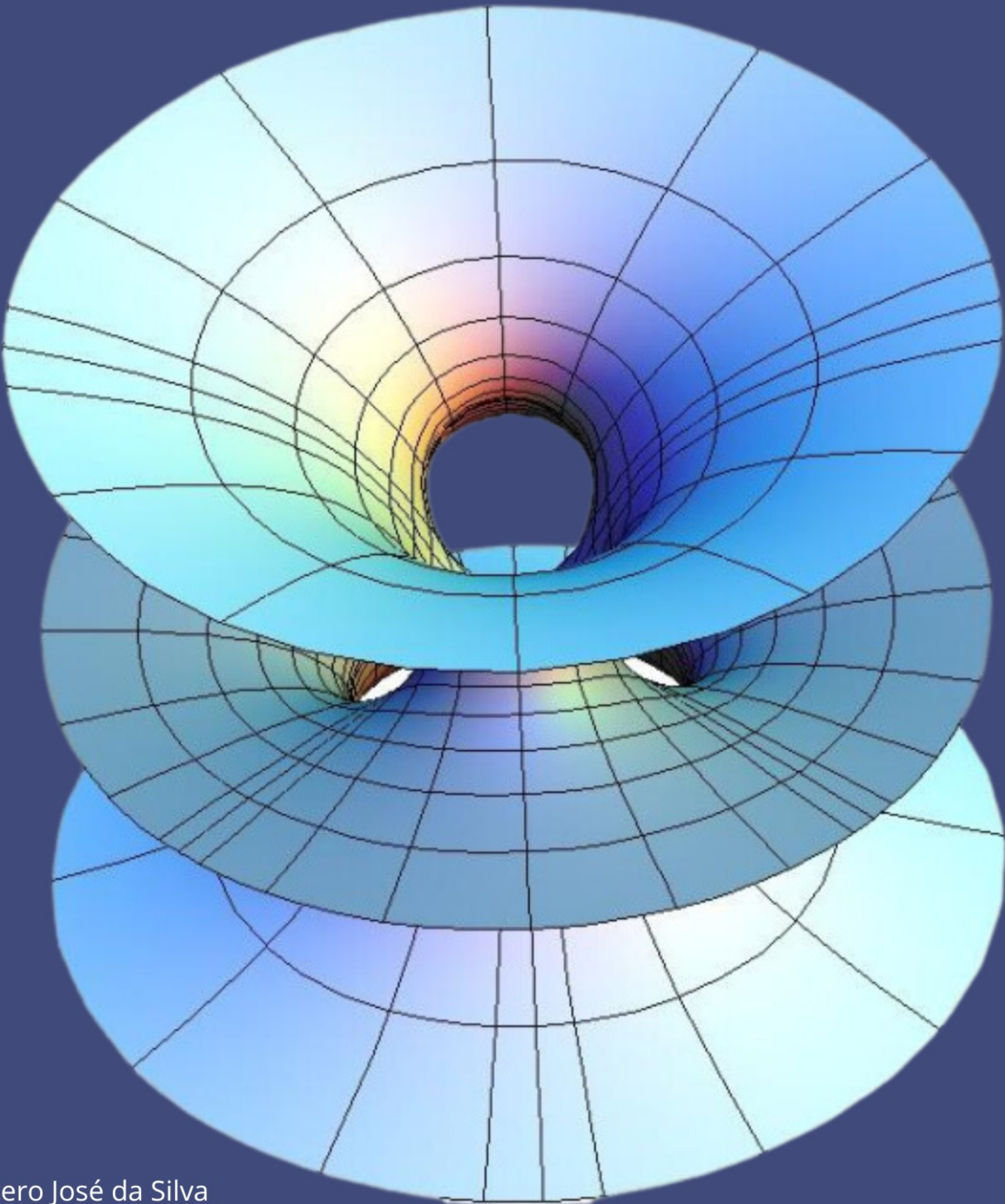
PROBLEMAS RESOLVIDOS DE ÁLGEBRA LINEAR:

PENSANDO UM POUCO MAIS

VOLUME II



Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva

Problemas Resolvidos de Álgebra Linear: Pensando Um Pouco Mais

2ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

2ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586P Problemas Resolvidos de Álgebra Linear: Pensando Um Pouco Mais
/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. Jornandes Dias da Silva. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2023

163 f.: il
DOI: 10.37423/2023.edcl736
ISBN: 978-65-5367-314-4
Modo de acesso: World Wide Web
Incluir Bibliografia

1. algebra-linear 2. rresolução-de-problemas 3. problemas-básicos 4. -problemas-não-triviais I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Silva, Jornandes Dias da V. Título

CDU: 510

https://doi.org/10.37423/2023.edcl736

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO
2023

Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuiram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha), Prof. Dr. Juan Carlos Oliveira de Medeiros e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- Não estaria sendo justo, se não destacasse o nosso amigo Prof. Ms. Roberto Lessa, ao longo de mais de três décadas lecionando Álgebra Linear, conversando sobre: como abordaríamos determinados temas, ofertou diversas sugestões, correções e orientações no tocante a escrita.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões ao longo dos anos.
- À UPE, pelo apoio.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais, Filhos, Esposas,Todos os familiares e Ao grande Mestre Olavo Otávio Nunes (In Memoriam)

Prefácio

Diversas vezes, os estudantes de álgebra linear conseguem resolver as questões iniciais dos livros didáticos, entretanto se deparam com alguns exercícios mais elaborados, que não conseguem solucionar. Isto ocorre desde os temas iniciais, como em temas mais aprofundados.

Tendo em vista que poucos materiais estão disponíveis para os estudantes nesta situação, foi escrito este livro com o propósito de apresentar resoluções de problemas não triviais de Álgebra Linear.

Inicialmente, apresentamos a resolução de problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um Letramento Matemático de Mentalidade Crescente, Criativa e Flexível em temas básicos como matrizes, sistemas lineares até abordarmos temas não triviais como espaço vetorial, subespaços, soma direta de subespaços, base e dimensão, transformações lineares, isomorfismos, transformações do plano no plano, composições de transformações lineares, matrizes de transformações lineares, autovalores e autovetores, dentre outros.

Vale a pena salientar que buscamos dentro do possível, resolver os problemas com todos os passos, detalhando os procedimentos de cálculo. Em alguns casos, inclusive, fazendo comentários matemáticos sobre o que está sendo realizado. Assim, o texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho (ou em grupo), de forma autônoma e com segurança, conferindo não apenas os resultados, mas todo o desenvolvimento lógico operacional.

Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa uma certo cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, corrreções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endereços:

cjs@poli.br
was@poli.br
galdino@poli.br
jornandesdias@poli.br

Este prefácio é reproduzido do livro:

Silva, Cícero J., Soares, Willames de A., Galdino, Sérgio M.L.*Problemas Resolvidos de Álgebra Linear: Pensando Um Pouco Mais*, Piracanjuba GO, Edidora Conhecimento Livre, 2023

`https://api.conhecimentolivre.org/ecl-api/storage/app/public/L.696-2023.pdf`

Recife, 04 de maio de 2023

Problemas Resolvidos de Álgebra Linear: Pensando Um Pouco Mais

10.37423/2023.edcl736

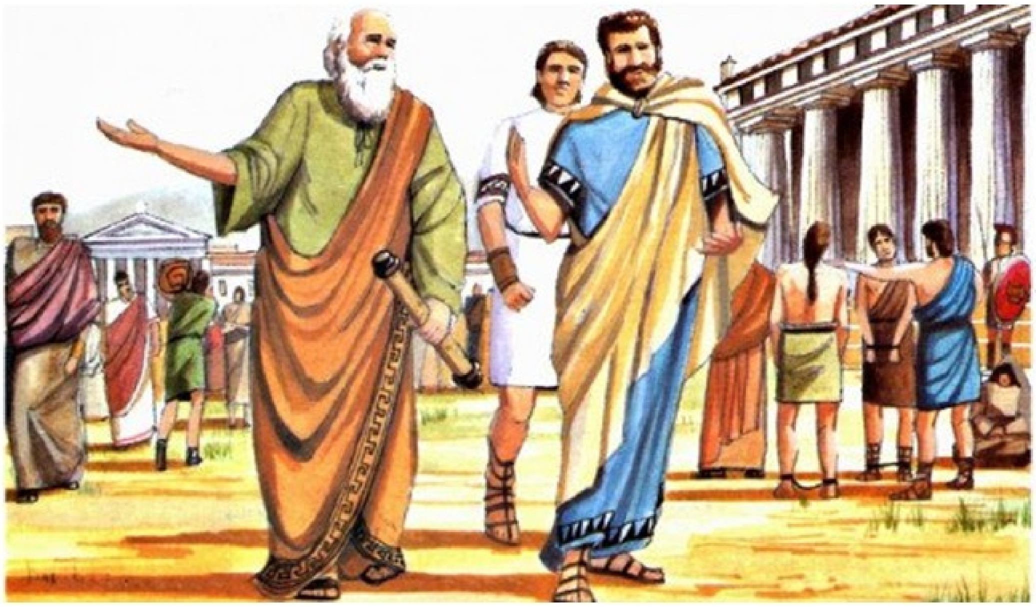
Capítulo 1 - Introdução

Ricardo Eliécer Neftalí Reyes Basoalto ($1904 - 1973$), mais conhecido pelo seu pseudônimo e, mais tarde, nome legal, Pablo Neruda.

Será que neste Universo tem números primos? Para que serve? Tem aplicações? Não vamos falar em Parábolas; mas, uma simples Alegoria:

Aplicações em Matemática

O Matemático Babilônio que vai ao ministério da corte pedir financiamento para sua pesquisa, O ministro fica meio cético porque esse matemático está estudando números primos; ele acha muito teórico, que não serve para nada. O matemático tenta se justificar, daqui a 4.000 anos quando inventarem a internet, a criptografia, o cartão de crédito, os números primos vai ser importantíssimo. Pode levar 4.000 anos para acontecer à aplicação: quem cria matemática por estética, não se preocupa se na próxima semana, próximo mês, se encontre aplicações, é assim que a Ciência Avança .



1.1 Um pouco de história em torno do nome matriz

O pai do nome matriz Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e sairam da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Cauchy, 1826 : tableau (tabela). O nome matriz só veio com **James Joseph Sylvester**, 1850. Seu amigo **Cayley**, com sua famosa **Memoir on the Theory of Matrices**, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. Por que **Sylvester** deu o nome matriz às matrizes ? Usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma matriz a partir da qual podemos formar varios sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolhar à vontade p linhas e p colunas..."**artigo publicado na Philosophical Magazine de** 1850, pag $363-370$). Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com **Cayley** que elas passam a ter vida própria e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

Surgimento dos primeiros resultados da Teoria das Matrizes

Costuma-se dizer que num curso mais avançado curso de **Teoria das Matrizes** ou de sua versão mais abstrata, a Álgebra Linear - deve ir no mínimo até o **Teorema Espectral**. Pois bem, esse teorema e toda uma série de resultados auxiliares já eram conhecidos antes de **Cayley** iniciar a estudar as matrizes como uma classe notável de objetos matemáticos. Como se explica isso? Esses resultados, bem como a maioria dos resultados básicos da Teoria da Matrizes, foram descobertos quando os matemáticos dos séculos $XVIII$ e XIX passaram a investigar a **Teoria das Formas Quadráticas**. Hoje, consideramos imprescindível estudar essas formas através da notacão e metodologia matricial, mas naquela época elas eram tratadas escalarmente. Mostremos aqui a representação de uma forma quadrática de duas variáveis, tanto via notação escalar como com a mais moderna notação matricial:

$$q\left(x,y\right)=ax^{2}+2bxy+cy^{2}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=X^{t}AX,$$

onde: $X^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $A^t = A$ (matriz simétrica)

O primeiro uso implícito da noção de matriz ocorreu quando Lagrange 1790 reduziu a caracterização dos máximos e mínimos, de uma função real de várias variáveis, ao estudo do sinal da forma quadrática associada à matriz das segundas derivadas dessa função. Sempre trabalhando escalarmente, ele chegou à uma conclusão que hoje expressamos em termos de matriz positiva definida. Após Lagrange, já no século XIX, a **Teoria das Formas Quadráticas** chegou a ser um dos assuntos mais importantes em termos de pesquisas, principalmente no que toca ao estudo de seus invariantes. Essas investigações tiveram como subproduto a descoberta de uma grande quantidade de resultados e conceitos básicos de matrizes. Assim, podemos dizer que a **Teoria das Matrizes** teve como mãe a **Teoria das Formas Quadráticas**, pois que seus métodos e resultados básicos foram lá gerados. Hoje, contudo, o estudo das formas quadráticas é um mero capítulo da Teoria das Matrizes. Observemos, ademais, que os determinantes em nada contribuiram para o desenvolvimento da Teoria das Matrizes.

1.2 Considerações Preliminares

O objetivo deste Capítulo é estudar, evitando ao máximo o formalismo, os seguintes tópicos: equações lineares, sistemas de equações lineares, sistema linear homogêneo, escalonamento, discussões de sistemas lineares quanto ao número de soluções e uma abordagem sucinta sobre as matrizes, os resultados serão necessários para os capítulos posteriores. Os aspectos históricos sobre os sistemas de equações lineares e a relação com a teoria das matrizes. A razão deste trabalho foi de se tentar evidenciar a indissociabilidade que existe entre esses dois assuntos que muitas das vezes são tratados separadamente no Ensino Médio. Este trabalho foi de maneira bibliográfica, usando-se a internet, livros de álgebra linear. Nesse sentido, está pautada em autores tais como: Boyer (1996), Eves (2004), Lipschutz (1994), Elon lages (2019), Boldrine (2002), Carlos Calliolli (2004), Serge Lang (2018) .

1.3 Conceitos Básicos

1.3.1 Equação Linear

Definição 1.1

Dizemos que uma equação é linear, se apresenta a forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{1.1}$$

onde: $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são números reais e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis ou incógnitas. ♣

Exemplo 1.1 (a) $2x - y + 3z = 0$ (b) $x + y + z + t = 4$.

Definição 1.2

Uma seqüência $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de (1.1) se satisfaz a igualdade. ♣

Exemplo 1.2

A tripla ordenada $(1, 5, 1)$ é uma solução da equação $2x - y + 3z = 0$; analogamente, temos: $(1, 1, 1, 1)$ é uma solução da equação $x + y + z + t = 4$ e $(1, 2, -4)$ não é solução da equação descrita por $x + y + z = 2$.

1.3.2 Sistema de Equações Lineares

Definição 1.3

Um sistema de m equações lineares com n incógnitas é dado por:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

♣

Exemplo 1.3

$$S_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} . \quad S_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_3 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 7x + y - 6z = 0 \end{cases} .$$

Definição 1.4

Uma seqüência $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é solução de (1.2) se é solução de todas as equações. ♣

Exemplo 1.4

Em relação aos exemplos anteriores, temos que: $(2, -1)$ é a solução de S_1 e $(1, 1, 1)$ é a solução de S_2.

Definição 1.5

Se no sistema (1.2) tivermos $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, então dizemos que o sistema linear é homogêneo. ♣

Exemplo 1.5

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x - y = 0 \end{cases} . \quad S_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 4x + y + z = 0 \\ 2x + y - 7z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_3 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 7x + y - 6z = 0 \end{cases} .$$

Nota

Todo sistema linear homogêneo sempre tem solução, pelo menos a solução trivial, ou seja, aquela solução em que todas as variáveis são nulas.

1.3.3 Sistemas Equivalentes

Definição 1.6

Dizemos que os sistemas de equações lineares S_1 e S_2 são equivalentes se, e somente se, toda solução do sistema S_1 é também solução do sistema S_2 e vice-versa.
Notação: $S_1 \sim S_2$.

Exemplo 1.6

$$S_1 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 4x + 2y - 2z = 4 \end{cases}.$$

são equivalentes, visto que: a tripla ordenada $(1, 1, 1)$ é a solução. Em símbolo, temos: $S_1 \sim S_2$.

1.3.4 Sistema Escalonado

A nossa discussão do escalonamento será apresentada através de exemplos, ou seja, não usaremos de formalismo para descrever o mesmo.

Exemplo 1.7

$$S_1 : \begin{cases} x + \quad 2y = 0 \\ \qquad\quad y = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x - \quad y + z = 1 \\ \qquad\; y + z = 3 \\ \qquad\qquad z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_3 : \begin{cases} x - \quad y + z + 2t = 1 \\ \qquad\; y + z - t = 3 \\ \qquad\qquad z + 2t = 2 \end{cases}.$$

$$S_4 : \begin{cases} x - \quad y + z = 1 \\ \qquad\; y - z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_5 : \begin{cases} x - \quad y + z + w = 0 \\ \qquad\qquad z - 2w = 0 \end{cases}.$$

são sistemas escalonados.

Nota

1. *Em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo;*
2. *O número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, **"cresce da esquerda para direita de equação para equação"**.*

1.3.5 Critério para escalonar um sistema linear

1. Permutar duas equações quaisquer de um sistema linear, ou seja, $\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_j$ e $\mathbb{E}_j \rightarrow \mathbb{E}_i$;
2. Multiplicar todos os termos de uma equação por um número α não-nulo, isto é, $\alpha\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_i$;
3. Somar uma equação a uma outra, esta última multiplicada por um número α não-nulo e substituir em uma terceira equação, ou seja, $\mathbb{E}_j + \alpha\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_k$.

Exemplo 1.8

Escalone o sistema, dado por: $S : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$.

Solução

Considerando as operações $\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ *e* $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, *obtemos:*

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x- & y + z & = 1 \\ 0 & -2y + 0 & = -2 \\ 0 & -3y + 3z & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & +z - y & = 1 \\ 0 & +3z - 3y & = 0 \\ 0 & +0 - 2y & = -2 \end{cases} .$$

Portanto, o sistema está na forma escalonada

$$\begin{cases} x & +z - y & = 1 \\ 0 & +3z - 3y & = 0 \\ 0 & 0 - 2y & = -2 \end{cases} .$$

Agora, se desejamos determinar a solução, basta substituir $y = 1 \Longrightarrow z = 1$ *e* $x = 1$.
De sorte que:

$$S = \{(1, 1, 1)\}$$

é o conjunto solução do sistema dado.

■

1.3.6 Classificar um sistema linear no tocante ao número de soluções.

Para concluir esta discussão, vamos classificar um sistema linear no tocante ao número de soluções.

$$\text{Sistema: } \begin{cases} \text{Compatível: } \begin{cases} \text{Determinado: solução única} \\ \text{e} \\ \text{Indeterminado: infinitas soluções} \end{cases} \\ \\ \text{Incompatível: } \quad \text{Não existe solução} \end{cases} .$$

Exemplo 1.9

1. Que condição deve impor-se a " a, b e c" para que o sistema nas incógnitas x, y e z tenha solução

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

Notações:

$\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_3$ são as equações

$2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ (Lê-se: duas vezes a equação 1 menos a equação 2 substituindo na equação 2).

$\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ (Lê-se: equação 1 menos a equação 3 substituindo na equação 3).

Solução

Considerando as operações $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ *e* $\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$*, obtemos:*

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & +2y-3z & =a \\ 0 & -2y+5z & =2a-b \\ 0 & 4y-10z & =a-c \end{cases}.$$

Desta forma, fazendo $2\mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$*, segue-se que:*

$$\begin{cases} x & +2y-3z & =a \\ 0 & -2y+5z & =2a-b \\ 0 & +0 & =5a-2b-c \end{cases}$$

Portanto, o sistema tem solução se, e somente se,

$$5a-2b-c=0$$

■

2. Escalone o sistema e discuta-o em função do parâmetro "a":

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 3x- & y+ & 5z & = & 2 \\ 4x+ & y+ & (a^2-14)\,z & = & a+2. \end{cases}$$

Antes de passarmos a resolução, vejamos alguns comentários:

As variáveis são x, y e z

Usaremos as notações: equações $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_3$.

$3\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ (onde lê-se: três vezes a equação 1 menos a equação 2 substituindo na equação 2)

Solução

Considerando as operações $3\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ *e* $4\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$*, tem-se:*

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 3x- & y+ & 5z & = & 2 \\ 4x+ & y+ & (a^2-14)\,z & = & a+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 0 & 7y- & 14z & = & 10 \\ 0 & 7y+ & (2-a^2)\,z & = & 14-a \end{cases}.$$

Agora, fazendo $\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$*, obtemos:*

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 0 & 7y- & 14z & = & 10 \\ 0 & 0+ & (a^2-16)\,z & = & a-4 \end{cases}.$$

Assim,

$$(a+4)\,(a-4)\,z = a-4.$$

Vale ressaltar que teremos três casos a analisar.

1º Caso: $a=-4 : 0.z=-8 \Longrightarrow$ *O sistema é impossível.*

2º Caso: $a=4 : 0.z=0 \Longrightarrow 7y-14z=10.$ *Como para cada* y *teremos um valor de* $z=\frac{7y-10}{14}$*. Neste caso, o sistema é compatível e indeterminado.*

3º Caso: $a \neq 4$ e $a \neq -4 : z = \frac{a-4.}{(a+4)(a-4)} = \frac{1}{a+4}$. Neste caso, o sistema é compatível e determinado: solução única. ■

3. Escalone o sistema e discuta-o em função do parâmetro “k”:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & kz & = & 1 \\ 2x+ & ky+ & 8z & = & 3 \end{cases}$$

Solução

Com efeito, fazendo a operação com as equações $\mathbb{E}_1$ e $\mathbb{E}_2$, dada por: $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$, obtemos:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & kz & = & 1 \\ 2x+ & ky+ & 8z & = & 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+ & 2y+ & kz & = & 1 \\ - & (k-4)y+ & 2(k-4)z & = & -1 \end{cases}.$$

assim teremos dois casos a considerear $k-4=0$ ou $k-4 \neq 0$.

1º Caso: $k=4: 0y+0z=-1$. *Neste caso, o sistema é impossível.(incompátivel)*

2º Caso: $k \neq 4: -y+2z=\frac{-1}{k-4}$. *Desta forma, o sistema é compatível e indeterminado.* ■

4. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3)X = 0.$$

Solução

(i) *Com efeito, temos:*

$$\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3) = (1-\lambda).(3-\lambda).(-2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = 3 \text{ ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).

Nota

(A) *Notação:*

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

Produtório de a_{ii}, variando de $i=1$ até $i=n$

(B) *Se $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $a_{ij} = 0$, $i > j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,*

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(ii) *Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo*

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)X = 0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

1^o Caso: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} & 5z & = & 0 \\ 2y & +z & = & 0 \\ & -3z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ e \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = (x, 0, 0) = x\,(1, 0, 0)$*, com* $x \neq 0$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda = 1$*, isto é, o espaço solução* $\mathbb{S}_1$ *é dada por:*

$$\mathbb{S}_1 = \left\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\right\} = [(1, 0, 0)]\,,$$

isto é, $(1, 0, 0)$ *gera* $\mathbb{S}_1$*. Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor* $(1, 0, 0)$ *.*

2^o Caso: $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x+ & + & 5z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & - & 5z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ e \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = (0, y, 0) = y\,(0, 1, 0)$*, com* $y \neq 0$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda = 3$*, ou ainda, a solução é dada por:*

$$\mathbb{S}_2 = \left\{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\right\} = [(0, 1, 0)]\,,$$

ou seja, $(0, 1, 0)$ *gera* $\mathbb{S}_2$*.*

3^o Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} 3x & & +5z & = 0 \\ & 5y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{-5}{3} z \\ e \\ z = \frac{-1}{5} z \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = \left(\frac{-5}{3}z, \frac{-1}{5}, z\right) = z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$*, com* $z \neq 0$ *é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:*

$$\mathbb{S}_3 = \left\{z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} \text{ e } z \neq 0\right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)\right],$$

ou seja, $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$ *gera* $\mathbb{S}_3$*.*

$\blacksquare$

Capítulo Execícios

1. Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathbb{S} = \left\{t+3,\ 2t+\lambda^2+2\right\}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ é L.I. (Linearmente independente)? e L.D. (Linearmente dependente)?

   Refazendo a questão de uma outra forma: Dada a equação:

   $$a\,(t+3) + b\left(2t+\lambda^2+2\right) = 0t+0$$

   Determine $\lambda \in \mathbb{R}$, para que o sistema homogêneo só admita a solução trivial (solução nula), assim $\mathbb{S}$ é L.I.. Caso contrário, $\mathbb{S}$ será L.D.(teremos infinitas soluções)

   Solução
   Com efeito,

   $$\begin{aligned} a\,(t+3) + b\left(2t+\lambda^2+2\right) &= 0t+0 \Longleftrightarrow \\ (a+2b)t + \left[3a + b\left(\lambda^2+2\right)\right] &= 0t+0. \end{aligned}$$

   Daí, obtemos:

   $$\left\{\begin{array}{c} a+2b=0 \\ 3a+b\left(\lambda^2+2\right)=0 \end{array}\right. \overset{3E_1-E_2\longrightarrow E_2}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{c} a+2b=0 \\ 0+\left(4-\lambda^2\right)b=0. \end{array}\right.$$

   Assim,

   $$(2-\lambda)\,(2+\lambda)\,b = 0.$$

   1º Caso: $\lambda \neq \pm 2 \Longrightarrow b=0 \Longrightarrow a=0$. *Neste caso, o sistema só admite solução trivial ou nula. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.I*

   2º Caso: $\lambda = 2 \Longrightarrow 0.b = 0$, *voltamos para equação anterior* $a+2b=0$. *Neste caso, o sistema admite infinitas soluções. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.D*

   3º Caso: $\lambda = -2 \Longrightarrow 0.b = 0$ *voltando a equação* $a+2b=0$. *Analogamente, o sistema admite infinitas soluções. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.D.* ■

2. Seja $\mathbb{S} = \left\{e^{2x}, e^{5x}\right\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dada a equação:

   $$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0.$$

   Prove que: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

   Demonstração

   Dada a equação

   $$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0. \qquad (I)$$

   Multiplicando (I) por $e^{-2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, obtemos:

   $$\lambda_1 + \lambda_2 e^{3x} = 0. \qquad (II)$$

   Agora, derivando em relação a x $\left[(e^{Kx})\text{'} = Ke^{Kx}\right]$, vem:

   $$0 + 3\lambda_2 e^{3x} = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \qquad (III)$$

Assim, substituindo (III) em (II), segue-se que:

$$\lambda_1 = 0.$$

Ou ainda,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

De sorte que: $\mathbb{S}$ é linearmente independente. ■

Nota

Seja $\mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x)\}$, onde $y_1(x), y_2(x) \in C^1(\alpha, \beta)$, ou seja, $y_1(x), y_2(x)$ tem derivadas contínuas.
***Wronskiano** é dado pela determinante da matriz, a saber:*

$$\mathbb{W}[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta),$$

onde y'_1 e y'_2 são as derivadas de 1^a ordem das funções $y_1(x), y_2(x)$.

Propriedade

$$\mathbb{W}[y_1, y_2] \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta) \Longrightarrow \mathbb{S} \text{ é L.I.}$$

L.I. (linearmente independente).
$\mathbb{W}[y_1, y_2] = 0$ nada se pode concluir.

Generalizando
*Seja $\mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$. O **Wronskiano**, é dado por:*

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Propriedade

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0 \Longrightarrow \mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$$

é L.I. (Linearmente independente)

Ressaltamos que se $\mathbb{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0$, nada se pode concluir, a título ilustrativo, considere $\mathbb{S} = \left\{x^3, |x|^3\right\}$ para todo $x \neq 0$, tem-se:

$$\mathbb{W} = \left[x^3, |x|^3\right] = 0,$$

no entanto, $\mathbb{S}$ é L.I.

Demonstração

De fato, por definição, sendo $x \neq 0$, tem-se:: $|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$. Agora, dada a equação:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 |x|^3 = 0.$$

1^o Caso: $x > 0$:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^3 = (\lambda_1 + \lambda_2)\, x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

e, procedendo de forma análoga, temos:

2^o Caso: $x < 0$:

$$\lambda_1 x^3 - \lambda_2 x^3 = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\, x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Decorre dos casos (1) e (2) que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Como o sistema só admite a solução trivial (solução nula) segue-se que: $\mathbb{S}$ é L.I. ■

Exemplo 1.10

1. Ilustrativamente, tomemos o exemplo anteior

$$\begin{aligned} \mathbb{W}\,[y_1, y_2] &= \mathbb{W}\left[e^{2x}, e^{5x}\right] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}.e^{5x}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = e^{7x}.\,(1.5 - 2.1) \\ &= 3e^{7x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{S}$ é L.I. ■

3. Prove que: são linearmente independente (L.I.).
(i) $\mathbb{S} = \left\{e^x, e^{3x}, e^{9x}\right\}$ (ii) $\mathbb{S} = \{\cos(kx)\,, \sin(kx)\}$, desde que $k \neq 0$.

Demonstração

(i) Por definição de wonskiano, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}\left[e^x, e^{3x}, e^{9x}\right] &= \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} & e^{9x} \\ e^x & 3e^{3x} & 9e^{9x} \\ e^x & 9e^{3x} & 81e^{9x} \end{vmatrix} = e^x.e^{3x}.e^{9x}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3^2 & 9^2 \end{vmatrix} \\ &= e^{13x}\,(9-3)\,.\,(9-1)\,.\,(3-1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{S} = \left\{e^x, e^{3x}, e^{9x}\right\}$ é L.I. ■

Nota

Matriz de Vandermond ou das Potências:

Um exemplo para ilustrar é: o determinante desta matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ *é descrito por:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b) \, . \, (c-a) \, . \, (b-a)$$

(ii) *Por definição de wonskiano, temos:*

$$\begin{aligned} \mathbb{W}\left[\cos(kx), \sin(kx)\right] &= \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} \\ &= k\left[\cos^2(kx) + \sin^2(kx)\right] \\ &= k \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De sorte que: $\mathbb{S}$ *é L.I.* ■

Nota

Em equações diferenciais ordinárias a ideia de funções serem linearmente independentes é fundamental (verão este tema detalhadamente posteriormente nos Cálculos)

1.4 Matrizes

Definição 1.7

$A = (a_{ij})_{m \times n}$, *onde:* $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$, *sendo* $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

m *são as linhas e* n *as colunas da matriz. Cada* a_{ij} *é um elemento da matriz na linha* i *e coluna* j. ♣

Exemplo 1.11

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$. Daí, temos:
$a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 3$ e $a_{23} = 4$.

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$. Assim,
$b_{11} = 1$, $b_{12} = 3$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = -2$, $a_{31} = 4$ e $b_{32} = 2$.

Nota

1. $A = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$
2. $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ *−É o espaço de todas as matrizes de ordem* $m \times n$ *com entradas reais.*

Operações:

1. $A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, onde: $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

2. $A \pm B :\Longleftrightarrow (a \pm b)_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, onde: $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

3. $\lambda A :\Longleftrightarrow (\lambda a)_{ij} = \lambda a_{ij}$, onde: $\begin{cases} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$

Propriedade

Sejam $A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, então, tem-se:

$P_1)$ $A + (B + C) = (A + B) + C$
$P_2)$ $A + B = B + A$
$P_3)$ $\exists! 0_{m\times n}; \forall A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : A + 0 =) + A$
$P_4)$ $\forall A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}); \exists! - A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : A + (-A) = 0$
$P_5)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) : \lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$

Nota

1. $A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$

2. $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *−É o espaço de todas as matrizes de ordem $n \times n$ com entradas reais.*

$$\textit{Matrizes:} \begin{cases} \textit{Diagonal:} & D_n = (D_{ij})_{n\times n}; & D_{ij} = \begin{cases} D_{ij}, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \\ \textit{Identidade} & I_n = (I_{ij})_{n\times n}; & I_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \\ \textit{Triângular Superior:} & T_n = (T_{ij})_{n\times n}; & T_{ij} = 0;\ i > j. \end{cases} .$$

Exemplo 1.12

1. $D_n = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{nn} \end{pmatrix}$ matriz diagonal;

2. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz identidade;

3. $T_n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \ldots & T_{1n} \\ 0 & T_{22} & \ldots & T_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & T_{nn} \end{bmatrix}$ matriz triangular superior.

