\right) = tg(\alpha) = \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{x+h-x} = \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h}.$$

Solução

(i) $f\left(x\right) = 2x+4$

$$\frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h} = \frac{\left[2\left(x+h\right)+4\right] - \left(2x+4\right)}{h} = \frac{2x+2h-2x}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

■

(ii) $f\left(x\right) = x^2$

$$\frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h} = \frac{\left(x+h\right)^2 - x^2}{h} = \frac{\left[\left(x+h\right) - x\right]\left[\left(x+h\right) + x\right]}{h} = \frac{h\left(2x+h\right)}{h} = 2x+h.$$

■

(iii) $f\left(x\right) = x^3$

$$\begin{aligned} \frac{f\left(x+h\right) - f\left(x\right)}{h} &= \frac{\left(x+h\right)^3 - x^3}{h} = \frac{\left[\left(x+h\right) - x\right]\left[\left(x+h\right)^2 + \left(x+h\right)x + x^2\right]}{h} \\ &= \frac{h\left[\left(x+h\right)^2 + \left(x+h\right)x + x^2\right]}{h} = \left(x+h\right)^2 + \left(x+h\right)x + x^2. \end{aligned}$$

■

Problema 3.2

Calcule e simplifique:

$$q\left(x\right) = \frac{f\left(x\right) - f\left(a\right)}{x-a}, \text{ com } x \neq a,$$

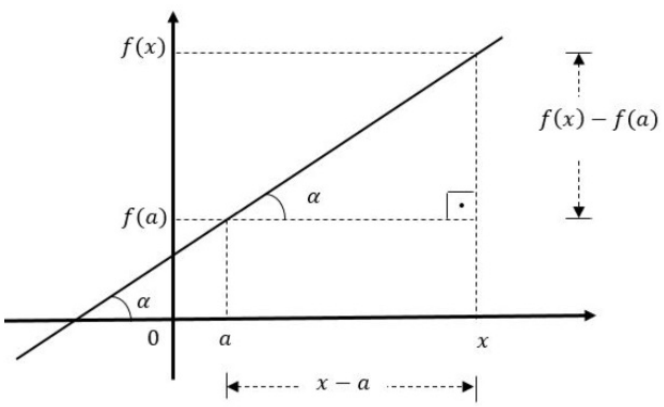
onde:

$$(i) \quad f\left(x\right) = 2x+4 \qquad (ii) \quad f\left(x\right) = x^2 \quad (ii) \quad f\left(x\right) = x^3.$$

Procedendo de forma análoga, a inclinação da reta que passa por $P\left(a, f\left(a\right)\right)$ e $Q\left(x, f\left(x\right)\right)$ será descrita por:

$$q\left(x\right) = tg(\alpha) = \frac{f\left(x\right) - f\left(a\right)}{x-a}.$$

Geometricamente, tem-se:



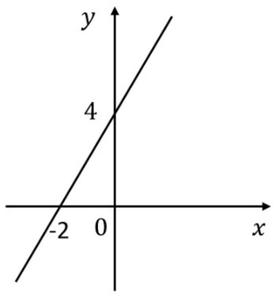
Nota

Interpretação geométrica para q:

Coisa maravilhosa a tangente de α é exatamente o coeficiente angular da reta.

Solução

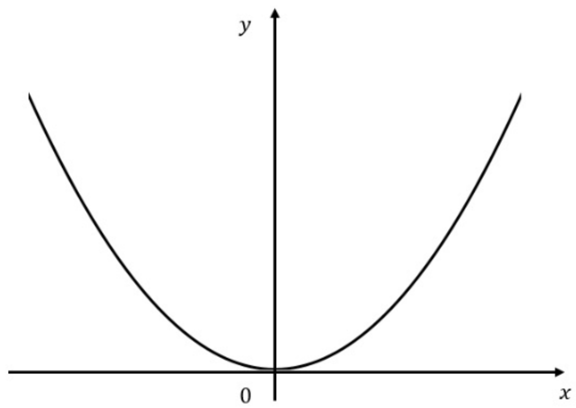
$(i)\ f(x) = 2x + 4$



$$tg(\alpha) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2x + 4 - (2a + 4)}{x - a} = \frac{2x - 2a}{x - a} = \frac{2(x - a)}{x - a} = 2, com\ x \in \mathbb{R}.$$

■

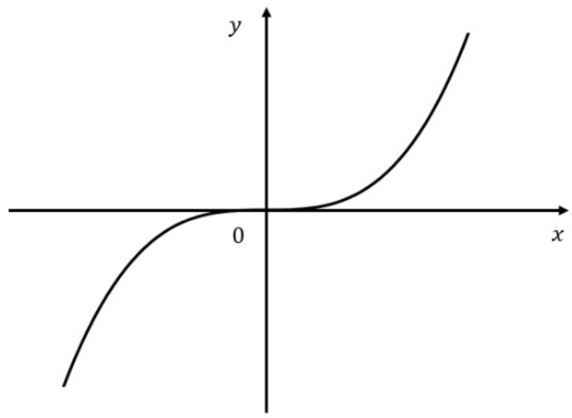
$(ii)\ f(x) = x^2$



$$tg(\alpha) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a) . (x + a)}{x - a} = x + a,\ com\ x \in \mathbb{R}.$$

■

$(iii)\ f\,(x) = x^3$



$$tg(\alpha) = \frac{f\,(x) - f\,(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)\,.\,(x^2 + xa + a^2)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

Nota

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^3 - 3^3)}{(x - 3)} = 27$

Expansão em serie em $x = 3$:

$(x - 3)^2 + 9(x - 3) + 27$

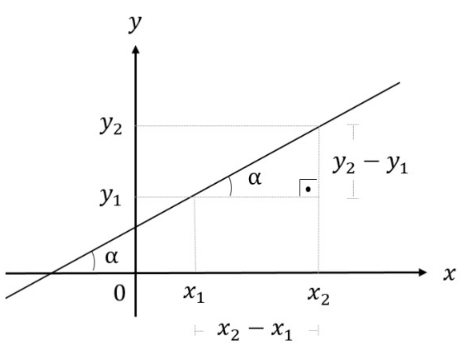
■

3.3 Uma pausa para alguns Comentário sobre retas

Para determinar uma equação da reta em $\mathbb{R}^2$, precisamos de: Um ponto $P_0\,(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular da reta m ou dois pontos; em seguida, obtemos o coeficiente angular m.

3.3.1 Equação da reta que passa pelo ponto $P_0\,(x_0, y_0)$ e coeficiente angular m :

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$



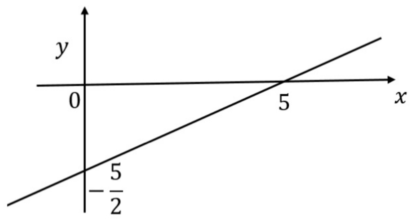
Exemplo 3.1

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P_0\,(1,-2)$ com coeficiente angular $\frac{1}{2}$.

Solução

Com efeito, a equação da reta tem coeficiente angular $m=\frac{1}{2}$ *e passa por* $P_0\,(1,-2)$*, então, vem:*

$$y-(-2)=\frac{1}{2}(x-1)\Longleftrightarrow y+2=\frac{1}{2}(x-1)\Longleftrightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}.$$



■

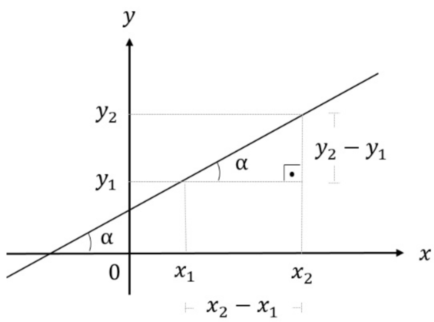
3.3.2 Equação da reta que passa pelos pontos $P\,(x_1,y_1)$ e $Q\,(x_2,y_2)$:

Determinando o coeficiente angular da reta que passa por P e Q, temos:

$$m=tg(\alpha)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ x_2\neq x_1.$$

Em seguida, podemos escolher um dos dois pontos, digamos $P\,(x_1,y_1)$, descrevendo uma equação da reta

$$y-y_1=m\,(x-x_1)$$



Exemplo 3.2

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P\,(1,-2)$ e $Q\,(4,6)$.

Solução

Com efeito, a equação da reta que passa por $P\,(1,-2)$ *e* $Q\,(4,6)$*, tem coeficiente angular*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-2)}{4-1} = \frac{8}{3}$$

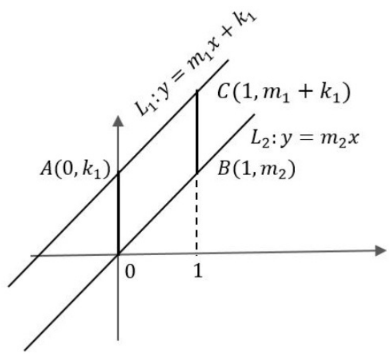
Daí, podemos escolher qualquer um dos dois pontos; por exemplo, tomando $P\,(1,-2)$*, vem:*

$$y-(-2) = \frac{8}{3}(x-1) \Longleftrightarrow y+2 = \frac{8}{3}(x-1)$$

■

Exemplo 3.3

Retas paralelas $L_1 : y = m_1x + k$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1 // L_2$:

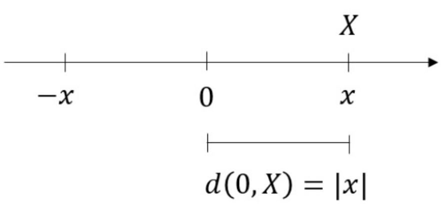


Devo ressaltar que não é uma demonstração; e sim, uma justificativa plausível:
$L_1 // L_2 : med\left(\overline{OA}\right) = med\left(\overline{BC}\right)$ e $med\left(\overline{AC}\right) = med\left(\overline{OB}\right)$. Assim, tem-se :

$$K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2.$$

■

Um esboço de uma demonstração formal, será delineada a seguir, ressaltando que módulo de x, denotado por $|x| = d\,(0,X) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ é a distância da origem O ao ponto X na reta.



Como a 5^a Sinfonia de Ludwing Van Beethoven; dita sinfonia do destino, voltaremos ao tema módulo posteriormente.

Demonstração

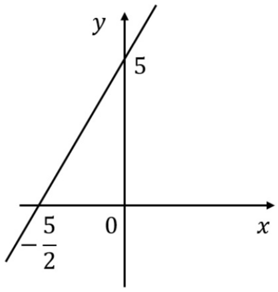
Com efeito, $L_1 // L_2 : d(O,A) = d(B,C)$ e $d(A,C) = d(O,B)$. Por conseguinte, vem:

$$\begin{aligned}
d^2(O,A) &= d^2(B,C) \Longleftrightarrow 0^2 + K_1^2 = (1-1)^2 + (m_1 + K_1 - m_2)^2 \\
&\Longleftrightarrow K_1^2 = (m_1 + K_1 - m_2)^2 \Longleftrightarrow |K_1| = |m_1 + K_1 - m_2| \\
&\Longleftrightarrow \pm K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \\ \text{ou} \\ -K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_1 = m_2 \\ \text{ou} \\ -2K_1 = m_1 - m_2 > 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_1 = m_2 \\ \text{ou} \\ 0 = -2K_1 = m_1 - m_2 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow m_1 = m_2.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.4

Determine uma equação da reta L que passa pelo ponto $P(1,-2)$ e é paralela a reta S dada por $y = 2x + 5$.



Com efeito, as retas

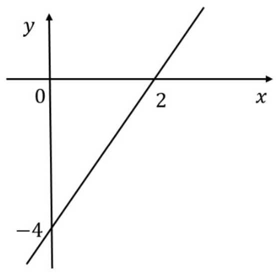
$$L//S \Longleftrightarrow m_L = m_S.$$

Além disso, o coeficiente angular da reta S é $m_S = 2$ e a reta L é descrita por:

$$y - (-2) = m_L(x-1) \Longleftrightarrow y + 2 = m_L(x-1)$$

Como $m_L = m_S = 2$ segue-se que:

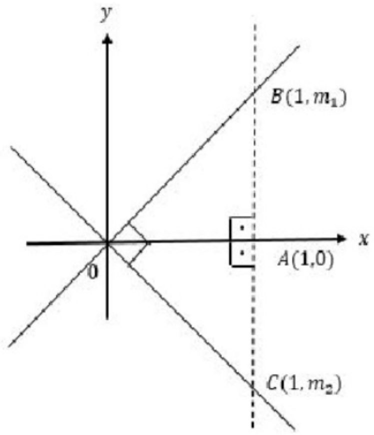
$$y + 2 = 2(x-1) \Longleftrightarrow y = 2x - 4.$$



■

Exemplo 3.5

Retas Perpendiculares $L_1 : y = m_1x$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1 \perp L_2$: Não perde a generalidade a



demonstração, visto que: usando retas paralelas faríamos o caso geral.

Demonstração

Sejam $L_1 : y = m_1x$ e $L_2 : y = m_2x$ retas perpendiculares $L_1 \perp L_2$ à luz do Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} [d(B,C)]^2 &= [d(O,B)]^2 + [d(O,C)]^2 \Longleftrightarrow (1-1)^2 + (m_1 - m_2)^2 = 1^2 + m_1^2 + 1^2 + m_2^2 \\ \Longleftrightarrow & \quad m_1^2 + -2m_1m_2 + m_2^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2 \Longleftrightarrow -2m_1m_2 = 2 \Longleftrightarrow m_1m_2 = -1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1m_2 = -1.$$

■

Exemplo 3.6

Determine uma equação da reta L que passa pelo ponto $P(-1,2)$ e é perpendicular a reta S dada por $x - 3y - 1 = 0$.

Solução

Um esboço do gráfico da reta S é descrito por:

$$S : x - 3y - 1 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

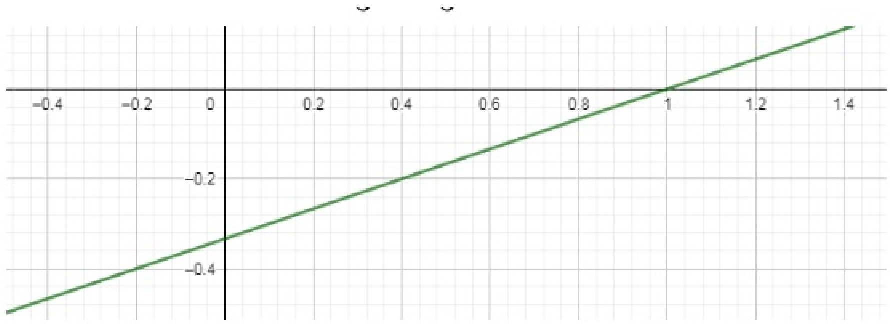
Para

$$x = 0 \Longrightarrow y = -\frac{1}{3}.$$

(valor que conta o eixo y)

Para

$$y = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \Longrightarrow x = 1.$$



De fato, as retas são perpendiculares equivale a dizer:

$$L \perp S \iff m_L.m_S = -1.$$

Além disso, a reta S pode ser reescrita como

$$S : y = \frac{1}{3}x - 1,$$

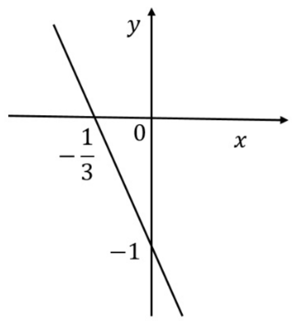
o coeficiente angular da reta S é $m_S = \frac{1}{3}$ assim,

$$m_L = -\frac{1}{m_S} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

De sorte que:

$$\begin{aligned} y - 2 &= -3(x+1) = -3x - 3 \\ y &= -3x - 3 + 2 \iff y = -3x - 1. \end{aligned}$$

Agora, fazendo um esboço do gráfico da reta L, a seguir:



■

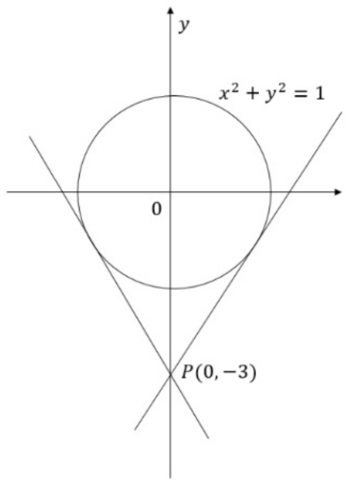
Problema 3.3

Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P(0, -3)$ e são tangentes a circuferência $\xi : x^2 + y^2 = 1$.

Solução

Com efeito, a equação da reta que passa por $P(0, -3)$ é dada por:

$$y = mx - 3.$$



Agora, para que as retas sejam tangente a circunferência, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx - 3 \end{cases} \Longrightarrow x^2 + (mx-3)^2 = 1 \Longrightarrow \left(1+m^2\right)x^2 - 6mx + 8 = 0.$$

Daí, vem:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-6m)^2 - 4.\left(1+m^2\right).8 = 0 \Longrightarrow 36m^2 - 32 - 32m^2 = 0 \\ \Longrightarrow & \quad 4m^2 - 32 = 0 \Longrightarrow m^2 = \frac{32}{4} = 8 \Longrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ ou \\ m = -2\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, temos dois casos a considerar:

1^o Caso: $m = 2\sqrt{2} \Longrightarrow y = 2\sqrt{2}x - 3.$

2^o Caso: $m = -2\sqrt{2} \Longrightarrow y = -2\sqrt{2}x - 3.$

■

3.4 Equação do 2^o Grau

Chama-se equação do 2^o grau a uma variável x, a toda expressão da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Exemplo 3.7

$$x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + \left(\tfrac{-6}{2}\right)^2 = \left(\tfrac{-6}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^2 - 6x + 9 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 = 9 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \Longrightarrow \begin{cases} x - 3 = 3 \\ \text{ou} \\ x - 3 = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ \text{ou} \\ x = 0. \end{cases}$$

■

Exemplo 3.8

$$x^2+x-1=0 \Longrightarrow x^2+x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-1=\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^2+x+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}+1 \Longrightarrow \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{5}{4} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x+\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}}=\pm\tfrac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.9

$$2x^2+7x+6=0 \Longrightarrow 2\left[x^2+\tfrac{7}{2}x\right]=-6 \Longrightarrow x^2+\tfrac{7}{2}x=-3 \Longrightarrow x^2+\tfrac{7}{2}x+\left(\tfrac{7}{4}\right)^2=\left(\tfrac{7}{4}\right)^2-3 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left(x+\tfrac{7}{4}\right)^2=\tfrac{1}{16} \Longrightarrow x+\tfrac{7}{4}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}}=\pm\tfrac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{-7+1}{4}=-\frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x=\frac{-7-1}{4}=-2. \end{cases} \quad \blacksquare$$

3.4.1 Dedução da Fórmula

Teorema 3.1

Seja

$$y=ax^2+bx+c=0,\ \textit{com } a,b,c\in\mathbb{R} \textit{ e } a\neq 0.$$

Então, suas raízes são dadas por:

$$\begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \textit{ou} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

♡

Demonstração

Com efeito, usando o procedimento de completamento de quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \Longrightarrow a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=0 \Longrightarrow a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=0 \\ &\Longrightarrow \left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}\right]=0 \Longrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(b^2-4ac)}{4a^2}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\Delta=b^2-4ac$, obtemos:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2} \Longrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De sorte que:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

$\blacksquare$

3.4.2 Soma e Produto das raízes do trinômio do 2^o grau

Corolário 3.1

Seja
$$y = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$
e sejam x_1 e x_2 suas raízes. Então, temos:
$$(i) \quad x_1 + x_2 = -\tfrac{b}{a} \qquad (ii) \quad x_1.x_2 = \tfrac{c}{a}$$
♡

Demonstração

Basta notar que:
$$(i) \quad x_1 + x_2 = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \tfrac{-2b}{2a} = -\tfrac{b}{a},$$
e procedendo de forma análoga, obtemos:
$$\begin{aligned} (ii)\ x_1.x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= -\frac{(\Delta - b^2)}{4a^2} = -\frac{(b^2 - 4ac - b^2)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$
■

3.4.3 Forma Fatorada

Corolário 3.2

Considere
$$y = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0,$$
sejam x_1 e x_2 suas raízes, tais que: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$. Então, tem-se:
$$y = a\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)$$
♡

Demonstração

Com efeito,
$$-(x_1 + x_2) = \frac{b}{a},\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} \text{ e } y = ax^2 + bx + c.$$
Então,
$$\begin{aligned} y &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1.x_2\right] \\ &= a\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right] = a\left[x\,(x - x_2) - x_1\,(x - x_2)\right] \\ &= a\,(x - x_2)\,.\,(x - x_1) = a\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = a\,(x - x_1)\,.\,(x - x_2)$$

■

3.4.4 A Dedução da equação do 2^o grau por Viète e Um pouco de História

(i) Vamos descrever o método de Viète [2] para a resolução de equação do 2^o grau. Seja

$$ax^2 + bx + c = 0,\ \ a \neq 0. \tag{1}$$

Fazendo $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e levando na equação (1), vem:

$$av^2 + (2au + b)\,v + au^2 + bu + c = 0. \tag{2}$$

Viète transformou essa equação (2) numa equação incompleta do 2^o grau, anulando o coeficiente de v, isto é, escolhendo $u = \frac{-b}{2a}$. Obteve assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0, \tag{3}$$

e fazendo algumas manipulações simples em (3), obtemos:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{4}$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então, decorre de (4) que:

$$v = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{5}$$

e, portanto,

$$x = u + v = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Que é a "**fórmula de Báskara** "o que parece ser exclusiva do Brasil, para maiores detalhes veja referência [3] . ■

Problema 3.4

Determine A, B e C, de modo que:

(i) $\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ $\quad(ii)$ $\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$ $\quad(iii)$ $\frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

(i)

$$\frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \tag{1}$$

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{A\,(x-3) + B\,(x-2)}{(x-2)\,.\,(x-3)} = \frac{(A+B)\,x + (-3A - 2B)}{(x-2)\,.\,(x-3)} \\ &\Longrightarrow\ 2x + 1 = (A+B)\,x + (-3A-2B) \Longrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ -3A - 2B = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

[2] François Viète foi um matemático francês que nasceu em Fontenay no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou e exerceu Direito e tornou-se membro do Parlamento da Bretanha. Não era, portanto, um matemático por profissão; porém o seu lazer era dedicado à Matemática, dentro da qual desempenhou um papel central na transição da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, mas sem dúvida foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viète chegou mais próximo das ideias modernas.

Agora, escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \quad 3E_1+E_2 \longrightarrow E_2 \Longrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ B=7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=7. \end{cases}$$

Daí, reescrevemos a decomposição (1)*, tem-se:*

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3}.$$

■

(ii)

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \tag{2}$$

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)} \\ &= \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(-A+B)x-B}{x^2(x-1)} \\ &\Longrightarrow 0x^2+0x+1 = (A+C)x^2+(-A+B)x-B \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C=1 \\ A=-1 \\ B=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Daí, reescrevemos a decomposição (2)*, obtem-se:*

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \tag{2}$$

■

(iii)

$$\frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \tag{3}$$

Solução

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} = \\ &\Longrightarrow x^2+x+2 = (A+B)x^2+Cx+A \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ C=1 \\ A=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ C=1 \\ A=2. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, decorre da decomposição em (3) *o resultado:*

$$\frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} + \frac{-1x+1}{x^2+1} \tag{3}$$

■

Cuidado com esse tipo de operação!!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \neq \frac{1}{x+y}$$

Capítulo 4 - Módulo ou Valor Absoluto

Frases de Évariste Galois

"Não chore, preciso de toda a minha coragem para morrer aos vinte anos."
"Falta algo para completar esta demonstração, mas não tenho tempo."
"Alguns mistérios sempre escaparão da mente humana. Para nos convencer disso, só é preciso dar uma olhada nas tabelas de números primos e ver que não existe uma regra, nenhuma regra. "

Évariste Galois nasceu em Bourg-la-Reine (França)
25 de outubro de 1811
31 de maio de 1832 (20 anos) - Paris

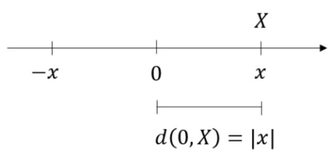
Neste Capítulo, abordaremos módulo ou valor absoluto, propriedades; inclusive envolvendo as desigualdades; surgindo assim, algumas majorações necessárias para as demonstrações futuras envolvendo limites de sequências, funções e continuidade no ponto.

4.1 Fundamentação Teórica

Seja x um número real. O módulo de x, denotado por $|x| = d\,(0, X)$ é dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

é a distância da origem O ao ponto X na reta



Exemplo 4.1

(i) $|5| = 5$ (ii) $|3-\pi| = \pi - 3$; Sabemos que: $\pi \simeq 3,14159...$

$$(iii)\ |x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}.$$

4.1.1 Propriedades

Propriedade (i) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. (ii) $\sqrt{x^2} = |x|$

Demonstração

1º Caso:

$$x \geq 0 \Longrightarrow |x|^2 = |x|\,.\,|x| = x.x = x^2, \tag{1}$$

2º Caso:

$$x < 0 \Longrightarrow |x|^2 = |x|\,.\,|x| = (-x)\,.\,(-x) = x^2, \tag{2}$$

dos casos (1) e (2), segue-se:

$$|x|^2 = x^2.$$

■

Decorre daí (ii)

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

■

Propriedade (i) $|x.y| = |x|\,.\,|y|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$. (ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$. (iii) $\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|\,.$

Demonstração (i) $|x.y| = |x|\,.\,|y|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Com efeito,

$$\begin{aligned} |x.y|^2 &= (x.y)^2 = x^2.y^2 = |x|^2\,.\,|y|^2 \\ &\Longrightarrow \sqrt{|x.y|^2} = \sqrt{|x|^2\,.\,|y|^2} \\ &= \sqrt{|x|^2}.\sqrt{|y|^2} = |x|\,.\,|y|\,. \end{aligned}$$

■

Demonstração (ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$, $\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.

Basta proceder de forma análoga ao caso anterior, vejamos:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{y}\right|^2 &= \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{|x|^2}{|y|^2} \\ &\Longrightarrow \sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|^2} = \sqrt{\frac{|x|^2}{|y|^2}} = \frac{|x|}{|y|}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

$\blacksquare$

Demonstração (iii) Usando o método de indução finita (veja a referência [1])

(a) Para $n = 2$, temos:

$$\left|\prod_{j=1}^{n=2} x_j\right| = |x_1.x_2| = |x_1| \, . \, |x_2| = \prod_{j=1}^{n=2} |x_j| \, .$$

Logo,

$$|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$$

(b) Suponha válido para n (hipótese de indução finita), isto é,

$$\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = |x_1.x_2 \ldots x_n| = |x_1| \, . \, |x_2| \ldots |x_n| = \prod_{j=1}^{n} |x_j| \, .$$

Então, tem-se:

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} x_j\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} x_j . x_{n+1}\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| . \, |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n} |x_j| \, . \, |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j| \, ,$$

e, portanto,

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} x_j\right| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j| \, .$$

$\blacksquare$

.

Propriedade (i) $|x| = a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \textit{ou} \\ x = -a \end{cases}$ (ii) $|x| \leq a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$

(iii) $|x| \geq a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \textit{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$ (iv) $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x| \, .$

Demonstração (i) (i) $|x| = a,\, a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$

De fato,

$$\begin{aligned} |x| &= a \Longleftrightarrow |x|^2 = x^2 = a^2 \Longleftrightarrow x^2 - a^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x-a) \, . \, (x+a) = 0 \Longleftrightarrow x = -a \text{ ou } x = a. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exemplo 4.2

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x-1| = \pi$$

Solução

Basta notar que:

$$|x-1| = \pi \iff \begin{cases} x-1=\pi \\ \text{ou} \\ x-1=-\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pi+1 \\ \text{ou} \\ x=-\pi+1. \end{cases}$$

■

Demonstração (ii) $|x| \leq a$, $a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff -a \leq x \leq a$.

Por definição, temos: $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

1º Caso: $x \geq 0$:

$$|x| = x \leq a \tag{1}$$

2º Caso: $x < 0$:

$$|x| = -x \leq a \iff x \geq -a \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$\begin{cases} x \leq a \\ \text{e} \\ x \geq -a \end{cases} \iff -a \leq x \leq a.$$

■

Exemplo 4.3

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x-1| \leq 7$$

Solução

Com efeito,

$$|x-1| \leq 7 \iff -7 \leq x-1 \leq 7 \iff -6 \leq x \leq 8.$$

■

Demonstração (iii) $|x| \geq a$, $a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases}$

Procedendo de forma análoga ao item anterior, tem-se:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1º Caso: $x \geq 0$:

$$|x| = x \geq a \tag{1}$$

2º Caso: $x < 0$:

$$|x| = -x \geq a \Longleftrightarrow x \leq -a, \tag{2}$$

Assim, dos casos (1) e (2) segue-se:

$$\begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a. \end{cases}$$

■

Outro modo de provar a mesma afirmação:

Demonstração

Uma forma elegante e simples de demonstrar, é descrita por:

$$\begin{aligned} |x| \quad &\geq \quad a \Longleftrightarrow |x|^2 = x^2 \geq a^2 \Longleftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-a)\,.\,(x+a) \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases} \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.4

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x+2| \geq 10$$

Solução

Basta proceder de forma inteiramente análoga, para se obter:

$$|x+2| \geq 10 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 10 \\ ou \\ x+2 \leq -10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ ou \\ x \leq -12. \end{cases}$$

■

Propriedade (iv) $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|\,.$

Demonstração

À luz da definição, temos:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1º Caso: $x \geq 0$:

$$|x| \geq x \tag{1}$$

2º Caso: $x < 0$:

$$|x| \geq -x \Longleftrightarrow -|x| \leq x \tag{2}$$

Portanto, decorre de (1) e (2) que:

$$\left\{\begin{array}{c} |x| \geq x \\ \text{e} \\ -|x| \leq x. \end{array}\right. \Longleftrightarrow -|x| \leq x \leq |x|\,.$$

■

Propriedade *Para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$(i) \quad |x+y| \leq |x| + |y| \qquad (ii) \quad |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$(iii) \quad ||x| - |y|| \leq |x-y| \quad (iv) \quad \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,.$$

Demonstração (i)

$$\begin{array}{rcl} |x+y|^2 & = & (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2\,|x|\,.\,|y| + y^2 \\ |x+y|^2 & \leq & |x|^2 + 2\,|x|\,.\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \\ & \Longleftrightarrow & |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{|x+y|^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2}. \end{array}$$

Logo,

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,.$$

■

(Conhecido como desigualdade triangular, ou seja, em qualquer triângulo qualquer lado é sempre menor ou igual a soma dos outros dois).