Produto de Matrizes

$$A_{m\times n}.B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Nota

(i) *O produto das matrizes A e B é dado por:*

$$A.B = \begin{pmatrix} -- & A_1 & -- & -- \\ -- & A_2 & -- & -- \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -- & A_m & -- & -- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B^1 & B^2 & \ldots & B^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & \ldots & A_1B^p \\ A_2B^1 & A_2B^2 & \ldots & A_2B^p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_mB^1 & A_mB^2 & \ldots & A_mB^p \end{pmatrix}_{m\times p}$$

(ii) *Cada elemento da matriz produto $A.B$ é descrito por:*

$$(A.B)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}B_{\alpha j} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}.$$

Nota

O produto de matrizes generaliza o produto interno ou escalar, com efeito, escolhamos

$$\begin{aligned} u.v &= \langle u, v\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j \end{aligned}$$

Exemplo 1.13

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule (se existirem): (a) $A.B$ (b) $B.A$

Solução

Usaremos as notações A_1 e A_2 para descrever as linhas da matriz A e analogamente, B^1 e B^2 as colunas da matriz B. Assim, *Sejam* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & A_1 & \dots \\ \dots & A_2 & \dots \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ B^1 & B^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$. *Então, temos:*

$$A.B = \begin{pmatrix} \dots & A_1 & \dots \\ \dots & A_2 & \dots \end{pmatrix}_{2\times 3} . \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ B^1 & B^2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 \\ A_2B^1 & A_2B^2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$ *, ou ainda,*

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Cálculos Auxiliares:

$A_1B^1 = 1.1 + 2.0 + 0.1 = 1$
$A_1B^2 = 1.3 + 2.(-2) + 0.1 = -1$
$A_2B^1 = -1.1 + 3.0 + 4.1 = 3$
$A_2B^2 = -1.3 + 3.(-2) + 4.1 = -5.$
Logo,

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 12 \\ 2 & -6 & -8 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

Daí, segue-se que: em geral, matrizes não são comutativas, ou seja,

$$A.B \neq B.A$$

Propriedade

$P_1)\ A.(B.C) = (A.B).C$
$P_2)\ A.I_n = I_n.A = A$
$P_3)\ A(\lambda B) = \lambda (A.B)$
$P_4)\ (A + B). = A.C + B.C$
$P_5)\ A.(B + C) = A.B + A.C$

Nota

(a) *Em geral, temos:* $A.B \neq B.A$
(b) $A.B = 0 \nRightarrow A = 0$ *ou* $B = 0.$
Com efeito, tomando-se: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *então, vem:*

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, A e B são não nulas.

Matriz transposta:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow A^t = (a_{ji})_{n\times m}$$

(A^t é a matriz transposta da matriz A)

Matrizes Especiais:

$$\text{Matrizes:} \begin{cases} \text{Simétrica:} & A^t = A \\ \\ \text{Anti-Simétrica:} & A^t = -A \end{cases}.$$

Nota

Se a matriz é anti-simétrica, temos: $a_{ji} = -a_{ij}$; *quando* $i = j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.

Exemplo 1.14

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$: $A^t = -A$ (A é uma matriz anti-simérica)

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 0 & a & -c \\ -a & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{pmatrix}$: $A^t = -A$ (A é uma matriz anti-simérica)

3. $A = \begin{pmatrix} a & k & d \\ k & b & e \\ d & e & c \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} a & k & d \\ k & b & e \\ d & e & c \end{pmatrix}$: $A^t = A$ (A é uma matriz simérica)

4. Sejam $\mathbb{A}, \mathbb{P} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Mostre que:
(a) Se $\mathbb{A}$ é simétrica, então, $\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$ é simétrica.
(b) Se $\mathbb{A}$ é anti-simétrica, então, $\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$ é anti-simétrica.

Fato que Ajuda:

Vale salientar que usaremos este resultado: $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.
De fato,

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T_{ji} = (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{A}_{i\alpha}\mathbb{B}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{B}^T_{j\alpha}\mathbb{A}^T_{\alpha i} = \left(\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T\right)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T.$$

Demonstração

(a) Com efeito, $\mathbb{A}$ é simétrica, então, temos: $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$. Agora, seja $X = \mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$, falta mostrar que: $X^T = X$.

De fato,
$$X^T = \left(\mathbb{P}^T \mathbb{A}\mathbb{P}\right)^T = \mathbb{P}^T \mathbb{A}^T \left(\mathbb{P}^T\right)^T = \mathbb{P}^T \mathbb{A}\mathbb{P} = X.$$

Logo, X é simétrica. ■

(b) Com efeito, $\mathbb{A}$ é anti-simétrica, então, temos: $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$.
Agora, seja $X = \mathbb{P}^T \mathbb{A}\mathbb{P}$, queremos mostrar que: $X^T = -X$.

De fato,
$$X^T = \left(\mathbb{P}^T \mathbb{A}\mathbb{P}\right)^T = \mathbb{P}^T \mathbb{A}^T \left(\mathbb{P}^T\right)^T = \mathbb{P}^T \left(-\mathbb{A}\right) \mathbb{P} = -X.$$

Logo, X é anti-simétrica. ■

Matrizes Inversas:

Definição 1.8

Seja $A \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tal que: $A.B = B.A = I_n$. Dizemos que: B é a matriz inversa de A.

Notação: $B = A^{-1}$ (Cuidado! $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$)
A é uma matriz invertível.

♣

Exemplo 1.15

1. Seja $\mathbb{J}_n$ a matriz $n \times n$ tal que todas as entradas são 1. Mostre que se $n > 1$, então, temos:
$$\left(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n\right)^{-1} = \mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.$$

Demonstração

Com efeito, $\mathbb{J}_n^2 = n\mathbb{J}_n$, $\mathbb{I}\mathbb{J}_n = \mathbb{J}_n$ e $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$.
Basta mostrar que:
$$\left(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n\right) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.\right) = \mathbb{I}.$$

De fato,
$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n\right) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.\right) &= \mathbb{I}^2 + \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n^2 - \frac{1}{n-1}\mathbb{I}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n\mathbb{I} \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1}n\mathbb{J}_n - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1}n\mathbb{J}_n - \left(\frac{1}{n-1} + 1\right)\mathbb{J}_n \\
&= \mathbb{I} + \frac{n}{n-1}\mathbb{J}_n - \frac{n}{n-1}\mathbb{J}_n = \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Portanto,
$$\left(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n\right)^{-1} = \mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.$$

■

2. Sejam $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Se $\mathbb{A}+\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}$ forem invertíveis, então, mostre que

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\left(\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1}.$$

Demonstração

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{-1}\left(\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} &= \left[\left(\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right).\mathbb{A}\right]^{-1} \\ &= \left[\mathbb{I}_n\mathbb{A} + \mathbb{B}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\right]^{-1} \\ &= (\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1} \end{aligned}$$

■

Definição 1.9

*Dizemos que uma matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é **ortogonal**, quando:*
$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$.
$\mathbb{A}$ é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \Longleftrightarrow \mathbb{A}.\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$. ♣

Exemplo 1.16

Seja $\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Então, verifique se: $\mathbb{A}_\theta$ é ortogonal.

Solução

Queremos mostrar que $\mathbb{A}$ é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \Longleftrightarrow \mathbb{A}.\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$.

Com efeito,

$$\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbb{A}_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Segue-se daí que:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta.\mathbb{A}_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + sen^2\theta & \cos\theta sen\theta - sen\theta\cos\theta \\ sen\theta\cos\theta - \cos\theta sen\theta & sen^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{A}_\theta.\mathbb{A}_\theta^T = I_2 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T$$

Ou ainda, $\mathbb{A}_\theta$ é ortogonal. ■

3. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é ortogonal. Então, prove que:
$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, conclua daí que: $\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$.
$\mathbb{A}$ é ortogonal, isto é, $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$

Solução

Considere a base canônica α *de* $\mathbb{R}^n$
$\alpha = \{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$. *Assim, temos:*

$$u = (x_1, x_2 \ldots, x_n) = x_1 (1,0,\ldots,0) + \ldots + x_n (0,0,\ldots,0,1).$$

Desta forma, a matriz de coordenadas do vetor u *na base canônica é dada por:*

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \in \mathbb{R}^{nx1},\; x^t x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1xn} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

$$x^t x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|x\|^2.$$

Daí, vem:

$$\|\mathbb{A}x\|^2 = (\mathbb{A}x)^t (\mathbb{A}x) = x^t(\mathbb{A}^t\mathbb{A})x = x^t x = \|x\|^2.$$

Logo,

$$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|.$$

■

Decorre do delineado acima que:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}(x-y)\|^2 &= \|x-y\|^2 \\ \|\mathbb{A}x\|^2 - 2\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle + \|\mathbb{A}y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$$

■

4. Seja $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$. Ache uma matriz invertível $\mathbb{P}$, tal que:

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução

Seja $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e* $\left(\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1}\right)(\mathbb{A}\mathbb{P}) = \mathbb{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. *Como* $\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1} = I_2$ *segue-se daí que:*

$$\mathbb{A}\mathbb{P} = \mathbb{P}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora, substituindo $\mathbb{P}$ *obtemos:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 6a-c & 6b-d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí, vem: $\left\{\begin{array}{c} a=a,\ b=-b \\ 6a-c=c \text{ e } 6b-d=-d \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{c} a=a,\ b=-b \\ 6a-c=c \text{ e } 6b-d=-d \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=a,\ b=0 \\ c=3a \text{ e } d=d \end{array}\right. .$$

Logo, a matriz $\mathbb{P}$ de forma geral com a e d não-nulos é dada por:

$$\mathbb{P}=\left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 3a & d \end{array}\right), \text{ com } a, d \neq 0.$$

*Em particular, para obter **uma matriz invertível** $\mathbb{P}$, basta escolher valores para a e d, por exemplo, $a=1$ e $d=1$, obtemos:*

$$\mathbb{P}=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right).$$

■

5.
(i) Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3=0$. Então, calcule: $(\mathbb{I}_n-\mathbb{A})^{-1}$.
(ii) Dado $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3-2\mathbb{A}+3\mathbb{I}_n=0$. Obter $\mathbb{A}^{-1}$

Solução

(i) *Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3=0$. Então, temos:*

$$\mathbb{I}^3-\mathbb{A}^3=\mathbb{I}^3=\mathbb{I}.$$

Como $\mathbb{I}^3-\mathbb{A}^3=(\mathbb{I}-\mathbb{A})\left(\mathbb{I}^2+\mathbb{I}\mathbb{A}+\mathbb{A}^2\right)=(\mathbb{I}-\mathbb{A})\left(\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2\right)$ *segue-se daí que:*

$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})\left(\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2\right)=\mathbb{I}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{I}-\mathbb{A})^{-1}=\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2.$$

e também

$$\left(\mathbb{I}+\mathbb{A}+\mathbb{A}^2\right)^{-1}=\mathbb{I}-\mathbb{A}.$$

■

(ii) *Lembrando da definição:*

$$X.Y=Y.X=I \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} X=Y^{-1} \\ \text{ou} \\ Y^{-1}=X \end{array}\right.$$

Dado $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}^3-2\mathbb{A}+3\mathbb{I}_n=0$. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^3-2\mathbb{A}+3\mathbb{I}_n &= 0 \Longleftrightarrow 2\mathbb{A}-\mathbb{A}^3=3\mathbb{I}_n \\ &\Longleftrightarrow \frac{2\mathbb{A}-\mathbb{A}^3}{3}=\mathbb{I}_n \\ &\Longleftrightarrow \mathbb{A}.\frac{\left(2\mathbb{I}-\mathbb{A}^2\right)}{3}=\mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{A}^{-1}=\frac{1}{3}\left(2\mathbb{I}-\mathbb{A}^2\right).$$

■

Propriedade

$P_1)\ \left(A^T\right)^T = A$
$P_2)\ (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
$P_3)\ (\lambda A)^T = \lambda A^T$
$P_4)\ (A.B)^T = B^T.A^T$
$P_5)\ \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$
$P_6)\ (A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
$P_7)\ \left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
$P_8)\ \left(A_1.A_2\ldots A_{(n-1)}A_n\right)^T = A_n^T.A_{(n-1)}^T\ldots A_2^T.A_1^T$
$P_8)\ \left(A_1.A_2\ldots A_{(n-1)}A_n\right)^{-1} = A_n^{-1}.A_{(n-1)}^{-1}\ldots A_2^{-1}.A_1^{-1}.$

Capítulo Execícios

1. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então, prove que:
(i) $s = \frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2}$ é simétrica;
(ii) $a = \frac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}$ é anti-simétrica;
(iii) Conclua daí que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}$, onde S é o espaço das matrizes simétricas e $\mathcal{A}$ o espaço das matrizes anti-simétricas;
(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Solução

(i) *Queremos mostrar que:* $s^T = s$.
De fato,

$$s^T = \left(\frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2}\right)^T = \frac{\mathbb{A}^T + \left(\mathbb{A}^T\right)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T + \mathbb{A}}{2} = s.$$

Logo, s é simétrica. ■

(ii) *Procedendo de forma análoga, temos:*

$$\begin{aligned} a^T &= \frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T - \left(\mathbb{A}^T\right)^T}{2} \\ &= \frac{\mathbb{A}^T - \mathbb{A}}{2} = -\frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)}{2} = -a. \end{aligned}$$

De sorte que: a é anti-simétrica. ■

(iii) $\forall \mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\mathbb{A} = \frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2} + \frac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}$$

Como $\frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2} = s \in S$ *e* $\frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)}{2} = a \in \mathcal{A}$, *segue-se daí que:*

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}.$$

■

(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Com efeito, seja $K \in S \cap \mathcal{A}$, então, temos: $K \in S$ e $K \in \mathcal{A}$.
Ora,

$$\left\{\begin{array}{c} K \in S \\ e \\ K \in A. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} K^T = K \\ e \\ K^T = -K. \end{array}\right. \Longrightarrow K = -K \Longrightarrow K = 0.$$

Portanto, $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$. ■

Nota

(A) *Posteriormente voltaremos ao tema (soma direta de subespaços), quando isto ocorre:*
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}$ *e* $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.
Diremos que a soma é direta, denotaremos por:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S \oplus \mathcal{A}.$$

(B) *Toda matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se decompõe como soma de simétrica $B \in S$ e anti-simetrica $C \in \mathcal{A}$, ou seja, $A = B + C$, onde: $B^T = B$ e $C^T = -C$*

$$\left\{\begin{array}{c} A = B + C \\ e \\ A^T = (B + C)^T. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A = B + C \\ e \\ A^T = B^T + C^T \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A + A^T = \left(B + B^T\right) + \left(C + C^T\right) \\ e \\ A - A^T = \left(B - B^T\right) + \left(C - C^T\right) \end{array}\right. .$$

Portanto,

$$\left\{\begin{array}{c} A + A^T = B + B^T = 2B \\ e \\ A - A^T = \left(C - C^T\right) = 2C \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} B = \frac{A+A^T}{2} \\ e \\ C = \frac{A-A^T}{2}. \end{array}\right.$$

2. Seja $\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Então, verifique se:

(i) $\mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\beta = \mathbb{A}_{(\theta+\beta)}$ $\quad$ (ii) $\mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_\theta^{-1}$

(iii) $\mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T$ $\quad$ (iv) $\mathbb{A}_\theta^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -sen(2\theta) \\ sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$.

Solução

(i) *Basta multiplicar as matrizes e usar as identidades trigonométricas para se obter:*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\beta &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -sen\beta \\ sen\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\beta - sen\theta sen\beta & -\left(sen\theta\cos\beta + sen\beta\cos\theta\right) \\ sen\theta\cos\beta + sen\beta\cos\theta & \cos\theta\cos\beta - sen\theta sen\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\beta) & -sen(\theta+\beta) \\ sen(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) \end{bmatrix} = \mathbb{A}_{(\theta+\beta)} \end{aligned}$$

■

(ii) $\mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_\theta^{-1}$

Com efeito, fazendo $\beta = -\theta$, no item anterior, obtemos:

$$\mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_{(\theta-\theta)} = \mathbb{A}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -sen0 \\ sen0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2.$$

Portanto,

$$\mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_\theta^{-1}.$$

■

(iii) $\mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T \iff \mathbb{A}_\theta.\mathbb{A}_\theta^T = \mathbb{I}_2$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta.\mathbb{A}_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + sen^2\theta & \cos\theta sen\theta - sen\theta\cos\theta \\ sen\theta\cos\theta - \cos\theta sen\theta & sen^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\mathbb{A}_\theta.\mathbb{A}_\theta^T = \mathbb{I}_2 \iff \mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T.$$

■

(iv) $\mathbb{A}_\theta^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -sen(2\theta) \\ sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$

Basta notar que: no item (i), tomando-se $\beta = \theta$, vem:

$$\mathbb{A}_\theta^2 = \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\theta = \mathbb{A}_{(\theta+\theta)} = \mathbb{A}_{(2\theta)} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -sen\,(2) \\ sen\,(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

■

3. Seja $f \in \mathfrak{F}([-a,a])$, então, prove que:
(i) $H_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ é par;
(ii) $H_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é ímpar;
(iii) Conclua daí que $\mathfrak{F}([-a,a]) = U + W$, onde U é o subespaço das funções pares e W o suespaço das funções ímpares;
(iv) $U \cap W = \{0\}$.
(v) A soma é direta, ou seja,

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U \oplus W$$

Solução

(i) *Queremos mostrar que: $H_1(x) = H_1(-x)$*
De fato,

$$H_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = H_1(x)\,,\ \forall x \in [-a,a]\,.$$

Logo, H_1 é uma função par. ■

(ii) Procedendo de forma análoga, temos:

$$H_2(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{[f(x) - f(-x)]}{2} = -H_2(x)\,,\ \forall x \in [-a, a]\,.$$

De sorte que: H_2 é uma função ímpar. ■

(iii) $\forall f \in \mathfrak{F}([-a,a])$, tem-se:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Como $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = H_1(x) \in U$ e $\frac{f(x)-f(-x)}{2} = H_2(x) \in W$, segue-se daí que:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U + W.$$

■

(iv) $U \cap W = \{0\}$.

Com efeito, seja $K \in U \cap W$, então, temos: $K \in U$ e $K \in W$.
Ora,

$$\left\{\begin{array}{c} K \in U \\ e \\ K \in W. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} K(x) = K(-x) \\ e \\ -K(x) = K(-x)\,. \end{array}\right. \Longrightarrow K(x) = -K(x) \Longrightarrow K = 0.$$

Portanto, $U \cap W = \{0\}$. ■

Posteriormente voltaremos ao tema (soma direta de subespaços), quando:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U + W \text{ e } U \cap W = \{0\}.$$

Diremos que a soma é direta, denotaremos por:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U \oplus W$$

■

Potências de matrizes:

$$A^m = \overbrace{A.A \ldots A}^{m \text{ vezes}} \text{ e } A^0 = I_n$$

$$\text{Matrizes:} \quad \left\{\begin{array}{lll} \text{Nilpotente:} & A^n = 0 & A \neq 0, \ \geq 2. \\ & & \\ \text{Idempotente:} & A^2 = A & A \neq 0. \end{array}\right. .$$

Exemplo 1.17

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (Verifique!)
Logo, A é uma matriz idempotente.(Posteriormente, veremos que esta matriz representa uma projeção ortogonal)

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = 0$ e, portanto, A é nilpotente de índice 3)

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $A^2 = 0$ e, portanto, A é nilpotente de índice 2)
O índice de nilpotência da matriz A é no máximo o seu tamanho.

4. Uma matriz $\mathbb{A}$ é idempotente se $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$.
(a) Mostre que: Se $\mathbb{A}$ é idempontente, então, ou $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ ou $\mathbb{A}$ não é invertível.
(b) Mostre que: Se $\mathbb{AB} = \mathbb{A}$ e $\mathbb{BA} = \mathbb{B}$, então, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são idempotentes.

Demonstração

(a) Com efeito, $\mathbb{A}$ é idempontente, então por definição temos:

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}.$$

Agora, se admitirmos $\mathbb{A}$ invertível, obtemos:

$$\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^{-1}.\mathbb{A} \Longleftrightarrow \left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\right).\mathbb{A} = \mathbb{I} \Longrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Caso contrário, $\mathbb{A}$ é não invertível. ■

(b) De fato, $\begin{cases} \mathbb{AB} = \mathbb{A} \\ \text{e} \\ \mathbb{BA} = \mathbb{B} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{A}\left(\mathbb{BA}\right) = \mathbb{A} \Longrightarrow \left(\mathbb{AB}\right)\mathbb{A} = \mathbb{A} \Longrightarrow \mathbb{AA} = \mathbb{A}.$
Logo, $\mathbb{A}$ é idempotente. ■

Analogamente, temos: $\begin{cases} \mathbb{AB} = \mathbb{A} \\ \text{e} \\ \mathbb{BA} = \mathbb{B} \end{cases} \Longrightarrow \mathbb{B}\left(\mathbb{AB}\right) = \mathbb{B} \Longrightarrow \left(\mathbb{BA}\right)\mathbb{B} = \mathbb{B} \Longrightarrow \mathbb{B}.\mathbb{B} = \mathbb{B}.$
Portanto, $\mathbb{B}$ é idempotente. ■

1.5 Problemas Pensando um pouco mais

Capítulo Execícios

1. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente de índice n. Prove que $\mathbb{A}$ não é invertível.
   Demonstração
   Antes de passar a demonstrarmos, revisitemos o método de redução ao absurdo: Queremos mostrar que:
   $$p \Longrightarrow q$$
   O método consiste em **negar** a tese **e** manter a hipótese: chegando assim, a uma contradição.A contradição (ou absurdo!) foi gerada pelo fator de **negar a tese**. Logo, a tese é verdadeira. Em linguagem simbólica, temos:
   $\sim q \wedge p \Longrightarrow$Contradição, logo, $\sim(\sim q) = q$ é verdadeiro.

Agora, deixemos de prosopopéia e passemos a prova.
Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente de índice n. Por definição, temos: $\mathbb{A}^n = 0$, com $\mathbb{A} \neq 0$.
Agora, suponhamos que $\mathbb{A}$ é invertível, então, por definição, tem-se:

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right)^n &= \left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\right)^n = \mathbb{I}^n = \mathbb{I} \\ &\Longrightarrow \overbrace{\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right).\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right)\ldots\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right)}^{\text{n vezes}} = \mathbb{I} \\ &= \mathbb{A}^n\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^n = 0.\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^n = \mathbb{I} \Longrightarrow \mathbb{I} = 0. \end{aligned}$$

Absurdo! Visto que admitimos $\mathbb{A}$ invertível.
Portanto, $\mathbb{A}$ é não invertível.

■

2. Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica. Então, mostre que:

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n,$$

é simétrica.

Demonstração

Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica, então, por definição, tem-se:
$\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$.
Queremos provar que:

$$\mathbb{S}^T = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}.$$

Inicialmente, provemos por indução finita sobre n que: $(\mathbb{A}^n)^T = \left(\mathbb{A}^T\right)^n$ e $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Daí, segue-se que: $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$, vamos mostrar!

De fato,
(i) Para $n = 2$, tem-se:

$$\left(\mathbb{A}^2\right)^T = (\mathbb{A}\mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T\mathbb{A}^T = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}^2.$$

(ii) Suponha válido para n, isto é, $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$, então, queremos mostrar para $n+1$

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Vejamos

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = (\mathbb{A}^n\mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T.(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^T &= \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j\right)^T = (I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n)^T \\ &= \left(I^T + \mathbb{A}^T + \ldots + (\mathbb{A}^n)^T\right) \\ &= I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\mathbb{S}$ é uma matriz simétrica.

■

Alguns Fatos Básicos:

(F_1)Vale salientar que usamos este resultado: $(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

De fato,

$$(\mathbb{AB})^T_{ji} = (\mathbb{AB})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{A}_{i\alpha}\mathbb{B}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{B}^T_{j\alpha}\mathbb{A}^T_{\alpha i} = \left(\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T\right)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T.$$

(F_2) Generalize!

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\dots\mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}_n^T.\mathbb{A}_{(n-1)}^T\dots\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.$$

(Prove usando indução finita sobre n)

E fácil ver que:

(i) Para $n = 2$, temos:

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2)^T = \mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T$$

(Caso anterior)

(ii) Suponha válido para n, ou seja,

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\dots\mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}_n^T.\mathbb{A}_{(n-1)}^T\dots\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.$$

(Hipótese de indução)

Então, falta mostrar para $n+1$.

Basta notar que:

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\dots\mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\overbrace{(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\dots\mathbb{A}_n)^T}^{\text{hipótese de indução}} = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\overbrace{\mathbb{A}_n^T\dots\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T}^{\text{hipótese de indução}}.$$

Logo,

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\dots\mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\mathbb{A}_n^T\dots\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.$$

■

3. Mostre que se x é qualquer vetor-coluna não-nulo de $\mathbb{R}^n$, então a matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathbb{A} = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}xx^T$$

é ortogonal e também simétrica.

Definição 1.10

Dizemos que uma matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, quando:
$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$.

♣

Queremos provar que:

(i) $\mathbb{A}$ é uma matriz simétrica, isto é, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$;

(ii) $\mathbb{A}$ é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \iff \mathbb{A}.\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$.

Demonstração

(i) Com efeito,

$$x^T.x = (x_1 \ldots x_n) . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2 .$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^T &= \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T\right)^T = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} \left(x x^T\right)^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} \left(x^T\right)^T x^T = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{A}$ é uma matriz simétrica.

(ii) A priori, como $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}.\mathbb{A}^T &= \mathbb{A}.\mathbb{A} = \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T\right) . \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T\right) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} \left(x x^T\right) . \left(x x^T\right) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} x \left(x^T.x\right) x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} x \left(x^T.x\right) x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^2} x x^T = \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

De sorte que: $\mathbb{A}$ é uma matriz ortogonal

■

4. (a) Sejam a_1, a_2 e a_3 números reais positivos. Prove que:

$$(a_1 + a_2 + a_3) . \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

Generalize.

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que:

$$(a_1 + \ldots + a_n) . \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Demonstração

Não faremos o caso particular (Fica como exercício!)

1^o modo:

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$, com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, então, façamos por simplicidade

$$u = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) \text{ e } v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Além disso, veja que resultados lindos e elegantes, usando a norma euclidiana e o produto interno usual, temos:

$$\|u\| = \sqrt{a_1+\ldots+a_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \|v\| = \sqrt{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}$$

e

$$\langle u,v\rangle = \sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right) = \sqrt{a_1}.\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\ldots+\sqrt{a_n}.\frac{1}{\sqrt{a_n}} = n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o belíssimo resultado:

$$n = \left|\sum_{j=1}^{n}\sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right| \le \sqrt{a_1+\ldots+a_n}.\sqrt{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}},$$

e, portanto, elevando-se ao quadrado, ambos os membos da desigualdade, vem:

$$n^2 \le (a_1+\ldots+a_n).\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

■

2^o modo:

À luz dadas desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \le \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n}. \tag{1}$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} \le \frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)}{n}. \tag{2}$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j}\cdot\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}} = \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} = 1,$$

obtemos:

$$n^2 \le (x_1+x_2+\ldots+x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$

■

5. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)X = 0.$$

Demonstração

(i) Com efeito, temos:

$$\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 5\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -2-\lambda\end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p(\lambda)=\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)=(1-\lambda).(3-\lambda).(-2-\lambda)=0\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=1 \text{ ou}\\ \lambda=3 \text{ ou}\\ \lambda=-2.\end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).

Nota

(A) *Notação:*

$$\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}.a_{22}\dots a_{nn},$$

Produtório de a_{ii}, variando de $i=1$ até $i=n$

(B) *Se $\mathbb{A}=(a_{ij})\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $a_{ij}=0$, $i>j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,*

$$\det(\mathbb{A})=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}.a_{22}\dots a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(ii) *Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo*

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)X=0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

Demonstração

1^o Caso: $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} & 5z &= & 0\\ 2y & +z & = & 0\\ & -3z & = & 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}y=0\\ \text{e}\\ z=0\end{cases}.$$

Logo, $v_1=(x,0,0)=x(1,0,0)$, com $x\neq0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda=1$, isto é, o espaço solução $\mathbb{S}_1$ é dada por:

$$\mathbb{S}_1=\left\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3; x\in\mathbb{R} \text{ e } x\neq0\right\}=[(1,0,0)],$$

isto é, $(1,0,0)$ gera $\mathbb{S}_1$. Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor $(1,0,0)$.

2^o Caso: $\lambda=3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x+ & + & 5z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & - & 5z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{e} \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = (0, y, 0) = y\,(0, 1, 0)$, com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_2 = \left\{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\right\} = [(0, 1, 0)]\,,$$

ou seja, $(0, 1, 0)$ gera $\mathbb{S}_2$.

3^o Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} 3x & & +5z & = 0 \\ & 5y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{-5}{3} z \\ \text{e} \\ z = \frac{-1}{5} z \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = \left(\frac{-5}{3} z, \frac{-1}{5}, z\right) = z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$, com $z \neq 0$ é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_3 = \left\{z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} \text{ e } z \neq 0\right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)\right],$$

ou seja, $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$ gera $\mathbb{S}_3$.

■

6. Não existem matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tais que:

$$AB - BA = I.$$

Demonstração

Suponha válido, então, usando o traço da matriz identidade,
vem: $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I) = n$.
Por outro lado, tem-se:

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha} B_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i} A_{i\alpha} = \operatorname{tr}(\mathbb{BA})\,.$$

Assim,

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) - \operatorname{tr}(\mathbb{BA}) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(\mathbb{AB} - \mathbb{BA}) = tr\,(I) = 0.$$

Absurdo! Visto que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.
Portanto, tais matrizes não existem satisfazendo

$$AB - BA = I.$$

■

7. (i) Seja M uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, prove que:

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1} e^{A} M.$$

Demonstração
Com efeito,

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

então,

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M^{-1}AM\right)^j}{j!} = I + M^{-1}AM + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^n}{n!} + \ldots,$$

Daí, não esquecendo que a série converge uniformemente e

$$\left(M^{-1}AM\right)^j = M^{-1}A^jM$$

(É fácil ver por indução finita sobre n), segue-se que:

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IM + M^{-1}AM + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^n}{n!} + \ldots \\ &= M^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots\right)M \\ &= M^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}\right)M = M^{-1}e^AM. \end{aligned}$$

■

(ii)

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt},\ \forall t \iff A \text{ comuta com } B,$$

com $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração
$(\Longrightarrow)$ Se $e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}$, então, derivando ambos os lados, temos:

$$(A+B)\,e^{(A+B)t} = Ae^{At}.e^{Bt} + Be^{At}.e^{Bt}.$$

Agora, derivando novamente e fazendo $t = 0$, obtemos:

$$(A+B)^2\,e^{(A+B)t} = A^2e^{At}.e^{Bt} + ABe^{At}.e^{Bt} + BAe^{At}.e^{Bt} + B^2e^{At}.e^{Bt}.$$

Logo,

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA.$$

$(\Longleftarrow)$ Se $AB = BA$, então, é fácil ver que:

$$X(t) = e^{At}.e^{Bt}$$

satisfaz ao problema de valor inicial (p.v.i)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A+B)\,X(t) \\ X(0) = I. \end{cases}$$

(Verifique!). Então, pela unicidade da solução temos:

$$X(t) = e^{(A+B)t}.$$

De sorte que:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt},\ \forall t$$

■

Nota

Se A é nilpotente de indice k, temos: $A^k = 0$ com $A \neq 0$ e $0 < k \leq n$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0\dots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots,$$

Todos estes fatos básicos serão de fundamental importância para a ***Forma Canônica de Jordan***.

8. Seja $\mathfrak{A}$ a álgebra das matrizes quadradas sobre um corpo ordenado completo $K = \mathbb{R}$ e seja P uma matriz invertível em $\mathfrak{A}$. Mostre que a transformação $A \longmapsto P^{-1}.A.P$, onde $A \in \mathfrak{A}$ é um isomorfismo de álgebra $\mathfrak{A}$ em si mesma.
corpo ordenado completo dos números reais $K = \mathbb{R}$

Demonstração

Seja $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ definida por $\varphi(A) = P^{-1}.A.P$, vamos determinar o núcleo de φ, a saber:

$$Ker(\varphi) = \{A_0 \in \mathfrak{A}; \varphi(A_0) = 0\}.$$

Vejamos

$$\begin{aligned} \varphi(A_0) &= P^{-1}.A_0.P = 0 \Longrightarrow (P.P^{-1}).A_0.P = P.0 \\ &\Longrightarrow I.A_0.(P.P^{-1}) = 0.P^{-1} \Longrightarrow A_0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Ker(\varphi) = \{0\} \Longleftrightarrow \varphi \text{ é injetora.}$$

■

Agora, mostrar que φ é sobrejetora. por definição, temos:

$$\forall B \in \mathrm{Im}(\varphi); \exists A \in \mathfrak{A} : A = P.B.P^{-1}$$

Cálculos Auxiliares:

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= P^{-1}.A.P = B \Longleftrightarrow (P.P^{-1}).A.P = P.B \\ &\Longleftrightarrow A.(P.P^{-1}) = P.B.P^{-1} \Longleftrightarrow A = P.B.P^{-1}. \end{aligned}$$

Assim.

$$\varphi(A) = \varphi(P.B.P^{-1}) = P^{-1}.(P.B.P^{-1}).P = (P^{-1}.P).B.(P^{-1}.P) = B.$$

Dito de outro modo, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathfrak{A}$, ou seja, φ é sobrejetora. ■
Logo, φ é bijetora

e finalmente, mostremos que:

(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in K$; $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) &= P^{-1}.(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2).P \\
&= \lambda_1 \left(P^{-1}.A_1.P\right) + \lambda_2 \left(P^{-1}.A_2.P\right) \\
&= \lambda_1 \varphi(A_1) + \lambda_2 \varphi(A_2).
\end{aligned}$$

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ temos:

$$\begin{aligned}
\varphi(A_1.A_2) &= P^{-1}.(A_1.A_2).P \\
&= \left(P^{-1}.A_1.P\right).\left(P^{-1}.A_2.P\right) \\
&= \varphi(A_1).\varphi(A_2).
\end{aligned}$$

De sorte que: φ é um isomorfimo. ■

9. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_2)X = 0.$$

Solução

A equação característica é descrita por:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Longrightarrow (1-\lambda).(-3-\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ ou \\ \lambda = -3, \end{cases}
\end{aligned}$$

serão chamados posteriormente de autovalores ou valores característicos.

Vamos determinar as soluções não-nulas os chamados posteriormente de autovetores correspondentes.

1º Caso: $\lambda = 1$:

$$(A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -4y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x(1,0)$, *com* $x \neq 0$, *ou ainda,*

$$S_1 = \left\{x(1,0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\right\} = [(1,0)].$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $\lambda = -3$:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I_2).X &= 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \{4x + 2y = 0 \Longrightarrow y = -2x.
\end{aligned}$$

De sorte que, o autovetor é: $v_2 = x\,(1,-2)\,,$ *com* $x \neq 0,$ *dito de outro modo temos:*

$$S_2 = \left\{x\,(1,-2) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\right\} = [(1,-2)]$$

■

10. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p\,(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_2) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_2)X = 0.$$

Solução

A equação característica é dada por:

$$\begin{aligned} p\,(\lambda) &= \det\,(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)\,.\,(4-\lambda) = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \quad ou \\ \lambda = 4, \end{cases} \end{aligned}$$

são os autovalores, determinemos os autovetores correspondentes.
Agora, temos dois casos a considerar para resolver o sistema homogêneo e obter as soluções não-nulas.

1º Caso: $\lambda = 1:$

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_2).X &= 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 0x + 2y = 0 \\ 0x + 3y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x\,(1,0)\,,$ *com* $x \neq 0,$ *ou ainda,*

$$S_1 = \left\{x\,(1,0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\right\} = [(1,0)]$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $\lambda = 4:$

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_2).X &= 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 3x. \end{aligned}$$

Portanto, o autovetor é: $v_2 = x\,(1,3)\,,$ *com* $x \neq 0,$ *dito de outro modo temos:*

$$S_2 = \left\{x\,(1,3) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\right\} = [(1,3)]$$

■

Capítulo 2 - Espaços Vetorias

Josef Maria Hoëné-**Wronski,** (1776-1853), foi um filósofo e matemático franco-polonês.

2.1 Um pouco de história sobre Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial (também chamado de espaço linear) é uma coleção de objetos chamada vetores, que podem ser somados um a outro e multiplicados ("escalonados") por números, denominados escalares. Os números reais são escalares frequentemente utilizados, mas também existem espaços vetoriais com multiplicação por números complexos, números racionais; em geral, por qualquer corpo.[4] As operações de adição de vetores e multiplicação por escalar precisam satisfazer certas propriedades, denominadas **axiomas**. Para explicitar se os escalares são números reais ou complexo, os termos espaço vetorial real e espaço vetorial complexo são frequentemente utilizados.

Vetores euclidianos são um exemplo de espaço vetorial. Eles representam quantidades físicas como forças: quaisquer duas forças (do mesmo tipo) podem ser somadas para resultar em uma terceira, enquanto que a multiplicação de um vetor de força por um número real gera outro vetor de força. De forma semelhante, porém com um sentido mais geométrico, vetores que representam deslocamentos em um plano ou em um espaço tridimensional também formam espaços vetoriais. Vetores em espaços vetoriais não necessitam ser objetos do "tipo seta", como aparecem nos exemplos mencionados acima; vetores são tratados como entidades matemáticas abstratas com propriedades particulares, em alguns casos, podem ser visualizados por setas.

Espaços Vetoriais são o objeto de estudo da Álgebra Linear e são bem caracterizados pela sua dimensão. Espaços vetoriais de dimensão infinita surgem naturalmente em Análise Matemática, como em Espaços Funcionais, cujos vetores são funções. Esses Espaços Vetoriais são munidos em geral de uma estrutura adicional, que pode ser uma topologia, permitindo a consideração de conceitos como proximidade e continuidade. Dentre essas topologias, aquelas que são definidas por uma norma ou um produto interno são mais frequentemente utilizadas, por possuírem uma noção de distância entre dois vetores. Esse é o caso particularmente com os Espaços de Banach e os Espaços de Hilbert, que são fundamentais em Análise Matemática (Não se preocupe com estes nomes sofisticados destes espaços, serão estudados ao longo da sua vida acadêmica em detalhes) (https://pt.wikipedia.org/wiki/Espa%C3%A7o_vetorial)

2.2 Considerações Preliminares

O objetivo deste Capítulo é estudar, os espaços vetoriais sobre o corpo ordenado dos números reais, algumas propriedades, subespaço vetorial, combinação linear, conjunto gerador, conjuntos de vetores: linearmente independentes (L.I.) e dependentes (L.D.), base e dimensão. Vale a pena salientar: um espaço pode ser gerado por digamos 4 vetores, dentre estes vetores, qual a quantidade mínima que são necessários para formar uma base (esta quantidade minima são os vetores linearmente independentes). Por incrível que pareça, alguns estruturas em matemática; apesar de aparentemente serem diferentes, tem comportanmentos "semelhantes", os vetores que estudamos na Geometria Analítica em dimensões 2 e 3 (no plano e no espaço) têm as mesmas propriedades operacionais que as matrizes, funções: contímuas, deriváveis, integráveis do Cálculo diferencial e integral, os polinômios estudando no Ensino Médio. A seguir, definiremos duas operações que satisfacam aos axiomas (a grosso modo, diremos que qualquer coisa em matemática que tenha esta estrutura, será chamada de espaço vetoriais e seus elementes vetores, para ilustrar os exemplos: vetores vistos na Geometria Analítica, matrizes, polinômios, funções continuas e deriváveis em intervalos convenientes).

2.3 Espaço Vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$

Considere as seguintes operações:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} & \text{e} & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \\ (u, v) \longmapsto u + v & & (\lambda, u) \longmapsto \lambda.u \end{array}$$

Dizemos que $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial (**E.V**.) sobre $\mathbb{R}$, quando:

$A_1)$ $\forall u, v, w \in \mathbb{V}$: $u + (v + w) = (u + v) + w$;
$A_2)$ $\forall u, v \in \mathbb{V}$: $u + v = v + u$
$A_3)$ $\exists 0 \in \mathbb{V}, \forall u \in \mathbb{V}$: $u + 0 = 0 + u = u$
$A_4)$ $\forall u \in \mathbb{V}$:$\exists\, (-u) \in \mathbb{V}$ $u + (-u) = (-u) + u = 0$
$M_1)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{V}$: $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)\, u$
$M_2)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{V}$: $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
$M_3)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{V}$: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
$M_4)$ $\exists\, 1 \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{V}$: $1.u = u$

Exemplo 2.1

Consequências:
(i) $\alpha.0 = 0$ (ii) $0.u = 0$ (iii) $\alpha.u = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ou $u = 0$.

Demonstração

(i) Com efeito,

$$\begin{cases} \alpha.0 = \alpha.0 + 0 \\ \text{e} \\ \alpha.0 = \alpha.\left(0+0\right) = \alpha.0 + \alpha.0, \end{cases}$$

então, temos:

$$\alpha.0 + \alpha.0 = \alpha.0 + 0 \Longrightarrow \alpha.0 = 0$$

■

(ii) É fácil ver que:

$$\begin{cases} 0.u = 0.u + 0 \\ \text{e} \\ 0.u = \left(0+0\right).u = 0.u + 0.u \end{cases}$$

e, portanto,

$$0.u + 0.u = 0.u + 0.$$

Ou ainda,

$$0.u = 0.$$

■

(iii)
1^a Parte:
$\alpha.u = 0$ e suponha $\alpha \neq 0$, então, temos: $\alpha^{-1}.\alpha = 1$ e

$$\left(\alpha^{-1}.\alpha\right).u = \alpha^{-1}.0 = 0 \Longrightarrow 1.u = 0.$$

2^a Parte:
O espaço vetorial é normado; assim, podemos usar a definir da noma euclidiana $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ e suponha $u \neq 0$, então, $\|u\|^2 \neq 0$, teremos:

$$\alpha.u = 0 \Longrightarrow \langle \alpha.u, u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha.\|u\|^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{0}{\|u\|^2} = 0.$$

De sorte que:

$$\alpha = 0 \text{ ou } u = 0.$$

■

2.3.1 Subespaços Vetoriais

Definição 2.1

Seja $\phi \neq \mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ *(* ***E.V.*** *). Dizemos que* $\mathbb{W}$ *é um subespaço de* $\mathbb{V}$*, quando:*
(i) $0 \in \mathbb{W}$
(ii) $\forall u, v \in \mathbb{W} \Longrightarrow u + v \in \mathbb{W}$
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u \in \mathbb{W}$.
♣

Exemplo 2.2

(A) Verifique quais dos conjuntos são subespaços:

1. $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = 2x\}$

Demonstração

(i) $(0,0) \in \mathbb{W}$? Pois, $0_y = 2.0_x$,(a segunda coordenada é o dobro da primeira).
(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}$, onde: $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$, tem-se: $y_1 = 2x_1$ e $y_2 = 2x_2$. Assim,

$$u_1 + u_2 = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)).$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathbb{W}$.
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda(x_1, 2x_1) = (\lambda x_1, 2(\lambda x_1))$ (A segunda coordenada continua sendo o dobro da primeira).
Daí, vem: $\lambda u_1 \in \mathbb{W}$.
De sorte que: $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial ■

2. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x.y = 0\}$

Demonstração

Contra-exemplo:

Sejam $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,1,0)$. Então, temos: $u_1, u_2 \in \mathbb{W}$. Daí, obtemos:

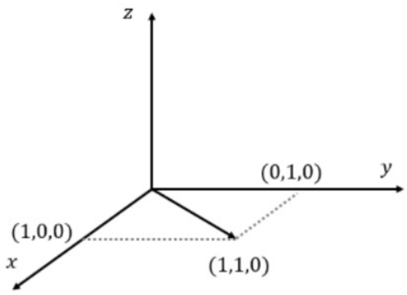
$$u_1 + u_2 = (1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ não é um subespaço. ■

3. $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c = 0 \right\}$

Demonstração

A priori, vamos reescrever as matrizes de $\mathbb{W}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W} : b = c = 0$. desta forma, temos: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ (os elementos de $\mathbb{W}$ são matrizes diagonais de ordem 2 com entradas reais)
(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$? Visto que, $0_a = 0_b = 0_c = 0_d = 0$. (todos os elementos são nulos)



(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{W}$, com $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Assim, tem-se:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Por conseguinte, vem: $A_1 + A_2 \in \mathbb{W}$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A_1, \in \mathbb{W}$, temnos:

$$\lambda A_1 = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Logo, $\mathbb{W}$ é subespaço. ■

4. $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$

Demonstração

Inicialmente, $A \in \mathbb{W}$; $A^T = A$ (diz que $\mathbb{W}$ descreve todas as matrizes simétricas de ordem n com entradas reais)

(i) $0 \in \mathbb{W}$? Visto que, $0^T = 0$. (todos os elementos são nulos)

(ii) $\forall A, B \in \mathbb{W}$, tem-se por hipóteses: $A^T = A$ e $B^T = B$,

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

Por conseguinte, vem: $(A + B) \in \mathbb{W}$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{W}$, temnos:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A.$$

Daí, obtemos: $\lambda A \in \mathbb{W}$.

Portanto, $\mathbb{W}$ é subespaço. ■

5. $\mathbb{W} = \{(p(x) = ax + b) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \mid b = 0\}$

Demonstração

Vejamos, $p \in \mathbb{W}$; $p(x) = ax$ (Nos diz que $\mathbb{W}$ descreve todos os polinômios de grau no máximo m 1 e termo independente nulo)

(i) $0(x) \in \mathbb{W}$? Visto que, $0(x) = 0$ (polinômio identicamente nulo)

(ii) $\forall p, q \in \mathbb{W}$, tem-se por hipóteses: $p(x) = a_1 x$ e $q(x) = a_2 x$,

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = a_1 x + a_2 x = (a_1 + a_2)x.$$

Por conseguinte, vem: $(p+q) \in \mathbb{W}$.
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{W}$, temnos:

$$(\lambda p)(x) = \lambda p(x) = \lambda(a_1 x) = (\lambda a_1) x.$$

Daí, obtemos: $\lambda p \in \mathbb{W}$.
Portanto, $\mathbb{W}$ é subespaço. ∎

6. $\mathbb{W} = \left\{ f \in C^1(\alpha, \beta) \,|\, f'(x) + f(x) = 0 \right\}$

Demonstração

Inicialmente, $f \in \mathbb{W}$; $f'(x) + f(x) = 0$
(diz que $\mathbb{W}$ descreve a soma da derivada de primeira ordem com a função e nula)

(i) $0(x) \in \mathbb{W}$? Visto que, $0'(x) + 0(x) = 0$.
(ii) $\forall f, g \in \mathbb{W}$, tem-se por hipóteses: $f'(x) + f(x) = 0$ e $g'(x) + g(x) = 0$,

$$(f+g)'(x) + (f+g)(x) = [f'(x) + f(x)] + [g'(x) + g(x)] = 0 + 0 = 0$$

Por conseguinte, vem: $(f+g) \in \mathbb{W}$.
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathbb{W}$, temnos:

$$(\lambda f)'(x) + (\lambda f)(x) = \lambda[f'(x) + f(x)] = \lambda 0 = 0.$$

Daí, obtemos: $(\lambda f) \in \mathbb{W}$.
Portanto, $\mathbb{W}$ é subespaço. ∎

7. $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x \in \mathbb{Q}$ (racionais)$\}$

Demonstração

1^o Modo:

(i) $(0,0) \in \mathbb{W}$? Pois, $0_x \in \mathbb{Q}$(racionais) (As duas coordenadas são nulas obviamente números racionais)
(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}$, onde: $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$, tem-se: x_1,$x_2 \in \mathbb{Q}$. Assim,

$$u_1 + u_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathbb{W}$. Visto que $(x_1 + x_2) \in \mathbb{Q}$.
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \notin \mathbb{W}$.
(A primeira coordenada λx_1 não necessarimante continua racional).
De sorte que: $\mathbb{W}$ não é subespaço vetorial ∎

2^o Modo:

Usaremos um contra-exemplo: Escolha $u_1 = (1,0)$ e $\lambda = \sqrt{2}$. Daí, obtemos:
$\lambda u_1 = \sqrt{2}(1,0) = \left(\sqrt{2}, 0\right) \notin \mathbb{W}$. Pois, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Portanto, $\mathbb{W}$ não é um subespaço. ∎

8. $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : c = 0 \right\}$

Demonstração

A priori, vamos reescrever as matrizes de $\mathbb{W}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W} : c = 0$. desta forma, temos: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ (os elementos de $\mathbb{W}$ são matrizes triangulares superiores de ordem 2)

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$? Visto que, $0_a = 0_b = 0_c = 0_d = 0$. (todos os elementos são nulos)

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{W}$, com $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Assim, tem-se:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Por conseguinte, vem: $A_1 + A_2 \in \mathbb{W}$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A_1, \in \mathbb{W}$, temnos:

$$\lambda A_1 = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ 0 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Logo, $\mathbb{W}$ é subespaço. ■

9. $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = |x|\}$.

Demonstração

1^o Modo:

Um vetor

$$u = (x, y) \in \mathbb{W} \Leftrightarrow y = |x| \Leftrightarrow (x, |x|) \in \mathbb{W}$$

($u \in \mathbb{W}$, desde que: a segunda coordenada do vetor corresponda ao módulo a primeira coordenada.)

(i) $(0, 0) \in \mathbb{W}$? Pois, $0_y = |0_x| = 0_x$.

(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}$, onde: $u_1 = (x_1, |x_1|)$ e $u_2 = (x_2, |x_2|)$, tem-se:

$$u_1 + u_2 = (x_1, |x_1|) + (x_2, |x_2|) = (x_1 + x_2, |x_1| + |x_2|) \neq (x_1 + x_2, |x_1 + x_2|).$$

Visto que: $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ (Desigualdade triangular).

Logo, $\mathbb{W}$ não é subespaço vetorial ■

2^o Modo:

Prova usando contra-exemplo:

Sejam $u_1 = (-5, |-5|) = (-5, 5)$ e $u_2 = (3, |3|) = (3, 3)$, então, temo-se:

$$u_1 + u_2 = (-5, 5) + (3, 3) = (-2, 8) \notin \mathbb{W}$$

Pois, a segunda coordenada não é igual ao módulo a primeira coordenada.

Portanto, $\mathbb{W}$ não é um subespaço. ■

10. $\mathbb{W} = \left\{f \in C^2(\alpha,\beta) \mid f"(x) + af'(x) + bf(x) = 0\right\}$

Demonstração

Alguns comentários e definições, antes de resolver:

Quem são os elementos f do espaço vetorial

$$C^2(\alpha,\beta)?C^2(\alpha,\beta) = \{f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}; \text{onde: } f\text{"é contínua no aberto } (\alpha,\beta)\}$$

e, portanto, $\mathbb{W}$. Neste caso, são as funções que cumpre a condição da equação diferencial ordinária de 2^a ordem com coeficientes constantes.

$f"(x) + af'(x) + bf(x) = 0.$

(i) $0(x) \in \mathbb{W}$? Pois, $0"(x) + a0'(x) + b0(x) = 0$.

(ii) $\forall f, g \in \mathbb{W}$, tem-se por hipóteses: $\begin{cases} f"(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \\ \text{e} \\ g"(x) + ag'(x) + bg(x) = 0. \end{cases}$.

Agora,

$$\begin{aligned} (f+g)"(x) + a(f+g)'(x) + b(f+g)(x) &= [f"(x) + af'(x) + bf(x)] \\ &\quad + [g"(x) + ag'(x) + bg(x)] \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Por conseguinte, vem: $(f+g) \in \mathbb{W}$.

(iii) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in \mathbb{W}$, temos:

$$(\lambda f)^{"}(x) + a(\lambda f)^{'}(x) + b(\lambda f)(x) = \lambda[f"(x) + af'(x) + bf(x)] = \lambda 0 = 0.$$

Daí, obtemos: $(\lambda f) \in \mathbb{W}$.

De sorte que: $\mathbb{W}$ é subespaço. ■

11. Seja $\mathbb{W}_\alpha$=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = \alpha\}$. Prove que: $\mathbb{W}_\alpha$ é um subespaço se, e somente se, $\alpha = 0$.

Demonstração

1^a Parte:

($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\mathbb{W}_\alpha$ é um subespaço, então, em particular, o vetor nulo $(0,0) \in \mathbb{W}_\alpha : 0_x + 0_y = \alpha$. Logo, $\alpha = 0$.

2^a Parte: $\alpha = 0 \Longrightarrow \mathbb{W}_\alpha$ é um subespaço.

($\Longleftarrow$)

De fato,

(i) $(0,0) \in \mathbb{W}$? Pois, $0_x + 0_y = 0$.

(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}_0$, onde: $u_1 = (x_1, -x_1)$ e $u_2 = (x_2, -x_2)$, tem-se:

$$u_1 + u_2 = (x_1, -x_1) + (x_2, -x_2) = (x_1 + x_2, -(x_1 + x_2)).$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathbb{W}_0$.

(iii) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda(x_1, -x_1) = (\lambda x_1, -(\lambda x_1))$. Daí, vem: $\lambda u_1 \in \mathbb{W}_0$.

De sorte que: $\mathbb{W}_0$ é um subespaço vetorial ■

12. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$. Prove que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

Demonstração

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$? Pois, $0_a = 0_b = 0_c = 0_d$, em particular, $0_b = 0_d$
(A exigência é que os elementos da diagonal sacundária sejam iguais)

(ii) $\forall A, B \in \mathbb{W}$, com $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{W}$, temos:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Logo, $\mathbb{W}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. ■

13. Seja $\mathbb{W} = \{A, X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : AX - XA = 0, \text{ com } X \text{ fixa}\}$. Prove que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

Demonstração

1^o modo:

(i) $0 \in \mathbb{W}$? De fato, $0X - X0 = 0$.

(ii) $\forall A, B \in \mathbb{W}$, por hipóteses, temos: $\begin{cases} AX - XA = 0 \\ \text{e} \\ BX - XB = 0 \end{cases}$. Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} (A + B)X - X(A + B) &= (AX - XA) + (BX - XB) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

(iii) $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{W}$, temos:

$$(\lambda_1 A)X - X(\lambda_1 A) = \lambda_1 (AX - XA) = \lambda_1 0 = 0.$$

2^o modo:

De fato, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{W}$, por hipóteses, temos: $\begin{cases} AX - XA = 0 \\ \text{e} \\ BX - XB = 0 \end{cases}$. Assim,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 A + \lambda_2 B)X - X(\lambda_1 A + \lambda_2 B) &= \lambda_1 (AX - XA) + \lambda_2 (BX - XB) \\ &= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{W}$ é um subespaço. ■

14. Seja $\mathbb{W} = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : b = 0\}$. Prove que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

Demonstração

(i) $0(x) \in \mathbb{W}$? Visto que: $0(x) = 0x + 0$, com $0_a = 0_b = 0$.
(ii) $\forall p_1(x) = a_1x, \forall p_2(x) = a_2x$ pertencentes a $\mathbb{W}$, temos:

$$(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) = a_1x + a_2x = (a_1 + a_2)x \in \mathbb{W}.$$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_1(x) = a_1x \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$(\lambda p_1)(x) = \lambda p_1(x) = \lambda(a_1x) = (\lambda a_1)x \in \mathbb{W}.$$

De sorte que: $\mathbb{W}$ é um subespaço. ■

15. Sejam $\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = 0\}$ e $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = y = 0\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Prove que:
(a) $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$ são subespaços (b) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} + \mathbb{W}$ (c) $\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$. Daí, concluímos que: a soma é direta, ou seja, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$.

Demonstração

(a)

$$\mathbb{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$$

(i) $(0, 0, 0) \in \mathbb{U}$? Pois, $0_x = 0_y = 0_z = 0$.
(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$, onde: $u_1 = (x_1, y_1, 0), u_2 = (x_2, y_2, 0)$, Daí obtemos:

$$u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in \mathbb{U}.$$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1 \in \mathbb{U} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda(x_1, y_1, 0) = (\lambda x_1, \lambda y_1, 0) \in \mathbb{U}$.
Logo, $\mathbb{U}$ é um subespaço. ■

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = 0\}.$$

Procedendo de forma inteiramente análoga, temos:
(i) $(0, 0, 0) \in \mathbb{W}$? Pois, $0_x = 0_y = 0_z = 0$.
(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}$, onde: $u_1 = (0, 0, z_1), u_2 = (0, 0, z_2)$. Por conseguinte, vem:

$$u_1 + u_2 = (0, 0, z_1 + z_2) \in \mathbb{W}.$$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda(0, 0, z_2) = (0, 0, \lambda z_2) \in \mathbb{W}$.
Logo, $\mathbb{W}$ é um subespaço. ■
(b) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} + \mathbb{W}$ (c) $\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$
Basta observar que: $\forall u \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$u = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z).$$

Agora, como $(x, y, 0) \in \mathbb{U}$ e $(0, 0, z) \in \mathbb{W}$ segue-se que:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} + \mathbb{W}.$$

(c) Além disso, seja $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{U} \cap \mathbb{W}$, então, $k \in \mathbb{U}$ e $k \in \mathbb{W}$. Ora,

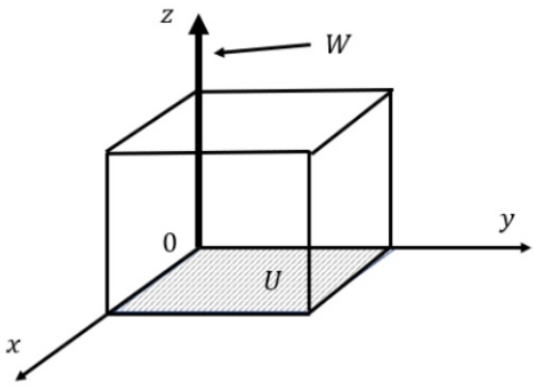
$$\begin{cases} k \in \mathbb{U} \\ \text{e} \\ k \in \mathbb{W} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_3 = 0 \\ \text{e} \\ k_1 = k_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow k = (0,0,0)\,.$$

Logo,

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}\,.$$

Dito de outro modo, $\mathbb{R}^3$ é soma direta dos subespaços $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$, isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}.$$



■

16. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$ (**E.V.**). Prove que: $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ também é um subespaço de $\mathbb{V}$.

Demonstração

(i) O vetor nulo $0 \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$? Visto que, $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços.
(ii) $\forall u, v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, por definição de intersecção, tem-se: $u, v \in \mathbb{W}_1$ e $u, v \in \mathbb{W}_2$.
Como por hipóteses $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços, segue-se que: $u + v \in \mathbb{W}_1$ e $u + v \in \mathbb{W}_2$.
Logo,

$$u + v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2.$$

Por conseguinte, vem: $(u + v) \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$.
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, por definição de intersecção, tem-se: $u \in \mathbb{W}_1$ e $u \in \mathbb{W}_2$.
Agora,por hipóteses $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços. Daí,vem: $\lambda u \in \mathbb{W}_1$ e $\lambda u \in \mathbb{W}_2$.

$$\lambda u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2.$$

Portanto, $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ é subespaço. ■

17. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$ (**E.V**.). Dê um contra-exemplo para provar que: $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não necessariamente é um subespaço de $\mathbb{V}$.

Demonstração

Vamos mostrar **apresentando quatro contra-exemplos**, a saber:

1. Vejamos **um contra-exemplo**, escolhamos

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} \\ & e \\ \mathbb{W}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\}. \end{aligned}$$

Sejam $u_1 = (1,2)$ e $u_2 = (1,-2)$, onde: $u_1, u_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$, então, tem-se:

$$u_1 + u_2 = (1,2) + (1,-2) = (2,0) \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Logo, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço. ■

2. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ subespaços vetoriais, dados por:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : c = 0 \right\} \\ & \text{e} \\ \mathbb{W}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = 0 \right\} \end{aligned}$$

Sejam $A_1, A_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ com $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, então temos:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Portanto, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço. ■

3. Ilustrativamente, escolhamos os seguintes subespaços, definidos por:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1 &= \left\{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : a = c = 0\right\} \text{ e} \\ \mathbb{W}_2 &= \left\{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : b = c = 0\right\} \end{aligned}$$

Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ com $p_1(x) = 2x$ e $p_2(x) = x^2$, então, temos:

$$p_1(x) + p_2(x) = x^2 + 2x \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Logo, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço. ■

4. Seja $\mathfrak{F}\{f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ funções definidas no intervalo $[-,a,a]\}$ escolha os subespaços

$$\mathbb{W}_1 = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a] \to \mathbb{R}) : f(x) = f(-x), \forall x [-a,a]\}$$

e

$$\mathbb{W}_2 = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a] \to \mathbb{R}) : f(x) = -f(-x), \forall x [-a,a]\}.$$

Consideremos $f_1, f_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ com $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^3$, então, temos:

$$f_1(x) + f_2(x) = x^2 + x^3 \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Daí, concluímos, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço. ■

18. Sejam $\mathcal{S}$ =$\{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = B\}$ e $\mathcal{A}$=$\{C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid C^t = -C\}$

Prove que:

(i) $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ são subespaços. (ii) $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ (iii) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.
Daí, concluímos que: a soma é direta, ou seja,

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Demonstração

(i) $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

De fato,
(a) $0 \in \mathcal{S}$? Pois, $0^T = 0$.
(b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{S}$, tem-se:

$$(B_1 + B_2)^t = B_1^t + B_2^t = (B_1 + B_2) \in \mathcal{S}.$$

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall B_1, \in \mathcal{S}$, tem-se:.

$$(\lambda B_1)^t = \lambda B_1^t = (\lambda B_1) \in \mathcal{S}.$$

Logo, $\mathcal{S}$.é um subespaço.

■

Procedendo de forma análoga, obtemos:
(i) $\mathcal{A}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) $0 \in \mathcal{A}$? Pois, $0^T = -0$.
(b) $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{A}$, tem-se:

$$(C_1 + C_2)^t = C_1^t + C_2^t = -(C_1 + C_2) \in \mathcal{A}.$$

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,$\forall C_1 \in \mathcal{A}$, tem-se:

$$(\lambda C_1)^t = \lambda C_1^t = -(\lambda C_1) \in \mathcal{A}.$$

De sorte que: $\mathbb{A}$ é um subespaço.

■

(ii) **Notações:**
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ e $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$
dizemos que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é soma direta $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$.

$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: Espaço das matrizes de ordem n com entradas reais.

$\mathcal{S}$: Subespaço das matrizes simétricas.
$\mathcal{A}$: Subespaço das matrizes anti-simétricas.

Note que: $B^t = B$ (matriz simétrica) e $C^t = -C$ (matriz anti-simétrica).
$B \in \mathbb{S} : B^t = B$ e $C \in \mathcal{A} : C^t = -C.$
Observe que:

$$\begin{cases} A = B + C \\ \text{e} \\ A^t = (B+C)^t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = B + C \\ \text{e} \\ A^t = B^t + C^t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A + A^t = (B + B^t) + (C + C^t) \\ \text{e} \\ A - A^t = (B - B^t) + (C - C^t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + A^t = 2B \\ \text{e} \\ A - A^t = 2C \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{A+A^t}{2} = B \\ \text{e} \\ \frac{A-A^t}{2} = C \end{cases}$$. Assim, $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tem-se:

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}.$$

Logo,

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}+\mathcal{A}. \tag{1}$$

(iii) Seja $K \in \mathcal{S}\cap\mathcal{A}$, então, temos: $K \in \mathbb{S}$ e $K \in \mathcal{A}$

Ora, $\begin{cases} K \in \mathcal{S} \\ \text{e} \\ K \in \mathcal{A} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K^t = K \\ \text{e} \\ K^t = -K \end{cases} \Longrightarrow K = -K \Longrightarrow K = 0.$

Portanto,

$$\mathbb{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}. \tag{2}$$

Decorre de (1) e (2) que: a soma é direta

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

. ■

19. Dados

$$\mathbb{U} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]) ; f(x) = f(-x)\} \text{ e } \mathbb{W} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]) ; f(-x) = -f(x)\},$$

onde:
$\mathfrak{F}([-a,a]) = \{f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções$\}$ é o espaço de todas as funções definidas no intervalo fechado $[-a,a]$.

Prove que:
(i) $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$ são subespaços. (ii) $\mathfrak{F}([-a,a]) = \mathbb{U} + \mathbb{W}$ (iii) $\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$.

Demonstração

(i) 1^a Parte:

$$\mathbb{U} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]) ; f(x) = f(-x)\}$$

a) $0(x) \in \mathbb{U}$? Pois, $0(x) = 0(-x) = 0.$

b) $\forall f, g \in \mathbb{U}$, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = f(-x) \\ \text{e} \\ g(x) = g(-x) \end{array}\right. \Longrightarrow (f+g)(x) = (f+g)(-x) \Longrightarrow (f+g) \in \mathbb{U}.$$

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,$\forall f \in \mathbb{U}$, tem-se:

$$f(x) = f(-x) \Longrightarrow (\lambda f)(x) = (\lambda f)(-x) \Longrightarrow \lambda f \in \mathbb{U}.$$

Portanto, $\mathbb{U}$ é um subespaço.

■

(i) 2^a Parte:

$$\mathbb{W} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]) \, ; f(-x) = -f(x)\}$$

Procedendo de forma inteiramente análoga, temos:

a) $0(x) \in \mathbb{W}$? Pois, $0(x) = -0(-x) = 0$.

b) $\forall f, g \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = -f(-x) \\ \text{e} \\ g(x) = -g(-x) \end{array}\right. \Longrightarrow (f+g)(x) = -(f+g)(-x) \Longrightarrow (f+g) \in \mathbb{W}.$$

c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,$\forall f \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$f(x) = -f(-x) \Longrightarrow (\lambda f)(x) = (-\lambda f)(-x) \Longrightarrow \lambda f \in \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ é um subespaço.

■

(ii) $\forall f \in \mathfrak{F}([-a,a])$, tem-se:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Como $\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] \in \mathbb{U}$ e $\left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right] \in \mathbb{W}$ segu-se que:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = \mathbb{U} + \mathbb{W}.$$

(iii) Seja $K \in \mathbb{U} \cap \mathbb{W}$, então, temos: $K \in \mathbb{U}$ e $K \in \mathbb{W}$.