Demonstração (ii)

Basta observar que: $|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$ e, portanto,

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

■

Demonstração (iii)

Basta observar que:

$$\left\{\begin{array}{c} |x| - |y| \leq |x-y| \\ \text{e} \\ |y| - |x| \leq |x-y| \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |x| - |y| \leq |x-y| \\ \text{e} \\ -(|x| - |y|) \leq |x-y| \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |x| - |y| \leq |x-y| \\ \text{e} \\ |x| - |y| \geq -|x-y| \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y| \Longleftrightarrow ||x| - |y|| \leq |x-y|$$

e, portanto,

$$||x| - |y|| \leq |x-y|\,.$$

■

Demonstração (iv)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Indução Finita sobre n

Para $n = 2$, temos:

$$\left|\sum_{j=1}^{2} x_j\right| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| = \sum_{j=1}^{2} |x_j|.$$

Portanto

$$\left|\sum_{j=1}^{2} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{2} |x_j|.$$

Suponha válido para n, então falta mostrar para $n+1$.
Vejamos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right| &= |x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \\
&\leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \\
&\leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}| = \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|.
\end{aligned}$$

De sorte que:

$$\left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|.$$

(Conhecido como *desigualdade triangular generalizada*) ■

Exercício 4.1

Prove que:
$|f(x) - f(2)| \leq 20.\,|x-2|$ para $0 \leq x \leq 3$;

Demonstração

Com efeito,

$$|f(x) - f(2)| = \left|x^3 + x - 10\right| = \left|(x-2).\left(x^2 + 2x + 5\right)\right|.$$

Agora, $0 \leq x \leq 3 \Longrightarrow |x| \leq 3$, por conseguinte, obtemos:
$\left|(x-2).\left(x^2+2x+5\right)\right| \leq |x-2|.\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 20\,|x-2|,$
Visto que: $\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 3^2 + 2.3 + 5 = 20.$
Logo,

$$|f(x) - f(2)| \leq 20.\,|x-2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3.$$

■

✍ **Exercício 4.2**

Sejam y, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,
tais que: $\xi > 0$ e $y_0 \neq 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi\,|y_0|^2}{2}\right\}$$

$y \neq 0$, prove que:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

Vejamos **alguma majorações** antes de fazer a demonstração:
$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y||y_0|}$ e $|y_0| - |y| \leq |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow$
$|y| - |y_0| > -\frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow |y| > \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$.
Assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| &= \frac{|y_0 - y|}{|y|\,|y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2}\,|y_0 - y| < \frac{2}{|y_0|^2}\frac{\xi\,|y_0|^2}{2} = \xi \\ &\Longrightarrow \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.\end{aligned}$$

Demonstração

Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi|y_0|^2}{2}\right\} > 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}. \tag{1}$$

$$|y - y_0| < \frac{\xi\,|y_0|^2}{2} \Longrightarrow \frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \xi. \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\frac{1}{|y|}\frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \frac{2}{|y_0|}\xi.$$

De sorte que:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

■

✍ **Exercício 4.3**

Seja f uma função dada por:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Prove que:

(i) $|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right).|x - 1|$ para $x > 0$;
(ii) $|f(x) - 2| \leq 3\,|x - 1|$ para $x > \frac{1}{2}$;
(iii) $f(x) \geq 2$, para todo $x > 0$.

Demonstração (i)

Com efeito,

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| x + \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \Longrightarrow \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \\ &= \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| = \left| \frac{x-1}{x} \right| . |x - 1| \leq \left(\frac{|x| + |1|}{|x|} \right) . |x - 1| \end{aligned}$$

Como $x > 0$, segue-se que:

$$|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x} \right) . |x - 1| .$$

■

Demonstração (ii)

Para $x > \frac{1}{2}$, então, $\frac{1}{x} < 2$ e, portanto, $1 + \frac{1}{x} < 3$.

Daí, e do item anterior, obtemos:

$$|f(x) - 2| \leq 3\,|x - 1| .$$

■

Demonstração (iii) Basta revisitar a desigualdade entre as médias: geométrica e aritmética, obtendo:

$$\sqrt{x.\frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \; x > 0.$$

Logo,

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

■

✍ **Exercício 4.4**

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, tais que: $x_1.x_2...x_n = 1$.

Verifique se:

$$(1 + x_1) . (1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 2^n.$$

Demonstração

Basta notar que:

$$\begin{cases} \sqrt{1.x_1} \leq \frac{1+x_1}{2} \\ \sqrt{1.x_2} \leq \frac{1+x_2}{2} \\ \quad\vdots \\ \sqrt{1.x_n} \leq \frac{1+x_n}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x_1} \leq 1 + x_1 \\ 2\sqrt{x_2} \leq 1 + x_2 \\ \quad\vdots \\ 2\sqrt{x_n} \leq 1 + x_n \end{cases} .$$

Donde, obtemos:

$$\begin{cases} \overbrace{2.2 \ldots 2}^{n \text{ vezes}} \leq (1 + x_1) . (1 + x_2) \cdots (1 + x_n) , \end{cases}$$

visto que $\sqrt{x_1.x_2 \ldots x_n} = 1$.

Portanto,

$$(1 + x_1) . (1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 2^n.$$

(Será que seria possível provar usando indução finita sobre n? Porquê?) ■

✍ Exercício 4.5

(Vestibular: COVEST 1999: Função e Majorações)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \frac{x2^{-x}}{(2^{-x}+1)^2},$$

então, verifique se: $0 < f(100) < 10^{-28}$.

Solução

Com efeito,

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2^x}}{\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)^2} = \frac{x2^x}{(1+2^x)^2},$$

então,

$$f(100) = \frac{100.2^{100}}{(1+2^{100})^2} < \frac{100.2^{100}}{2^{200}} = \frac{100}{2^{100}}.$$

Afirmação: $2^{100} > 10^{30}$.

De fato,

$$\begin{aligned} 2^{100} &> 10^{30} \iff 100.\log_{10} 2 > 30.\log_{10} 10 \\ &\iff 100.0,301 > 30 \iff 30,1 > 30. \end{aligned}$$

Por conseguinte, vem:

$$2^{100} > 10^{30} \iff \frac{1}{2^{100}} < \frac{1}{10^{30}}.$$

Assim,

$$0 < f(100) < \frac{100}{2^{100}} < \frac{10^2}{10^{30}} = 10^{-28}.$$

De sorte que:

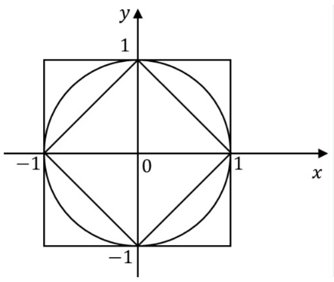
$$0 < f(100) < 10^{-28}.$$

■

✍ Exercício 4.6

Esboce os gráfico de $\mathbb{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 1\right\}, \mathbb{B} = \left\{u \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\right\}$ e $\mathbb{C} = \left\{u \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} = 1\right\}$,

Solução



(Relembrando, são definidas como normas euclidianas, norma da soma e norma do máximo) ■

✍ **Exercício 4.7**

Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.

(i) Se um número racional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $m.d.c.\,(p, q) = 1$
(p e q primos entre si) é tal que: $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, prove que:
$p \diagup a_0$ e $q \diagup a_n$ (p divide a_0 e q divide a_n).

(ii) $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é racional ou irracional? justifique.

Demonstração (i)

Com efeito, $f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, então temos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

ou ainda,

$$a_n p^n = a_{n-1} q p^{n-1} - \cdots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n \tag{1.1}$$

ou

$$a_0 q^n = -a_n p^n - \cdots - a_1 p q^{n-1}. \tag{1.2}$$

Agora, observe que:
q divide o 2^o membro de (1). Logo, q divide a_n ou q divide p. Como $m.d.c.\,(p, q) = 1$, segue-se que: $q \diagup a_n$. Analogamente, mostra-se que: $p \diagup a_0$.
(p divide a_0 : $p \diagup a_0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a_0 = kp$).

■

Demonstração (ii)

Se $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, então, temos:
$x^3 = 2 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}\,\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}$.
$x^3 = 4 + 3\sqrt[3]{-1\left(2-\sqrt{5}\right)} + 3\sqrt[3]{-1\left(2+\sqrt{5}\right)}$
$x^3 = -3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right) + 4$.
Donde, vem:

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Daí, as possíveis raízes racionais, se existirem, são: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
Á luz do algoritmo de Briott-Ruffini, temos: $x = 1$ é raiz. Assim, a equação toma a forma:

$$(x-1)\,.\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

Portanto, $x = 1$ é o único racional admissível.
Ou ainda,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1.$$

■

✍ **Exercício 4.8**

Os números reais p, q e α são, tais que: $p > 0, q > 0$ e $\alpha > 1$. Prove que:

$$\frac{p+\alpha^2 q}{p+q} > \alpha \Longrightarrow \frac{p}{q} < \alpha.$$

Demonstração

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \frac{p+\alpha^2 q}{p+q} &> \alpha \Longrightarrow p+\alpha^2 q > p\alpha + q\alpha \\ &\Longrightarrow p\left(1-\alpha\right) > q\alpha\left(1-\alpha\right) \Longrightarrow \frac{p}{q} < \alpha. \end{aligned}$$

■

Capítulo 5 - Pensando um pouco mais

Frases de Leonhard Euler

"Matemáticos tem tentando em vão, até o dia de hoje, descobrir alguma ordem na sequência de números primos, e nós temos razões para acreditar que é um mistério no qual a mente humana jamais penetrará."
"Eu venho de um país onde pessoas são enforcadas quando elas falam."
"Por uma questão de brevidade, nós sempre representaremos o número 2.718281828459... pela letra e."
"Lógica é a base da certeza de todo o conhecimento que adquirimos."

Leonhard Euler nasceu na Basileia (Suíça)
$(1707 - 1783, 76$ anos, São Petersburgo, Rússia $)$

Neste capítulo, resolveremos problemas envolvendo corpo ordenado completo, indução finita sobre n, módulo e desigualdades envolvendo majorações. Bem como, densidade dos racionais e irracionais no corpo ordenado completo dos números reais. Uma motivação importante aos supremos essenciais que não aparecem em textos de análise na reta. Alguns problemas envolvendo majorações com tema não usual como corda de uma elipse e majorações de tais comprimentos, majorações envolvendo funções exponenciais.

Capítulo Exercício

1. *O.B.M.-Olimpíada Brasileira de Matemática*
Prove que, para todo n natural, vale a desigualdade:
$$P_n : \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Demonstração *Afirmação 1*
Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, prove que:
$$\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Sugestão:
Basta fazer algumas manipulações básicas para obter:

$$\begin{aligned}
(2n+1)\sqrt{3n+4} &\leq (2n+2)\sqrt{3n+1}\\
&\Longleftrightarrow (2n+1)^2(3n+4) \leq (2n+2)^2(3n+1)\\
&\Longleftrightarrow \left(4n^2+4n+1\right)(3n+4) \leq \left(4n^2+8n+4\right)(3n+1)\\
&\Longleftrightarrow \left(12n^3+28n^2+18n+4\right) \leq 12n^3+28n^2+20n+2\\
&\Longleftrightarrow 18n \leq 20n,\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.
\end{aligned}$$

Agora, voltando ao problema dado usando indução finita sobre n, temos:
(i) Para $n=1$, tem-se: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3.1+1}}$.
(ii) Suponha válido para n. Isto é,

$$P_n : \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

(hipótese da indução)
Então, tem-se que:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}.\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

À luz da *afirmação 1*,

$$\frac{(2n+1)}{(2n+2)}.\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}},$$

segue-se que:

$$P_{(n+1)} : \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}.\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Portanto, P_n é válido via indução finita sobre n.

■

2. Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica. Então, mostre que:

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n,$$

é simétrica.

Demonstração
Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica, então, por definição, tem-se:
$\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$.
Qeremos provar que:

$$\mathbb{S}^T = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}.$$

Inicialmente, provemos por indução finita sobre n que: $(\mathbb{A}^n)^T = \left(\mathbb{A}^T\right)^n$ e $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Daí, segue-se que: $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$, vamos mostrar!
De fato,
(i) Para $n=2$, tem-se:

$$\left(\mathbb{A}^2\right)^T = (\mathbb{A}\mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T\mathbb{A}^T = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}^2.$$

(ii) Suponha válido para n, isto é, $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$, então, queremos mostrar para $n+1$

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Vejamos

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = (\mathbb{A}^n\mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T.(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^T &= \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j\right)^T = (I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n)^T \\ &= \left(I^T + \mathbb{A}^T + \ldots + (\mathbb{A}^n)^T\right) \\ &= I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\mathbb{S}$ é uma matriz simétrica.

■

3. Vale salientar que usamos este resultado: $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

Demonstração

De fato,

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T_{ji} = (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{A}_{i\alpha}\mathbb{B}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{B}^T_{j\alpha}\mathbb{A}^T_{\alpha i} = \left(\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T\right)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T.$$

■

4. Generalize!

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}^T_n.\mathbb{A}^T_{(n-1)}\ldots\mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1.$$

Demonstração

Usando indução finita sobre n é fácil ver que:

(i) Para $n = 2$, temos:

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2)^T = \mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1$$

Caso anterior

(ii) Suponha válido para n, ou seja,

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}^T_n.\mathbb{A}^T_{(n-1)}\ldots\mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1.$$

Hipótese de indução

Então, falta mostrar para $n+1$.

Basta notar que:

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}^T_{(n+1)}.\overbrace{(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n)^T}^{\text{hipótese de indução}} = \mathbb{A}^T_{(n+1)}.\overbrace{\mathbb{A}^T_n\ldots\mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1}^{\text{hipótese de indução}}.$$

Logo,

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}^T_{(n+1)}.\mathbb{A}^T_n\ldots\mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1.$$

■

5. Sejam a_1, a_2 e a_3 números reais positivos. Prove que:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\,.\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

Generalize.

Demonstração

À luz dadas desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[3]{a_1.a_2a_3} \leq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)}{3}. \tag{1}$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\frac{1}{a_3}} \leq \frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)}{3}. \tag{2}$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} a_j} \cdot \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} \frac{1}{a_j}} = \sqrt[3]{a_1.a_2a_3}.\sqrt[3]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\frac{1}{a_3}} = 1,$$

obtemos:

$$3^2 \leq (a_1 + a_2 + a_3) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)$$

■

6. Sejam $a_j \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\,.\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Demonstração

1^o modo:

Sejam $a_j \in \mathbb{R}$, com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, então, façamos por simplicidade

$$u = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) \text{ e } v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Além disso, veja que resultados lindos e elegantes, usando a norma euclidiana e o produto interno usual, temos:

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{a_1 + \ldots + a_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \|v\| = \sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} \\ &\text{e} \\ \langle u, v\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right) = \sqrt{a_1}.\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \sqrt{a_n}.\frac{1}{\sqrt{a_n}} = n. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o belíssimo resultado:

$$n = \left|\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right| \leq \sqrt{a_1 + \ldots + a_n}.\sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

e, portanto, elevando-se ao quadrado, ambos os membos da desigualdade, vem:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right).$$

■

2^o modo:

À luz dadas desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}. \quad (1)$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right)}{n}. \quad (2)$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \cdot \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} = \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}} = 1,$$

obtemos:

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right)$$

■

Revisitando as densidades dos números racionais e irracionais em $\mathbb{R}$

7. $\mathbb{Q}$ é "denso"em $\mathbb{R}$, isto é, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que; $x < r < y$.

Demonstração

Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > \frac{1}{y - x} \Longrightarrow ny - nx > 1. \quad (1)$$

Seja $m \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$m - 1 < nx < m. \quad (2)$$

Agora, decorre de (2) que $nx < m \Longrightarrow x < \frac{m}{n}$. Além disso, de (1) e (2), temos: $m \leq nx + 1 < ny \Longrightarrow \frac{m}{n} < y$ e, portanto, $x < \frac{m}{n} < y$.

■

8. $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ é "denso"em $\mathbb{R}$, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe z irracional, tal que:

$$x < z < y.$$

Demonstração

Basta usar o resultado do item anterior, destacando os números reais $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$, obtendo um número racional $r \neq 0$, tal que: $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$. Então, $z := r\sqrt{2}$ é irracional satisfazendo $x < z < y$. ■

9. Verifique se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por : $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$

é periódica sem período fundamental.

Solução *Sugestão: Basta notar que* $f(x+p)=f(x)\,,\forall x\in\mathbb{R}.$

■

10. Dê exmplos de soma de funções periódicas que não é periódica.
Escolha $f(x)=\sin x+\sin(\alpha x)$, com $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (irracional). Mostre que:
f não é uma função periódica.
Demonstração
Por definição, temos:

$$\begin{aligned}f(x+p)&=f(x)\\ \sin(x+p)+\sin(\alpha x+\alpha p)&=\sin x+\sin(\alpha x)\Longleftrightarrow\\ \sin(x+p)-\sin x&=-\left[\sin(\alpha x+\alpha p)-\sin(\alpha x)\right].\end{aligned}$$

Note que: $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a$.
Assim,

$$\begin{aligned}\sin(x+p)-\sin x&=-\left[\sin(\alpha x+\alpha p)-\sin(\alpha x)\right]\\ 2\sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right)&=-2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x+\frac{\alpha p}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right)&=-\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x+\frac{\alpha p}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos(x)&=-\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos(\alpha x).\end{aligned}$$

Se $x=\frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right)=0\Longrightarrow\frac{\alpha p}{2}=k_1\pi\Longrightarrow\alpha p=2k_1\pi$, $k_1\in\mathbb{Z}$,
por outro lado, temos:
Se $\alpha x=\frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{p}{2}\right)=0\Longrightarrow\frac{p}{2}=k_2\pi\Longrightarrow p=2k_2\pi$, $k_2\in\mathbb{Z}$.
Daí, vem: $\alpha 2k_2\pi=2k_1\pi\Longrightarrow\alpha=\frac{k_1}{k_2}$, com $k_2\neq 0$. Absurdo! Visto que:
α é irracional.
De sorte que f não é periódica.

■

11. Seja f uma função dada por:

$$f(x)=x^3+x.$$

Prove que:
(i) $|f(x)-f(2)|\leq 20.\,|x-2|$ para $0\leq x\leq 3$;
(ii) Dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$, tal que:

$$|f(x)-f(2)|=\left|x^3+x-10\right|<\epsilon \text{ desde que: } |x-2|<\delta.$$

Demonstração
Observe que:
$|f(x)-f(2)|=\left|x^3+x-10\right|=\left|(x-2).\left(x^2+2x+5\right)\right|.$
Agora, $0\leq x\leq 3\Longrightarrow|x|\leq 3$,
por conseguinte, obtemos:
$\left|(x-2).\left(x^2+2x+5\right)\right|\leq|x-2|.\left[|x|^2+2|x|+5\right]\leq 20|x-2|,$

Visto que: $\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 3^2 + 2.3 + 5 = 20.$
Logo,
$$|f(x) - f(2)| \leq 20.|x-2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3.$$

Algumas Majorações:
$|x-2| < 1 \Longrightarrow 1 < x < 3 \Longrightarrow |x| \leq 3$ e
$$|(x-2)|.\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 20|x-2| < \epsilon \Longrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{20}.$$
Assim, basta tomar $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{20}\right\}$.

Demonstração

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{20}\right\} > 0$, tal que:
$|x-2| < 1 \Longrightarrow |x| \leq 3 \Longrightarrow \left|x^2 + 2x + 5\right| \leq \left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 20$ e
$|x-2| < \frac{\epsilon}{20} \Longrightarrow 20.|x-2| < \epsilon.$
Assim,
$20.|x-2|\left|x^2 + 2x + 5\right| < 20.\epsilon \Longrightarrow \left|(x-2).\left(x^2 + 2x + 5\right)\right| < \epsilon.$
Portanto,
$|f(x) - f(2)| = \left|x^3 + x - 10\right| < \epsilon$ desde que: $|x-2| < \delta.$ ■

Nota

Será abordado posteriormente no tópico de funções contínuas

É um erro comum, de alguns livros de Cálculo, dizer que: toda função contínua é aquela que traçamos o gráfico de f sem tirar o lápis do papel. Toda função deste tipo é contínua. Mas, nem toda função contína é deste tipo. Seja $\mathbb{X}$ um conjunto discreto (um conjunto é discreto se todo ponto de $\mathbb{X}$ é isolado). Assim, toda função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in \mathbb{X}$. De fato,
$$\begin{aligned} (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathbb{X} &= \{x_0\} \Longrightarrow |x - x_0| < \delta,\ x \in \mathbb{X} : \\ x &= x_0 \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon,\ \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

■

12. Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$ num corpo ordenado K, prove que, dados $a_1, a_2,$ $a_3 \ldots, a_n \in K$ tais que: $a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n \neq 0$, tem-se: $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_j y_j} = \frac{x_1}{y_1}.$

Demonstração

Se $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = a$, então, temos:
$$\begin{cases} x_1 = a y_1 \\ x_2 = a y_2 \\ \vdots \\ x_n = a y_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 x_1 = a_1 a y_1 \\ a_2 x_2 = a_2 a y_2 \\ \vdots \\ a_n x_n = a_n a y_n \end{cases} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a \sum_{j=1}^{n} a_j y_j.$$
Logo,
$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} a_j y_j} = \frac{x_1}{y_1}.$$

■

13. Dividir um número "a"em partes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proporcionais a:
$a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, tais que: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$. Prove que:
$x_1 = \frac{aa_1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$, $x_2 = \frac{aa_2}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$ e $x_n = \frac{aa_n}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$.

Demonstração

Com efeito, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é diretamente proporcional a $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, com que: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$. Então, tem-se:
$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = B$. Consequentemente, temos:

$$\begin{cases} x_1 = Ba_1 \\ x_2 = Ba_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = Ba_n \end{cases} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j = B \sum_{j=1}^{n} a_j \Longrightarrow \frac{a}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} = B.$$

Daí, segue-se que:

$$x_1 = \frac{aa_1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}, \quad x_2 = \frac{aa_2}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}, \quad e \quad x_n = \frac{aa_n}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$$

■

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto

$$Z_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$$

é fechado. Conclua que, se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas então

$$C = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Fatos que ajudam:

$(F1)$ S é fechado quando $\partial S \subset S$, onde ∂S denota a fronteira de S.
$(F2)$ S é fechado$\Longleftrightarrow$ $S = \bar{S} = S \cup \partial S$, onde $\bar{S}$ é o fêcho de S.
Queremos provar que Z_f é fechado. Isto é, $\bar{Z}_f = Z_f$.

Demonstração

1º caso: $Z_f \subset \bar{Z}_f$

Seja $x \in Z_f$, então, como $\bar{Z}_f = Z_f \cup \partial Z_f$, segue-se que: $x \in \bar{Z}_f$.
Logo $Z_f \subset \bar{Z}_f$.

2º caso: $\bar{Z}_f \subset Z_f$

Seja $x \in \bar{Z}_f$, então, existe (x_n), com $x_n \in Z_f$, tal que: $x_n \to x$.
Agora, por definição $f(x_n) = 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, segue-se que:

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x),$$

donde, vem $f(x) = 0$, ou ainda, $x \in Z_f$ e, portanto, $\bar{Z}_f \subset Z_f$.
Combinando os casos (1) e (2), obtemos:

$$\bar{Z}_f = Z_f.$$

Consequetemente, façamos $h = f - g$, então,

$$C_h = \{x \in \mathbb{R}; h(x) = f(x) - g(x) = 0\},$$

pelo item anterior, C_h é fechado, isto é, C é um conjunto fechado.

■

15. Sejam y, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,
tais que: $\xi > 0$ e $y_0 \neq 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi\,|y_0|^2}{2}\right\}$$

$y \neq 0$, prove que:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

Vejamos *alguma majorações* antes de fazer a demonstração:
$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y||y_0|}$ e $|y_0| - |y| \leq |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \implies$
$|y| - |y_0| > -\frac{|y_0|}{2} \implies |y| > \frac{|y_0|}{2} \implies \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$.
Assim,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| &= \frac{|y_0 - y|}{|y|\,|y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2}\,|y_0 - y| < \frac{2}{|y_0|^2}\,\frac{\xi\,|y_0|^2}{2} = \xi \\ &\implies \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.\end{aligned}$$

Demonstração
Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi|y_0|^2}{2}\right\} > 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \implies \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}. \tag{1}$$

$$|y - y_0| < \frac{\xi\,|y_0|^2}{2} \implies \frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \xi. \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\frac{1}{|y|}\frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \frac{2}{|y_0|}\xi.$$

De sorte que:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

■

16. Sejam x, y, x_0, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,
tais que: $\xi > 0$

$$|x - x_0| < \min\left\{\frac{\xi}{2\left(|y_0| + 1\right)}, 1\right\}$$

e

$$|y - y_0| < \frac{\xi}{2\left(|x_0| + 1\right)}.$$

Prove que:

$$|xy - x_0 y_0| < \xi.$$

Alguma majorações:

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |xy - x_0y + x_0y - x_0y_0| \\ &= |y(x - x_0) + x_0(y - y_0)| \\ &\leq |y|\,|(x - x_0)| + |x_0|\,|(y - y_0)|\,. \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} |x| - |x_0| &\leq |x - x_0| < 1 \Longrightarrow |x| \leq |x_0| + 1 \\ &\quad \text{e} \\ |y| &\leq |y_0| + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &\leq |y|\,|(x - x_0)| + |x_0|\,|(y - y_0)| \\ &\leq (|y_0| + 1)\,.\frac{\xi}{2(|y_0| + 1)} + (|x_0| + 1)\,.\frac{\xi}{2(|x_0| + 1)}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$|xy - x_0y_0| < \xi.$$

Demonstração

Faça a redação matemática da demonstração.

■

17. Seja f uma função dada por:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Prove que:
(i) $|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right).|x - 1|$ para $x > 0$;
(ii) $|f(x) - 2| \leq 3\,|x - 1|$ para $x > \frac{1}{2}$;
(iii) $f(x) \geq 2$, para todo $x > 0$.

Demonstração

(i) Com efeito, $|f(x) - 2| = \left|x + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|\frac{x^2-2x+1}{x}\right|$
$\Longrightarrow \left|\frac{x^2-2x+1}{x}\right| = \left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right|.|x - 1| \leq \frac{|x|+|1|}{|x|}.|x - 1|\,.$
Como $x > 0$, segue-se que:

$$|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right).|x - 1|\,.$$

(ii) Para $x > \frac{1}{2}$, então, $\frac{1}{x} < 2$ e, portanto, $1 + \frac{1}{x} < 3$.
Daí e do item anterior, obtemos:

$$|f(x) - 2| \leq 3\,|x - 1|\,.$$

(iii) Basta revisitar a desigualdade entre as médias: geométrica e aritmética, obtendo:

$$\sqrt{x.\frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2},\ x > 0.$$

Logo,

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

■

18. Se $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que: $\forall x \in]0,1[$, tem-se

$$|f(x)| < \frac{1}{2} \text{ e } f(x) = \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right],$$

então, verifique se:

$$|f(x)| < \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } 0 < x < 1 \text{ e } n = 1, 2, \cdots, n, \ldots$$

Demonstração *Usar indução finita sobre n*

(i) Para $n = 2$, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2} < f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{2} \\ \text{e} \\ -\frac{1}{2} < f\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} -1 < f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) < 1 \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{4} < \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] < \frac{1}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$|f(x)| < \frac{1}{2^2}.$$

(ii) Suponha válido para n. Então, falta mostrar para $n+1$.

Vejamos

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2^n} < f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{2^n} \\ \text{e} \\ -\frac{1}{2^n} < f\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{1}{2^n} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} -\frac{2}{2^n} < f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{2}{2^n} \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] < \frac{1}{2^{n+1}}. \end{array}\right.$$

Logo,

$$-\frac{1}{2^{n+1}} < f(x) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

ou ainda,

$$|f(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}, \forall x \in]0,1[, n = 1, 2, ...n, ...$$

■

19. Seja $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

(i) $\alpha = \sup f, \forall x \in S$;

(ii) Prove que: dado $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in S$, tal que:

$$f(x_0) > \alpha - \epsilon \Longleftrightarrow \sup f = \inf\{C; f(x) \leq C, \forall x\}$$

Demonstração

Com efeito, $f(x) \leq C, \forall x$, donde, C é cota superior para $f(x)$, $x \in S$.

Daí, vem: $f(x) \leq \alpha \leq C, \forall x \in S$. Além disso, dado $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in S$, tal que: $f(x_0) > \alpha - \epsilon$, ou seja, α é a menos das cotas superiores. Logo,

$$\alpha = \sup f.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq C, \forall x \in S \Longrightarrow \alpha \leq \inf X, \text{ onde:} \\ X &= \{C;\ f(x) \leq C, \forall x\}. \end{aligned}$$

Agora, sabe-se que por definição $\alpha \geq \inf X$.

De sorte que:

$$\alpha = \inf X,$$

ou ainda, ■

$$\sup f = \inf\{C; f(x) \leq C, \forall x\}.$$

■

Define-se:

$$\inf f := \sup \{C;\ C \leq f(x), \forall x\}.$$

Nota

Vale ressaltar que: se trocarmos $\forall x \in S$ por quase sempre (q.s.) a menos de um conjunto de medida nula à Lebesgue ou em quase todo ponto (q.t.p.) estabelecemos assim, o chamado Supremo Essencial

$$\text{supess}(f) := \inf \{C; f(x) \leq C,\ q.s.\}.$$

20. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, tais que: $x_1.x_2 \ldots x_n = 1$.
Verifique se:

$$(1 + x_1).(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 2^n.$$

Demonstração Basta notar que:

$$\begin{cases} \sqrt{1.x_1} \leq \frac{1+x_1}{2} \\ \sqrt{1.x_2} \leq \frac{1+x_2}{2} \\ \vdots \\ \sqrt{1.x_n} \leq \frac{1+x_n}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x_1} \leq 1 + x_1 \\ 2\sqrt{x_2} \leq 1 + x_2 \\ \vdots \\ 2\sqrt{x_n} \leq 1 + x_n \end{cases}.$$

Donde, obtemos:

$$\begin{cases} \overbrace{2.2\ldots 2}^{n \text{ vezes}} \leq (1 + x_1).(1 + x_2)\cdots(1 + x_n), \end{cases}$$

visto que $\sqrt{x_1.x_2 \ldots x_n} = 1$.
Portanto,

$$(1 + x_1).(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 2^n.$$

■

Nota

O mesmo problema, poderia ser provado ou não, por indução finita sobre n? Explique!

21. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), tais que: $1 < a < b < c$ e $b - a = c - b$, mostre que:

$$\frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}.$$

Demonstração

Basta observar que:

$$\sqrt{\ln a. \ln c} \leq \frac{\ln a + \ln c}{2} = \frac{\ln(ac)}{2} = \ln\left(\sqrt{ac}\right) < \ln\left(\frac{a+c}{2}\right) = \ln b$$

$$\sqrt{\ln a. \ln c} < \ln b.$$

Logo,

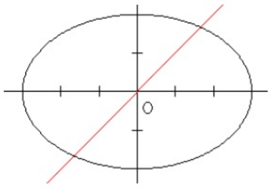
$$\ln a. \ln c < (\ln b)^2 \iff \frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}.$$

■

22. *Questão de autoria do Prof. Dr. Marcos Crispino*

Majorações

Dada a elipse descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e seja L o



comprimento da corda da elipse que contém a origem. Mostre que:

$$2b \leq L \leq 2a.$$

Demonstração

Com efeito, um conjunto de equações paramétricas da reta S, são dadas por

$$S : \begin{cases} x = mt \\ y = nt \end{cases} \tag{1}$$

onde: $v = (m, n)$ e $m^2 + n^2 = 1$.