Vejamos, $\left\{\begin{array}{c} K \in \mathbb{U} \\ \text{e} \\ K \in \mathbb{W} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} K(x) = K(-x) \\ \text{e} \\ -K(x) = K(-x) \end{array}\right. \Longrightarrow K(x) = -K(x) \Longrightarrow K(x) = 0.$

Portanto,

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$$

Agora, como

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{F}([-a,a]) & = & \mathbb{U} + \mathbb{W} \\ & & \text{e} \\ \mathbb{U} \cap \mathbb{W} & = & \{0\}. \end{array}$$

Daí, segue-se que: a soma é direta:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$$

. ■

2.4 O Conjunto de Todas as Combinações Lineares

Considere o conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbb{V}$, dada por:

$$\mathbb{W} = \{v \in \mathbb{V} |\ v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n\},$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $u_j \in \mathbb{V}$, com $j = 1, 2, \ldots, n$.
Fixados $u_1, u_2, \ldots, u_n$ em $\mathbb{V}$, temos:
(i) $\mathbb{W} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$-**subespaço gerado** por $u_1, u_2, \ldots, u_n$.
(ii) Se $\mathbb{V} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$, então, dizemos que $\mathbb{V}$ é **finitamente gerado.**

2.4.1 Dependência e Independência Linear

Definição 2.2

Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vetores de $\mathbb{V}$ (E.V.) sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que $\mathbb{S} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é L.I. (linearmente independente), quando: dada a equação:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \implies \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \qquad \text{(I)}$$

♣

Nota

Se em (I) $\lambda_j \neq 0$ para algum $j = 1, 2, \ldots, n$, então, diz-se que $\mathbb{S}$ é L.D. (linearmente dependente).

Exemplo 2.3

1. Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathbb{S} = \{t + 3,\ 2t + \lambda^2 + 2\}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ é L.I. (Linearmente independente) ? e L.D. (Linearmente dependente)?

Refazendo a questão de uma outra forma: Dada a equação:

$$a(t + 3) + b\left(2t + \lambda^2 + 2\right) = 0t + 0$$

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$, para que o sistema homogêneo só admita a solução trivial (solução nula), assim $\mathbb{S}$ é L.I.. Caso contrário, $\mathbb{S}$ será L.D.(teremos infinitas soluções)

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} a(t + 3) + b\left(2t + \lambda^2 + 2\right) &= 0t + 0 \iff \\ (a + 2b)t + \left[3a + b\left(\lambda^2 + 2\right)\right] &= 0t + 0. \end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 3a+b\left(\lambda^2+2\right)=0 \end{cases} \xrightarrow[\Longrightarrow]{3E_1-E_2\longrightarrow E_2} \begin{cases} a+2b=0 \\ 0+\left(4-\lambda^2\right)b=0. \end{cases}$$

Assim,

$$(2-\lambda)(2+\lambda)b=0.$$

1º Caso: $\lambda\neq\pm2 \Longrightarrow b=0 \Longrightarrow a=0$. *Neste caso, o sistema só admite solução trivial ou nula. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.I*

2º Caso: $\lambda=2 \Longrightarrow 0.b=0$, *voltamos para equação anterior* $a+2b=0$. *Neste caso, o sistema admite infinitas soluções. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.D*

3º Caso: $\lambda=-2 \Longrightarrow 0.b=0$ *voltando a equação* $a+2b=0$. *Analogamente, o sistema admite infinitas soluções. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.D.* ■

2. *Seja* $\mathbb{S}=\left\{e^{2x},e^{5x}\right\}$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$. *Dada a equação:*

$$\lambda_1e^{2x}+\lambda_2e^{5x}=0.$$

Prove que: $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Demonstração

Dada a equação

$$\lambda_1e^{2x}+\lambda_2e^{5x}=0. \qquad (I)$$

Multiplicando (I) por $e^{-2x}>0, \forall x\in\mathbb{R}$, obtemos:

$$\lambda_1+\lambda_2e^{3x}=0. \qquad (II)$$

Agora, derivando em relação a x $\left[(e^{Kx})\text{'}=Ke^{Kx}\right]$, vem:

$$0+3\lambda_2e^{3x}=0 \Longrightarrow \lambda_2=0 \qquad (III)$$

Assim, substituindo (III) em (II), segue-se que:

$$\lambda_1=0.$$

Ou ainda,

$$\lambda_1=\lambda_2=0.$$

De sorte que: $\mathbb{S}$ é linearmente independente. ■

Nota

Seja $\mathbb{S}=\{y_1(x),y_2(x)\}$, *onde* $y_1(x),y_2(x)\in C^1(\alpha,\beta)$, *ou seja,* $y_1(x),y_2(x)$ *tem derivadas contínuas.* ***Wronskiano*** *é dado pelo determinante da matriz, a saber:*

$$\mathbb{W}[y_1,y_2]=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y\text{'}_1 & y\text{'}_2 \end{vmatrix}\neq0, \forall x\in(\alpha,\beta),$$

onde $y\text{'}_1$ *e* $y\text{'}_2$ *são as derivadas de* 1^a *ordem das funções* $y_1(x),y_2(x)$.

Fato:

$$\mathbb{W}[y_1,y_2]\neq0, \forall x\in(\alpha,\beta) \Longrightarrow \mathbb{S} \text{ é L.I.}$$

L.I. (linearmente independente). $\mathbb{W}[y_1,y_2]=0$ *nada se pode concluir.*

Generalizando: Seja $\mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$. *O* ***Wronskiano****, é dado por:*

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Fato:

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0 \Longrightarrow \mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$$

é L.I. (Linearmente independente)

Ressaltamos que se $\mathbb{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0$, *nada se pode concluir, a título ilustrativo, considere* $\mathbb{S} = \left\{x^3, |x|^3\right\}$ *para todo* $x \neq 0$, *tem-se:*

$$\mathbb{W} = \left[x^3, |x|^3\right] = 0,$$

no entanto, $\mathbb{S}$ *é L.I. (* ***Verifique!****).*

Demonstração

De fato, por definição, sendo $x \neq 0$, tem-se:: $|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$. Agora, dada a equação:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 |x|^3 = 0.$$

1^o Caso: $x > 0$:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^3 = (\lambda_1 + \lambda_2) x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

e, procedendo de forma análoga, temos:

2^o Caso: $x < 0$:

$$\lambda_1 x^3 - \lambda_2 x^3 = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Decorre dos casos (1) e (2) que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Como o sistema só admite a solução trivial (solução nula) segue-se que: $\mathbb{S}$ é L.I. ■

Exemplo 2.4

1. Ilustrativamente, tomemos o exemplo anteior

$$\begin{aligned} \mathbb{W}[y_1, y_2] &= \mathbb{W}\left[e^{2x}, e^{5x}\right] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}.e^{5x}. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = e^{7x}.(1.5 - 2.1) \\ &= 3e^{7x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{S}$ é L.I. ■

2. Prove que: são linearmente independente (L.I.).

(i) $\mathbb{S} = \left\{e^x, e^{3x}, e^{9x}\right\}$ $\quad(ii)$ $\mathbb{S} = \{\cos(kx), \sin(kx)\}$, desde que $k \neq 0$.

(i) Por definição de wonskiano, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{W}\left[e^x, e^{3x}, e^{9x}\right] &= \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} & e^{9x} \\ e^x & 3e^{3x} & 9e^{9x} \\ e^x & 9e^{3x} & 81e^{9x} \end{vmatrix} = e^x.e^{3x}.e^{9x}. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3^2 & 9^2 \end{vmatrix} \\ &= e^{13x}(9-3).(9-1).(3-1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{S} = \left\{e^x, e^{3x}, e^{9x}\right\}$ é L.I. ■

Nota

Matriz de Vandermond ou das Potências:

Um exemplo para ilustrar é: o determinante desta matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ *é descrito por:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b).(c-a).(b-a)$$

(ii) Por definição de wonskiano, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{W}[\cos(kx), \sin(kx)] &= \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} \\ &= k\left[\cos^2(kx) + \sin^2(kx)\right] \\ &= k \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

De sorte que: $\mathbb{S}$ é L.I. ■

Problema 2.1

1. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então, prove que:
(i) $s = \frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2}$ é simétrica;
(ii) $a = \frac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}$ é anti-simétrica;
(iii) Conclua daí que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}$, onde S é o espaço das matrizes simétricas e $\mathcal{A}$ o espaço das matrizes anti-simétricas;
(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Demonstração

(i) Queremos mostrar que: $s^T = s$.

De fato,

$$s^T = \left(\frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2}\right)^T = \frac{\mathbb{A}^T + \left(\mathbb{A}^T\right)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T + \mathbb{A}}{2} = s.$$

Logo, s é simétrica. ■

Demonstração

(ii) Procedendo de forma análoga, temos:

$$\begin{aligned} a^T &= \frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T - \left(\mathbb{A}^T\right)^T}{2} \\ &= \frac{\mathbb{A}^T - \mathbb{A}}{2} = -\frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)}{2} = -a. \end{aligned}$$

De sorte que: a é anti-simétrica. ■

Demonstração

(iii)

$\forall \mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\mathbb{A} = \frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2} + \frac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}$$

Como $\frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2} = s \in S$ e $\frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)}{2} = a \in \mathcal{A}$, segue-se daí que:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A},$$

onde: S é o espaço das matrizes simétrica.. ■

Demonstração

(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Com efeito, seja $K \in S \cap \mathcal{A}$, então, temos: $K \in S$ e $K \in \mathcal{A}$.
Ora,

$$\left\{\begin{array}{c} K \in S \\ \text{e} \\ K \in A. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} K^T = K \\ \text{e} \\ K^T = -K. \end{array}\right. \Longrightarrow K = -K \Longrightarrow K = 0.$$

Portanto, $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$. ■

Nota

(A) Posteriormente voltaremos ao tema (soma direta de subespaços), quando isto ocorre:
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ e $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.
Diremos que a soma é direta, denotaremos por:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

(B) Toda matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se decompõe como soma de simétrica $B \in \mathcal{S}$ e anti-simetrica $C \in \mathcal{A}$, ou seja, $A = B + C$, onde: $B^T = B$ e $C^T = -C$

$$\left\{\begin{array}{c} A = B + C \\ e \\ A^T = (B+C)^T. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A = B + C \\ e \\ A^T = B^T + C^T \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A + A^T = \left(B + B^T\right) + \left(C + C^T\right) = 2B \\ e \\ A - A^T = \left(B - B^T\right) + \left(C - C^T\right) = 2C. \end{array}\right.$$

Assim, temos:

$$\left\{\begin{array}{c} B = \frac{A+A^T}{2} \\ e \\ C = \frac{A-A^T}{2}. \end{array}\right.$$

■

Problema 2.2

1. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$. Pede-se:

(A) Provar que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

(B) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(C) Uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Demonstração

(A) (i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$? Visto que: $0_a = 0_b = 0_c = 0_d$.

(ii) $\forall A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ é um subespaço. ■

(B) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$: $b = c$.

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + bA_2 + cA_3, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [A_1, A_2, A_3].$$

(C) Afirmação: $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W} = 3$. ■

Nota

$$\left\{\begin{array}{c} \beta=\{A_1,A_2,A_3\} \textit{ gera } \mathbb{W}. \\ e \\ \beta=\{A_1,A_2,A_3\} \textit{ é L.I.} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \beta \textit{ é uma base para } \mathbb{W}.$$

2. Seja $\mathbb{W}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z+y=0\right\}$ um subespaço. Pede-se:
(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.
(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim\mathbb{W}$.

Solução

(A) $(x,y,z)\in\mathbb{W}$: $z=-y$.
Assim,

$$(x,y,-y)=x\,(1,0,0)+y\,(0,1,-1)\,.$$

Portanto,

$$\mathbb{W}=[(1,0,0)\,,(0,1,-1)]\,.$$

Afirmação: $\beta=\{(1,0,0)\,,(0,1,-1)\}$ *é linearmente independente L.I..*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1\,(1,0,0)+\lambda_2\,(0,1,-1)=(0,0,0)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{r} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \\ -\lambda_2=0. \end{array}\right.$$

Logo, $\beta=\{(1,0,0)\,,(0,1,-1)\}$ *é L.I. Consequentemenete, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim\mathbb{W}=2$. ■

3. Seja $\mathbb{W}=\left\{\left(ax^2+bx+c\right)\in\mathbb{P}_2\left(\mathbb{R}\right) : c=0\right\}$ um subespaço. Pede-se:
(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.
(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim\mathbb{W}$.

Solução

(A) $ax^2+bx+c\in\mathbb{W}$: $c=0$.
Assim,

$$ax^2+bx+c=a.x^2+b.x.$$

Portanto,

$$\mathbb{W}=\left[x^2,x\right].$$

Afirmação: $\beta=\left\{x^2,x\right\}$ *é linearmente independente L.I..*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1x^2+\lambda_2x=0x^2+0x\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0. \end{array}\right.$$

Logo, $\beta = \left\{x^2, x\right\}$ *é L.I. Por conseguinte, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

4. Seja $\mathbb{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\right\}$ um subespaço. Pede-se:
(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.
(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Solução

(A) $(x, y, z) \in \mathbb{W}$: $z = x + y$.
Assim,

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = x\,(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 1)\,.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)]\,.$$

Afirmação: $\beta = \{(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\}$ *é linearmente independente L.I..*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1\,(1, 0, 1) + \lambda_2\,(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\}$ *é L.I. Consequentemenete, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

5. Seja $\mathbb{W} = \left\{A \in \mathbb{M}_3\,(\mathbb{R}) : A^T = A\right\}$ um subespaço. Obter uma base para $\mathbb{W}$. Qual a $\dim \mathbb{W}$? Generalize! Se $\mathcal{S} = \left\{A \in \mathbb{M}_n\,(\mathbb{R}) : A^T = A\right\}$. Qual a $\dim \mathcal{S}$?

Solução

Basta notar que: $A \in \mathbb{M}_3\,(\mathbb{R}) : A^T = A$, *tem-se:* $A = \begin{pmatrix} a & \lambda & \beta \\ \lambda & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$. *Assim,*

$$\begin{pmatrix} a & \lambda & \beta \\ \lambda & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$\beta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= aA_1 + bA_2 + cA_3 + \lambda A_4 + \beta A_5 + \gamma A_6$
Logo,

$$\mathbb{W} = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6]\,.$$

■

Agora, mostremos que $\alpha = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ *é um conjunto L.I. De fato, dada a equação*

$$k_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + k_5\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} +$$

$$k_6\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Produzir o seguinte resultado

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = 0, \quad k_5 = 0 \quad e \quad k_6 = 0.$$

Portanto, $\alpha = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ *é um conjunto L.I.* ■

Por conseguinte, obtemos: $\alpha = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 6$.

A dimensão generalizada para o subespaços das matrizes simétricas $\mathcal{S}$, *é dada por:*

$$\begin{pmatrix}a_1 & * & & \Delta\\ * & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Delta & & & a_n\end{pmatrix}_{n\times n}$$

Note que:

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

■

Nota

O subespaço das matrizes anti-simétricas $\mathcal{A}$

Se $\mathcal{A}=\left\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\right\}$. *Qual a* $\dim \mathcal{A}$?

O espaço de todas as matrizes quadradas $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *como soma direta dos subespaços das matrizes simétricas* $\mathcal{S}$ *e anti-simétricas, ou seja,*

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Consequentemente, vem:

$$n^2 = \dim \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \frac{n\,(n+1)}{2} + \dim \mathcal{A} \Longrightarrow \dim \mathcal{A} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

■

Capítulo Execícios

1. Sejam $u, v \in \mathbb{V}$ espaço vetorial euclidiano, sabendo-se que: $\|u+v\| = 1$ e $\|u-v\| = 5$. Calcule: $\langle u, v \rangle$

Solução

Com efeito, $\begin{cases} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = 1 \\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = 25 \end{cases} \Longrightarrow \{2\langle u, v \rangle - [-2\langle u, v \rangle] = -24.$

Logo,

$$\langle u, v \rangle = -6.$$

■

2. Seja $\mathbb{V}$ (espaço vetorial euclidiano), prove que:

(i) $\|u\| = \|v\| \Longleftrightarrow \langle u+v, u-v \rangle = 0.$

Demonstração

De fato,

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle u-v, u+v \rangle = 0,$$

visto que: $\langle -v, u \rangle + \langle u, v \rangle = 0.$ ■

(ii) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$ (Identidade do paralelogramo).

Demonstração

Com efeito, tem-se:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \tag{1}$$

de forma inteiramente anãloga, temos:

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

■

(iii) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Longleftrightarrow \langle u, v \rangle = 0.$

Demonstração

De fato,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Longleftrightarrow \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Logo,

$$2\langle u, v \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle u, v \rangle = 0.$$

■

3. Sejam $u, v \in \mathbb{V}$ (espaço vetorial euclidiano). Determine o cosseno do ângulo entre u e v, sabendo-se que:
$\|u\| = 5, \|v\| = 8$ e $\|u+v\| = \sqrt{129}$.

Solução

Por definição temos:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{5.8} = \frac{\langle u, v\rangle}{40}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = 129 \\ &\Longrightarrow 5^2 + 2\langle u, v\rangle + 8^2 = 129 \\ &\Longrightarrow 2\langle u, v\rangle = 129 - 25 - 64 = 40 \\ &\Longrightarrow \langle u, v\rangle = 20. \end{aligned}$$

Assim,

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

e, como $0 \leq \theta \leq \pi$ *segu-se que*:

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

■

4. Seja $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, então, prove que:
$|x_j| \leq \|u\| \leq \sqrt{3}\max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, com $j = 1, 2, 3$.

Demonstração

Seja $u = (x_1, x_2, x_3)$, então temos:

$$|x_j|^2 \leq \|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Além disso, escolha $\mathbb{M} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, então, daí, obtemos:

$$|x_j|^2 \leq \|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq \mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^2 = 3\mathbb{M}^2,$$

ou ainda,

$$|x_j|^2 \leq \|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 3\mathbb{M}^2,$$

e, portanto,

$$|x_j| \leq \|u\| \leq \sqrt{3}\mathbb{M}$$

com $j = 1, 2, 3$. ■

5. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{V}$ (espaço vetorial normado). Mostre que:
$\lambda.u = 0, u \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0$.

Demonstração

1^a Parte:

$\alpha.u = 0$ e suponha $\alpha \neq 0$, então, temos: $\alpha^{-1}.\alpha = 1$ e

$$\left(\alpha^{-1}.\alpha\right).u = \alpha^{-1}.0 = 0 \Longrightarrow 1.u = 0.$$

2^a Parte: O espaço vetorial é normado; assim, podemos usar a definir da noma euclidiana $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ e suponha $u \neq 0$, então, $\|u\|^2 \neq 0$, teremos:

$$\alpha.u = 0 \Longrightarrow \langle \alpha.u, u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha.\, \|u\|^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{0}{\|u\|^2} = 0.$$

De sorte que:

$$\alpha = 0 \text{ ou } u = 0.$$

■

6. Sejam a_1 e a_2 números reais positivos. Prove que:

$$(a_1 + a_2)\,.\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geq 4.$$

Generalize.

Sejam $a_j \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\,.\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Demonstração

Não faremos o caso particular (Fica como exercício!)

1^o Modo:

Sejam $a_j \in \mathbb{R}$, com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, então, façamos por simplicidade

$$u = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) \text{ e } v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Além disso, veja que resultados lindos e elegantes, usando a norma euclidiana e o produto interno usual, temos:

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{a_1 + \ldots + a_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \|v\| = \sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} \\ &\text{e} \\ \langle u, v\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right) = \sqrt{a_1}.\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \sqrt{a_n}.\frac{1}{\sqrt{a_n}} = n.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o belíssimo resultado:

$$n = \left|\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right| \leq \sqrt{a_1 + \ldots + a_n}.\sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

e, portanto, elevando-se ao quadrado, ambos os membros da desigualdade, vem:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n)\,.\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

■

2^o Modo:

À luz dadas desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}. \tag{1}$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)}{n}. \tag{2}$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \cdot \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} = \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} = 1,$$

obtemos:

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

■

7. Esboce os gráfico de $\mathbb{A} = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\| = 1\}$, $\mathbb{B} = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_s = 1\}$ e $\mathbb{C} = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty = 1\}$, onde: $u = (x, y)$.

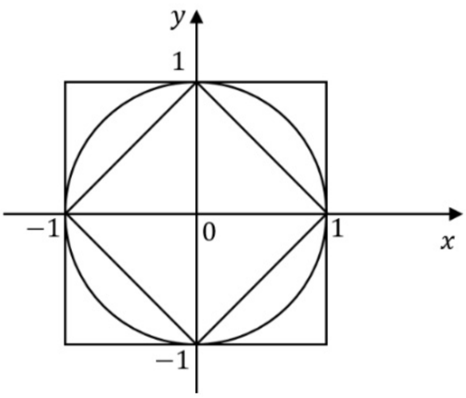
Nota

Algumas normas:

$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *(norma euclidiana),*

$\|u\|_s = |x| + |y|$ *(norma da soma) e*

$\|u\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ *(norma do máximo ou supremo)*



8. Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, mostre que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|u\|_s \leq \|u\| \leq \|u\|_s,$$

onde: $\|u\|_s = |x| + |y|$ (norma da soma) e $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma euclidiana).

Demonstração

Com efeito,

$$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = \|u\|_s \Longrightarrow \|u\| \leq \|u\|_s \,. \tag{1}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} (|x|-|y|)^2 &\geq 0 \Longleftrightarrow 2\left(|x|^2+|y|^2\right) \geq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &\Longleftrightarrow 2\|u\|^2 \geq (|x|+|y|)^2 = \|u\|_s \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{2}\|u\| \geq \|u\|_s \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_s \leq \|u\| \end{aligned} \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|u\|_s \leq \|u\| \leq \|u\|_s \,,$$

■

9. Dê um contra-exemplo para mostrar que as normas da soma e do máximo não satisfazem a identidade do paralelogramo.

Solução

A Identidade do pararelogramo, é dada por:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

(i) *Sejam* $u=(x,y)$ *e* $\|u\|_s = |x|+|y|$ *(norma da soma)*

Sejam $e_1=(1,0)$ *e* $e_2=(0,1)$*, então, temos:* $\begin{cases} e_1+e_2=(1,1) \\ \quad e \\ e_1-e_2=(1,-1)\,. \end{cases}$

Assim,

$$\|e_1\|_S = |1|+|0| = 1, \|e_2\|_S = |0|+|1| = 1, \|e_1+e_2\|_S = 2 \text{ e } \|e_1-e_2\|_S = 2.$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned} \|e_1+e_2\|_S^2 + \|e_1-e_2\|_S^2 &= 2^2+2^2=8 \\ &\quad e \\ 2\left(\|u\|_S^2+\|v\|_S^2\right) &= 2\left(1^2+1^2\right)=4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \neq 2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right).$$

(ii) *Sejam* $u=(x,y)$ *e* $\|u\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$ *(norma do máximo ou supremo)*

Consideremos, $e_1=(1,0)$ *e* $e_2=(0,1)$*, então, tem-se:*

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &= \max\{|1|,|0|\} = 1 \\ &\quad e \\ \|v\|_\infty &= \max\{|0|,|1|\} = 1 \end{aligned}$$

$e_1 + e_2 = (1,1)$ e $e_1 - e_2 = (1,-1)$. Assim, vem:

$$\begin{aligned} \|u+v\|_\infty &= \max\{|1|,|1|\} = 1 \\ &\quad e \\ \|u-v\|_\infty &= \max\{|1|,|-1|\} = 1 \end{aligned}$$

. Logo,

$$\begin{aligned} \|u+v\|_\infty^2 + \|u-v\|_\infty^2 &= 1^2 + 1^2 = 2 \\ &\quad e \\ 2\left(\|u\|_\infty^2 + \|v\|_\infty^2\right) &= 2\left(1^2+1^2\right) = 4. \end{aligned}$$

De sorte que: Portanto,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \neq 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

■

10. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é ortogonal. Então, prove que:
$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, conclua daí que: $\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$.
($\mathbb{A}$ é ortogonal, quando: $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$)

Demonstração

Considere a base canônica α de $\mathbb{R}^n$
$\alpha = \{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$. Assim, temos:

$$u = (x_1, x_2 \ldots, x_n) = x_1(1,0,\ldots,0) + \ldots + x_n(0,0,\ldots,0,1).$$

Desta forma, a matriz de coordenadas do vetor u na base canônica é dada por:

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \in \mathbb{R}^{nx1},\ x^t x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1xn} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

$$x^t x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|x\|^2.$$

Daí, vem:

$$\|\mathbb{A}x\|^2 = (\mathbb{A}x)^t(\mathbb{A}x) = x^t(\mathbb{A}^t\mathbb{A})x = x^t x = \|x\|^2.$$

Logo,

$$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|.$$

■

Decorre do delineado acima que:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}(x-y)\|^2 &= \|x-y\|^2 \\ \|\mathbb{A}x\|^2 - 2\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle + \|\mathbb{A}y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$$

■

2.5 Base e dimensão

Definição 2.3

Dizemos que $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* $\mathbb{V}$*,quando:*
(i) β *é L.I.*
(ii) β *gera* $\mathbb{V}$*,ou seja,* $\mathbb{V} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ *.* ♣

Nota

A dimensão de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ *é o número de elementos de uma de suas bases, denotamos por:* $\dim \mathbb{V}$.

Exemplo 2.5

1. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \Longrightarrow \dim \mathbb{V} = n$.

   Uma base para $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$

   $$\beta = \{(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\},$$

   cada vetor de β tem n coordenadas. ■

2. $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \dim \mathbb{V} = n + 1$.
   Uma base para $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

   $$\beta = \left\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\right\},$$

   temos $n + 1$ termos em β. ■

3. $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \dim \mathbb{V} = m \times n$.
   Uma base para $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

   $$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}, , , \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{m\times n} \right\},$$

   cada matriz tem m linhas e n colunas em β temos $m \times n$ matrizes. ■

4. $\mathbb{V} = \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow \dim \mathbb{V} = n^2$.

   Uma base para $\mathbb{V} = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

   $$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}, , , \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \right\},$$

   cada matriz tem n linhas e n colunas em β temos $n \times n = n^2$ matrizes. ■

5. $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \dim \mathbb{V}$ =4.

Uma base para $\mathbb{V} = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

cada matriz tem 2 linhas e 2 colunas em β temos $2 \times 2 = 4$ matrizes. ■

6. $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \dim \mathbb{V}$ =3.
Uma base para $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$\beta = \{x^2, x, 1\},$$

temos 3 termos em β. ■

7.. $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \dim \mathbb{V}$ =3.

Uma base para $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

temos 3 vetores em β. ■

Fato:
Duas bases quaisquer de $\mathbb{V}$ tem o mesmo número de vetores.

Exemplo 2.6

(A) Determine um base para cada um dos subespaços:

1. $\mathbb{W}$ =$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$. Obter uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Solução

Com efeito, $(x,y) \in \mathbb{W} : (x,y) = (x,2x) = x(1,2)$. *Assim,*

$$\mathbb{W}[(1,2)]$$

Além disso, $\beta = \{(1,2)\}$ *porquê?*
De sorte que:

$$\beta = \{(1,2)\}$$

é uma base para $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W}$=1. ■

2. $\mathbb{W}$ =$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ z = x + y\}$. Obter uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Solução

$(x,y,z) \in \mathbb{W}$: $z = x + y$.

Assim,

$$(x,y,z) = (x,y,x+y) = x(1,0,1) + y(0,1,1).$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [(1,0,1), (0,1,1)].$$

Afirmação: $\beta = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ *é linearmente independente L.I.*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (0,1,1) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{(1,0,1), (0,1,1)\}$ *é L.I. Consequentemenete, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

3. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \left(ax^2 + bx + c \right) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : c = 0 \right\}$ um subespaço. Obter uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Solução

(a) $ax^2 + bx + c \in \mathbb{W}$: $c = 0$.
Assim,

$$ax^2 + bx + c = a.x^2 + b.x.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = \left[x^2, x \right].$$

(b) *Afirmação:* $\beta = \left\{ x^2, x \right\}$ *é linearmente independente L.I..*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x = 0x^2 + 0x \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \left\{ x^2, x \right\}$ *é L.I. Por conseguinte, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

4. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$ um subespaço. Obter uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Solução

Observe que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$: $b = c$.
Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + bA_2 + cA_3, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [A_1, A_2, A_3] .$$

Afirmação: $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ *é linearmente independente L.I..*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ *é L.I. Por conseguinte, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 3$. ■

5. $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid b = c = 0 \right\}$

Solução

Observe que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$*:* $b = c = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + dA_2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [A_1, A_2] .$$

Afirmação: $\beta = \{A_1, A_2\}$ *é linearmente independente L.I..*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{A_1, A_2\}$ *é L.I. Por conseguinte, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

(B) Determine os subespaços gerados por:

(i) $u_1 = (-1, 2)$ *e* $u_2 = (2, -4)$;

Queremos determinar o subespaço

$$\mathbb{W} = \left\{ v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \right\} .$$

Vejamos

$$(x, y) = \lambda_1 (-1, 2) + \lambda_2 (2, -4) \Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 = y \end{cases} .$$

Assim, fazendo $2E_1 + E_2 \longrightarrow E_2$*, obtemos:*

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ 0 = 2x + y. \end{cases}$$

Portanto, o subespaço $\mathbb{W}$ *será descrito por:*

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x \right\}.$$

■

(ii) $p_1(x) = x^2$ *e* $p_2(x) = x^2 + x$.
Queremos determinar o subespaço

$$\mathbb{W} = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : ax^2 + bx + c = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \left(x^2 + x \right) \right\}.$$

Agora, fazendo algumas operações e da igualdade de polinômios,obtemos:

$$ax^2 + bx + c = (\lambda_1 + \lambda_2) x^2 + \lambda_2 x \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_2 = b \\ 0 = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - b \\ \lambda_2 = b \\ 0 = c. \end{cases}$$

De sorte que: o subespaço desejado é delineado por:

$$\mathbb{W} = \left\{ ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : c = 0 \right\}.$$

■

Capítulo Execícios

1. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$. Pede-se:
(A) Provar que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.
(B) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.
(C) Uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Demonstração

(A) (i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$? Visto que: $0_a = 0_b = 0_c = 0_d$.

(ii) $\forall A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ é um subespaço. ■

$(B)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$: $b = c$.
Assim,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + bA_2 + cA_3,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = [A_1, A_2, A_3].$$

(C) Afirmação: $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W} = 3$. ■

Nota

$$\left\{\begin{array}{c} \beta = \{A_1, A_2, A_3\} \ \textit{gera } \mathbb{W}. \\ e \\ \beta = \{A_1, A_2, A_3\} \ \textit{é L.I.} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \beta \ \textit{é uma base para } \mathbb{W}.$$

2. Seja $\mathbb{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y = 0\right\}$ um subespaço. Pede-se:
(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.
(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Solução

(A) $(x, y, z) \in \mathbb{W}$: $z = -y$.
Assim,

$$(x, y, -y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1).$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)].$$

Afirmação: $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$ *é linearmente independente L.I..*

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(0, 1, -1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$ *é L.I. Consequentemenete, vem:* β *é uma base para* $\mathbb{W}$ *e* $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

3. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \left(ax^2 + bx + c \right) \in \mathbb{P}_2 \left(\mathbb{R} \right) : c = 0 \right\}$ um subespaço. Pede-se:
(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.
(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W}$.

Solução

(A) $ax^2 + bx + c \in \mathbb{W}$: $c = 0$.
Assim,

$$ax^2 + bx + c = a.x^2 + b.x.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = \left[x^2, x \right].$$

Afirmação: $\beta = \left\{ x^2, x \right\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x = ox^2 + 0x \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \left\{ x^2, x \right\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e $\dim \mathbb{W} = 2$. ■

4. Suponha que $\mathbb{S}_1 = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ é um conjunto L.I. de vetores de $\mathbb{R}^n$. Mostre que: Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n \left(\mathbb{R} \right)$ é invertível, então,

$$\mathbb{S}_2 = \{ \mathbb{A}v_1, \mathbb{A}v_2, \ldots, \mathbb{A}v_n \}$$

é L.I. (linearmente independente).

Demonstração

Com efeito, $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n \left(\mathbb{R} \right)$ é invertível, então, temos: $\mathbb{A}^{-1}.\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$. Assim, dada a equação:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(\mathbb{A}v_1 \right) + \lambda_2 \left(\mathbb{A}v_2 \right) + \ldots + \lambda_n \left(\mathbb{A}v_n \right) &= 0 \Leftrightarrow \mathbb{A} \left[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \right] = 0 \\ &\Longrightarrow \left(\mathbb{A}^{-1}.\mathbb{A} \right). \left[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \right] = \mathbb{A}^{-1}.0 \\ &\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0. \end{aligned}$$

Agora, como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, obtemos:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

De sorte que: $\mathbb{S}_2$ é L.I. (linearmente independente). ■

5. Seja $\mathbb{S}_1 = \{ u, v, w \}$ é um conjunto L.I, então, prove que o conjunto $\mathbb{S}_2 = \{ u + v - 3w, \ u + 3v - w, \ v + w \}$, é L.D. (linearmente dependente).

Demonstração

Com efeito, dada a equação:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left(u + v - 3w \right) + \lambda_2 \left(u + 3v - w \right) + \lambda_3 \left(v + w \right) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ \left(\lambda_1 + \lambda_2 \right) u + \left(\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \right) v + \left(-3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \right) w &= 0. \end{aligned}$$

Daí, considerando a operação $\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, vem:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{cases} \overset{4\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3}{\Longrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, o sistema está na forma escalonada

$$\begin{cases} \lambda_3 + \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Agora, como o sistema é compátivel e indeterminado, obtemos: $\mathbb{S}_2$ é L.D. (linearmente dependente). ■

6. Quais são os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que:

$$\mathbb{S} = \left\{ (1, 0, \alpha), (1, 1, \alpha), \left(1, 1, \alpha^2\right) \right\}.$$

seja L.I.(linearmente independente)?.e L.D (linearmente dependente)?