Consequentemente, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \Longrightarrow \frac{(mt)^2}{a^2} + \frac{(nt)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow t^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) = 1 \\ &\Longrightarrow t^2\left(\frac{m^2b^2 + n^2a^2}{a^2b^2}\right) = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pm ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Daí, levando (2) em (1), obtem-se:

$$\begin{aligned} (a)\ t &= \frac{ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} \Longrightarrow A(x_1, y_1), \\ \text{onde } x_1 &= \frac{mab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} \text{ e } y_1 = \frac{nab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}}. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, vem:

$$\begin{aligned} (b)\ t &= \frac{-ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} \Longrightarrow B(x_2, y_2), \\ \text{onde } x_2 &= \frac{-mab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} \text{ e } y_2 = \frac{-nab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}}. \end{aligned}$$

Assim, o comprimento L, é descrito por:

$$\begin{aligned} L &= d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(2mab)^2 + (2nab)^2}{\left(\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}\right)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}}. \end{aligned}$$

Visto que: $m^2 + n^2 = 1$.

Logo,

$$L = \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}}.$$

Agora, observe que:

$$\begin{aligned} m^2b^2 + \left(1 - m^2\right) a^2 - a^2 &= m^2b^2 - m^2a^2 \\ &= m^2\left(b^2 - a^2\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Donde, vem:

$$\begin{aligned} \sqrt{m^2b^2 + n^2a^2} &\leq \sqrt{a^2} \Longrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} \\ &\Longrightarrow 2b \leq \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} = L. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Analogamente, temos:

$$\begin{aligned} m^2b^2 + \left(1 - m^2\right) a^2 - b^2 &= -b^2\left(1 - m^2\right) + \left(1 - m^2\right) a^2 \\ &= \left(1 - m^2\right)\left(a^2 - b^2\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sqrt{m^2b^2 + n^2a^2} &\geq \sqrt{b^2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} \leq \frac{1}{b} \\ &\Longrightarrow \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2 + n^2a^2}} = L \leq 2a. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Segue-se de (3) e (4) o resultado, ou ainda,

$$2b \leq L \leq 2a.$$

■

23. *Vestibular: COVEST 1999: Função e Majorações*
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \frac{x2^{-x}}{\left(2^{-x} + 1\right)^2},$$

então, verifique se: $0 < f(100) < 10^{-28}$.

Solução

Com efeito,

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2^x}}{\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)^2} = \frac{x2^x}{\left(1 + 2^x\right)^2},$$

então,

$$f(100) = \frac{100.2^{100}}{\left(1 + 2^{100}\right)^2} < \frac{100.2^{100}}{2^{200}} = \frac{100}{2^{100}}.$$

Afirmação: $2^{100} > 10^{30}$.
De fato,

$$\begin{aligned} 2^{100} &> 10^{30} \Longleftrightarrow 100.\log_{10} 2 > 30.\log_{10} 10 \\ &\Longleftrightarrow 100.0,301 > 30 \Longleftrightarrow 30,1 > 30. \end{aligned}$$

Por conseguinte, vem:

$$2^{100} > 10^{30} \Longleftrightarrow \frac{1}{2^{100}} < \frac{1}{10^{30}}.$$

Assim,

$$0 < f(100) < \frac{100}{2^{100}} < \frac{10^2}{10^{30}} = 10^{-28}.$$

De sorte que:

$$0 < f(100) < 10^{-28}.$$

■

24. *Normas equivalentes em espaços de dimensão finita*
Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, mostre que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|u\|_s \leq \|u\| \leq \|u\|_s,$$

ou seja, a norma euclidiana é equivalente a norma da soma.

Nota

Algumas normas:
$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *(norma euclidiana),*
$\|u\|_s = |x| + |y|$ *(norma da soma) e*
$\|u\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ *(norma do máximo).*

Demonstração

A priori,
$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} \Longrightarrow \|u\| \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = \|u\|_s \Longrightarrow \|u\| \leq \|u\|_s.$
Dai, vem:

$$\|u\| \leq \|u\|_s. \tag{1}$$

Além disso,
$(|x| - |y|)^2 \geq 0 \Longrightarrow |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y| \Longrightarrow 2\left(|x|^2 + |y|^2\right) \geq (|x| + |y|)^2$
$\Longrightarrow \|u\|_s = |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{|x|^2 + |y|^2} = \sqrt{2}\|u\|.$
Donde, obtemos:

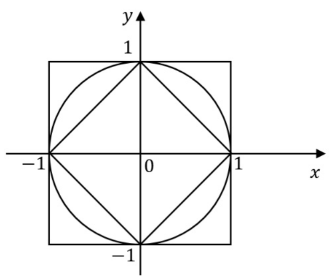
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_s \leq \|u\| \tag{2}$$

Agora, combinando os resultados (1) e (2), segue-se que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|u\|_s \leq \|u\| \leq \|u\|_s,$$

■

25. Esboce os gráfico de $\mathbb{A} = \left\{u \in \mathbb{R}^2; \|u\| = 1\right\}, \mathbb{B} = \left\{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_s = 1\right\}$ e $\mathbb{C} = \left\{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty = 1\right\}$, onde: $u = (x, y)$.



26. *Normas equivalentes em espaços de dimensão finita*

Dê um contra-exemplo para mostrar que as normas da soma e do máximo não satisfazem a identidade do paralelogramo.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

Basta tomar $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. Senão, vejamos:

$$\|e_1\|_s = \|(1,0)\|_s = 1e\ \|e_2\|_s = \|(0,1)\|_s = 1$$

$$\|e_1 + e_2\|_s = \|(1,1)\|_s = 2, \|e_1 - e_2\|_s = \|(1,-1)\|_s = 2.$$

Procedendo de form análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} \|e_1\|_\infty &= 1, \|e_2\|_\infty = 1, \|e_1+e_2\|_\infty = \max\{|1|,|1|\} = 1 \\ &\text{e} \\ \|e_1 - e_2\|_\infty &= \max\{|1|,|-1|\} = 1. \end{aligned}$$

■

27. Se um número real "a"é tal que: $0 \le a < \epsilon$, para qualquer número positivo ϵ, então, $a = 0$. Se $a - \epsilon < b$, $\forall \epsilon > 0$, então $a \le b$.

Demonstração

Com efeito, $0 \le a < \epsilon$, para $a > 0$, tome $\epsilon = \frac{a}{2}$, logo teríamos $0 \le a < \frac{a}{2}$ Absurdo! Portanto, $a = 0$.

■

28. Se $a - \epsilon < b$, $\forall \epsilon > 0$, então, $a < b + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

Demonstração

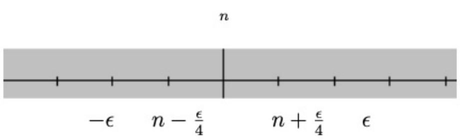
Suponha $a > b$, então, $a - b > 0 \Leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $\epsilon = a - b$. Então, tem-se:

$$a < b + \epsilon = b + a - b = a \Longleftrightarrow a < a.$$

Contradição! De sorte que: $a \le b$.

■

29. Seja $\epsilon > 0$ um número real dado. Construa uma família infinita $\{\mathbb{I}_n\}$ de intervalos abertos com as seguintes propriedades:
(i) Cada intervalo $\mathbb{I}_n$ contém o natural n;
(ii) A soma dos comprimentos de todos os intervalos da família é $\le \epsilon$.



Solução

Seja o natural n *do item* (i) *e seja* $\epsilon > 0$. *Construamos a seguinte família de intervalos* $\mathbb{I}_n$, *admitindo* $\delta = \frac{\epsilon}{4}$.

$\mathbb{I}_1 = \left(n - \frac{\epsilon}{4},\ n + \frac{\epsilon}{4}\right)$ *cujo comprimento é* $\frac{\epsilon}{2}$

$\mathbb{I}_2 = \left(n - \frac{\epsilon}{8},\ n + \frac{\epsilon}{8}\right)$ *cujo comprimento é* $\frac{\epsilon}{2^2}$

$\mathbb{I}_3 = \left(n - \frac{\epsilon}{16},\ n + \frac{\epsilon}{16}\right)$ *cujo comprimento é* $\frac{\epsilon}{2^3}$

$\vdots$

$\mathbb{I}_n = \left(n - \frac{\epsilon}{2^n},\ n + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$ *cujo comprimento é* $\frac{\epsilon}{2^{n-1}}$.

Agora, a soma dos comprimentos é descrito por :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \frac{\epsilon}{2^3} + \ldots + \frac{\epsilon}{2^{n-1}} &= \epsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \right) \\ &= \epsilon . \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \epsilon. \end{aligned}$$

Nota

Poderíamos ter tomado qualquer $\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$. *Vale ressaltar que: este tipo de argumento é fundamental para se provar o seguinte resultado. Todo subconjunto enumerável* $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$ *tem medida de Lebesgue zero.*

■

30. Determine para que valores de "a"da equação

$$1 + \sin^2(ax) = \cos x.$$

admite alguma solução não-nula.

Solução

Com efeito, $\sin^2(ax) \geq 0$, *então, temos :* $\sin^2(ax) = 0$ *ou* $\sin^2(ax) > 0$.

Afirmação: Não ocorre $\sin^2(ax) > 0$.

De fato, se $\sin^2(ax) > 0$, *então,* $\cos x > 1$. *Absurdo!*

Assim, $\left\{\begin{array}{c} \sin^2(ax) = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sin(ax) = 0 \\ e \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} ax = n_1\pi \\ e \\ x = 2n_2\pi \end{array}\right.$ *, desde que:*

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ *e* $n_2 \neq 0$ *(pois, buscamos soluções não-nulas).*

Consequentemente, obtemos:

$$ax = n_1\pi \Longrightarrow a(2n_2\pi) = n_1\pi \Longrightarrow a = \frac{n_1}{n_2},$$

e, portanto, a é um número racional.

Nota

No corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ *para todo* $X \in \mathbb{R}$ *, temos:*$X^2 \geq 0$.

■

31. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais,então, prove que:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

(*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

Demonstração

Ponha $f\,(t) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - ty_j)^2$, então, temos:

$$\begin{aligned} f\,(t) &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2t \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + t^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &= At^2 - 2Bt + C \geq 0, \end{aligned}$$

onde: $A = \sum_{j=1}^{n} y_j^2$, $B = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ e $C = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

$$f\,(t) = At^2 - 2Bt + C \geq 0 \Longleftrightarrow B^2 \leq AC.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right).$$

■

32. Um conjunto $\mathbb{G}$ de números reais é chama-se grupo aditivo quando $0 \in \mathbb{G}$ e $\forall x, y \in \mathbb{G}$. Então, $x \in \mathbb{G} \Longrightarrow -x \in \mathbb{G}$ e $x, y \in \mathbb{G} \Longrightarrow (x + y) \in \mathbb{G}$. Seja então $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$ um grupo aditivo de números reais. Indiquemos com $\mathbb{G}^+$ o conjunto dos números reais positivos pertencentes a $\mathbb{G}$. Excetuando o caso trivial $\mathbb{G} = \{0\}$, $\mathbb{G}^+$ é não-vazio. Suponhamos pois $\mathbb{G}^+ \neq \{0\}$. Prove que:
(i) Se $\inf \mathbb{G}^+ = 0$, então, $\mathbb{G}$ é denso em $\mathbb{R}$;
(ii) Se $\inf \mathbb{G}^+ = a > 0$, então, $a \in \mathbb{G}^+$ e $\mathbb{G} = \{0, \pm a, 2a, \ldots\}$.

Demonstração

(i) Suponhamos por absurdo que $\mathbb{G}$ não seja denso em $\mathbb{R}$. Então, $\bar{\mathbb{G}} \neq \mathbb{R}$, pois, $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, donde, existe $x \in \mathbb{R}$, tal que:$x \notin \bar{\mathbb{G}}$. Observamos que: $\inf \mathbb{G}^+ = 0 = [x + (-x)] \in \mathbb{G}$, pois $(\mathbb{G}, +)$ é um grupo aditivo, então $x \in \mathbb{G}$, por conseguinte, vem: $x \in \bar{\mathbb{G}}$. Contradição! Logo, $\bar{\mathbb{G}} = \mathbb{R}$ e como $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, segue-se que $\mathbb{G}$ é denso em $\mathbb{R}$.

■

(ii) Suponha por absurdo que $a \in \mathbb{G}^+$,pelo item anterior $\bar{\mathbb{G}} = \mathbb{R}$, então,
$a \in \bar{\mathbb{G}}$; como $\mathbb{G}^+ \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, segue-se que;
$a \notin \mathbb{G}^+ \cap \mathbb{G} \cap \subset \bar{\mathbb{G}}$. Daí, obtemos: $a \notin (\mathbb{G}, +)$ e $0 \in \mathbb{G}$. Donde, vem:
$0 = [a + (-a)] \in \mathbb{G} \Longrightarrow a \in \mathbb{G}$. Contradição! e, portanto, $a \in \mathbb{G}^+ \subset \mathbb{G}$.
Agora, note que:
$0 = [a + (-a)] \in \mathbb{G} \Longrightarrow 0 \in \mathbb{G}$,
$-a = \{-a + [a + (-a)]\} \in \mathbb{G} \Longrightarrow -a \in \mathbb{G}$,
$\pm 2a = \{-2a + [a + (-a)]\} \in \mathbb{G} \Longrightarrow \pm 2a \in \mathbb{G}$.
Daí, continuando com o processo, obtemos:

$$\mathbb{G} = \{0, \pm a, \pm 2a, \ldots\}$$

■

33. Sejam $a, b, c \in (0,1)$. Prove ou dê um contra-exemplo:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Demonstração

Basta notar que:

$$\sqrt{abc} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

e, analogamente,tem-se:

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt{(1-a)(1-b)} \leq \frac{(1-a)+(1-b)}{2}. \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2), segue-se que:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

■

34. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$, então, prove que:

$$|a+b|^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Demonstração
Com efeito,

$$|a+b| \leq |a| + |b| \leq 2\max\{|a|, |b|\}.$$

Por conseguinte, temos:

$$|a+b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq 2^p(\max\{|a|,|b|\})^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Logo,

$$|a+b|^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

■

35. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos prove que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Sugestão: Use o fato de que: $e^x \geq 1 + x$, $x \geq 0$.(Prova trivial)

Demonstração

Basta observar que:

$$e^{\frac{x_j}{A}-1} \geq \frac{x_j}{A},$$

com $j = 1, 2, \ldots, n$ e $A = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

Vejamos

$$\left\{\begin{array}{l} e^{\frac{x_1}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} \\ e^{\frac{x_2}{A}-1} \geq \frac{x_2}{A} \\ \vdots \\ e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_n}{A} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\left(e^{\frac{x_1}{A}-1}\right)\cdot\left(e^{\frac{x_2}{A}-1}\right)\ldots e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A}.\frac{x_2}{A}\ldots\frac{x_n}{A}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ e^{\overbrace{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}-n}^{=1}} \geq \frac{x_1.x_2\ldots x_n}{A^n}.\right.$$

Logo,

$$A \geq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n}.$$

A primeira desigualdade é imediata, de fato:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}{n}.$$

Logo,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n}.$$

De sorte que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

■

36. Se $y = \frac{1}{\sin 10^o} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^o}$, então, verifique se: $y = 4$

Solução

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sin 10^o} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^o} = \frac{\cos 10^o - \sqrt{3}\sin 10^o}{\frac{1}{2}\sin 20^o} \\ &= 4\frac{\left(\frac{1}{2}\cos 10^o - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^o\right)}{\sin 20^o} = \\ &= 4\frac{(\cos 60^o \cos 10^o - \sin 60^o \sin 10^o)}{\sin 20^o} = \\ &= 4\frac{\cos(60^o + 10^o)}{\sin 20^o} = 4, \end{aligned}$$

visto que: $\cos(70^o) = \sin(20^o)$.