Solução

Dada a equação:

$$a(1, 0, \alpha) + b(1, 1, \alpha) + c\left(1, 1, \alpha^2\right) = (0, 0, 0).$$

Daí vem:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ \alpha a + \alpha b + \alpha^2 c = 0 \end{cases}$$

$\alpha\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ *com* $\alpha \neq 0$.

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ \left(\alpha - \alpha^2\right) c = 0. \end{cases}$$

Assim,

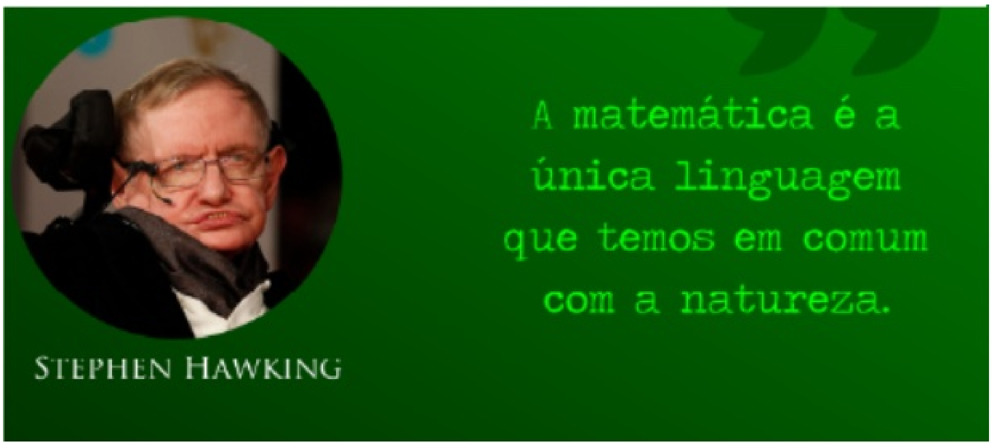
$$\alpha(1 - \alpha) c = 0$$

1º Caso: $\alpha \neq 0$ *e* $\alpha \neq 1 \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow a = 0.$
Logo, $\mathbb{S}$ *é linearmente independente.*

2º Caso: $\alpha = 0$ *ou* $\alpha = 1 \Longrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0. \end{cases}$
Como o sistema é compatível e indeterminado, segue-se que: $\mathbb{S}$ *é linearmente dependente.* ■

Capítulo 3 - Transformações Lineares

"A matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza"



3.1 Um pouco de História das Transformações Lineares

As transformações lineares são um conceito importante da álgebra linear, que descrevem as relações lineares entre vetores e matrizes. Elas são fundamentais em diversas áreas da matemática, da física, da engenharia e da computação, e suas aplicações são muitas e variadas. A história das transformações lineares começa com a descoberta da álgebra linear no final do século XIX e início do século XX, quando matemáticos como Hermann Grassmann, William Rowan Hamilton e Georg Cantor começaram a explorar as propriedades algébricas dos vetores e das matrizes.

A teoria das transformações lineares foi desenvolvida principalmente por matemáticos como David Hilbert, Emil Artin, Hermann Weyl e John von Neumann na primeira metade do século XX. Eles descobriram que as transformações lineares são uma ferramenta poderosa para descrever as propriedades geométricas e algébricas dos objetos matemáticos, e que muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos usando técnicas de transformações lineares.

As aplicações das transformações lineares são muitas e variadas. Na matemática, elas são usadas para resolver equações diferenciais, encontrar autovalores e autovetores de matrizes, e descrever as propriedades dos espaços vetoriais. Na física, elas são usadas para descrever o comportamento de sistemas dinâmicos, como a mecânica quântica e a relatividade geral. Na engenharia, elas são usadas para projetar sistemas de controle e de comunicação, e para analisar e otimizar processos industriais. Na computação, elas são usadas para processar imagens, som e vídeo, para modelar sistemas de inteligência artificial e para codificar informações de forma eficiente. As transformações lineares são uma das ferramentas matemáticas mais poderosas e versáteis que existem, e suas aplicações estão em constante expansão, à medida que novas áreas da ciência e da tecnologia emergem e se desenvolvem.

3.2 Considerações Preliminares

Neste Capítulo, estudares um tipo especial de transformação ou função, as transformações lineares: núcleo e imagem de uma transformação linear, teorema do núcleo e da imagem, transformações lineares; injetoras, sobrejetoras e bijetoras; bem como, isomorfismo, automorfismo e endomorfismo e suas inversas, composições de transformações lineares, matriz de uma transformação linear, matriz da composta, transformações do plano no plano e para finalizar uma breve introdução aos autovalores (valores característicos) associados aos correspondentes autovetores (vetores característicos).

3.3 Transformações Lineares

Definição 3.1

Sejam $\mathbb{U}$ *e* $\mathbb{V}$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e seja* $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ *uma transformação. Dizemos que* T *é linear, quando:*
(i) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$: $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$;
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1 \in \mathbb{U}$: $T(\lambda u_1) = \lambda T(u_1)$. ♣

Capítulo Execícios

Verifique se são lineares as transformações:

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, y)$.

Solução

(i) $\forall u_1 = (x_1 y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + y_1, y_1) + (x_2 + y_2, y_2) \\ &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ &= T(u_1) + T(u_2) \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1 \in \mathbb{R}^2$: $T(\lambda u_1) = \lambda T(u_1)$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(\lambda u_1) &= T(\lambda x_1, \lambda y_1) = \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda y_1) \\ &= \lambda(x_1 + y_1, y_1) \\ &= \lambda T(x_1, y_1) \\ &= \lambda T(u_1). \end{aligned}$$

Logo, T *é linear.* ■

2. $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(X) = \mathbb{A}X$, onde $\mathbb{A}$ é uma matriz $m \times n$ fixa.

Solução

(i) $\forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(X_1 + X_2) &= \mathbb{A}(X_1 + X_2) = \mathbb{A}X_1 + \mathbb{A}X_2 \\ &= T(X_1) + T(X_2). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall X_1 \in \mathbb{R}^n$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(\lambda X_1) &= \mathbb{A}(\lambda X_1) \\ &= \lambda(\mathbb{A}X_1) \\ &= \lambda T(\mathbb{A}X_1). \end{aligned}$$

De sorte que: T é linear. ■

3. $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = ax$.

Solução

(i) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, *tem-se:*

$$T(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = T(x_1) + T(x_2).$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$T(\lambda x_1) = a(\lambda x_1) = \lambda(ax_1) = \lambda T(aX_1).$$

Portanto, T é linear. ■

4. $T:\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $T(p(x)) = (p(0), p(1))$.

Solução

(i) $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T((p_1 + p_2)(x)) &= ((p_1 + p_2)(0), (p_1 + p_2)(1)) \\ &= (p_1(0), p_1(1)) + (p_2(0), p_2(1)) \\ &= T(p_1(x)) + T(p_2(x)) \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_1 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, *temos:*

$$\begin{aligned} T((\lambda p_1)(x)) &= ((\lambda p_1)(0), (\lambda p_1)(1)) \\ &= \lambda(p_1(0), p_1(1)) \\ &= \lambda T(p_1(x)) \end{aligned}$$

Logo, T é linear. ■

5. $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, $T\,[p(x)] = xp\text{'}(x)$.

Solução (i) $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T\left((p_1 + p_2)(x)\right) &= x((p_1 + p_2)^{'}(x) \\ &= xp_1^{'}(x) + xp_2^{'}(x) \\ &= T\left[p_1(x)\right] + T\left[p_2(x)\right] \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_1 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, *temos:*

$$\begin{aligned} T\left((\lambda p_1)(x)\right) &= x((\lambda p_1)^{'}(x) \\ &= \lambda\left[xp_1^{'}(x)\right] \\ &= \lambda T\left[p_1(x)\right] \end{aligned}$$

Logo, T é linear. ■

6. $F : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $F(A) = A + A^T$.

Solução

(i) $\forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} F(A + B) &= (A + B) + (A + B)^T = \left(A + A^T\right) + \left(B + B^T\right) \\ &= F(A) + F(B)\,. \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$F(\lambda A) = (\lambda A) + (\lambda A)^T = \lambda\left(A + A^T\right) = \lambda F(A)\,.$$

De sorte que: F é linear. ■

7. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$.

Solução

(i) $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ *com* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(X + Y) &= T\left((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)\right) = T\left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(x_j + y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j = T(X) + T(Y)\,. \end{aligned}$$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(aX) &= T\left(ax_1, \ldots, ax_j, \ldots, ax_n\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(ax_j\right) \\ &= a\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = aT(X)\,. \end{aligned}$$

De sorte que: T é linear. ■

8. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = \left(x, x^2\right).$

Solução

(i) $\forall u_1 = (x_1 y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= \left(x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T(u_1) + T(u_2) &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\ &= \left(x_1, x_1^2\right) + \left(x_2, x_2^2\right) \end{aligned}$$

Como em geral $(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2$, *segue-se que:*

$$T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$$

Logo, T *não é linear.* ■

9. $T: C^2(\alpha, \beta) \to C^0(\alpha, \beta)$, $T[y] = y\text{"}+ay\text{'}+by$.

Solução

(i) $\forall y_1, y_2 \in C^2(\alpha, \beta)$, *obtem-se:*

$$\begin{aligned} T[y_1 + y_2] &= (y_1 + y_2)\text{"} + a(y_1 + y_2)\text{'} + b(y_1 + y_2) \\ &= \left(y_1\text{"} + ay_1^{'} + by_1\right) + \left(y_2\text{"} + ay_2^{'} + by_2\right) \\ &= T[y_1] + T[y_2]. \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall y_1 \in C^2(\alpha, \beta)$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T[\lambda y_1] &= (\lambda y_1)\text{"} + a(\lambda y_1)\text{'} + b(\lambda y_1) \\ &= \lambda\left(y_1\text{"} + ay_1^{'} + by_1\right) = \lambda T[y_1]. \end{aligned}$$

Logo: T *é linear.* ■

10. $T: \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b, c, d).$

Solução

(i) $\forall A, B \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, *escolhendo* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, *vem::*

$$\begin{aligned} T(A+B) &= T\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right] = T\left[\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}\right] \\ &= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), c_1 + c_2, d_1 + d_2) \\ &= (a_1 + b_1, c_1, d_1) + (a_2 + b_2, c_2, d_2) \\ &= T\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right] + T\left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right] \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

(ii) $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(\lambda A) &= T\left[\lambda\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right] = T\left[\begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix}\right] \\ &= (\lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda c_1, \lambda d_1) = \lambda(a_1 + b_1, c_1, d_1) \\ &= \lambda T\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right] = \lambda T(A). \end{aligned}$$

Portanto: T é linear. ■

11. $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Solução

(i) $\forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(A+B) &= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}) + \sum_{i=1}^{n}(b_{ii}) = T(A) + T(B). \end{aligned}$$

(ii) $\forall\lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}) = (\lambda a_{11}) + (\lambda a_{22}) + \ldots + (\lambda a_{nn}). \\ &= \lambda(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda T(A). \end{aligned}$$

De sorte que: T é linear. ■

12. $S : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, S(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx$.

Solução

(i) $\forall p, q \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} S((p+q)(x)) &= \int_0^1 (p+q)(x)\,dx = \int_0^1 p(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,dx \\ &= S(p(x)) + S(q(x)) \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} S\left(\left(\lambda p\right)(x)\right) &= \int_0^1 \left(\lambda p\right)(x)\,dx = \int_0^1 \lambda p\left(x\right)dx \\ &= \lambda \int_0^1 p\left(x\right)dx = \lambda S\left(p\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

De sorte que: S é linear. ■

13. $F : \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right) \to \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, $F\left(A\right) = A^T$.

Solução

(i) $\forall A, B \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tem-se:

$$\begin{aligned} F\left(A+B\right) &= \left(A+B\right)^T = A^T + B^T \\ &= F\left(A\right) + F\left(B\right). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tem-se:

$$\begin{aligned} F\left(\lambda A\right) &= \left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T \\ &= \lambda F\left(A\right). \end{aligned}$$

De sorte que: F é linear. ■

14. $F : \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right) \to \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, $F\left(A\right) = A - A^T$.

Solução

(i) $\forall A, B \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tem-se:

$$\begin{aligned} F\left(A+B\right) &= \left(A+B\right) - \left(A+B\right)^T = \left(A - A^T\right) + \left(B - B^T\right) \\ &= F\left(A\right) + F\left(B\right). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tem-se:

$$F\left(\lambda A\right) = \left(\lambda A\right) - \left(\lambda A\right)^T = \lambda\left(A - A^T\right) = \lambda F\left(A\right).$$

De sorte que: F é linear. ■

15. $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(A) = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.
(Traço de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é igual a soma dos elementos da diagonal principal)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

O traço da matriz A é igual a **soma dos elementos da diagonal principal** ,dada por:

$$trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{ii} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(Para maiores esclarecimentos veja referência [17] Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos, ebook 2022)

Solução

(i) $\forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(A+B) &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + \ldots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + \ldots + b_{nn}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}) + \sum_{i=1}^{n} (b_{ii}) = T(A) + T(B). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(\lambda A) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii}) = (\lambda a_{11}) + (\lambda a_{22}) + \ldots + (\lambda a_{nn}). \\ &= \lambda (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda T(A). \end{aligned}$$

De sorte que: T é linear. ■

16. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R}), T(a,b) = ax^2 + bx + (a+b)$

Solução
(i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$, *com* $u = (a_1, b_1)$ *e* $v = (a_2, b_2)$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = T(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (a_1 + a_2 + b_1 + b_2) \\ &= \left[a_1x^2 + b_1x + (a_1 + b_1)\right] + \left[a_2x^2 + b_2x + (a_2 + b_2)\right] \\ &= T(a_1, b_1) + T(a_2, b_2) = T(u) + T(v). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^2$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(\lambda u) &= T(\lambda(a_1, b_1)) = T(\lambda a_1, \lambda b_1) \\ &= (\lambda a_1) x^2 + (\lambda b_1) x + (\lambda a_1 + \lambda b_1) \\ &= \lambda \left[a_1 x^2 + b_1 x + (a_1 + b_1)\right] \\ &= \lambda T(a_1, b_1) = \lambda T(u). \end{aligned}$$

Logo, T é linear. ∎

17. $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_{(n+1)}(\mathbb{R})$, $(Tp)(x) = xp(x+1)$.

Solução

(i) $\forall p, q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(p+q)(x) &= x(p+q)(x+1) = xp(x+1) + xq(x+1) \\ &= (Tp)(x) + (Tq)(x). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$T(\lambda p)(x) = x(\lambda p)(x+1) = \lambda[xp(x+1)] = \lambda(Tp)(x).$$

De sorte que, T é linear. ∎

18. $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $(Tp)(t) = \left(\int\limits_{-1}^{0} p(t)\,dt, \int\limits_{0}^{1} p(t)\,dt\right)$.

Solução

(i) $\forall p, q \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(p+q)(t) &= \left(\int\limits_{-1}^{0} (p+q)(t)\,dt, \int\limits_{0}^{1} (p+q)(t)\,dt\right) \\ &= \left(\int\limits_{-1}^{0} p(t)\,dt + \int\limits_{-1}^{0} q(t)\,dt, \int\limits_{0}^{1} p(t)\,dt + \int\limits_{0}^{1} q(t)\,dt\right) \\ &= \left(\int\limits_{-1}^{0} p(t)\,dt, \int\limits_{0}^{1} p(t)\,dt\right) + \left(\int\limits_{-1}^{0} q(t)\,dt, \int\limits_{0}^{1} q(t)\,dt\right) \\ &= (Tp)(t) + (Tq)(t). \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(\lambda p)(t) &= \left(\int\limits_{-1}^{0} (\lambda p)(t)\,dt, \int\limits_{0}^{1} (\lambda p)(t)\,dt\right) = \lambda\left(\int\limits_{-1}^{0} p(t)\,dt, \int\limits_{0}^{1} p(t)\,dt\right) \\ &= \lambda T[p(t)]. \end{aligned}$$

De sorte que, T é linear. ∎

19. $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), T(\mathbb{X}) = \mathbb{M}X - X\mathbb{M}$.

Solução

(i) $\forall A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(A+B) &= \mathbb{M}(A+B) - (A+B)\mathbb{M} \\ &= (\mathbb{M}A - A\mathbb{M}) + (\mathbb{M}B - B\mathbb{M}) \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(\lambda A) &= \mathbb{M}(\lambda A) - (\lambda A)\mathbb{M} \\ &= \lambda(\mathbb{M}A - A\mathbb{M}) \\ &= \lambda T(A). \end{aligned}$$

De sorte que: T *é linear.* ■

20. $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R}), T[p(t)] = t^2 p''(t)$.

Solução

(i) $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T((p_1 + p_2)(t)) &= t^2 ((p_1 + p_2)''(t) \\ &= t^2 p_1''(t) + t^2 p_2''(t) \\ &= T[p_1(t)] + T[p_2(t)] \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_1 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, *temos:*

$$\begin{aligned} T((\lambda p_1)(x)) &= t^2 ((\lambda p_1)''(t) \\ &= \lambda \left[t^2 p_1''(t)\right] \\ &= \lambda T[p_1(t)] \end{aligned}$$

Logo, T *é linear.* ■

21. Seja $\mathbb{V} = \mathfrak{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e $h \in \mathbb{R}$ fixado e seja $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ a transformação dada por:

$$(Tf)(x) = f(x+h) - f(x).$$

Solução

(i) $\forall f, g \in \mathbb{V}$, *tem-se:*

$$\begin{aligned} T(f+g)(x) &= (f+g)(x+h) - (f+g)(x) \\ &= [f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)] \\ &= (Tf)(x) + (Tg)(x) \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{V}$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(\lambda f)(x) &= (\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x) \\ &= \lambda [f(x+h) - f(x)] \\ &= \lambda (Tf)(x). \end{aligned}$$

Logo, T é linear. ■

22. Seja $T : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R})$ uma transformação dada por:

$$T[p(x)] = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

onde: $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é um polinômio}\}$. Verifique se T é linear.

Nota

Usando somatório para descrever a transformação tem-se:

$$T[p(x)] = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^j(0)}{j!}x^j = \frac{p^0(0)}{0!}x^0 + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x + \ldots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n.$$

Demonstração

(i) $\forall p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} T[(p+q)(x)] &= (p+q)(0) + \frac{(p+q)'(0)}{1!}x + \frac{(p+q)''(0)}{2!}x^2 + \\ &\quad + \ldots + \frac{(p+q)^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \left[p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] + \\ &\quad + \left[q(0) + \frac{q'(0)}{1!}x + \frac{q''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{q^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\ &= T[p(x)] + T[q(x)]. \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\begin{aligned} T[(\lambda p)(x)] &= (\lambda p)(0) + \frac{(\lambda p)'(0)}{1!}x + \frac{(\lambda p)''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{(\lambda p)^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \lambda \left[p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\ &= \lambda T[p(x)]. \end{aligned}$$

Portanto, T é linear.

■

23. Seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear. Prove que:
(i) $T(0) = 0$ (ii) $T(-v) = -T(v)$ (iii) $T(u - v) = T(u) - T(v)$
(iv) $T\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right) = \sum_{j=1}^{n} T(u_j)$

Demonstração

(i) Basta notar que:

$$T(0) = T(0) + 0 \text{ e } T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$$

Logo,

$$T(0) + T(0) = T(0) + 0 \Longrightarrow T(0) = 0.$$

(ii) com efeito,

$$0 = T(0) = T[v + (-v)] = T(v) + T(-v).$$

Daí segue-se que:

$$T(-v) = -T(v).$$

(iii) Note que:

$$T[u + (-v)] = T(u) + T(-v).$$

Agora, pelo item anterior $T(-v) = -T(v)$, por conseguinte, obtemos:

$$T(u - v) = T(u) - T(v)$$

(iv) A prova será por indução finita sobre n

- Para $n = 2$:

$$T\left(\sum_{j=1}^{2} u_j\right) = T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = \sum_{j=1}^{2} T(u_j).$$

- Suponha válido para n (hipótese de indução), então falta mostrar para $n + 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{j=1}^{n+1} u_j\right) &= T\left(\sum_{j=1}^{n} u_j + u_{n+1}\right) = T\left(\sum_{j=1}^{n} u_j\right) + T(u_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} T(u_j) + T(u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} T(u_j). \end{aligned}$$

Portanto,

$$T\left(\sum_{j=1}^{n+1} u_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1} T(u_j).$$

$\blacksquare$

24. Seja $T : \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ uma transformação. definida por:

$$(Tp)(x) = xp(x+1)$$

Prove que: T é linear.

Demonstração

$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(x) &= x(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(x+1) \\ &= \lambda_1 x p_1 (x+1) + \lambda_2 x p_2 (x+1) \\ &= \lambda_1 (Tp_1)(x) + \lambda_2 (Tp_2)(x). \end{aligned}$$

Portanto, T é linear. ■

25. Seja $C([a,b])$ o conjunto das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Defina

$$\begin{aligned} T \qquad C([a,b]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto T[f(x)] &= \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Prove que: T é linear.

Demonstração

$\forall f, g \in C([a,b]), \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x) &= \int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x)\,dx \\ &= \lambda_1 \int_a^b f(x)\,dx + \lambda_2 \int_a^b g(x)\,dx \\ &= \lambda_1 T[f(x)] + \lambda_2 T[g(x)]. \end{aligned}$$

De sorte que: T é linear. ■

3.4 Transformações Lineares: Injetora, Sobrejetora e Bijetora

Definição 3.2

Seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear. Dizemos que:
(i) T é injetora, quando: $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$: $T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2$.
Ou usando equivalência tautológica, temos:
(T é injetora, quando: $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$: $u_1 \neq u_2 \Longrightarrow T(u_1) \neq T(u_2)$.)
(ii) T é sobrejetora, quando: $\forall v_0 \in \mathbb{V}$: $\exists\, u \in \mathbb{U}$: $T(u) = v_0$.
(iii) T é bijetora $\Longleftrightarrow$ T é injetora e sobrejetora. ♣

Capítulo Execícios

1. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, uma transformação linear, definida por:

$$T(x,y)=(x+y,x-y).$$

Pede-se:
(i) Provar por definição que T é injetora. (ii) Mostre que T é sobrejetora.

Demonstração

(i) Queremos mostrar que: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é injetora por definição:

$$\forall u_1,u_2\in\mathbb{R}^2 : T(u_1)=T(u_2)\Longrightarrow u_1=u_2.$$

Consideremos $u_1,u_2\in\mathbb{R}^2$, com $u_1=(x_1,y_1)$ e $u_2=(x_2,y_2)$, então, tem-se:

$$\begin{aligned}
T[u_1] &= T[u_2]\Longrightarrow T(x_1,y_1)=T(x_2,y_2)\\
&= (x_1+y_1,x_1-y_1)=(x_2+y_2,x_2-y_2)\\
&\Longrightarrow \begin{cases} x_1+y_1=x_2+y_2\\ x_1-y_1=x_2-y_2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2x_1=2x_2\\ 2y_1=2y_2\end{cases}\\
&\Longrightarrow \begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\Longrightarrow u_1=u_2.
\end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora por definição. ■

(ii) Queremos mostrar que: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é sobrejetora por definição:

$$\forall v_0=(a,b)\in\mathbb{R}^2 : \exists u_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 : T(u_0)=v_0$$

É necessário obter x_0 e y_0 em função de a e b.
Vejamos

$$T(u_0)=T(x_0,y_0)=(x_0+y_0,x_0-y_0)=(a,b).$$

Dai, obtem-se:

$$\begin{cases}x_0+y_0=a\\ x_0-y_0=b\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_0=\frac{a+b}{2}\\ y_0=\frac{a-b}{2}.\end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\forall v_0 &= (a,b)\in\mathbb{R}^2 : \exists u_0=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)\in\mathbb{R}^2 : T(u_0)=T(x_0,y_0)\\
&= T\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=(a,b)=v_0.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, vem:

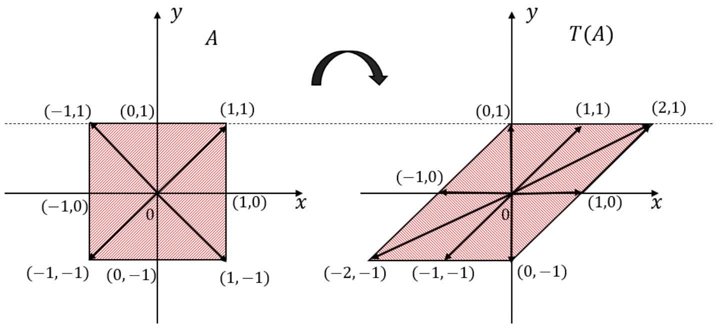
$$T(u_0)=v_0.$$

Ou ainda, $\mathrm{Im}(T)=\mathbb{R}^2$ e, portanto, T é sobrejetora por definição.
Consequentemente, T é bijetora. ■

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma T.L. definida por:

$$T(x,y) = (x+y, y).$$

e seja $\mathbb{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} = 1\right\}$. Determine $T(\mathbb{A})$.



3. Seja $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ uma transformação definida por:

$$T(p(x)) = (p(0), p(1)).$$

Prove que:
(a) T é linear (b) T é injetora (por definição). (c) T é sobrejetora? Justifique!

Solução

(a) (i) $\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\begin{aligned} T((p_1+p_2)(x)) &= ((p_1+p_2)(0), (p_1+p_2)(1)) \\ &= (p_1(0), p_1(1)) + (p_2(0), p_2(1)) \\ &= T(p_1(x)) + T(p_2(x)) \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p_1 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} T((\lambda p_1)(x)) &= ((\lambda p_1)(0), (\lambda p_1)(1)) \\ &= \lambda(p_1(0), p_1(1)) \\ &= \lambda T[p_1(x)] \end{aligned}$$

Logo, T é linear. ■

(b) Queremos mostrar que: $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é injetora por definição:

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) : T[p_1(x)] = T[p_2(x)] \Longrightarrow p_1(x) = p_2(x).$$

Consideremos $p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, temos: $\begin{cases} p(0) = b \\ p(1) = a+b \end{cases}$ *. Assim, T será reescrito na forma:*

$$T[p(x)] = T[ax+b] = (b, a+b).$$

$\forall p_1, p_2 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ com $p_1(x) = a_1x + b_1$ e $p_2(x) = a_2x + b_2$, tem-se:

$$\begin{aligned} T[p_1(x)] &= T[p_2(x)] \Longrightarrow T[a_1x+b_1] = T[a_2x+b_2] \\ &= (b_1, a_1+b_1) = (b_2, a_2+b_2) \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ a_1+b_1 = a_2+b_2 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases} \Longrightarrow p_1(x) = p_2(x). \end{aligned}$$

De sorte que T é injetora. ■

(c) $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ é sobrejetora?
Queremos mostrar que:

$$\forall v_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists p_0(x) = a_0x + b_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) : T[p_0(x)] = v_0$$

Ou seja, a imagem de T é igual ao próprio $\mathbb{R}^2$ (Não sobra elementos no contra-domínio de T). Precisamos encontrar a_0 e b_0 em função de α_0 e β_0.

De fato,

$$\begin{aligned} \forall v_0 &= (\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists p_0(x) = a_0x + b_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) : \\ T[p_0(x)] &= T[a_0x+b_0] = (b_0, a_0+b_0) = (\alpha_0, \beta_0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} b_0 = \alpha_0 \\ a_0 + b_0 = \beta_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = \alpha_0 \\ a_0 = \beta_0 - b_0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} b_0 = \alpha_0 \\ a_0 = \beta_0 - \alpha_0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \forall v_0 &= (\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^2 : \exists\, [p_0(x) = a_0x + b_0 = (\beta_0 - \alpha_0)x + \alpha_0] \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) : \\ T[p_0(x)] &= T[(\beta_0 - \alpha_0)x + \alpha_0] = (\alpha_0, (\beta_0 - \alpha_0) + \alpha_0) = (\alpha_0, \beta_0) = v_0. \end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, ou seja, T é sobrejetora por definição. ■

Observação:

$$T[p(x)] = T[ax+b] = (b, a+b).$$

Uma outra forma, mais rebuscada de provar a sobrejetividade, será dada por:

$$T[p(x)] = T[ax+b] = (b, a+b) = b(1,1) + (0,1).$$

A imagem de T é gerada por $(1,1)$ e $(0,1)$, daí, obtemos:

$$\operatorname{Im}(T) = [(1,1), (0,1)].$$

Afirmação: *$\gamma = \{(1,1), (0,1)\}$ é linearmente independente*

Com efeito, dada a equação

$$\lambda_1(1,1) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\gamma = \{(1,1), (0,1)\}$ é linearmente independente e, por conseguinte, vem: γ é uma base para $\mathbb{R}^2$. Além disso, $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ (número de vetores de uma das bases) e $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$. De sorte que: $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, ou seja, T é sobrejetora. ■

Nota

Não esqueça!

$T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ *é injetora e sobrejetora* $\Longleftrightarrow T$ *é bijetora*

4. Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ uma transformação linear. Prove que T é sobrejetora.

Demonstração

1^o Modo:
Com efeito, para $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \exists X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tal que:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = \alpha.$$

Logo, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}$, ou seja, T é sobrejetora. ■

2^o Modo:
Basta observar que:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j.$$

Daí, vem:

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 0 \text{ (Não convém), pois, } T \text{ seria} \\ \text{identicamente nula.} \end{cases}$$

Por conseguinte, $\dim \operatorname{Im}(T) = 1$ e $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}$, donde, obtemos: $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}$ e, portanto, T é sobrejetora. ■

5. Seja $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T[p(t)] = tp(t).$$

Prove por definição que: T é injetora.

Demonstração

$\forall p, q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, tem-se:

$$T[p(t)] = T[q(t)] \Longrightarrow tp(t) = tq(t) \Longrightarrow p(t) = q(t).$$

De sorte que: T é injetora. ■

3.5 Exercícios: Pensando Um Pouco Mais

A seguir, alguns exercícios de funções injetoras e sobrejetoras por definição: em geral, é incomum nos textos de álgebra linear; salvo no caso, onde se usa o núcleo da transformação linear e, se o mesmo, só tiver o vetor nulo do espaço, tem-se: a equivalência a dizer que a transformação linear é injetora. No caso da sobrejetividade, usar o teorema do núcleo e da imagem Usaremos recursos anteriores ao teorema do núcleo e da imagem nos exercícios.

Capítulo Execícios

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T(a,b,c) = ax^2 + (b-c)x + c.$$

Pede-se:
(i) Usar a definição para mostrar que T é injetora,
(ii) É possível verificar se T é sobrejetora ? Justifique!

Demonstração

(i) Afirmação 1: T é injetora.

Queremos mostrar que:

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3 : T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

De fato, $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$, onde: $u_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $u_2 = (a_2, b_2, c_2)$, temos:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(u_2) \Longrightarrow T(a_1,b_1,c_1) = T(a_2,b_2,c_2) \\ &\Longrightarrow a_1x^2 + (b_1 - c_1)x + c_1 = a_2x^2 + (b_2 - c_2)x + c_2 \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_1 = a_2 \\ b_1 - c_1 = b_2 - c_2 \\ c_1 = c_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \end{array} \right. \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora. ∎

Demonstração

(ii) Afirmação 2: T é sobrejetora.

1^o Modo:

Queremos mostrar que:

$$\forall p_0(x) = \alpha_0 x^2 + \beta_0 x + \gamma_0 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : \exists u_0 = (a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3 : T(u_0) = p_0(x).$$

Devemos obter a_0, b_0 e c_0 em função de α_0, β_0 e γ_0.
Vejamos

$$\begin{aligned} T(u_0) &= T(a_0,b_0,c_0) = a_0x^2 + (b_0 - c_0)x + c_0 = \alpha_0 x^2 + \beta_0 x + \gamma_0 \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_0 = \alpha_0 \\ b_0 - c_0 = \beta_0 \\ c_0 = \gamma_0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} a_0 = \alpha_0 \\ b_0 = \beta_0 + \gamma_0 \\ c_0 = \gamma_0 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Assim, $\forall p_0(x) = \alpha_0 x^2 + \beta_0 x + \gamma_0 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : \exists u_0 = (\alpha_0, \beta_0 + \gamma_0, \gamma_0) \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$\begin{aligned} T(u_0) &= T(\alpha_0, \beta_0 + \gamma_0, \gamma_0) = \alpha_0 x^2 + [\beta_0 + \gamma_0 - \gamma_0]\, x + \gamma_0 \\ &= \alpha_0 x^2 + \beta_0 x + \gamma_0 = p_0(x). \end{aligned}$$

Portanto, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, ou seja, T é é sobrejetora. ■

2^o Modo:

$$T(a, b, c) = a \cdot x^2 + (b - c) \cdot x + c \cdot 1.$$

Dito de outro modo, T é gerado por $\beta = \{x^2, x, 1\}$. Além disso, β é linearmente independente. De fato, dada a aequação

$$k_1 x^2 + k_2 x + k_3 = 0x^2 + 0x + 0 \Longrightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

Ou ainda, β é linearmente independente. Por conseguinte, obtemos:β é uma base para $\operatorname{Im}(T)$ e $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$ e $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ segue-se daí que: $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
Logo, T é sobrejetora. ■

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear descrita por:

$$T(a, b) = ax^2 + bx.$$

Pede-se:
(i) Usar a definição para mostrar que T é injetora,
(ii) É possível verificar se T é sobrejetora ? Justifique!