■

37. Se $y = \sin 10^o \cos 20^o \cos 40^o$, então, mostre que: $y = \frac{1}{8}$.

Demonstração

Análoga a questão anterior. (Faça!)

38. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes dadas,

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x),$$

e x_1, x_2 são reais tais que: $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Prove que $x_2 - x_1 = m\pi$ para algum inteiro m.

Demonstração

Com efeito,

$\cos(a_1 + x) = \cos a_1 \cos x - \sin a_1 \sin x$,

$\frac{1}{2}\cos(a_2 + x) = \frac{1}{2}\cos a_2 \cos x - \frac{1}{2}\sin a_2 \sin x$

$\vdots$

$\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n\cos x-\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n\sin x$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n\right)\cos x \\ &\quad -\left(\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n\right)\sin x. \end{aligned}$$

Agora, fazendo

$$A=\cos a_1+\frac{1}{2}\cos a_2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n \ \text{ e } B=\sin a_1+\frac{1}{2}\sin a_2+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n,$$

segue-se que:

$$f(x)=A\cos x-B\sin x.$$

Além disso, tomando-se: $C=\sqrt{A^2+B^2}$, obtemos:

$$f(x)=C\left[\frac{A}{C}\cos x-\frac{B}{C}\sin x\right].$$

Daí, eixste $\phi\in\mathbb{R}$, de modo que:

$$\cos\phi=\frac{A}{C} \text{ e } \sin\phi=\frac{B}{C},$$

visto que: $\cos^2\phi+\sin^2\phi=1$. Assim,

$$f(x)=C\left[\cos\phi\cos x-\sin\phi\sin x\right].$$

Dito de outro modo

$$f(x)=C\cos(\phi+x).$$

Consequentemente, vem:

$$\begin{cases} f(x_1)=C\cos(\phi+x_1)=0 \\ \text{e} \\ f(x_2)=C\cos(\phi+x_2)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi+x_1=\frac{\pi}{2}+n_1\pi \\ \text{e} \\ \phi+x_2=\frac{\pi}{2}+n_2\pi \end{cases}$$

com $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$. De sorte que:

$$x_2-x_1=(n_2-n_1)\pi=m\pi, \text{ onde } m=(n_2-n_1)\in\mathbb{Z},$$

para algum m.

■

39. *Um exemplo de Corte de Dedekind*

(i) Mostre que

$$\mathbb{A}=\left\{x\in\mathbb{Q}|\ x\geq 0 \text{ e } x^2<2\right\}$$

não tem supremo em $\mathbb{Q}$.

(ii) prove que:

$$\mathbb{B}=\left\{y\in\mathbb{Q}|\ y>0 \text{ e } y^2>2\right\}$$

não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Majorações:

Considere $x\geq 0$ e $x^2<2$, não haverá problemas, uma vez que: só queremos provar que $\mathbb{A}$ não tem supremo em $\mathbb{Q}$. Escolha um racional $r<1$, daí, vem: $r^2<r$. Além disso, observe que:
$(x+r)^2=x^2+2xr+r^2<x^2+2xr+r=x^2+(2x+1)r<2\Longrightarrow$
$\Longrightarrow 0<r<\frac{2-x^2}{2x+1}\Longrightarrow(2x+1)r<2-x^2$.

Queremos mostrar que: $\forall x \in \mathbb{A}$, com $r < 1$ e $0 < r < \frac{2-x^2}{2x+1} \Longrightarrow (x+r) \in \mathbb{A}$.

Demonstração

De fato,
$$(x+r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 < x^2 + (2x+1)\,r < x^2 + 2 - x^2 = 2.$$
Ou ainda,
$$(x+r)^2 < 2.$$
Portanto,
$$(x+r) \in \mathbb{A}.$$
Procedendo de forma análoga, se mostra que
$$\mathbb{B} = \left\{ y \in \mathbb{Q} |\; y > 0 \text{ e } y^2 > 2 \right\}$$
não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Majorações:

Consideremos $y > 0$ e $y^2 > 2$ não haverá problemas, uma vez que: só queremos provar que $\mathbb{B}$ não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$. Escolha um racional $0 < r < \frac{y^2-2}{2y}$ (*como foi realizada esta escolha que parece mágica*),
Vejamos $(y-r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2$.
Daí, vem:
$$y^2 - 2 > 2ry \Longleftrightarrow 0 < r < \frac{y^2-2}{2y}.$$
Além disso, observe que:
$(y-r)^2 = y^2 - 2xr + r^2 > x^2 - 2xr > 2$

Queremos mostrar que: $\forall y \in \mathbb{B}$, com $0 < r < \frac{y^2-2}{2y} \Longrightarrow (y-r) \in \mathbb{B}$.

Demonstração

Consideremos $y > 0$ e $y^2 > 2$ não haverá problemas, uma vez que: só queremos provar que $\mathbb{B}$ não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$. Escolha um racional
$$0 < r < \frac{y^2-2}{2y} \Longrightarrow y^2 - 2 > 2ry \Longrightarrow y^2 - 2ry > 2$$
Além disso,
$$r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y} < \frac{y}{2} < y \Longrightarrow y - r > 0.$$
Dado $y \in \mathbb{B}$ podemos obter $y - r \in \mathbb{B}$, $y - r < y$.
Agora,
$$(y-r)^2 = y^2 - 2ry + r^2 > y^2 - 2ry > 2.$$
Logo,
$$(y-r) \in \mathbb{B}.$$

■

40. Sejam a, b, c, d elementos de $\mathbb{R}$, onde b e d são positivos. Prove que $\frac{a+c}{b+d}$ está compreendido entre o menor e o maior dos elementos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Generalize.

Algumas sugestões e comentários saindo da forma sucinta da estética na escrita matemática:
Não iremos provar, o caso particular $n = 2$, vamos admitir como trivial, antes porém, vejamos alguma notações que facilitará a escrita
$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, de formas análogas, temos:

$\sum_{j=1}^{n} b_j = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ e $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$. Agora, estamos munidos de ferramentas para iniciar nossa busca de solução. Vale ressaltar que:

Se houver dificuldades; não deixe em hipótese alguma, de particularizar, vejamos:

$\sum_{j=1}^{3} a_j = a_1 + a_2 + a_3$, $\sum_{j=1}^{3} b_j = b_1 + b_2 + b_3$ e $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} = \frac{\sum_{j=1}^{3} a_j}{\sum_{j=1}^{3} b_j}$. Neste caso,

queremos mostrar que:

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = \frac{\sum_{j=1}^{3} a_j}{\sum_{j=1}^{3} b_j} \leq \mathbb{M},$$

onde m e $\mathbb{M}$ são respectivamente, o menor e o maior dos números $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$, que para facilitar a redação matemática, escolhemos escrever na forma

$$m = \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}\right\} \text{ e } \mathbb{M} = \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}\right\},$$

desde que b_1, b_2 e b_3 sejam positivos.(Conseguimos enunciar de forma clara para $n = 3$), é assim que se dá o processo da descoberta, mesmo que modesta: conjecturar, particularizar, enfraquecer hipóteses e vê se satisfaz a conclusão).
Deixemos de prosopopeia e passemos a ação
Demonstração Com efeito,

$$\begin{cases} m \leq \frac{a_1}{b_1} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_3}{b_3} \leq \mathbb{M} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mb_1 \leq a_1 \leq \mathbb{M}b_1 \\ mb_2 \leq a_2 \leq \mathbb{M}b_2 \\ mb_3 \leq a_3 \leq \mathbb{M}b_3 \end{cases} \Longrightarrow$$
$m(b_1 + b_2 + b_3) \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq \mathbb{M}(b_1 + b_2 + b_3)$

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} \leq \mathbb{M} \Longrightarrow m \leq \frac{\sum_{j=1}^{3} a_j}{\sum_{j=1}^{3} b_j} \leq \mathbb{M}.$$

∎

41. Mostre que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

está compreendido entre o menor e o maior dos números $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, desde que: $b_1, b_2, \ldots b_n$ sejam todos positivos.

Demonstração

A generalização, se processa de forma inteiramente análoga:

Sejam $b_j > 0$ com $j = 1, 2, \ldots, n$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, então temos:

$$\begin{cases} m \leq \frac{a_1}{b_1} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \mathbb{M} \\ \quad\vdots \\ m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \mathbb{M} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mb_1 \leq a_1 \leq \mathbb{M}b_1 \\ mb_2 \leq a_2 \leq \mathbb{M}b_2 \\ \quad\vdots \\ mb_n \leq a_n \leq \mathbb{M}b_n \end{cases} \Longrightarrow$$

$m(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \mathbb{M}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \mathbb{M} \Longrightarrow m \leq \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j} \leq \mathbb{M}.$$

■

42. Todo subconjunto *enumerável* $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$ *tem medida de Lebesgue zero.*

$$\mathbb{E} = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$$

Demonstração

Com efeito e sem perda de generalidade seja $\mathbb{E} = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$enumerável e seja $\epsilon > 0$ dado e $\mathbb{I}_n = \left(x_n - \frac{\epsilon}{2^n}, x_n + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$. Então,

tem-se:

(i) $\mathbb{I}_n$ é enumerável;

(ii) $\text{med}\,(\mathbb{I}_n) = x_n + \frac{\epsilon}{2^n} - \left(x_n - \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \frac{\epsilon}{2^{n-1}}$;

(iii) $\mathbb{E} \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n$.

Assim,

$$0 \leq \text{med}\,(\mathbb{E}) \leq \text{med}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{med}(\mathbb{I}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n-1}} = \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Portanto, $\text{med}\,(\mathbb{E}) = 0$ à luz de Lebesgue.

■

43. Sejam $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ conjuntos de números reais positivos. Definamos $\mathbb{A}.\mathbb{B} = \{x.y;\ x \in \mathbb{A} \text{ e } y \in \mathbb{B}\}$. Prove que se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ forem limitados então,

(i) $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ é limitado, sendo

(ii) $\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} = \sup \mathbb{A}. \sup \mathbb{B}$ (iii) $\inf \mathbb{A}.\mathbb{B} = \inf \mathbb{A}. \inf \mathbb{B}$

Demonstração

(i) Com efeito, $\forall x_1 \in \mathbb{A}, \forall y_1 \in \mathbb{B}$, existem $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{cases} a_1 \leq x_1 \leq a_2 \\ b_1 \leq y_1 \leq b_2 \end{cases} \Longrightarrow \{a_1 b_1 \leq x_1 y_1 \leq a_2 b_2.$$

Logo, $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ é limitado.

■

(ii) $\forall x \in \mathbb{A}, \forall y \in \mathbb{B}$, tem-se: $x \leq \sup \mathbb{A}$ e $y \leq \sup \mathbb{B} \Longrightarrow x.y \leq \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}$.
Isto é, $\sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}$ é uma cota superior para o conjunto $\mathbb{A}.\mathbb{B}$ e, portanto,

$$\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} \leq \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, existem $x_0 \in \mathbb{A}$ e $y_0 \in \mathbb{B}$, tais que:

$$x_0 > \sup \mathbb{A} - \frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})} \text{ e } y_0 > \sup \mathbb{B} - \frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})},$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \frac{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}.\epsilon + \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 \Longrightarrow \\ x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \epsilon + \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 \Longrightarrow \\ x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \epsilon, \text{ pois, } \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}$ é a menor das cotas superiores para o conjunto $\mathbb{A}.\mathbb{B}$. Logo,

$$\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} = \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}.$$

■

44. *Envolvendo a reta real, pensando como um fio inextensível, sobre o círculo trigonométrico* $\mathbb{S}^1$ **imaginado como um carretel**

Mostre que:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1, \text{ onde } \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

A priori, vamos apresentar algumas das notações:
(i) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ Espaço quociente de $\mathbb{R}$ por $\mathbb{Z}$ (ii) $\simeq$:Isomorfismo (iii) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$.
Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, x \mapsto \varphi(x) = e^{2\pi x i}$, onde: $e^{2\pi x i} = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$
Afirmação 1: φ está bem definida
De fato, $x_1 = x_2 \Longrightarrow e^{2\pi x_1 i} = e^{2\pi x_2 i} \Longrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.
Logo, φ está bem definida.
Afirmação 2: φ é um homomorfismo
Com efeito, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:
$\varphi(x+y) = e^{2\pi(x+y)i} = e^{2\pi x i} \cdot e^{2\pi y i} = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$,
e, portanto, φ é um homomorfismo
Afirmação 3: $Ker(\varphi) = \mathbb{Z}$ (o núcleo de φ é $\mathbb{Z}$.)
Por definição, temos:

$$Ker(\varphi) = \left\{x_0 \in \mathbb{R} : \varphi(x_0) = e_1,\ e_1 \in \mathbb{S}^1\right\},$$

Note que: $(a,b)\cdot(1,0)=(a.1-b.0,a.0+b.1)=(a,b)$.
Assim, $(1,0)$ é o elemento neutro para $\langle\mathbb{C},\cdot\rangle$. Por conseguinte, obtemos:

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= (\cos(2\pi x_0),\sin(2\pi x_0))=(1,0)=e_1\\ &\Longrightarrow \begin{cases}\cos(2\pi x_0)=1\\ \sin(2\pi x_0)=0\end{cases} \Longrightarrow 2\pi x_0=2n\pi \Longrightarrow x_0=n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ou ainda, $Ker(\varphi)=\mathbb{Z}$.
Afirmação 4: φ é sobrejetora
$\forall z\in\mathbb{C}$, tal que: $|z|=1\Longrightarrow x^2+y^2=1$, onde: $z=(x,y)$. Além disso,

$$x^2\le x^2+y^2=1\Longrightarrow |x|\le 1\Longrightarrow -1\le x\le 1.$$

Então, existe $\theta\in\mathbb{R}$ (À luz do teorema do valor intermediário), tal que:

$$x=\cos\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \text{ e } y=\sin\left(\frac{\theta}{2\pi}\right).$$

Assim,

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)=e^{2\pi\frac{\theta}{2\pi}i}=e^{\theta i}=(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbb{S}^1.$$

Dito de outro modo, vem: φ é sobrejetora.
Agora, pelo teorema do homomorfismo, temos:

$$\mathbb{R}/Ker(\varphi)\simeq \operatorname{Im}(\varphi)\Longleftrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}\simeq\mathbb{S}^1.$$

45. *Elementos de Aritmética*
Prove que $\forall m\in\mathbb{Z}$, tem-se:

$$m^2\equiv 0 \pmod 4 \text{ ou } m^2\equiv 1 \pmod 4$$

Demonstração

Com efeito, $m=4q+r$, onde: $0\le r<4$. então, temos:
1 caso: $r=0\Rightarrow m^2=(4q)^2=4\left(4q^2\right)\Longrightarrow m^2\equiv 0\,(\text{mod}\,4)$.
2 caso: $r=1\Rightarrow m^2=(4q+1)^2=16q^2+8q+1\Longrightarrow m^2-1=4\left(4q^2+2q\right)$
$\Longrightarrow m^2-1\equiv 0\,(\text{mod}\,4)\Longrightarrow m^2\equiv 1\,(\text{mod}\,4)$.
3 caso: $r=2\Rightarrow m^2=(4q+2)^2=16q^2+16q+4\Longrightarrow m^2=4\left(4q^2+4q+1\right)$
$\Longrightarrow m^2\equiv 0\,(\text{mod}\,4)$.
4 caso: $r=3\Rightarrow m^2=(4q+3)^2=16q^2+24q+9$
$\Longrightarrow m^2-1=4\left(4q^2+6q+2\right)\Longrightarrow m^2-1\equiv 0\,(\text{mod}\,4)\Longrightarrow m^2\equiv 1\,(\text{mod}\,4)$.