Demonstração

(i) Afirmação 1: T é injetora.

Queremos mostrar que:

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2 : T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

De fato, $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, onde: $u_1 = (a_1, b_1)$ e $u_2 = (a_2, b_2)$, temos:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(u_2) \Longrightarrow T(a_1, b_1) = T(a_2, b_2) \\ &\Longrightarrow a_1 x^2 + b_1 x = a_2 x^2 + b_2 x \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora. ■

Demonstração

(ii) Afirmação 2: T é sobrejetora.

1^o Modo:

$$T(a, b) = a \cdot x^2 + b \cdot x.$$

Dito de outro modo, T é gerado por $\beta = \{x^2, x\}$. Além disso, β é linearmente independente. De fato, dada a aequação

$$k_1x^2 + k_2x = 0x^2 + 0x \Longrightarrow k_1 = k_2 = 0.$$

Ou ainda, β é linearmente independente. Por conseguinte, obtemos: β é uma base para $\mathrm{Im}\,(T)$ e $\dim \mathrm{Im}\,(T) = 2$, $\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \mathbb{P}_2\,(\mathbb{R})$ e $\dim \mathbb{P}_2\,(\mathbb{R}) = 3$ segue-se daí que:
$\mathrm{Im}\,(T) \neq \mathbb{P}_2\,(\mathbb{R})$.
Logo, T não é sobrejetora. ■

2^o Modo:

Usando um contra-exemplo: dado $p_0\,(x) = ax^2 + bx + 1 \in \mathbb{P}_2\,(\mathbb{R})$ não existe $u_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, tais que:

$$T\,(u_0) = T\,(a, b) = p_0\,(x)\,.$$

Logo, $\mathrm{Im}\,(T) \neq \mathbb{P}_2\,(\mathbb{R})$, ou ainda, existem elementos em $\mathbb{P}_2\,(\mathbb{R})$ que necessariamente não estão na imagem de T por $u_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. ■

3. Seja $T : \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, a - d, 2b, c)\,.$$

Pede-se:
(i) Usar a definição para mostrar que T é injetora,
(ii) É possível verificar se T é sobrejetora ? Justifique!

Demonstração

(i) Afirmação 1: T é injetora.

De fato, $\forall A, B \in \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ tem-se::

$$\begin{aligned} T\,(A) &= T\,(B) \Longrightarrow T\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\right] = T\left[\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right] \\ &\Longrightarrow (a_1 + d_1, a_1 - d_1, 2b_1, c_1) = (a_2 + d_2, a_2 - d_2, 2b_2, c_2) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 + d_1 = a_2 + d_2 \\ a_1 - d_1 = a_2 - d_2 \\ 2b_1 = 2b_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} d_1 = d_2 \\ a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \end{cases} \Longrightarrow A = B. \end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora. ■

(ii) Afirmação 2: T é sobrejetora.

Observe que:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= (a+d, a-d, 2b, c) \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= a(1,1,0,0) + d(1,-1,0,0) + b(0,0,2,0) + c(0,0,0,1). \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= au_1 + du_2 + bu_3 + cu_4. \end{aligned}$$

Assim, $\beta = \{u_1, u_2, u_3, u_4.\}$ gera a $\operatorname{Im}(T)$ e β é linearmente independente.
Dada a equação:

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 &= (0,0,0,0) \\ \lambda_1(1,1,0,0) + \lambda_2(1,-1,0,0) + \lambda_3(0,0,2,0) + \lambda_4(0,0,0,1) &= (0,0,0,0). \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Por conseguinte, obtemos: β é linearmente independente.
Donde, vem: β é uma base para imagem de T : $\operatorname{Im}(T)$ e $\dim \operatorname{Im}(T) = 4$. Além disso, $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^4$. Ou ainda, $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^4$.
Portanto, T é sobrejetora. ■

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T(a,b) = ax + (b-a).$$

Pede-se:
(i) Usar a definição para mostrar que T é injetora,
(ii) Verificar se T é sobrejetora ? Justifique!

Demonstração

(i) Afirmação 1: T é injetora.

Queremos mostrar que:

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2 : T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

De fato, $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, onde: $u_1 = (a_1, b_1)$ e $u_2 = (a_2, b_2)$, temos:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(u_2) \Longrightarrow T(a_1,b_1) = T(a_2,b_2) \\ &\Longrightarrow a_1 x + (b_1 - a_1) = a_2 x + (b_2 - a_2) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 - a_1 = b_2 - a_2 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Logo, T é injetora. ■

(ii) Afirmação 2: T é sobrejetora.

$$T(a,b) = a \cdot x + 1 \cdot (b-a)$$

Assim, $\beta = \{x, 1\}$ gera a imagem de T : $\mathrm{Im}(T)$ e β é linearmente independente.
Falta mostrar que: $\beta = \{x, 1\}$ é linearmente independente.
De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 x + \lambda_2.1 = 0x + 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}.$$

Assim, $\beta = \{x, 1\}$ é linearmente independente. Daí, vem:
β é uma base para $\mathrm{Im}(T)$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$. Além disso, $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.
De sorte que: $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. Ou ainda, T é sobrejetora. ■

3.6 Núcleo e Imgem de uma Transformação Linear

(I) Seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear. Prove que:

(i) O *Núcleo* de T, denotado por $N(T)$ ou $\mathrm{Ker}(T)$, é dado por:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{u_0 \in \mathbb{U}; T(u_0) = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{U}$.

(ii) A *Imagem* de T, denotada por $\mathrm{Im}(T)$, é dada por:

$$\mathrm{Im}(T) = \{v \in \mathbb{V}; \exists\, u \in \mathbb{U} : T(u) = v\}$$

é um subespaço de $\mathbb{V}$.

Teorema 3.1

Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$.espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear. Temos então que:

(A) *O* ***Núcleo*** *de T é um subespaço de $\mathbb{U}$.*
(B) *A* ***Imagem*** *de T é um subespaço de $\mathbb{V}$.* ♡

Demonstração

(A)
(i) Por de finição, temos:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{u_0 \in \mathbb{U}; T(u_0) = 0\}$$

$0 \in \mathrm{Ker}(T)$? De fato, como T é linear (leva vetor nulo de $\mathbb{U}$ no vetor nulo de $\mathbb{V}) : T(0) = 0$.

(ii) $\forall u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}(T)$, tem-se: $\begin{cases} T(u_1) = 0 \\ T(u_2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow T(u_1) + T(u_2) = 0$. Além disso, temos:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \operatorname{Ker}(T)$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1 \in \operatorname{Ker}(T)$, temos:

$$T(\lambda u_1) = \lambda T(u_1) = \lambda.0 = 0.$$

Donde, obtemos: $\lambda u_1 \in \operatorname{Ker}(T)$.

Portanto, $\operatorname{Ker}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{U}$. ■

(B) Por de finição, temos:

$$\operatorname{Im}(T) = \{v \in \mathbb{V}; \exists\, u \in \mathbb{U} : T(u) = v\}$$

(i) $0_{\mathbb{V}} \in \operatorname{Im}(T) : \exists! 0_{\mathbb{U}} \in \mathbb{U}$, tal que: $T(0_{\mathbb{U}}) = 0_{\mathbb{V}}$

Visto que: T é linear (leva vetor nulo de $\mathbb{U}$ no vetor nulo de $\mathbb{V}$.)

(ii) $\forall v_1, v_2 \in \operatorname{Im}(T) : \exists u_1, u_2 \in \mathbb{U} : T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$. Além disso, temos:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2.$$

De sorte que: $(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}(T)$

(iii) $\forall \lambda \mathbb{R}, \forall v_1 \in \operatorname{Im}(T) : \exists u_1 \in \mathbb{U} : T(u_1) = v_1$. Daí, vem:

$$T(\lambda u_1) = \lambda T(u_1) = \lambda v_1.$$

Daí, vem: $\lambda v_1 \in \operatorname{Im}(T)$.

Portanto, $\operatorname{Im}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{V}$. ■

Teorema 3.2

Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$.espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear. T é injetora se, e somente se, $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$

$$\mathbb{U} \xrightarrow{T} \mathbb{V} \text{ é injetora} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T) = \{0\}$$

♡

Demonstração

1^a Parte: Queremos mostrar que:

$u_0 \in \operatorname{Ker}(T)$ e T é injetora, então, $u_0 = 0$

$(\Longrightarrow)$ De fato, $u_0 \in \operatorname{Ker}(T)$, então, $T(u_0) = 0 = T(0)$.

Agora, como T é injetora, segue-se que: $u_0 = 0$.

Logo,

$$\operatorname{Ker}(T) = \{0\}.$$

2^a Parte:

Reciprocamente, queremos provar que:

$(\Longleftarrow)$ $\mathrm{Ker}\,(T) = \{0\}$ e para todo $u_1, u_2 \in \mathbb{U} : T\,(u_1) = T\,(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2$, ou seja, T é injetora.

Vejamos

$$\begin{aligned} T\,(u_1) &= T\,(u_2) \Longrightarrow T\,(u_1) - T\,(u_2) = 0 \\ &\Longrightarrow T\,(u_1 - u_2) = 0 \\ &\Longrightarrow (u_1 - u_2) \in \mathrm{Ker}\,(T) = \{0\} \\ &\Longrightarrow u_1 - u_2 = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora. ■

Nota

$$\mathbb{U} \xrightarrow{T} \mathbb{V} \textit{ é injetora} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(T) = \{0\}$$

Este teorema é valido em dimensão infinita, uma vez que em momento algum, se faz uso da dimensão em sua demonstração.

Teorema 3.3

Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$.espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, sendo $\mathbb{U}$ de dimensão finita $[\dim \mathbb{U} < \infty]$ *e seja $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ uma transformação linear. Temos então que:*

$$\dim \mathbb{U} = \dim Ker\,(T) + \dim \mathrm{Im}\,(T)$$

Demonstração: Veja referências [7, 10, 13, 16, 18]

3.6.1 Isomorfismo e Automorfismo

Seja $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ uma **transformação linear**.

(i) Se T é **bijetora**, então, diz-se que: T é um **isomorfismo**

(ii) Se T é **bijetora** e $\mathbb{U} = \mathbb{V}$, então, dizemos que: T é um **automorfismo.**

Capítulo Execícios

1. Seja $T : \mathbb{P}_1\,(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, definida por:

$$T\,(ax + b) = (b, a + b)\,.$$

Provar que: T é um isomorfismo, em seguida obter $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_1\,(\mathbb{R})\,.$

Demonstração

Afirmação 1: $\mathbb{P}_1\,(\mathbb{R}) \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ é injetora$\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(T) = \{0x + 0\}\,.$

A priori, por definição o núcleo de T é dado por:

$$\mathrm{Ker}\,(T) = \{p_0\,(x) = a_0 x + b_0 \in \mathbb{P}_2\,(\mathbb{R})\,; T\,(a_0 x + b_0) = (0, 0)\}\,.$$

Vejamos $T(a_0x+b_0)=(b_0,a_0+b_0)=(0,0)\Longrightarrow\begin{cases} b_0=0\\ a_0+b_0=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} b_0=0\\ a_0=0\end{cases}.$

Portanto, $\operatorname{Ker}(T)=\{p_0(x)=0x+0\}=\{0\}\Longleftrightarrow T$ é injetora. ■

Afirmação 2: T é sobrejetora

À luz do teorema do núcleo e da imagem temos:

$$2=\dim\mathbb{P}_1(\mathbb{R})=0+\dim\operatorname{Im}(T)$$

e $\operatorname{Im}(T)\subseteq\mathbb{R}^2$, donde, vem: $\operatorname{Im}(T)=\mathbb{R}^2$.

Portanto, T é sobrejetora, e, por consguinte, obtemos: T é uma isomorfismo. ■

Agora, vamos determinar o isomorfismo inverso:

$$T^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

$$T^{-1}(a_0,b_0)=k_1x+k_2\Longleftrightarrow T(k_1x+k_2)=(a_0,b_0). \tag{1}$$

Dito de outra forma, precisamos determinar k_1 e k_2 em função de a_0 e b_0.

Vejamos,

$$T(k_1x+k_2)=(k_2,k_1+k_2)=(a_0,b_0)\Longrightarrow\begin{cases} k_2=a_0\\ k_1+k_2=b_0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} k_2=a_0\\ k_1=b_0-a_0.\end{cases} \tag{2}$$

Assim, substituindo (2) em (1) segue-se o isomorfismo inverso:

$$T^{-1}(a_0,b_0)=(b_0-a_0)x+a_0.$$

Comentários:

As comppposições das transformações lineares e suas inversas produz os resultados

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) & \stackrel{T}{\to} & \mathbb{R}^2\\ T^{-1}\circ T & \searrow & \downarrow T^{-1}\\ & & \mathbb{P}_1(\mathbb{R}). \end{array}$$

Daí, vem:

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(p(x))=p(x).$$

Analogamente, temos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \stackrel{T^{-1}}{\to} & \mathbb{P}_1(\mathbb{R})\\ T\circ T^{-1} & \searrow & \downarrow T\\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Por conseguinte, obtemos:

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(p(x))=p(x).$$

■

2. Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear, definida por:

$$T(x,y,z)=(x-y,x+y).$$

Pede-se:

(i) Verificar se: T é injetora e obter a $\dim Ker(T)$.

(ii) $\dim\operatorname{Im}(T)$ e uma base para $\operatorname{Im}(T)$. T é sobrejetora?

Solução

(i) *Afirmação:* T *não é injetora.*

De fato, o núcleo de T *é descrito por:*

$$Ker\left(T\right)=\left\{\left(x_o,y_o,z_o\right)\in\mathbb{R}^3;T\left(x_o,y_o,z_o\right)=\left(0,0\right)\right\}.$$

$$T\left(x_o,y_o,z_o\right)=\left(x_o-y_o,x_o+y_o\right)=\left(0,0\right)\Longrightarrow\begin{cases}x_o-y_o=0\\x_o+y_o=0\end{cases}$$

$\Longrightarrow x_o=y_o=0$. *Portanto,*

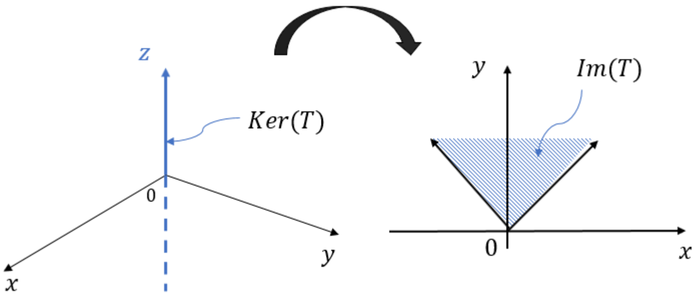
$$Ker\left(T\right)=\left\{\left(0,0,z_o\right)\in\mathbb{R}^3;z_o\in\mathbb{R}\right\}=\left[\left(0,0,1\right)\right].$$

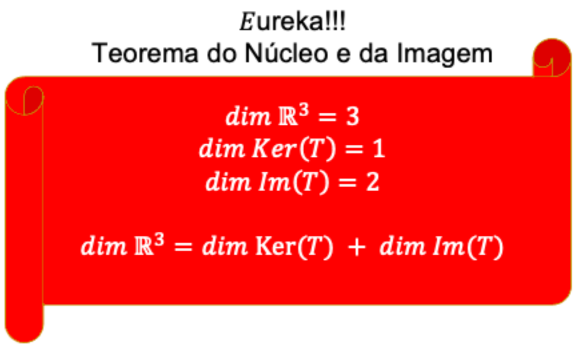
Segue-se daí que: T *não e injetora. Além disso,* $\dim Ker\left(T\right)=1$.

(ii) *Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:*

$$3=\dim\mathbb{R}^3=1+\dim\operatorname{Im}(T)\Longrightarrow\dim\operatorname{Im}(T)=2$$

e $\operatorname{Im}\left(T\right)\subseteq\mathbb{R}^2$. *Assim,* $\operatorname{Im}\left(T\right)=\mathbb{R}^2$ *e, portanto,* T *é sobrejetora.*
Vamos determinar os geradores para $\operatorname{Im}\left(T\right):T\left(x,y,z\right)=x\left(1,1\right)+y\left(-1,1\right).$
Daí, vem: $\operatorname{Im}\left(T\right)=\left[\left(1,1\right),\left(-1,1\right)\right]$. *Como* $\dim\operatorname{Im}(T)=2$, *segue-se que*
$\beta=\left\{\left(1,1\right),\left(-1,1\right)\right\}$ *é uma base para* $\operatorname{Im}(T)$. ■





3. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, uma T.L.tal que: $T(1,0)=(1,1)$ e $T(1,1)=(0,3)$.

Determine:
(i) $T(x,y)$
(ii) Se T é um automorfismo. Caso afirmativo, obtenha $T^{-1}(x,y)$

Solução

(i) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$:$\exists\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}:(x,y)=\lambda_1(1,0)+\lambda_2(1,1)$.
Daí,vem :

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=x\\ \lambda_2=y\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=x-y\\ \lambda_2=y.\end{cases}$$

Assim,

$$(x,y)=(x-y).(1,0)+y.(1,1).$$

Agora, aplicando T e sua linearidade, obtemos:

$$\begin{aligned}T(x,y)&=T[(x-y).(1,0)+y.(1,1)]\\&=(x-y).T((1,0))+y.T((1,1))\\&=(x-y).T(1,0)+y.T(1,1)\\&=(x-y).(1,1)+y.(0,3)\\&=(x-y,x+2y).\end{aligned}$$

Portanto,

$$T(x,y)=(x-y,x+2y).$$

■

(ii) *T é bijetora.se, e somente se, T é injetora e sobrejetora.*

Afirmação 1: $\mathbb{R}^2\xrightarrow{T}\mathbb{R}^2$ *é injetora*$\Longleftrightarrow\operatorname{Ker}(T)=\{(0,0)\}$

Por definição de núcleo de T, temos:

$$\operatorname{Ker}(T)=\left\{(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2:T(x_0,y_0)=(0,0)\right\}$$

Vejamos $T(x_0,y_0)=(x_0-y_0,x_0+2y_0)=(0,0)$. *Daí vem:*

$$\begin{cases}x_0-y_0=0\\ x_0+2y_0=0\end{cases}\overset{2E_1+E_2\longrightarrow E_2}{\Longrightarrow}\begin{cases}x_0-y_0=0\\ 3x_0=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_0=y_0\\ x_0=0.\end{cases}$$

De sorte que:

$$\operatorname{Ker}(T)=\{(0,0)\}\Longleftrightarrow T\text{ é injetora.}$$

Além disso, $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$.
Agora, à luz do teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$2=\dim\mathbb{R}^2=0+\dim\operatorname{Im}(T)\Longrightarrow\dim\operatorname{Im}(T)=2$$

e como $\operatorname{Im}(T)\subseteq\mathbb{R}^2$ *segue-se que:*

$$\operatorname{Im}(T)=\mathbb{R}^2.$$

Dito de outro modo, T é sobrejetora e, consequentemente, obtemos: T é bijetora, ou ainda, T é automorfismo.
Agora, vamos determinar o automorfismo inverso

Solução

1º Modo:

Obter

$$T^{-1}(x,y)=(k_1,k_2)\Longleftrightarrow T(k_1,k_2)=(x,y).$$

Vejamos,

$$T(k_1,k_2)=(k_1-k_2,k_1+2k_2)=(x,y).$$

Daí vem:

$$\left\{\begin{array}{c}k_1-k_2=x\\ k_1+2k_2=y\end{array}\right.\overset{2E_1+E_2\longrightarrow E_2}{\Longrightarrow}\left\{\begin{array}{c}k_1-k_2=x\\ 3k_1=2x+y\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}k_2=k_1-x\\ k_1=\frac{2x+y}{3}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}k_2=\frac{2x+y}{3}-x\\ k_1=\frac{2x+y}{3}\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}k_2=\frac{y-x}{3}\\ k_1=\frac{2x+y}{3}\end{array}\right..$$

Portanto, T^{-1} é um automorfismo

$$T^{-1}(x,y)=\left(\frac{2x+y}{3},\frac{y-x}{3}\right).$$

■

Comentários:

Seja $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$, uma transformação linear,.tal que:

$$\left\{\begin{array}{c}T(1,0)=(1,1)\\ e\\ T(1,1)=(0,3)\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}T^{-1}(1,1)=(1,0)\\ e\\ T^{-1}(0,3)=(1,1)\end{array}\right.$$

Solução

2º Modo:

(i) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$:$\exists\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}:(x,y)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(0,3)$.

Daí,vem :

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha_1=x\\ \alpha_1+3\alpha_2=y\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha_1=x\\ 3\alpha_2=y-x\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\alpha_1=x\\ \alpha_2=\frac{y-x}{3}\end{array}\right..$$

Assim,

$$(x,y)=x(1,1)+\left(\frac{y-x}{3}\right).(0,3).$$

Agora, aplicando T^{-1} e sua linearidade, obtemos:

$$\begin{aligned}T^{-1}(x,y)&=T^{-1}\left[x(1,1)+\left(\frac{y-x}{3}\right).(0,3)\right]\\&=x.T^{-1}((1,1))+\left(\frac{y-x}{3}\right).T^{-1}((0,3))\\&=x.T^{-1}(1,1)+\left(\frac{y-x}{3}\right).T^{-1}(0,3)\\&=x.(1,0)+\left(\frac{y-x}{3}\right).(1,1)\\&=\left(x+\frac{y-x}{3},\frac{y-x}{3}\right)=\left(\frac{2x+y}{3},\frac{y-x}{3}\right)\end{aligned}$$

Portanto, T^{-1} é um automorfismo

$$T^{-1}(x,y)=\left(\frac{2x+y}{3},\frac{y-x}{3}\right).$$

■

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ linear e seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma transformação definida por:

$$T(x,y)=(x,y-f(x)).$$

Pede-se:
(i) Mostre que T é linear;
(ii) Provar que T é uma bijeção.
(iii) Obter $T^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Demonstração

(i) $\forall u_1,u_2\in\mathbb{R}^2$, com $u_1=(x_1,y_1)$ e $u_2=(x_2,y_2)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
T(u_1+u_2) &= T(x_1+x_2,y_1+y_2)\\
&= (x_1+x_2,y_1+y_2-f(x_1+x_2))\\
&= (x_1+x_2,y_1+y_2-f(x_1)+f(x_2))\\
&= (x_1,y_1-f(x_1))+(x_2,y_2-f(x_2))\\
&= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)\\
&= T(u_1)+T(u_2).
\end{aligned}$$

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall u_1\in\mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{aligned}
T(\lambda u_1) &= T(\lambda x_1,\lambda y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1-f(\lambda x_1))\\
&= (\lambda x_1,\lambda y_1-\lambda f(x_1))=\lambda(x_1,y_1-f(x_1))\\
&= \lambda T(x_1,y_1)=T(\lambda u_1).
\end{aligned}$$

De sorte que: T é linear. ■

(ii) Provar que T é uma bijeção.

Afirmação 1: T é injetora

De fato, $\forall u_1,u_2\in\mathbb{R}^2$, com $u_1=(x_1,y_1)$ e $u_2=(x_2,y_2)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
T(u_1) &= T(u_2)\Longrightarrow T(x_1,y_1)=T(x_2,y_2)\Longrightarrow\\
(x_1,y_1-f(x_1)) &= (x_2,y_2-f(x_2)).
\end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} x_1=x_2\\ y_1-f(x_1)=y_2-f(x_2)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}\Longrightarrow u_1=u_2.$$

Logo, T é injetora$\Longleftrightarrow Ker(T=\{(0,0)\})\Longleftrightarrow\dim Ker(T)=0.$ ■

Afirmação 2: T é sobrejetora

Com efeito, decorre do teorema do núcleo e da imagem que:

$$2=\dim\mathbb{R}^2=0+\dim\operatorname{Im}(T)$$

e $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$, donde, vem: $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.
Portanto, T é sobrejetora, e, por consguinte, obtemos: T é uma bijeção. ■

(iii) Determinar $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

$$T^{-1}(x_0, y_0) = (k_1, k_2) \Longleftrightarrow T(k_1, k_2) = (x_0, y_0). \tag{1}$$

Dito de outra forma, vamos obter k_1 e k_2 em função de x_0 e y_0.
Vejamos,

$$T(k_1, k_2) = (k_1, k_2 - f(k_1)) = (x_0, y_0).$$

Daí, vem:

$$\begin{cases} k_1 = x_0 \\ k_2 - f(k_1) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = x_0 \\ k_2 = y_0 + f(x_0). \end{cases} \tag{2}$$

Agora, substituindo (2) em (1), obtemos o resultado desejado.

$$T^{-1}(x_0, y_0) = (x_0, y_0 + f(x_0)).$$

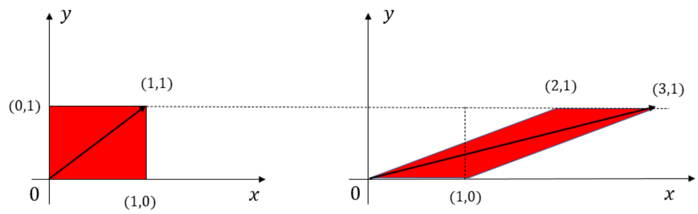
■

5. Qual é a imagem de um quadrado de lado 1 pela transformação linear $C_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$C_2(x, y) = (x + 2y, y) \ ?$$

Solução

$$\begin{cases} C_2(1,0) = (1,0) \\ C_2(0,1) = (2,1) \\ C_2(1,1) = (3,1) \end{cases}$$



C_2 leva um quadrado de lado 1 num paralelogramo (C_2 é chamado cisalhamento horizontal de fator 2) ■

6. Seja $S : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por:

$$S(p(x)) = \int_0^1 p(x)\, dx.$$

(i) Prove que S não é injetora e obtenha $\dim \text{Ker}(S)$.
(ii) Interprete geometricamente $\text{Ker}(S)$.
(iii) Mostre que $S(a) = a$. Conclua daí que S é sobrejetora.

Demonstração

(i) Seja $p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, então, temos:

$$S(p(x)) = S(ax+b) = \int_0^1 (ax+b)\,dx = a\frac{x^2}{2} + bx\Big|_0^1 = \frac{a}{2} + b.$$

Agora, vamos determinar o núcleo de S :

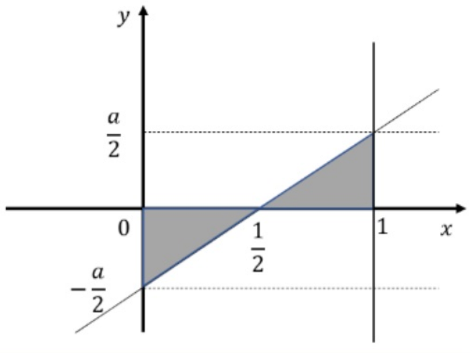
$$\operatorname{Ker}(S) = \{(a_0x + b_0) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})\,;\ S(a_0x + b_0) = 0\}.$$

Assim, $S(a_0x + b_0) = \frac{a_0}{2} + b_0 = 0 \Longrightarrow b_0 = -\frac{a_0}{2}$, e portanto,

$$\operatorname{Ker}(S) = \left\{a_0.\left(x - \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})\,;\ a_0 \in \mathbb{R}\right\} = \left[x - \frac{1}{2}\right].$$

Desta forma, obtemos: S não é injetora.

(ii) Interprete geometricamente $\operatorname{Ker}(S)$.



(iii) $S(a) = \int_0^1 a\,dx = ax|_0^1 = a, \forall a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{Im}(S) = \mathbb{R}.$

Portanto, S é sobrejetora.

■

7. Considere uma transformação linear $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ se $\dim \mathbb{U} > \dim \mathbb{V}$.
Prove que existe um vetor não nulo $u_0 \in \mathbb{U}$ tal que $F(u_0) = 0$ (vetor nulo de $\mathbb{V}$)

Demonstração

Suponha que $\operatorname{Ker}(F) = \{0\}$, então, $\dim \operatorname{Ker}(F) = 0$.

Agora, pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$\dim \mathbb{U} = \dim \operatorname{Ker}(F) + \dim \operatorname{Im}(F) = \dim \operatorname{Im}(F) > \dim \mathbb{V}.$$

Absurdo! Pois, supomos $\operatorname{Ker}(F) = \{0\}$.

De sorte que: existe $u_0 \neq 0, u_0 \in \mathbb{U}$ tal que: $F(u_0) = 0$.

■

8. Seja $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear satisfazendo a seguinte propriedade: Se $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{U}$, então,

$$\gamma = \{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)\}$$

é L.I. em $\mathbb{V}$. Prove que: F é injetora.(**por definição**).
L.I. =linearmente independente

Demonstração

Queremos mostrar que: F é injetora, isto é,

$$\forall u, v \in \mathbb{U} : F(u) = F(v) \Longrightarrow u = v.$$

Com efeito, $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{U}$, então, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{R}$, tais que: $\begin{cases} u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \\ \text{e} \\ v = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n \end{cases}$

$$\Longrightarrow \{u - v = (\alpha_1 - \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) u_n. \tag{1}$$

Além disso,

$$F(u) = F(v) \Longrightarrow F(u) - F(v) = 0 \Longrightarrow F(u - v) = 0 \tag{2}$$

Daí, substituindo (1) em (2), obtemos:

$$\begin{aligned} F(u - v) &= F[(\alpha_1 - \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) u_n] = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1) F(u_1) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) F(u_n) = 0. \end{aligned}$$

Como $F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)$ são linearmente independentes, segue-se que:

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\alpha_1 - \beta_1) = 0 \\ \vdots \\ (\alpha_n - \beta_n) = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \Longrightarrow u = v.$$

Logo, F é injetora. ■

9. Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, a - d, b + c).$$

Pede-se:
(i) $\operatorname{Ker}(T)$ e $\dim \operatorname{Ker}(T)$.
(ii) $\dim \operatorname{Im}(T)$ e uma base para $\operatorname{Im}(T)$.

Solução

Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ *uma transformação linear dada por:*

$$T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a + d, a - d, b + c).$$

$i)$ *De fato, o núcleo de* T *é descrito por:*

$$Ker\left(T\right)=\left\{\left(\begin{array}{cc}a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{array}\right)\in\mathbb{M}_2\left(\mathbb{R}\right);T\left[\left(\begin{array}{cc}a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{array}\right)\right]=\left(0,0,0\right)\right\}.$$

Com efeito, $T\left[\left(\begin{array}{cc}a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{array}\right)\right]=\left(a_0+d_0,a_0-d_0,b_0+c_0\right)=\left(0,0,0\right)$

$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}a_0+d_0=0\\ a_0-d_0=0\\ b_0+c_0=0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}a_0=d_0=0\\ c_0=-b_0\end{array}\right.$ *. Portanto,*

$Ker\left(T\right)=\left\{\left(\begin{array}{cc}0 & b_0\\ -b_0 & 0\end{array}\right)\in\mathbb{M}_2\left(\mathbb{R}\right);b_0\in\mathbb{R}\right\}=\left[\left(\begin{array}{cc}0 & 1\\ -1 & 0\end{array}\right)\right].$

Segue-se daí que: T *não e injetora. Além disso,* $\dim Ker\left(T\right)=1$.

■

(ii) *Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:*

$4=\dim\mathbb{M}_2(\mathbb{R})=1+\dim\mathrm{Im}(T)\Longrightarrow\dim\mathrm{Im}(T)=3.$

$\mathrm{Im}\left(T\right)\subseteq\mathbb{R}^3$ *e* $\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=3.$

Vamos determinar os geradores para $\mathrm{Im}\left(T\right)$:

$$\begin{aligned}T\left(\begin{array}{cc}a & b\\ c & d\end{array}\right) &= \left(a+d,a-d,b+c\right)\\ &= a\left(1,1,0\right)+d\left(1,-1,0\right)+b\left(0,0,1\right)+c\left(0,0,1\right).\end{aligned}$$

Daí, vem: $\mathrm{Im}\left(T\right)=\left[\left(1,1,0\right),\left(1,-1,0\right),\left(0,0,1\right),\left(0,0,1\right)\right]$. *Como* $\dim\mathrm{Im}(T)=3$, *segue-se que* $\beta=\left\{\left(1,1,0\right),\left(1,-1,0\right),\left(0,0,1\right)\right\}$ *é uma base para* $\mathrm{Im}(T)$.

■

3.6.2 Composições de Transformações Lineares

Definição 3.3

Sejam $\mathbb{U}$ *e* $\mathbb{V}$ *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *e sejam* $T:\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ *e* $G:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ *transformações lineares. A composta* $G\circ T:\mathbb{U}\to\mathbb{W}$, *é dada por:*

$$\left(G\circ T\right)\left(u\right)=G\left[T\left(u\right)\right],\forall u\in\mathbb{U}.$$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{U} & \overset{T}{\to} & \mathbb{V}\\ G\circ T & \searrow & \downarrow G\\ & & \mathbb{W}\end{array}$$

♣

Para a composta $G\circ T$ tem-se: a imagem de T está contida ou é igual ao domínio de G :

$$\mathrm{Im}\left(T\right)\subseteq D\left(G\right).$$

Analogamente, temos:
Para existir a composta $T \circ G$ só faz sentido quando: a imagem de G está contida ou é igual ao domínio de G :

$$\mathrm{Im}\,(G) \subseteq D\,(T)\,.$$

Teorema 3.4

Sejam $T \in L\,(\mathbb{U};\mathbb{V})$ e $G \in L\,(\mathbb{V};\mathbb{W})$, então, $G \circ T : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$,
$G \circ T \in L\,(\mathbb{U};\mathbb{W})$ é linear.

Nota

$L\,(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é o espaço de todas as transformações lineares de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$.
$L\,(\mathbb{V};\mathbb{W})$ é o espaço de todas as transformações lineares de $\mathbb{V}$ em $\mathbb{W}$.

Demonstração

Sejam G e T transformações lineares, então, queremos mostrar que:

$$G \circ T : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$$

é linear.

De fato,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \overset{T}{\to} & \mathbb{V} \\ G \circ T & \searrow & \downarrow G \\ & & \mathbb{W} \end{array}$$

(i) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$, tem-se:

$$\begin{aligned} (G \circ T)\,(u_1 + u_2) &= G\,[T\,(u_1 + u_2)] = G\,[T\,(u_1) + T\,(u_2)] \\ &= G\,[T(u_1)] + G\,[T(u_2] \\ &= (G \circ T)\,(u_1) + (G \circ T)\,(u_2)\,. \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 \in \mathbb{U}$, obtem-se:

$$\begin{aligned} (G \circ T)\,(\lambda u_1) &= G\,[T\,(\lambda u_1)] = G\,[\lambda T u_1)] = \lambda G\,[T(u_1)] \\ &= \lambda\,(G \circ T)\,(u_1)\,. \end{aligned}$$

Logo, $G \circ T : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$ é linear. ■

Exemplo 3.1

1. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por:

$$(i) \quad T\,(x, y, z) = (x + y, x + 2z) \qquad (ii) \quad G\,(x, y) = (x + y, 2y, x - y)$$

Pede-se: (i) $G \circ T$ $\qquad$ (ii) $T \circ G$

Solução

$(i)\ G\circ T$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \overset{T}{\to} & \mathbb{R}^2 \\ G\circ T & \searrow & \downarrow G \\ & & \mathbb{R}^3. \end{array}$$

Antes de passarmos a operacionalizar, é fundamental que se perceba as figurinhas que representam; não as letras utilizadas, vejamos:

G nos diz que: leva a soma das duas primeiras coordenados do domínio, é a primeira coordenada da imagem, o dobra da segunda coordenada do domínio é a segunda coordenada da imagem, e finalmente, a diferenaça das duas coordenadas do domínio é a terceira da imagem. Simbolicamente, temos:

$$G(\triangle,\square)=(\triangle+\square,2\square,\triangle-\square)$$

Assim, facilmente se obtem a composta, a saber:

$$\begin{aligned}(G\circ T)(x,y,z)&=G[T(x,y,z)]\\&=G(x+y,x+2z)\\&=(x+y+(x+2z),2(x+2z),x+y-(x+2z))\\&=(2x+y+2z,2x+4z,y-2z).\end{aligned}$$

Uma forma bastante interessante, e usualmente não aparece nos textos em geral, é fazer a composição utilizando forma matricial na base canônica por simplicidade

$$[G\circ T]=[G].[T]$$

Construindo as matrizes correspondentes $[G]$ e $[T]$, obtemos:

$$[G]=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\1&-1\end{bmatrix}\tag{1}$$

e

$$[T]=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}.\tag{2}$$

Daí, multiplicando (1) e (2), segue-se que:

$$[G\circ T]=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\1&-1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&0&4\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

Reescrevendo a forma matricial $G\circ T$ na base canônica, obtemos:

$$(G\circ T)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&0&4\\0&1&-2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

■

Procedendo de forma análoga, vem:

$$(i)\quad T(x,y,z)=(x+y,x+2z)\qquad (ii)\quad G(x,y)=(x+y,2y,x-y)$$

(ii) $T \circ G$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \overset{G}{\to} & \mathbb{R}^3 \\ T \circ G & \searrow & \downarrow T \\ & & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Um comentário breve, é fundamental que se perceba as figurinhas que representam; não as letras utilizadas, vejamos:
T nos diz: que: leva a soma das duas primeiras coordenados do domínio, na primeira coordenada da imagem, a primeira coordenado do domínio com o dobra da terceira é a segunda coordenada da imagem. Em símbolo, tem-se:

$$T(*, \triangle, \square) = (* + \triangle, * + 2\square).$$

Assim, facilmente se obtem a composta, a saber:

$$\begin{aligned} (T \circ G)(x, y) &= T[G(x, y)] \\ &= T(x + y, 2y, x - y) \\ &= (x + y + 2y, x + y + 2(x - y)) \\ &= (x + 3y, 3x - y). \end{aligned}$$

Vale ressaltar que: usualmente não aparece nos textos em geral, a composição utilizando forma matricial na base canônica

$$[T \circ G] = [T] . [G].$$

Construindo as matrizes correspondentes $[G]$ e $[T]$, obtemos:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, vem:

$$[T \circ G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo na forma matricial na base canônica, obtemos:

$$(G \circ T) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

■

2. Seja $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, definida por:

$$T(ax + b) = (b, a + b).$$

Provar que: T é um isomorfismo, em seguida, obter $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

Demonstração

Afirmação 1: $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$ é injetora$\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(T) = \{0x+0\}$.

A priori, por definição o núcleo de T é dado por:

$$\operatorname{Ker}(T) = \{p_0(x) = a_0x + b_0 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\,; T(a_0x+b_0) = (0,0)\}.$$

Vejamos $T(a_0x+b_0) = (b_0, a_0+b_0) = (0,0) \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = 0 \\ a_0 + b_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_0 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}.$

Portanto, $\operatorname{Ker}(T) = \{p_0(x) = 0x+0\} = \{0\} \Longleftrightarrow T$ é injetora. ■

Afirmação 2: T é sobrejetora

À luz do teorema do núcleo e da imagem temos:

$$2 = \dim \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = 0 + \dim \operatorname{Im}(T)$$

e $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$, donde, vem: $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

Portanto, T é sobrejetora, e, por consguinte, obtemos: T é uma isomorfismo. ■

Agora, vamos determinar o isomorfismo inverso:

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

$$T^{-1}(a_0, b_0) = k_1x + k_2 \Longleftrightarrow T(k_1x+k_2) = (a_0, b_0). \tag{1}$$

Dito de outra forma, precisamos determinar k_1 e k_2 em função de a_0 e b_0.

Vejamos,

$$T(k_1x+k_2) = (k_2, k_1+k_2) = (a_0, b_0) \Longrightarrow \begin{cases} k_2 = a_0 \\ k_1 + k_2 = b_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_2 = a_0 \\ k_1 = b_0 - a_0. \end{cases} \tag{2}$$

Assim, substituindo (2) em (1) segue-se o isomorfismo inverso:

$$T^{-1}(a_0, b_0) = (b_0 - a_0)x + a_0.$$

Comentários:

Neste caso, as composições das transformações lineares e suas inversas produz os resultados

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^2 \\ T^{-1}\circ T & \searrow & \downarrow T^{-1} \\ & & \mathbb{P}_1(\mathbb{R}). \end{array}$$

Daí, vem:

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(p(x)) = p(x).$$

Analogamente, temos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T^{-1}} & \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \\ T\circ T^{-1} & \searrow & \downarrow T \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Por conseguinte, obtemos:

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(p(x)) = p(x).$$

Nota

$$T(u) = v \Longleftrightarrow T^{-1}(v) = u$$

De forma generalizada, temos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \overset{T}{\rightarrow} & \mathbb{V} \\ T^{-1}\circ T & \searrow & \downarrow T^{-1} \\ & & \mathbb{U} \end{array}$$

Assim,

$$\left(T^{-1}\circ T\right)(u) = T^{-1}\left[T(u)\right] = T^{-1}(v) = u = I_{\mathbb{U}}.$$

De forma análoga, vem:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \overset{T^{-1}}{\rightarrow} & \mathbb{U} \\ T\circ T^{-1} & \searrow & \downarrow T \\ & & \mathbb{V} \end{array}$$

Donde, obtemos:

$$\left(T\circ T^{-1}\right)(v) = T\left[T^{-1}(v)\right] = T(u) = v = I_{\mathbb{V}}.$$

3. Seja $T \in L(\mathbb{U})$, tal que: $\dim \mathbb{U} = n$. Então, prove que:

$$\dim \operatorname{Ker}(T) . \dim \operatorname{Im}(T) \leq \frac{n^2}{4}.$$

Demonstração

Basta notar que: $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, onde $a = \dim \operatorname{Ker}(T)$ e $b = \dim \operatorname{Im}(T)$.
Assim, usando o teoremado núcleo e da imagem, obtemos:

$$\dim \operatorname{Ker}(T) . \dim \operatorname{Im}(T) \leq \left(\frac{\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)}{2}\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}.$$

Portanto,

$$\dim \operatorname{Ker}(T) . \dim \operatorname{Im}(T) \leq \frac{n^2}{4}.$$

■

4. Sejam $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $S : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ transformações lineares, definidas por:

$$(i) \quad T(A) = A^t \qquad \text{e} \qquad (ii) \quad S(A) = tr(A).$$

Pede-se:
(i) $S\circ T$ e $\operatorname{Ker}(S\circ T)$ (ii) $\dim \operatorname{Im}(S\circ T)$. $S\circ T$ é sobretejora?
(ii) Qual é a $\dim \operatorname{Ker}(S\circ T)$?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \overset{T}{\rightarrow} & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ S\circ T & \searrow & \downarrow S \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Demonstração

(i) $(S \circ T)(A) = S(T(A)) = S(A^t) = tr(A^t) = tr(A)$, onde:

$$tr(A) = \sum_{j-1}^{n} a_{jj} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

É o traço da matriz A.

Núcleo de $S \circ T$ é:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(S \circ T) &= \{A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}); (S \circ T)(A_0) = 0\} \\ &= \{A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}); (S \circ T)(A_0) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0\}.\end{aligned}$$

(ii) Com efeito,

$$S \circ T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

então, tem-se: $\dim \operatorname{Im}(S \circ T) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 0 \text{ (não convém)} \end{cases}$

$\Longrightarrow \dim \operatorname{Im}(S \circ T) = 1$ e $\operatorname{Im}(S \circ T) \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{Im}(S \circ T) = \mathbb{R}$.

De sorte que: $S \circ T$ é sobrejetora.

(iii) Decorre do Teorema do Núcleo e da Imagem que:

$$\dim \operatorname{Ker}(S \circ T) + \dim \operatorname{Im}(S \circ T) = n^2 \Longrightarrow \dim \operatorname{Ker}(S \circ T) = n^2 - 1$$

■

5. Seja $\mathbb{V} = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ espaço de todos os polinômios e sejam $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformações lineares, definidas por:

$$(i) \quad S[p(x)] = p'(x) \qquad \text{e} \qquad (ii) \quad T(p(x)) = xp(x).$$

Então, verifique se:

(i) $S \circ T - T \circ S = I$ $\quad (ii)$ $S \circ T^m - T^m \circ S = mT^{m-1}$, $m \geq 2$.

Solução

Com efeito,

$$(S \circ T)(p(x)) = S[T(p(x))] = S[xp(x)] = [xp(x)]' = p(x) + xp'(x) \tag{1}$$

Procedendo de forma análoga, temos:

$$(T \circ S)(p(x)) = T[S(p(x))] = T[p'(x)] = xp'(x). \tag{2}$$

Agora, de (1) *e* (2)*, obtemos:*

$$(S \circ T)(p(x)) - (T \circ S)(p(x)) = p(x) = I[p(x)].$$

De sorte que:

$$S \circ T - T \circ S = I.$$

■

(ii) *Consideremos, a priori,*

$$\begin{aligned}T^2(p(x)) &= (T \circ T)(p(x)) = T[T(p(x))] \\ &= T[xp(x)] = x[xp(x)] = x^2 p(x).\end{aligned}$$

Agora, continuando com o processo, vem:

$$T^m(p(x)) = x^m p(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(S \circ T^m)(p(x)) &= S[T^m(p(x))] = S[(x^m p(x))] \\ &= [(x^m p(x))]' = m x^{m-1} p(x) + x^m p'(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Além disso,temos:

$$(T^m \circ S)(p(x)) = T^m[S(p(x))] = T^m[p'(x)] = x^m p'(x). \quad (4)$$

Consequentemente, de (3) *e*(4), *obtemos::*

$$\begin{aligned}(S \circ T^m)(p(x)) - (T^m \circ S)(p(x)) &= m x^{m-1} p(x) = m T^{(m-1)}(p(x)) \\ (S \circ T^m - T^m \circ S)(p(x)) &= \left(m T^{(m-1)}\right)(p(x)),\ n \geq 2.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$S \circ T^m - T^m \circ S = m T^{(m-1)}.$$

■

Nota

$\mathbb{P}(\mathbb{R})$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensão infinita, ou seja,* $\dim \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \infty$. *Vale ressaltar que em dimensão finita, não vale.*

Conjectura:

Este resultado continua válido em espaço de dimensão finita? A resposta é não, o que seja delineado no problema a seguir.

6. Não existem matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tais que:

$$AB - BA = I.$$

Demonstração

Suponha válido, então, usando o traço da matriz identidade, vem: $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I) = n$.
Por outro lado, tem-se:

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}B_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i}A_{i\alpha} = \operatorname{tr}(\mathbb{BA}).$$

Assim,

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) - \operatorname{tr}(\mathbb{BA}) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(\mathbb{AB} - \mathbb{BA}) = tr(I) = 0.$$

Absurdo! Visto que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.
Portanto, tais matrizes não existem satisfazendo

$$AB - BA = I.$$

■

7. Seja $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, prove que::

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M}\,\|X\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Conclua daí que: T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

Demonstração

Seja $X \in \mathbb{R}^m$, então, tem-se: $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ e $e_j = (0, \ldots, 0, 1)$. desta forma, vem:

$$X = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_m.$$

Assim,

$$T(X) = T\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_m),$$

por conseguinte, obtemos:

$$\|T(X)\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j|\,\|T(e_j)\| \leq \|X\| \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\| = \mathbb{M}\,\|X\|.$$

Onde $\mathbb{M} = \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\|$ de modo que:

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M}\,\|X\|_{\mathbb{R}^m}, \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

■

Como T é linear, temos:
$T(X - X_0) = T(X) - T(X_0)$ para todo $X_0 \in \mathbb{R}^m$, segue-se daí que

$$\|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M}\,\|X - X_0\|.$$

(T é Lipschitziana).
Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbb{M}} > 0$, tal que:

$$\|X - X_0\| < \delta \Longrightarrow \mathbb{M}\,\|X - X_0\| < \varepsilon \Longrightarrow \|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M}\,\|X - X_0\| < \varepsilon.$$

Portanto, T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

■

8. *(Condições de otimalidade de* 1^a **ordem**)

1. $\begin{cases} \text{Minimize } f(x) \\ \text{sujeito à } Ax = b, \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \text{Min } \nabla f(x)\,\Delta x \\ \text{Sujeito à } A\Delta x = 0. \end{cases}$

Afirmação: Os problemas (1) e (2) são equivalentes.

Demonstração

Sejam $x \in \mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \operatorname{Im}(A^t)$ e seja $f : \Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Considere a função Lagrangiana associada ao problema (1)

(i) $\mathfrak{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T (b - Ax)$.

Utilizando as condições de otimalidade de 1^a ordem de KKT as quais são necessárias e suficientes neste caso, temos:

(ii)

$$\left\{\begin{array}{c}\nabla_x \mathfrak{L} = \nabla f(x) - A^T\lambda = 0 \\ \nabla_\lambda \mathfrak{L} = b - Ax = 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\nabla f(x) = A^T\lambda \\ Ax - b = 0.\end{array}\right. \quad (I)$$

Agora, de (I), vem: $\nabla f(x) // \operatorname{Im}(A^t)$, então, tem-se:

$$\nabla f(x) \perp \operatorname{Ker}(A) \Longrightarrow \nabla f(x).\Delta x = 0,$$

para $\Delta x \in \operatorname{Ker}(A)$. Além disso, $A\Delta x = 0$.
De sorte que, o prescrito anteriormente produz o problema (2).

■

Nota

KKK generaliza a otimização usando os multiplicadores de Lagrange, aqui estamos falando de aspectos matemáticos da programação não-linear, destacando que Ω é a região aberta do $\mathbb{R}^n$ de uma região interior viável, podendo ser inclusive $\mathbb{R}^n_{++}$.

Capítulo 4 - Transformações Lineares do Plano no Plano e suas Aplicações

"Durante toda a sua vida, estudará o **Universo**; mas, desprezará sua mais clara mensagem: para criaturas tão pequenas como nós, a vastidão só é suportável através do amor."

Carl Edward Sagan (1934 – 1996)

Um pouco de história sobre Transformações Lineares do Plano no Plano e suas Aplicações

As transformações lineares do plano no plano são um tópico importante em matemática, com aplicações em diversas áreas, como engenharia, física, computação gráfica, entre outras.

O estudo das transformações lineares começou no século XIX, com matemáticos como Arthur Cayley e Augustin-Louis Cauchy, que trabalharam em matrizes e determinantes. O conceito de transformação linear foi formalizado por Hermann Grassmann e Arthur Cayley, que desenvolveram uma teoria matemática mais abstrata das transformações geométricas.

No início do século XX, Felix Klein desenvolveu a ideia de grupos de transformações, que são conjuntos de transformações que preservam alguma propriedade geométrica, como a distância, a orientação ou a forma. Klein mostrou que existem apenas alguns grupos de transformações que podem ser usados para estudar a geometria do plano, e que esses grupos podem ser usados para classificar diferentes tipos de objetos geométricos, como polígonos e superfícies. Um exemplo importante de uma transformação linear do plano é a rotação, que gira o plano em torno de um ponto fixo. A rotação é uma transformação linear porque preserva as distâncias e as proporções entre os pontos. Outro exemplo é a homotetia, que é uma transformação que faz com que todos os pontos do plano sejam dilatados ou contraídos em relação a um ponto fixo. A homotetia também é uma transformação linear porque preserva as distâncias e as proporções. As transformações lineares do plano têm muitas aplicações práticas. Por exemplo, elas são usadas na computação gráfica para manipular imagens e objetos em $2D$. As transformações lineares também são usadas em engenharia para modelar o comportamento de estruturas e materiais, bem como em física para estudar a dinâmica de sistemas físicos.

Em resumo, as transformações lineares do plano no plano são um tópico importante em matemática com aplicações em diversas áreas. Elas têm uma longa história de desenvolvimento e são fundamentais para a compreensão da geometria e da física do mundo que nos rodeia.

[https://chat.openai.com/capturada em 17 de abril 2023 às 13h25min]

Considerações Preliminares

Neste Capítulo, estudares alguns tipos de transformações lineares: reflexão, Contração, expansão ou homotetia, cisalhamento horizontal e vertical, rotações horárias e anti-horárias. Abordagem mais geral, matriz de uma transformação linear, matriz da composta e para finalizar uma breve introdução aos autovalores (valores característicos) associados aos correspondentes autovetores (vetores característicos).

4.1 Matriz de uma Transformação Linear

Sejam $T:\mathbb{U}\rightarrow\mathbb{V}$ uma transformação linear, onde: $\dim\mathbb{U}=n$ e $\dim\mathbb{V}=m$, fixadas as bases ordenadas $\beta=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ e β'$=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$.

Observe que: Cada $T\left(u_1\right),Tu_2,\ldots,T\left(u_n\right)$ está em $\mathbb{V}$, temos então que:

$$\begin{cases} T\left(u_1\right)=a_{11}v_1+a_{21}v_2+\ldots+a_{m1}v_m \\ T\left(u_2\right)=a_{12}v_1+a_{22}v_2+\ldots+a_{m2}v_m \\ ------------------- \\ T\left(u_n\right)=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+\ldots+a_{mn}v_m. \end{cases}$$

Assim, a matriz de T em relação as bases β e β' é dada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Exemplo 4.1

Seja $T:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por:

$$T\left(x,y,z\right)=\left(x+2y,y+z\right)$$

Determine $[T]_{\beta'}^{\beta}$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e β'$=\{\left(1,0\right),\left(1,1\right)\}$.

Solução *A matriz que vamos determinar é:*

$$[T]_{\beta'}^{\beta}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Além disso, a base canônica do $\mathbb{R}^3$ *é definida por* $\beta=\{\left(1,0,0\right),\left(0,1,0\right),\left(0,0,1\right)\}$. *Por conseguinte, vem:*

$$\begin{cases} T\left(1,0,0\right)=\left(1,0\right)=a_{11}\left(1,0\right)+a_{21}\left(1,1\right) \\ T\left(0,1,0\right)=\left(2,1\right)=a_{12}\left(1,0\right)+a_{22}\left(1,1\right) \\ T\left(0,0,1\right)=\left(0,1\right)=a_{13}\left(1,0\right)+a_{23}\left(1,1\right). \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} a_{11} & +a_{21} & =1 \\ & a_{21} & =0 \end{cases},\begin{cases} a_{12} & +a_{22} & =2 \\ & a_{22} & =1 \end{cases} e \begin{cases} a_{13} & +a_{23} & =0 \\ & a_{23} & =1 \end{cases}$$

Daí, vem:

$$\begin{cases} a_{11}=1 \\ a_{21}=0 \end{cases},\begin{cases} a_{12}=1 \\ a_{22}=1 \end{cases} e \begin{cases} a_{13}=-1 \\ a_{23}=1. \end{cases}$$

Portanto,

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

■

Exemplo 4.2

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por:

$$T(x, y) = (x + y, 2y, x - y)\,.$$

Obter $[T]$

Solução

A priori, é bom esclarecer: quando não se coloca as bases, significa que estamos nos referindo as bases canônicas correspondentes.)

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Vejamos $\beta = (\{(1,0), (0,1)\})$ *e* β*'*$= (\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\})$ *base canônicas respectivametne de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$.

Assim,

$$\begin{cases} T(1,0) = (1,0,1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1) \\ T(0,1) = (1,2,-1) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{32}(0,0,1) \end{cases}$$

Daí, obtemos:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Note que: $T(1,0) = (1,0,1)$ *e* $T(0,1) = (1,2,-1)$ *quando a base é canônica, as coordenadas do vetor imagem corresponde a coluna ma matriz associada a transformação linear*

Nota

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \xrightarrow{T} & \mathbb{V} \\ G \circ T & \searrow & \downarrow G \\ & & \mathbb{W} \end{array}$$

β,β*' e* β*" bases respectivamente de* $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$.

A seguir, descrevendo a composição na forma matricial, temos:

$$[G \circ T]_{\beta''}^{\beta} = [G]_{\beta''}^{\beta'} . [T]_{\beta'}^{\beta}$$

■

Exemplo 4.3

Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por:

$$(i) \quad T(x, y, z) = (x + y, x + 2z) \qquad (ii) \quad G(x, y) = (x + y, 2y, x - y)$$

Pede-se: (i) $[G \circ T]$ $\qquad$ (ii) $[T \circ G]$

Solução

(i) $G \circ T$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \overset{T}{\to} & \mathbb{R}^2 \\ G \circ T & \searrow & \downarrow G \\ & & \mathbb{R}^3. \end{array}$$

Antes de passarmos a operacionalizar, é fundamental que se perceba as figurinhas que representam; não as letras utilizadas, vejamos:

G nos diz que: leva a soma das duas primeiras coordenados do domínio, é a primeira coordenada da imagem, o dobra da segunda coordenada do domínio é a segunda coordenada da imagem, e finalmente, a diferenaça das duas coordenadas do domínio é a terceira da imagem. Simbolicamente, temos:

$$G(\triangle, \square) = (\triangle + \square, 2\square, \triangle - \square)$$

Assim, facilmente se obtem a composta, a saber:

$$\begin{aligned} (G \circ T)(x, y, z) &= G[T(x, y, z)] \\ &= G(x + y, x + 2z) \\ &= (x + y + (x + 2z), 2(x + 2z), x + y - (x + 2z)) \\ &= (2x + y + 2z, 2x + 4z, y - 2z). \end{aligned}$$

Uma forma bastante interessante, e usualmente não aparece nos textos em geral, é fazer a composição utilizando forma matricial na base canônica por simplicidade

$$[G \circ T] = [G].[T]$$

Construindo as matrizes correspondentes $[G]$ e $[T]$, obtemos:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

e

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Daí, multiplicando (1) e (2), segue-se que:

$$[G \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo a forma matricial $G \circ T$ na base canônica, obtemos:

$$(G \circ T) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

■

Procedendo de forma análoga, vem:

$$(i) \quad T(x,y,z) = (x+y, x+2z) \qquad (ii) \quad G(x,y) = (x+y, 2y, x-y)$$

$(ii)\ T \circ G$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \overset{G}{\to} & \mathbb{R}^3 \\ T \circ G & \searrow & \downarrow T \\ & & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Um comentário breve, é fundamental que se perceba as figurinhas que representam; não as letras utilizadas, vejamos:
T nos diz: que: leva a soma das duas primeiras coordenados do domínio, na primeira coordenada da imagem, a primeira coordenado do domínio com o dobra da terceira é a segunda coordenada da imagem. Em símbolo, tem-se:

$$T(*, \triangle, \square) = (* + \triangle, * + 2\square).$$

Assim, facilmente se obtem a composta, a saber:

$$\begin{aligned} (T \circ G)(x,y) &= T[G(x,y)] \\ &= T(x+y, 2y, x-y) \\ &= (x+y+2y, x+y+2(x-y)) \\ &= (x+3y, 3x-y). \end{aligned}$$

Vale ressaltar que: usualmente não aparece nos textos em geral, a composição utilizando forma matricial na base canônica

$$[T \circ G] = [T] . [G].$$

Construindo as matrizes correspondentes $[G]$ e $[T]$, obtemos:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte, vem:

$$[T \circ G] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo na forma matricial na base canônica, obtemos:

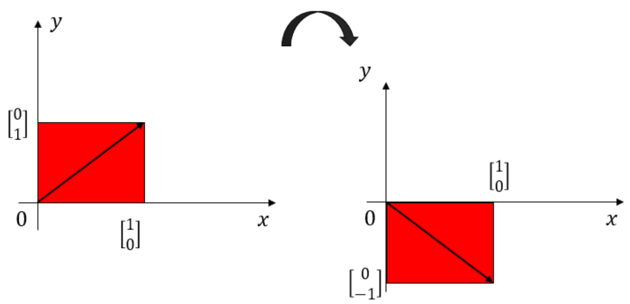
$$(G \circ T) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\blacksquare$

4.2 Transformação do Plano no Plano

1.1 Reflexão em torno do eixo x :

$$R_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto R_x(x, y) = (x, -y)$$

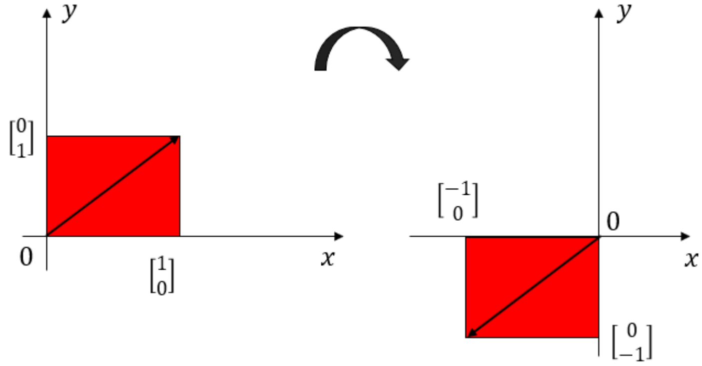


Na linguagem das matrizes, a reflexão em torno do eixo x, descrito na forma matricial, temos:

$$R_x \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1.2 Reflexão em torno do eixo y :

$$R_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto R_x(x, y) = (-x, y)$$

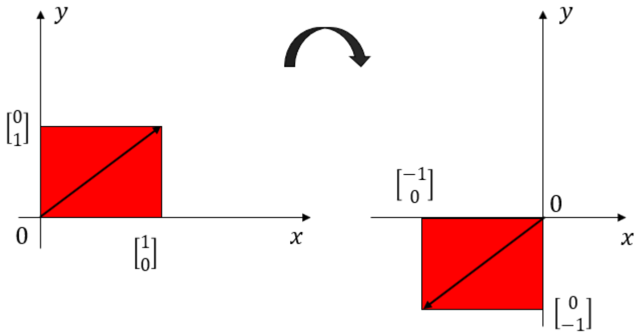


Procedendo de forma análoga, a reflexão em torno do eixo y, descrito na forma matricial, é dada por:

$$R_y \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1.3 Reflexão em torno da origem:

$$R_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto R_x\,(x, y) = (-x, -y)$$

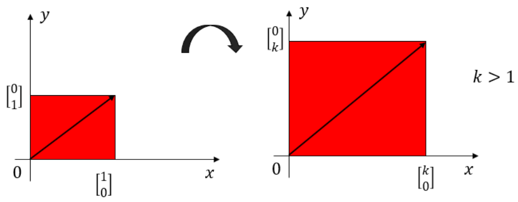


Na linguagem das matrizes, a reflexão em torno da origem, será dada por:

$$R_0 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.1 Homotetia, Contração ou Expansão

$$H_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto H_k\,(x, y) = (kx, ky)$$

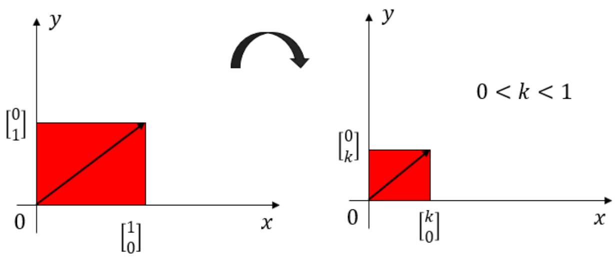


Na linguagem das matrizes, Homotetia, Contração ou Expansão, é dada por:

$$H_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2.2 Homotetia, Contração ou Expansão

$$H_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto H_k\,(x, y) = (kx, ky)$$

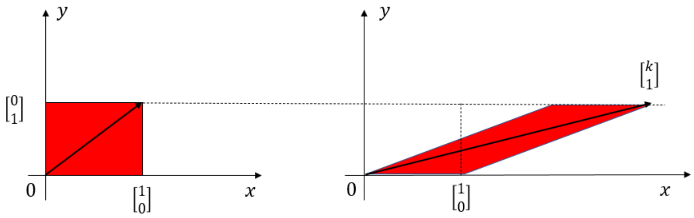


Na linguagem das matrizes, Homotetia, Contração ou Expansão, é dada por:

$$H_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.1 Cisalhamento horizontal de fator k :

$$C_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto C_k (x, y) = (x + ky, y)$$

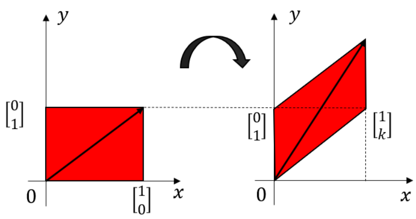


Na linguagem das matrizes, o cisalhamento horizontal será dada por:

$$C_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.2 Cisalhamento vertical de fator k :

$$C_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto C_k (x, y) = (x, kx + y)$$

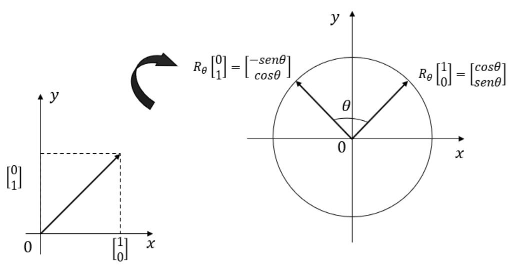


Na linguagem das matrizes, o cisalhamento vertical de fator k, será delineado por:

$$C_k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4.1 Rotação Anti-hoirária de um ângulo θ :

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto R_\theta (x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$$



Na linguagem das matrizes, a rotação anti-horária de um ângulo θ, é dada por:

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nota

(I) Se a rotação fora horária, basta trocar θ por $(-\theta)$, destacando que $\begin{cases} \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \sin(-\theta) = -\sin\theta \end{cases}$

A matriz da rotação horária será dada por:

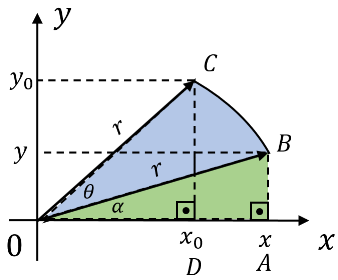
$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(II) Na linguagem das matrizes, a rotação anti-horária de um ângulo θ, é dada por:

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4.2 Rotação Anti-hoirária de um ângulo θ :

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto R_\theta(x, y) = (x_0, y_0)$$



Observe que:

ΔOAB :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

ΔOAB :

$$\begin{cases} x_0 = r\cos(\alpha+\theta) \\ y_0 = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases} \tag{2}$$

Daí, usando as identidades $\begin{cases} \cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta \\ \text{e} \\ \sin(\alpha+\theta) = \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha \end{cases}$

$$x_0 = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \tag{3}$$

e

$$y_0 = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\sin\theta\cos\alpha \tag{4}$$

Agora, substituindo (1) em (3) , (4), obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= r\cos(\alpha+\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ &\text{e} \\ y_0 &= r\sin(\alpha+\theta) = y\cos\theta + x\sin\theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

Ou reescrevendo na forma matricial a rotação anti-horária, temos:

$$R_\theta\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Capítulo Execícios

1. Determine $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é uma transformação linear dada por: uma contração de fator $\frac{1}{2}$ seguida de uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{3}$ rad . Destaque $[A]$.

Solução

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{C_{\left(\frac{1}{2}\right)}} & \mathbb{R}^2 \\ A = R_{(\pi/3)} \circ C_{\left(\frac{1}{2}\right)} & & \searrow & \downarrow R_{(\pi/3)} \\ & & & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [A] &= \left[R_{(\pi/3)} \circ C_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \left[R_{(\pi/3)}\right]\left[C_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\sqrt{3}y}{4} \\ \frac{\sqrt{3}x+y}{4} \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$A(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{3}y}{4}, \frac{\sqrt{3}x+y}{4}\right).$$

■

2. Determine $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é uma transformação linear dada por: uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{4}$ rad seguida de uma expansão de fator $\sqrt{2}$. Destaque $[A]$.

Solução

Com efeito, fazendo o diagrama para a composição, temos:

$$A = E_{(\sqrt{2})} \circ R_{(\pi/4)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{R_{(\pi/4)}} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow & \downarrow E_{(\sqrt{2})} \\ & & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Assim,

$$[A] = \left[E_{(\sqrt{2})} \circ R_{(\pi/4)}\right] = \left[E_{(\sqrt{2})}\right] . \left[R_{(\pi/4)}\right] =$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$A(x,y) = (x-y, x+y).$$

■

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}.$$

$i)$ Afirmação: T não é injetora. De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker\,(T) = \left\{(a_o, b_o, c_o) \in \mathbb{R}^3; T\,(a_o, b_o, c_o) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Com efeito, $T\,(a_o, b_o, c_o) = \begin{pmatrix} a_o - b_o & 0 \\ 0 & a_o + c_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} a_o - b_o = 0 \\ a_o + c_o = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_o = a_o \\ c_o = -a_o \end{cases}$. Portanto,

$Ker\,(T) = \left\{(a_o, a_o, -a_o) \in \mathbb{R}^3; a_o \in \mathbb{R}\right\} = [(1,1,-1)]$.

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, $\dim Ker\,(T) = 1$. ■

(ii) Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2$,

$\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$ e $\dim \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R}) = 4$. Assim, $\mathrm{Im}\,(T) \neq \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$ e, portanto,

T é não é sobrejetora.

Vamos determinar os geradores para $\mathrm{Im}\,(T)$:

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, vem: $\mathrm{Im}\,(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$. Como $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$, segue-se que $\beta = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(T)$. ■

4. Obter a aplicação $\mathbb{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é uma homotetia de fator 2 seguida de um rotação horária de $\pi/4\,\mathrm{rad}$.

Solução

$$A = R_{(-\pi/4)} \circ H_{(2)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{H_{(2)}} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow & \downarrow R_{(-\pi/4)} \\ & & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [A] &= \left[R_{(-\pi/4)} \circ H_{(2)}\right] = \left[R_{(-\pi/4)}\right]\left[H_{(2)}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(x+y) \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(x+y) \\ \sqrt{2}(y-x) \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$A\,(x,y) = \left(\sqrt{2}(x+y), \sqrt{2}(y-x)\right).$$

■

5. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares, tais que:

$$T\,(x,y,z) = (x-y,\; x+y+z) \quad \text{e} \quad G\,(x,y) = (x+y, 2x, x-y).$$

Pede-se: (i) $[G \circ T] = [G].[T]$ (ii) $[T \circ G] = [T].[G]$

Solução

(i) $[G \circ T] = [G].[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

(ii) *Procedendo de forma análoga, temos:*

$[T \circ G] = [T].[G] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$ ■

6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ uma transformação linear **bijetora**, definida por:

$$T\,(a,b) = a + (b-a)x.$$

Com efeito,

$$T^{-1} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2;\; T^{-1}\,(\alpha_1 x + \beta_1) = (k_1, k_2) \Longleftrightarrow T\,(k_1, k_2) = \alpha_1 x + \beta_1.$$

Vejamos

$$T\,(k_1, k_2) = k_1 + (k_2 - k_1)x. = \beta_1 + \alpha_1 x.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} k_1 = \beta_1 \\ k_2 - k_1 = \alpha_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = \beta_1 \\ k_2 = \alpha_1 + \beta_1 \end{cases}.$$

De sorte que:

$$T^{-1}(\alpha_1 x + \beta_1) = (\beta_1, \alpha_1 + \beta_1).$$

■

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$T(x, y, z) = (x - z, x + z).$$

(i) Afirmação: T não é injetora. De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker(T) = \left\{(x_o, y_o, z_o) \in \mathbb{R}^3; T(x_o, y_o, z_o) = (0, 0)\right\}.$$

$$T(x_o, y_o, z_o) = (x_o - z_o, x_o + z_o) = (0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} x_o - z_o = 0 \\ x_o + z_o = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow x_o = z_o = 0$. Portanto,

$$Ker(T) = \{(0, y_o, 0) \in \mathbb{R}^3; y_o \in \mathbb{R}\} = [(0, 1, 0)].$$

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, $\alpha = \{(0, 1, 0)\}$ é uma base para $Ker(T)$ e $\dim Ker(T) = 1$. ■

(ii) Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2$$

e $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$. Assim, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ e, portanto, T é sobrejetora.
Vamos determinar os geradores para $\mathrm{Im}(T) : T(x, y, z) = x(1, 1) + z(-1, 1)$.
Daí, vem: $\mathrm{Im}(T) = [(1, 1), (-1, 1)]$. Como $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$, segue-se que $\beta = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ é uma base para $\mathrm{Im}(T)$. ■

8. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares, tais que:

$$T(x, y, z) = (2x - y,\ x + y + z) \quad \text{e} \quad G(x, y) = (x + y, 2y, x - y).$$

Pede-se: (i) $[G \circ T] = [G].[T]$ (ii) $[T \circ G] = [T].[G]$

Solução

(i) $[G \circ T] = [G].[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) *Procedendo de forma análoga, temos:*

$$[T \circ G] = [T].[G] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$ ■

9. Obter $\mathbb{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é uma expansão de fator 2 seguida de um rotação anti-horária de $\pi/4\,\text{rad}$.
Solução

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{E_{(2)}} & \mathbb{R}^2 \\ A = R_{(\pi/4)} \circ E_{(2)} & & \searrow & \downarrow R_{(\pi/4)} \\ & & & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [A] &= \left[R_{(\pi/4)} \circ E_{(2)}\right] = \left[R_{(\pi/4)}\right]\left[E_{(2)}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(x-y) \\ \sqrt{2}(x+y) \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$A\,(x,y) = \left(\sqrt{2}(x-y), \sqrt{2}(x+y)\right).$$

■

10. Seja $T : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear **bijetora**, definida por:

$$T\,(ax+b) = (a+b, a-b)\,.$$

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R});\ T^{-1}\,(k_1,k_2) = \alpha_1 x + \beta_1 \iff T\,(\alpha_1 x + \beta_1) = (k_1,k_2)\,.$$

Vejamos

$$T\,(\alpha_1 x + \beta_1) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_1 - \beta_1) = (k_1,k_2)\,.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = k_1 \\ \alpha_1 - \beta_1 = k_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{k_1+k_2}{2} \\ \beta_1 = \frac{k_1-k_2}{2} \end{cases}.$$

De sorte que:

$$T^{-1}\,(k_1,k_2) = \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)x + \left(\frac{k_1-k_2}{2}\right).$$

■

11. (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p\,(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução

(i) *Com efeito, temos:*

$$\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 5\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -2-\lambda\end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p\left(\lambda\right)=\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)=\left(1-\lambda\right).\left(3-\lambda\right).\left(-2-\lambda\right)=0\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=1 \text{ ou}\\ \lambda=3 \text{ ou}\\ \lambda=-2.\end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).

Nota

(A) *Notação:*

$$\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

Produtório de a_{ii}, variando de $i=1$ até $i=n$

(B) *Se $\mathbb{A}=(a_{ij})\in\mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tal que: $a_{ij}=0,\, i>j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,*

$$\det\left(\mathbb{A}\right)=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

■

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)X=0.$$

Solução

Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)X=0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

1º Caso: $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases} & 5z & = & 0\\ 2y & +z & = & 0\\ & -3z & = & 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}y=0\\ e\\ z=0\end{cases}.$$

Logo, $v_1=(x,0,0)=x\,(1,0,0)$, com $x\neq0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda=1$, isto é, o espaço solução $\mathbb{S}_1$ é dada por:

$$\mathbb{S}_1=\left\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3;x\in\mathbb{R}\text{ e }x\neq0\right\}=\left[(1,0,0)\right],$$

isto é, $(1,0,0)$ gera $\mathbb{S}_1$. Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo

escalar do vetor $(1,0,0)$.
2º Caso: $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x+ & + & 5z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & - & 5z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ e \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = (0,y,0) = y\,(0,1,0)$*, com* $y \neq 0$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda = 3$*, ou ainda, a solução é dada por:*

$$\mathbb{S}_2 = \left\{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \; e \; y \neq 0\right\} = [(0,1,0)]\,,$$

ou seja, $(0,1,0)$ *gera* $\mathbb{S}_2$.
3º Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} 3x & & +5z & = 0 \\ & 5y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{-5}{3}z \\ e \\ z = \frac{-1}{5}z \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = \left(\frac{-5}{3}z, \frac{-1}{5}, z\right) = z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$*, com* $z \neq 0$ *é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:*

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} \; e \; z \neq 0 \right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)\right],$$

ou seja, $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$ *gera* $\mathbb{S}_3$.

■

12. Prove que: $C([0,1]) \simeq C([2,3])$, isto é, $C([0,1])$ é isomorfo a $C([2,3])$.
Vale destacar que:

$$C\,([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ contínua}\}\,.$$

Demonstração

Com efeito, $2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x-2 \leq 1$, então podemos tomar

$$\begin{array}{rl} T: & C\,([0,1]) \to C\,([2,3]) \\ & f \longmapsto T\,(f)\,(x) = f\,(x-2)\,. \end{array}$$

É fácil ver que T é linear (Verifique!).
Provemos que T é um isomorfismo, por simplicidade façamos o seguite:

$$\begin{array}{rl} \varphi: & [2,3] \to [0,1] \\ & x \longmapsto \varphi\,(x) = x-2, \end{array}$$

de modo análogo, a inversa de φ será dada por:

$$\begin{array}{rl} \varphi^{-1}: & [0,1] \to [2,3] \\ & x-2 \longmapsto \varphi^{-1}\,(x-2) = x. \end{array}$$

Além disso, observe o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & [2,3] \\ & \searrow & \downarrow g \\ & g\circ\varphi^{-1} & \\ & & \mathbb{R}. \end{array}$$

Afirmação 1: T é injetora.
seja $f_0 \in Ker\,(T)$, então, $T\,[f_0]\,(x) = (f_0 \circ \varphi)\,(x) = 0$. Daí, segue-se que:
$f_0 \circ \varphi = 0$. Portanto,

$$(f_0 \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = 0.\varphi^{-1} = 0.$$

dito de outro modo, temos:

$$f_0 \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = 0 \Longrightarrow f_0 = 0.$$

De sorte que T é injetora. ■
Afirmação 2: T é sobrejetora.
$\forall g \in C\,([2,3])\ \exists\ \varphi^{-1} \in C\,([0,1]) : g \circ \varphi^{-1} \in C\,([0,1])$, tal que:

$$T\left(g \circ \varphi^{-1}\right) = g \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) = g.$$

Portanto, T é sobrejetora.
Por conseguinte, T é um isomorfismo. Além disso, podemos descrever de outra forma:

$$C\,([0,1]) \simeq C\,([2,3])\,.$$

■

13. Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathbb{S} = \left\{t+3,\ 2t+\lambda^2+2\right\}$ de $\mathbb{P}_1\,(\mathbb{R})$ é L.I. (Linearmente independente) ? e L.D. (Linearmente dependente)?
Refazendo a questão de uma outra forma: Dada a equação:

$$a\,(t+3) + b\left(2t+\lambda^2+2\right) = 0t + 0$$

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$, para que o sistema homogêneo só admita a solução trivial (solução nula), assim $\mathbb{S}$ é L.I..
Caso contrário, $\mathbb{S}$ será L.D.(teremos infinitas soluções)

Solução

Com efeito,

$$\begin{aligned} a\,(t+3) + b\left(2t+\lambda^2+2\right) &= 0t+0 \Longleftrightarrow \\ (a+2b)t + \left[3a + b\left(\lambda^2+2\right)\right] &= 0t+0. \end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 3a + b\left(\lambda^2+2\right) = 0 \end{cases} \overset{3E_1-E_2 \longrightarrow E_2}{\overbrace{\Longrightarrow}} \begin{cases} a+2b=0 \\ 0 + \left(4-\lambda^2\right)b = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$(2-\lambda)\,(2+\lambda)\,b = 0.$$

1º Caso: $\lambda \neq \pm 2 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow a = 0$. *Neste caso, o sistema só admite solução trivial ou nula. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.I*

2º Caso: $\lambda = 2 \Longrightarrow 0.b = 0$, *voltamos para equação anterior* $a + 2b = 0$. *Neste caso, o sistema admite infinitas soluções. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.D*

3º Caso: $\lambda = -2 \Longrightarrow 0.b = 0$ *voltando a equação* $a + 2b = 0$. *Analogamente, o sistema admite infinitas soluções. Logo,* $\mathbb{S}$ *é L.D.* ■

14. Seja $\mathbb{S} = \left\{e^{2x}, e^{5x}\right\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dada a equação:

$$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0.$$

Prove que: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Demonstração

Dada a equação

$$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0. \qquad (I)$$

Multiplicando (I) por $e^{-2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{3x} = 0. \qquad (II)$$

Agora, derivando em relação a x $\left[(e^{Kx})\text{'} = Ke^{Kx}\right]$, vem:

$$0 + 3\lambda_2 e^{3x} = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \qquad (III)$$

Assim, substituindo (III) em (II), segue-se que:

$$\lambda_1 = 0.$$

Ou ainda,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

De sorte que: $\mathbb{S}$ é linearmente independente. ■

15. Considere $\mathbb{S} = \left\{x^3, |x|^3\right\}$ para todo $x \neq 0$, tem-se:

$$\mathbb{W} = \left[x^3, |x|^3\right] = 0,$$

no entanto, $\mathbb{S}$ é L.I.

Solução

De fato, por definição, sendo $x \neq 0$, tem-se:: $|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ *. Agora, dada a equação:*

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 |x|^3 = 0.$$

1º Caso: $x > 0$:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^3 = (\lambda_1 + \lambda_2) x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

e, procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $x < 0$:

$$\lambda_1 x^3 - \lambda_2 x^3 = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Decorre dos casos (1) *e* (2) *que:*

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Como o sistema só admite a solução trivial (solução nula) segue-se que: $\mathbb{S}$ é L.I. ■

16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por:

$$T(x, y) = (x + y, 4y).$$

Determine seus autovalores e autovetores correspondentes.

Solução

Com efeito, a matriz de T na base canônica é dada por: $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$*, então a equação característica é descrita por:*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda).(4-\lambda) = 0$$

$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = 4 \end{cases}$ *são os autovalores. determinemos os autovetores correspondentes.*

1º Caso: $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_2).X &= 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 0x + 2y = 0 \\ 0x + 3y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x(1, 0)$*, com* $x \neq 0$*, ou ainda,*
$S_1 = \{x(1,0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,0)]$
Procedendo de forma análoga, temos:
2º Caso: $\lambda = 4 : (A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 3x$. *Logo, o autovetor é:* $v_2 = x(1,3)$*, com* $x \neq 0$*, dito de outro modo temos:*
$S_2 = \{x(1,3) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,3)]$

■

17. Seja $F : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ uma transformação linear, tal que: $F^2 - F + I = 0$.
Mostre que: F é inversível e que $F^{-1} = I - F$.

Demonstração

Seja $F : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ uma transformação linear, tal que: $F^2 - F + I = 0$.
Com efeito, $F^2 - F + I = 0 \Rightarrow F - F^2 = I \Rightarrow F \circ I - F \circ F = I$
$\Rightarrow F \circ (I - F) = I$. Portanto, $F^{-1} = I - F$. ■

18. Seja $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, prove que::

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M} \|X\|_{\mathbb{R}^m} .$$

Conclua daí que: T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

Demonstração

Seja $X \in \mathbb{R}^m$, então, tem-se: $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ e $e_j = (0, \ldots, 0, 1)$. desta forma, vem:

$$X = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_m.$$

Assim,

$$T(X) = T\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_m),$$

por conseguinte, obtemos:

$$\|T(X)\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j| \, \|T(e_j)\| \leq \|X\| \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\| = \mathbb{M} \|X\| .$$

Onde $\mathbb{M} = \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\|$ de modo que:

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M} \|X\|_{\mathbb{R}^m}, \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

■

Como T é linear, temos:
$T(X - X_0) = T(X) - T(X_0)$ para todo $X_0 \in \mathbb{R}^m$, segue-se daí que

$$\|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M} \|X - X_0\| .$$

(T é Lipschitziana).
Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbb{M}} > 0$, tal que:

$$\|X - X_0\| < \delta \Longrightarrow \mathbb{M} \|X - X_0\| < \varepsilon \Longrightarrow \|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M} \|X - X_0\| < \varepsilon.$$

Portanto, T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

■

19. Seja $\mathfrak{A}$ a álgebra das matrizes quadradas sobre um corpo ordenado completo K e seja P uma matriz invertível em $\mathfrak{A}$. Mostre que a transformação $A \longmapsto P^{-1}.A.P$, onde $A \in \mathfrak{A}$ é um isomorfismo de álgebra $\mathfrak{A}$ em si mesma.
Antes porém um esclarecimento: Podemos considerar o corpo ordenado completo $K = \mathbb{R}$ (Corpo ordenado completo dos números reais).

Demonstração

Seja $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ definida por $\varphi(A) = P^{-1}.A.P$, vamos determinar o núcleo de φ, a saber:

$$Ker(\varphi) = \{A_0 \in \mathfrak{A}; \varphi(A_0) = 0\} .$$

Vejamos

$$\begin{aligned} \varphi(A_0) &= P^{-1}.A_0.P = 0 \Longrightarrow \left(P.P^{-1}\right).A_0.P = P.0 \\ &\Longrightarrow I.A_0.\left(P.P^{-1}\right) = 0.P^{-1} \Longrightarrow A_0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Ker(\varphi) = \{0\} \iff \varphi \text{ é injetora.}$$

■

Agora, mostrar que φ é sobrejetora. por definição, temos:

$$\forall B \in \mathrm{Im}(\varphi)\,; \exists A \in \mathfrak{A} : A = P.B.P^{-1}$$

Cálculos Auxiliares:

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= P^{-1}.A.P = B \iff \left(P.P^{-1}\right).A.P = P.B \\ \iff & A.\left(P.P^{-1}\right) = P.B.P^{-1} \iff A = P.B.P^{-1}. \end{aligned}$$

Assim.

$$\varphi(A) = \varphi\left(P.B.P^{-1}\right) = P^{-1}.\left(P.B.P^{-1}\right).P = \left(P^{-1}.P\right).B.\left(P^{-1}.P\right) = B.$$

Dito de outro modo, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathfrak{A}$, ou seja, φ é sobrejetora. ■

Logo, φ é bijetora

e finalmente, mostremos que:

(i) $\lambda_1, \lambda_2 \in K; \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) &= P^{-1}.(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2).P \\ &= \lambda_1\left(P^{-1}.A_1.P\right) + \lambda_2\left(P^{-1}.A_2.P\right) \\ &= \lambda_1\varphi(A_1) + \lambda_2\varphi(A_2). \end{aligned}$$

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi(A_1.A_2) &= P^{-1}.(A_1.A_2).P \\ &= \left(P^{-1}.A_1.P\right).\left(P^{-1}.A_2.P\right) \\ &= \varphi(A_1).\varphi(A_2). \end{aligned}$$

De sorte que: φ é um isomorfimos.

■

20. (i) Seja M uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, prove que:

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^A M.$$

Demonstração

Com efeito,

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

então,

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M^{-1}AM\right)^j}{j!} = I + M^{-1}AM + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^n}{n!} + \ldots,$$

Daí, não esquecendo que a série converge uniformemente e

$$\left(M^{-1}AM\right)^j = M^{-1}A^jM$$

(É fácil ver por indução finita sobre n), segue-se que:

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IM + M^{-1}AM + \frac{(M^{-1}AM)^2}{2!} + \ldots + \frac{(M^{-1}AM)^n}{n!} + \ldots \\ &= M^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots\right)M \\ &= M^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\right)M = M^{-1}e^{A}M. \end{aligned}$$

■

(ii)

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt},\ \forall t \Longleftrightarrow A \text{ comuta com } B,$$

com $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Demonstração

$(\Longrightarrow)$ Se $e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}$, então, derivando ambos os lados, temos:

$$(A+B)\,e^{(A+B)t} = Ae^{At}.e^{Bt} + Be^{At}.e^{Bt}.$$

Agora, derivando novamente e fazendo $t = 0$, obtemos:

$$(A+B)^2\,e^{(A+B)t} = A^2e^{At}.e^{Bt} + ABe^{At}.e^{Bt} + BAe^{At}.e^{Bt} + B^2e^{At}.e^{Bt}.$$

Logo,

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Longleftrightarrow AB = BA.$$

$(\Longleftarrow)$ Se $AB = BA$, então, é fácil ver que:

$$X(t) = e^{At}.e^{Bt}$$

satisfaz ao problema de valor inicial (p.v.i)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A+B)\,X(t) \\ X(0) = I. \end{cases}$$

(Verifique!). Então, pela unicidade da solução temos:

$$X(t) = e^{(A+B)t}.$$

De sorte que:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt},\ \forall t$$

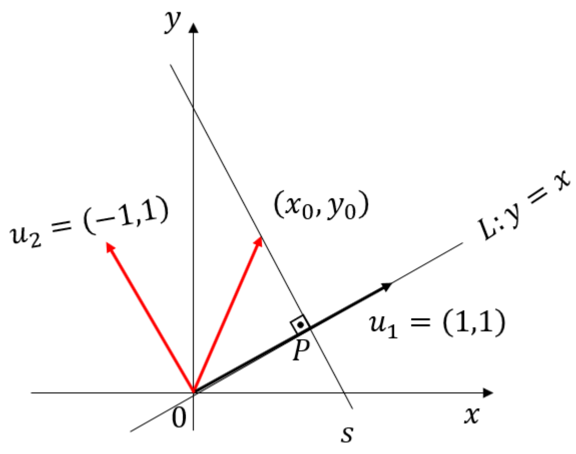
■

21. Determine a projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0) sobre a reta $L : y = x$. Qual é a reflexão $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0) em torno da reta $L : y = x$?
A equação da reta Γ que passa por (x_0, y_0) e é perpendicular areta L, é dada por:

$$y - y_0 = -1\,(x - x_0) \Longleftrightarrow y = -x + x_0 + y_0.$$

Agora a intersecção das retas Γ e L nos dará exatam,ente a projeção ortogonal

$$\begin{cases} y = x \\ \text{e} \\ y = -x + x_0 + y_0. \end{cases}$$



daí obtemos:

$$\begin{aligned} x &= -x + x_0 + y_0 \Longrightarrow 2x = x_0 + y_0 \\ &\Longrightarrow x = \frac{x_0 + y_0}{2} \Longrightarrow y = \frac{x_0 + y_0}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a projeção ortogonal, será descrita por | :

$$P\left(x_0, y_0\right) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2}\right).$$

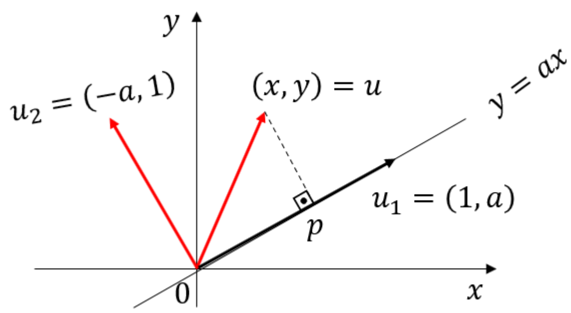
destacando a matriz na base canônica de P :

$$[P] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

No caso da reflexão, tem-se:

$$S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

de (x_0, y_0) em torno da reta $L : y = x$?



$$S - P = P - I.$$

Por conseguinte, obtmeos:

$$\begin{aligned}
S(x_0, y_0) &= 2P(x_0, y_0) - I(x_0, y_0) \\
S(x_0, y_0) &= 2.\left(\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2}\right) - (x_0, y_0) \\
S(x_0, y_0) &= (y_0, x_0).
\end{aligned}$$

■

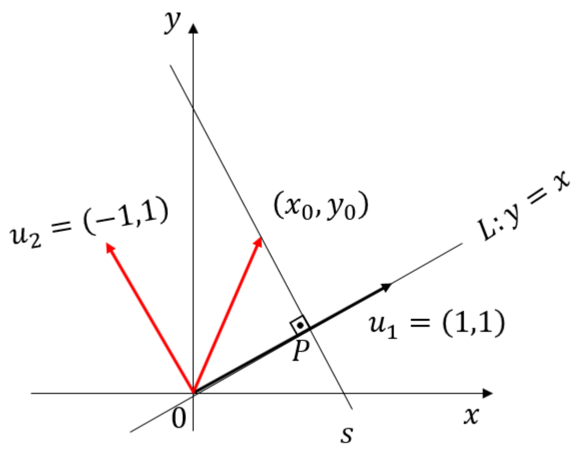
Outro modo de abordar o mesmo problema:

Basta notar que:

$$\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$$

é uma base ordenada para $\mathbb{R}^2$ e existe uma única projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que:

$$P(1,1) = (1,1) \text{ e } P(-1,1) = (0,0).$$



De fato, $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$(x_0, y_0) = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (-1,1). \tag{1}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = x_0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = y_0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x_0 + y_0}{2} \\ \lambda_2 = \frac{y_0 - x_0}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Assim, substituindo (2) em (1), vem:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{y_0 - x_0}{2}\right)(-1,1). \tag{3}$$

Agora aplicando P e sua linearidade, segue-se que:

$$\begin{aligned}
P(x_0, y_0) &= \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right) P(1,1) + \left(\frac{y_0 - x_0}{2}\right) P(-1,1) \\
&= \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{y_0 - x_0}{2}\right)(0,0).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$P(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2}\right).$$

■

22. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que: $\text{Ker}(T) = [(1,1,0)]$.

Solução

A priori, note que: este problema tem infintas formas de soluções, dependendo as bases escolhidas. Uma base ordenada para o domínio de T é dada por:

$$\alpha = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$$

e uma outra base para imagem de T será descrita por:

$$\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$$

Uma dentre as escolhas pode ser:

$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,0,0) \\ T(1,1,0) = (0,0,0) \\ T(0,0,1) = (0,1,1) \end{cases}$. *Note que:* $\text{Im}(T) = [(1,0,0), (0,1,1)]$

Além disso, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists a, b, c \in \mathbb{R}$, *tais que:*

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(0,1,1) \Longrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b = y \\ c = z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = x - y \\ b = y \\ c = z. \end{cases}$$

Assim,

$$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,1,1).$$

Agora, aplicando T e usando o fato de T ser linear, vem:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T[(x-y)(1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,1,1)] \\ &= T[(x-y)(1,0,0)] + T[y(1,1,0)] + T[z(0,1,1)] \\ &= (x-y).T(1,0,0) + y.T(1,1,0) + z.T(0,0,1) \\ &= (x-y).(1,0,0) + y.(0,0,0) + z.(0,1,1). \end{aligned}$$

Logo,

$$T(x,y,z) = (x-y, z, z).$$

■

23. Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que:

$$\text{Im}(T) = [(1,0,0), (0,1,1)].$$

Solução

A priori, note que: este problema tem infintas formas de soluções, dependendo as bases escolhidas.Uma base ordenada para o domínio de T é dada por:

$$\alpha = \{(1,0,0), (1,0,0), (0,0,1)\}$$

e uma outra base para imagem de T será descrita por:

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,1)\}$$

O teorema do núcleo e da imagem nos dá:

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim Ker(T) + 2 \Longrightarrow \dim Ker(T) = 1.$$

Uma dentre as infinitas escolhas pode ser:

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (1,0,0) \\ T(0,1,0) = (0,0,0) \\ T(0,0,1) = (0,1,1) \end{cases} . \textit{ Note que: } \mathrm{Im}(T) = [(1,0,0),(0,1,1)]$$

Além disso, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists a,b,c \in \mathbb{R}$, *tais que:*

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,0,0) + c(0,0,1) \Longrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ c = z. \end{cases}$$

Assim,

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Agora, aplicando T e usando o fato de T ser linear, vem:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T[x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)] \\ &= x.T(1,0,0) + y.T(0,1,0) + z.T(0,0,1) \\ &= x.(1,0,0) + y.(0,0,0) + z.(0,1,1). \end{aligned}$$

Logo,

$$T(x,y,z) = (x,z,z).$$

■

24. Seja $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear, tal que: $\dim \mathbb{U} = \dim \mathbb{V} = n$. Prove que: T é injetora $\Longleftrightarrow$ T é sobrejetora$\Longleftrightarrow$ T é bijetora.

Demonstração

Com efeito, T é injetora $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0\} \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(T) == 0$.
À luz do teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$n = \dim \mathbb{U} = 0 + \dim \mathrm{Im}(T) \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = n.$$

Além disso, $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{V}$, com $\dim \mathbb{V} = n$, daí segue-se que: $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{V} \Longleftrightarrow T$ é sobrejetora$\Longleftrightarrow$ T é bijetora. ■

25. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ uma transformação linear definida por:

$$T(a, b) = ax + b - a$$

Prove que: T é bijetora.

Demonstração

Determinemos o núcleo de T que por definição, neste caso, é dado por:

$$\operatorname{Ker}(T) = \left\{(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 : T(a_0, b_0) = 0x + 0\right\}.$$

Vejamos

$$T(a_0, b_0) = a_0x + b_0 - a_0 = 0x + 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 - a_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$\operatorname{Ker}(T) = (0, 0) \Longleftrightarrow T \text{ é injetora.}$$

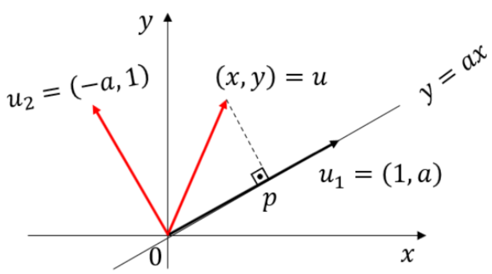
Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, tem-se:

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 = 0 + \dim \operatorname{Im}(T) \Longleftrightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = 2$$

e $\operatorname{Im}(T) \subseteq \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, com $\dim \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = 2$, daí segue-se que: $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow T$ é sobrejetora$\Longleftrightarrow T$ é bijetora. ∎

26. Determine a projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de um vetor $u = (x, y)$ sobre a reta $L : y = ax, a \neq 0$ (Esboce o problema)

Solução



Observe que $\beta = \{(1, a), (-a, 1)\}$ *é uma base para o* $\mathbb{R}^2$*, tal que:* $P(1, a) = (1, a)$ $P(-a, 1) = (0, 0)$.

$$\forall (x, y) \quad \in \quad \mathbb{R}^2 : \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \text{ tais que:}$$

$$(x, y) = \lambda_1(1, a) + \lambda_2(-a, 1). \tag{1}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} \lambda_1 - a\lambda_2 = x \\ a\lambda_1 + \lambda_2 = y \end{cases} \xrightarrow{aE_2 + E_1 \longrightarrow E_2} \begin{cases} \lambda_1 - a\lambda_2 = x \\ (1 + a^2)\lambda_1 = x + ay. \end{cases} \tag{2}$$

donde, vem:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{x+ay}{1+a^2} \\ \lambda_2 = y - a\lambda_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x+ay}{1+a^2} \\ \lambda_2 = y - a\left(\frac{x+ay}{1+a^2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{x