■

46. *Elementos de Aritmética*
Ache x inteiro que satisfaz simultaneamente as congruências:

$$(A)\begin{cases}x\equiv 2 \pmod 5\\ 3x\equiv 1 \pmod 8\end{cases} \qquad (B)\begin{cases}3x\equiv 2 \pmod 5\\ 2x\equiv 1 \pmod 3\end{cases}$$

Demonstração

Fatos que ajudam:

Se $m.d.c.(a,m)=1$, existe solução inteira x para a congruência

$$ax\equiv b\,(\text{mod}\,m)$$

Mais ainda, se x_0 é uma solução , o conjunto ξ de todas as soluções da congruência é dada por:

$$\xi = x_0 + \mathbb{Z}m = \{x_0 + km,\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

(A)
1º Passo: $x \equiv 2 \pmod 5$
Uma solução particular é $x_0 = 7$. Logo,a solução geral será dada por:
$x = x_0 + mk = 7 + 5k$.
2º Passo: $3x \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow 3\,(7+5k) \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow 21 + 15k. \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow 15k. \equiv -20 \pmod 8$. Cuja solução particular é $k_0 = 4$
(Visto que: $8 \not/\, (15.4 + 20) \Longrightarrow 8 \not/\, 80 \Longrightarrow \exists p_1 : 80 = 8p_1$).
Daí, segue-se que $k = 4 + 8p$, $p \in \mathbb{Z}$.
Portanto,

$$\begin{aligned} x &= 7 + 5k = 7 + 5\,(4 + 8p) = 27 + 40p,\ p \in \mathbb{Z}. \\ x &= 27 + 40p,\ p \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

é a solução do sistema.

■

Solução alternativa: $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ 3x \equiv 1 \pmod 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2 &= 5k_1 \\ 3x - 1 &= 8k_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8x - 16 &= 40k_1 \\ 15x - 5 &= 40k_2 \end{cases}$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$
$\Longrightarrow \{23x - 21 = 40\,(k_1 + k_2) = 40p \Longrightarrow \{23x - 21 = 40p$
$\Longrightarrow 23 \equiv 21 \pmod{40}$. Note que: $x_0 = 27$ é solução particular. Portanto,

$$x = 27 + 40k,\ k \in \mathbb{Z},$$

é a solução do sistema.

■

(B) Basta proceder de forma análoga!

47. (i) Seja p um número primo e $1 \leq n < p$, n inteiro. Mostre que

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod p\,.$$

(ii) Prove que: se p é um número primo, então,

$$(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p\,, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração

(i)

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \frac{p!}{(p-n)!n!} == \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!} = \frac{pa_n}{n!}.$$

Como $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ é inteiro, segue-se que $n!$ não divide p, donde, vem: $n! \not/\, a_n$.
Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que: $a_n = n!k$
de sorte que:

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \frac{pa_n}{n!} = \frac{pn!k}{n!} = pk \Longrightarrow \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod p\,.$$

■

(ii)

$$(x+y)^p = x^p + \ldots + \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} x^{p-i}y^i + \ldots + y^p.$$

Pelo item anterior $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{p}$. Portanto,

$$(x+y)^p - (x^p + y^p) = pk,\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

■

48. Sejam K e L corpos. Uma função $f : K \to L$ chama-se um homomorfismo quando se tem

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(x.y) = f(x).f(y)$$

quaisquer que sejam $x, y \in K$.
(i) Dado um homomorfismo $f : K \to L$, prove que: $f(0) = 0$
(ii) Prove também que, ou $f(x) = 0$ para todo $x \in K$, ou então, $f(1) = 1$
e f é injetora.

Demonstração
(i) Com efeito, $f(0+0) = f(0) + f(0)$, então, $f(0) = 0$.

■

(ii) Note que: $f(1.1) = f(1).f(1) \Longrightarrow f(1)[1 - f(1)] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ \text{ou} \\ f(1) = 1 \end{cases}.$

Assim, teremos dois casos a considerar.
1º Caso: $f(1) = 0$, neste caso: $f(x) = f(x.1) = f(x).f(1) = f(x).0 = 0$.
Portanto,

$$f(x) = 0,\ \forall x \in K.$$

2º Caso: $f(1) = 1$ e f é injetora.
Afirmação: f é injetora: $\forall x_1, x_2 \in K : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.
Suponhamos $x_1 \neq x_2$, então, existe $b \in K : b \neq 0$, tal que:

$$(x_1 - x_2).b = 1$$

Agora,

$$f[(x_1 - x_2).b] = f(x_1 - x_2).f(b) = \overbrace{[f(x_1) - f(x_2)]}^{=0}.f(b) = 0. \tag{1}$$

Por outro lado, temos:

$$f[(x_1 - x_2).b] = f(1) = 1 \tag{2}$$

Consequentemente comparando (1) e (2), segue-se o absurdo!
Visto que supomos $x_1 \neq x_2$ e, portanto, $x_1 = x_2$.
Isto é, f é injetora.

■

49. Seja $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ um homomorfismo. Prove que, ou
$f(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{Q}$ ou $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{Q}$.

Demonstração

$$f(1)=[f(1)]^2 \Longrightarrow \begin{cases} f(1)=0 \\ \text{ou} \\ f(1)=1 \end{cases} \quad (\text{ problema anterior }).$$

Assim, teremos dois casos a analisar.

1º Caso: $f(x)=f(x.1)=f(x).f(1)=f(x).0=0, \forall x\in\mathbb{Q}$.

2º Caso: $f(1)=1$, neste caso, teremos:

(i) $x=n$, $n\in\mathbb{N}$, $n>0$ é fácil ver que: $f(0)=0$ e $\mathbb{Z}$

$$f(n)=f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ vezes}})=\underbrace{f(1)+f(1)+\ldots+f(1)}_{n \text{ vezes}})=nf(1)=n.$$

(ii) $x=m=-n$, $n>0$, $m\in\mathbb{Z}$

$$0=f(n+(-n))=f(n)+f(-n)=n+f(-n)\Longrightarrow f(-n)=-n=m.$$

Logo,

$$f(m)=m, \forall x\in\mathbb{Z}.$$

(iii) Observe que:

$$1=f(1)=f\left(n.\frac{1}{n}\right)=\overbrace{f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ vezes}}=\overbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ vezes}}=n.f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Logo,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}.$$

(iv) $x=\frac{m}{n}$, $m>0$, $m\in\mathbb{Z}$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ vezes}}=\underbrace{m.f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ vezes}}\Longrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}.$$

De sorte que:

$$f(x)=x, \forall x\in\mathbb{Q}.$$

∎

Nota

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função contínua, dado $x_0\in\mathbb{R}$, existe uma sequência de racionais (r_n) da densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, tal que:

$$r_n\to x_0 \text{ e } f(r_n)=r_n.$$

Agora, passando o limite e pela continuidade de f, temos:

$$f(x_0)=x_0, \forall x_0\in\mathbb{R}.$$

50. Descreva as classes de equivalência e o conjunto quociente em relação a $\sim$ induzida pela seguinte função: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Fatos que ajudam:

F_1) *É fácil ver que:* uma função $f : X \longrightarrow Y$ satisfazendo a

$$\forall x_1 x_2 \in X,\ x \sim y \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2.$$

define uma relação de equivalência no conjunto X (Neste caso, dizemos que $\sim$ é uma relação de equivalência induzida por f).

F_2) Uma função $f : A \longrightarrow B, Y \subseteq B$, quando $Y = \{y\}$; $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ é chamado **fibra** de f sobre y.

Solução

$$\begin{aligned} x \quad \sim \quad & a \Longleftrightarrow f(x) = f(a) \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = a^2 - 5a + 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x-a)(x+a) - 5(x-a) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x-a)(x+a-5) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = a \text{ ou } x = 5 - a. \end{aligned}$$

Fazendo um esboço do gráfico da função f descrita por: $f(x) = x^2 - 5x + 6$, claramente fazendo uma varredura dos pontos isolados formamos as classe de equivalências que são as fibras, desta forma vem:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \{a, 5-a\} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \bar{a} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \overline{5-a} \bigcup_{a \in \mathbb{R}} f^{-1}(a),$$

Onde:

$\bar{a} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim a\}$ *e* $f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R} : x \sim a\} = \bar{a}$

(A imagem inversa são as fibras de f sobre a).

Nota

$f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R} : x \sim a\} = \bar{a}$

(As classes de equivalências são as fibras de f)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\sim \ &= \left\{ f^{-1}(y_o), f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_n), \ldots \right\} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \bar{a} \\ &= \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \overline{5-a} = \left\{ \bar{a}, \overline{5-a} \right\} = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}} \bar{a} = f^{-1}(y_o) \text{ ou } \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \overline{5-a} = f^{-1}(y_1)$$

■

51. Sejam a, b e c pertencentes ao corpo ordenado completo $\mathbb{R}$. Prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Demonstração

Com efeito, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca. \end{cases} \qquad (I)$$

Agora, somando membro a membro as desigualdades de (I) obtemos:

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 2\left(ab + bc + ac\right).$$

De sorte que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

■.

52. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais,então, prove que:

$$\left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_ny_n\right)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Demonstração

Ponha $f(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - ty_j\right)^2$, então, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2t \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + t^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &= At^2 - 2Bt + C \geq 0, \end{aligned}$$

onde: $A = \sum_{j=1}^{n} y_j^2$, $B = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ e $C = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

$$f(t) = At^2 - 2Bt + C \geq 0 \Longleftrightarrow B^2 \leq AC.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right).$$

■

53. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa no intervalo I, Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pertemcem a I, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ pertencem a $[0,1]$ e $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$, prove que:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j)$$

Demonstração

Vejamos, basta usando indução finita sobre n.

(i) Para $n = 2$, temos:

$$\begin{array}{rcl} f(t_1 a_1 + t_2 a_2) & \leq & t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) \\ & \Updownarrow & \\ f\left(\sum_{j=1}^{2} t_j a_j\right) & \leq & \sum_{j=1}^{2} t_j f(a_j). \end{array}$$

(ii) Suponha válido para n (hipótese de indução) :

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j).$$

Então, falta mostrar para $n + 1$.
De fato,

$$\begin{array}{rcl} f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) & = & f\left[\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) + t_{n+1} a_{n+1}\right] \\ & \underset{\text{hipótese de indução}}{\leq} & \left(\sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j)\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) \\ & = & \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(a_j). \end{array}$$

Portanto,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(a_j).$$

■

54. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números não-negativos, com

$$\sum_{i=j}^{n} t_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1.$$

Prove que:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} \leq \sum_{j=1}^{n} t_j x_j,$$

onde o produtório e somatório são, descritos respectivamente por:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} = x_1^{t_1} . x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n.$$

Demonstração

À luz do problema (A), tomando-se $f(x) = e^x$, temos:

$$\begin{array}{rcl} f t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n & \leq & t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + \ldots + t_n f(a_n) \\ & \Updownarrow & \\ e^{t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n} & \leq & t_1 e^{a_1} + t_2 e^{a_2} + \ldots + t_n e^{a_n} \\ & \Updownarrow & \\ (e^{a_1})^{t_1} . (e^{a_2})^{t_2} \ldots (e^{a_n})^{t_n} & \leq & t_1 e^{a_1} + t_2 e^{a_2} + \ldots + t_n e^{a_n} \end{array}$$

Daí, fazendo $e^{a_j} = x_j$, com $j = 1, 2, \ldots, n$, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} (e^{a_1})^{t_1} . (e^{a_2})^{t_2} \ldots (e^{a_n})^{t_n} & \leq & t_1 e^{a_1} + t_2 e^{a_2} + \ldots + t_n e^{a_n} \\ & \Updownarrow & \\ x_1^{t_1} . x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n} & \leq & t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n. \end{array}$$

De sorte que:

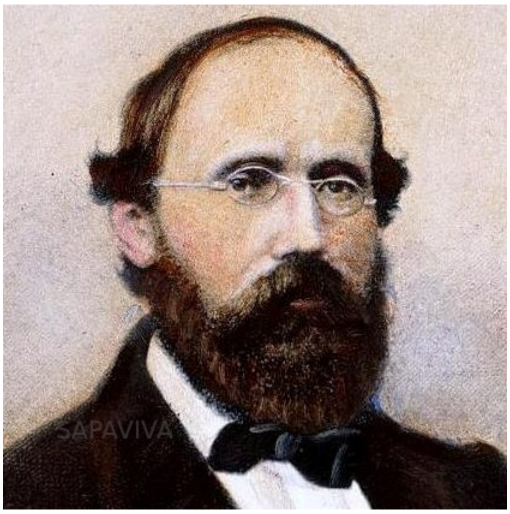
$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} \leq \sum_{j=1}^{n} t_j x_j,$$

■

Capítulo 6 - Números Complexos

Frase de Leonhard Bernhard Riemann

"If only I had the theorems! Then I should find the proofs easily enough."
"Se ao menos eu tivesse os teoremas! Então eu deveria encontrar as provas com grande facilidade."



Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em Breselenz, Reino de Hanôver (Alemanha)
$(1826 - 1866, 39$ anos, Selasca, Verbania, Itália)

Nos textos do Ensino Médio, em geral, são apresentados os números complexos a forma $z = (a, b)$ ou algébrica $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, onde: $i^2 = -1$ e $i = (0, 1)$, *é necessário fé, para aceita a identificação*:

$$z = (a, b) \simeq a + bi$$

Problema 6.1

A equação $x^2 + a = 0$, $a > 0$ não é solúvel em $\mathbb{R}$. Construir um corpo $\mathbb{C}$ que contenha um subcorpo $\varnothing \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, onde $\mathbb{S}$ seja isomorfo a $\mathbb{R}$ e a equação $x^2 + a = 0$, $a > 0$ seja solúvel.

Solução

Lema 6.1

Seja $\varnothing \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, *onde:*

$$\mathbb{S} = \left\{(a_o, 0) \in \mathbb{R}^2 : a_o \in \mathbb{R}\right\}.$$

$\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}$ *onde :* $\mathbb{S}$ *é isomorfo "a grosso modo bijetora"a* $\mathbb{R}$.

♡

De fato, $\langle \mathbb{S}, +, \cdot \rangle$ *é fechado*
$+ : (a,0) + (b,0) = (a+b,0) \in \mathbb{S}.$
$\cdot : (a,0) \,.\, (b,0,) = (a.b - 0.0, a.0 + 0.b) = (ab,0) \in \mathbb{S}.$
De sorte que: $\mathbb{S}$ *é fechado.*

$\blacksquare$

Consideremos $\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\Phi\,(x,0) = x.$$

Afirmação 1: Φ *é um homomorfismo*

Basta notar que:

$$\begin{aligned} (i)\;\; \Phi((a,0)+(b,0)) &= \Phi\,(a+b,0) = a+b = \Phi\,(a,0) + \Phi\,(b,0) \\ (ii)\;\; \Phi((a,0)\,.\,(b,0)) &= \Phi\,(a.b,0) = a.b = \Phi\,(a,0)\,.\Phi\,(b,0)\,. \end{aligned}$$

Portanto, Φ *é um homomorfismo.*

$\blacksquare$

Afirmação 2: Φ *é injetora.*

De fato,

$$\Phi\,(a_o,0) = \Phi\,(b_o,0) \Rightarrow a_o = b_o \Rightarrow (a_o,0) = (b_o,0)$$

Usando uma equivalência tautológica, temos:

$$a_o \neq b_o \Rightarrow (a_o,0) \neq (b_o,0) \Rightarrow \Phi\,(a_o,0) \neq \Phi\,(b_o,0)\,.$$

Logo, Φ *é injetora.*

Afirmação 3: Φ *é sobrejetora.*

Com efeito, note que:

$$\forall m_o \in \mathbb{R}, \exists\,(m_o,0) \in \mathbb{S} : \Phi\,(m_o,0) = m_o.$$

ou ainda, Φ *é sobrejetora.*
Por conseguinte, vem : Φ *é bijetora.*

$\blacksquare$

Nota

$(A)\ (a,0) \simeq a$
$(B)\ (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi$
$(C)\ i^2 = (0,1)\,.\,(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) \simeq -1.$
De sorte que: $z = (a,b) \simeq a + bi$, *onde* $\operatorname{Re}(z) = a$ *e* $\operatorname{Im}(z) = b$.

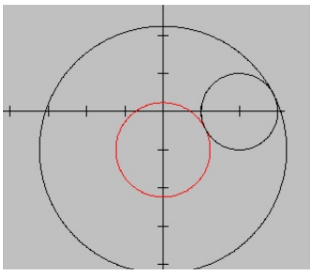
Capítulo Exercício

1. *Máximo e Mínimo do módulo de um complexo sobre certas restrições*

   Determine os valores máximos e mínimos de $|z+i|$ quando $|z-2|=1$.

   Solução

   Com efeito, seja $z = x+yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, então,
$$|z-2| = |(x-2)+yi| = \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 1 \Rightarrow (x-2)^2+y^2 = 1. \qquad \text{(I)}$$
   A referida equação descreve uma circunferência de centro $C_1\,(2,0)$ e raio $r=1$. Além disso,
$$|z+i| = a \Rightarrow |x+(y+1)i| = a.$$
   Daí, procedendo de forma análoga, obtemos:
$$x^2+(y+1)^2 = a^2.$$
   Esta equação apresenta o lugar geométrico de uma circunferência de centro $C_2\,(0,-1)$ e raio a. Agora, a distância entre os centros C_1 e C_2, é dada por: $d\,(C_1, C_2) = \sqrt{5}$ Assim, os pontos devem está sobre a circnferência (I)
   e, portanto,
   $\max|z+i| = a_1 = \sqrt{5}+1$ *e* $\min|z+i| = a_2 = \sqrt{5}-1$.
   Veja figura descita abaixo:



$C_1\,(2,0)$ e $C_2\,(0,-1)$

■

2. *Representação matricial de um número complexo*

   A representação matricial de um número complexo $z = x+yi$ é dada pela função $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$, onde:
$$\Phi\,(z) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$
   Sejam z, w dois números complexos, então, mostre que:
   (i) $\Phi\,(z+w) = \Phi\,(z) + \Phi\,(w)$
   (ii) $\Phi\,(z\cdot w) = \Phi\,(z)\cdot\Phi\,(w)$
   (iii) $z \neq 0$, tem-se: $\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = [\Phi\,(z)]^{-1}$
   (iv) Φ é injetora.

Solução

Vamos considerar (i) *e* (ii) *como triviais.*

(iii) *Nesta caso, basta observar que:*

$$\Phi(1) = \Phi(1+0i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2,$$

onde: $\mathbb{I}_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *é a matriz identidade do espaço de todas as matrizes de ordem* 2 *com entradas em* $\mathbb{R}$. *Desta forma é imeditato que:*

$$\Phi(1) = \Phi\left(\frac{1}{z}\cdot z\right) = \Phi\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\Phi(z) = \mathbb{I}_2.$$

O descrito acima nos diz que $\Phi(z)$ *é uma matriz invertível, sendo:* $z \neq 0$, *além disso, nos dá:*

$$\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = [\Phi(z)]^{-1}.$$

Dito de outra forma, $\Phi\left(\frac{1}{z}\right)$ *que é a matriz do complexo* $\frac{1}{z}$ *é dada pela matriz inversa de* $\Phi(z)$.

■

(iv) *Afirmação :* Φ *é injetora.*

De fato, $\forall z_1 = x_1 + y_1 i$ *e* $\forall z_2 = x_2 + y_2 i$, *com* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, *temos:*

$$\Phi(z_1) = \Phi(z_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 = z_2.$$

De sorte que: Φ *é injetora.*

Nota *Poderíamos ter determinado o núcleo (**kernel**) do homomofismo* Φ, *a saber:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\Phi) &= \left\{ z_0 = x_0 + y_0 i \in \mathbb{C} : \Phi(z_0) = \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_0 = 0 + 0i. \end{aligned}$$

Portanto,

$\mathrm{Ker}(\Phi) = \{z_0 = 0 + 0i\} \Leftrightarrow \Phi$ *é injetora.*

■

3. Seja $f(z) = z^n + a_{(n-1)}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, um polinômio com coeficiente $a_n = 1$. Mostre que para $|z|$ suficiente grande, temos:

$$|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2}|z|^n.$$

Demonstração

Basta escolher

$$\frac{|z|^{n-j}}{|a_j|} \geq 2n \Rightarrow \frac{|a_j|}{|z|^{n-j}} \leq \frac{1}{2n},$$

onde: $0 \leq j \leq n-1$.

Senão, vejamos

$$\begin{cases} \frac{|a_0|}{|z|^n} \leq \frac{1}{2n} \\ \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} \leq \frac{1}{2n} \\ \vdots \\ \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \frac{1}{2n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{|a_0|}{|z|^n} + \quad \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \quad \cdots \quad + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ vezes}} = \frac{1}{2}. \right.$$

Agora,

$$\begin{aligned} |f(z) - z^n| &= \left|a_{(n-1)} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| = |z|^n \cdot \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \\ &\leq |z|^n \cdot \left[\frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|}\right] \\ &\leq |z|^n \cdot \left(\overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ vezes}}\right) = \frac{1}{2}|z|^n. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2}|z|^n.$$

■

4. *Olimpiada Brasileira de Matemática Universitária*

Seja $f(x) = (x+1)^m + x^m + 1$, com m inteiro positivo. Para que valores de m, se tem: $f(x)$ é divisível por $g(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2$?

Solução

Basta observar que $\alpha = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *é raiz dupla de* $g(x)$, *temos que* α *também é raiz dupla de* $f(x)$. *Assim, temos que:*

$$\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ f'(\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^m + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^m = -1 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{m-1} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{m-1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Dito de outro modo, temos:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2m\pi}{3}\right) + \left(\sin\left(\frac{m\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2m\pi}{3}\right)i\right) = -1 \\ \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right) + \left(\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right)i\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Consequentemente, fazendo $a = \frac{m\pi}{3}$, *obtemos:*

$$\begin{cases} \cos a + \cos 2a = -1 \\ \sin a + \sin 2a = 0 \\ \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Agora, da (1^a) *equaçãodo sistema* (3), *resulta que:*

$$2\cos^2 a + \cos a = 0.$$

Logo,

$$\cos a = 0 \text{ ou } \cos a = \frac{-1}{2},$$

e, por conseguinte, vem:

$$a = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } a = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

isto é,

$$\frac{m\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \frac{m\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Portanto,

$$m = \frac{3+6k}{2} \text{ ou } m = \pm 2 + 6k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Daí, substituindo estes valores de m nas demais equações do sistema (3), vê-se que o único valorde m que as verifica é:

$$m = -2 + 6k.$$

■

5. *Um número Gaussiano* é um número complexo cuja parte real e imaginário é inteira.

Denotamos por

$$\mathbb{G} = \mathbb{Z}[i] = \{m + in :\ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que: A soma e o produto de dois números Gaussianos são Gaussianos. Ache uma condição necessária e suficiente para que um número Gaussiano seja invertível.Ache todos os números invertíveis de $\mathbb{G}$.

Demonstração

Sejam $z_1 = m_1 + n_1 i$ e $z_2 = m_2 + n_2 i$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{G}$, então, facilmente, obtemos:

$$(z_1 + z_2) \in \mathbb{G} \text{ e } (z_1 \cdot z_2) \in \mathbb{G}.$$

Agora, seja $\alpha \in \mathbb{G}$, $\alpha \neq 0$, então, existe $\beta \in \mathbb{G}$ tal que: $\alpha \cdot \beta = 1$.
Assim, a função norma satisfaz

$$N(\alpha) \cdot N(\beta) = 1 \Rightarrow N(\alpha \cdot \beta) = N(1) = 1,$$

e portanto, $N(\alpha) \in \mathbb{Z}^+$, segue-se que:$N(\alpha) = 1$. Escolha $\alpha = x + yi$, temos:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

cujas soluções em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ são $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.
Portanto, $\alpha \in \{-1, 1, -i, i\}$

■

(A) Aqui estamos caracterizando função norma por:

$$\begin{aligned} N :\quad & \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+ \\ & a + bi \longmapsto N(a+bi) = |a+bi|^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

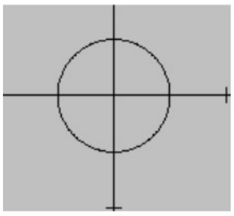
(B) Em álgebra abstrata $\mathbb{G} = \mathbb{Z}[i]$ é chamado anel dos inteiros Gaussianos.

Veja: *Coleção Matemática Universitária: Curso de Álgebra IMPA: Abramo Hefez*

6. Escreva a equação do disco unitário $\mathbb{D}(1)$ no plano pelos números complexos, em seguida, calcule o
$$\max\left\{\left|z^2+1\right| : z \in \mathbb{D}(1)\right\}.$$

Solução

Basta notar que:



$$\mathbb{D}(1) = \{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}; |z| = 1\} = \left\{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Além disso, $z^2 + 1 = (x + yi)^2 + 1 = x^2 + 2xyi - y^2 + 1 = 2x^2 + 2xyi$
$$\left|z^2+1\right| = \sqrt{(2x^2)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{(2x^2)^2 + 4x^2(1-x^2)} = 2\,|x|\,.$$

Portanto,
$$\left\{ \begin{pmatrix} \max\left|z^2+1\right| \\ z \in \mathbb{D}(1) \end{pmatrix} = 2 \ \ e \ \begin{pmatrix} \min\left|z^2+1\right| \\ z \in \mathbb{D}(1) \end{pmatrix} = -2. \right.$$

■

Bibliografia

[1] De Morais Filho, Daniel Cordeiro. Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3^a Edição, SBM 2016.

[2] Bartle, Robert G. Introduction to Real Analysis. New York, J. Wiley, 2019

[3] Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo, vol.1, 6^a Edição, RJ: LTC, 2018

[4] Lima, Elon Lages. Matemática e Ensino, Coleção do Professor de Matemática, 4^a Edição, RJ, 2017

[5] De Morais Filho, Daniel Cordeiro. Manual de Redação Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2^a Edição, SBM 2018

[6] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, vol. 1, Projeto Euclides, SBM, 21^a Edição, IMPA, 2019

[7] Aragona, Jorge. Números Reais, Texto Universitário do IME-USP, 2010

[8] Eves, Howard. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2004

[9] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm, em 17 de março às 12h e 25min, 2023

[10] Figueiredo, D. G. Análise I, Livros Técnicos Científicos, 2016

[11] Ávila, Geraldo. Introdução à Análise Matemática, Editora Edgar Blücher Ltda, 1993

[12] Boyer, Carl B. História da Matemática; tradução Elza F. G., SP Edgard Blucher, 1974

[13] Bartle, Robert G. The Elements of Real Analysis. New York, J. Wiley, 1964

[14] Figueiredo, D.G. Análise I, RJ, LTC, 2^a Edição, 1996

[15] Lima, E.L. Análise Real, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993

[16] Gonçalves, Adilson. Introdução à Álgebra. 4^a Edição, Projeto Euclides, IMPA, 1999

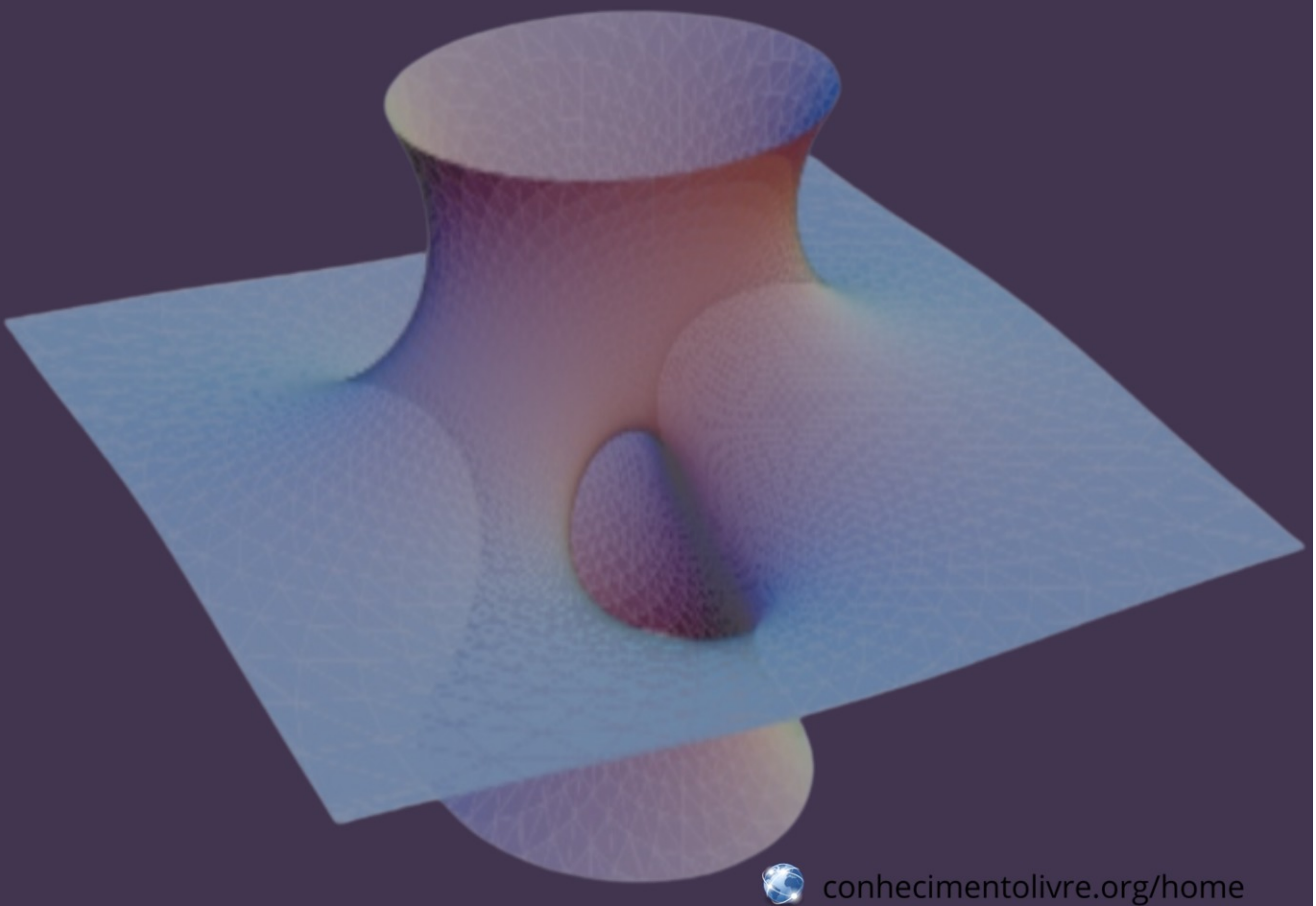
[17] Koblitz, Neal. A Course in Number Theory and Cryptography, Springer 2^a Edição, 1994.

[18] Lequain, Yves e Garcia, Arnaldo. Álgebra: Um curso de Introdução, Série II, Projeto Euclides, IMPA, 2020

ANÁLISE REAL:

INTRODUÇÃO AS MAJORAÇÕES

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva



conhecimentolivre.org/home
contato@conhecimentolivre.org
editoraconhecimentolivre

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE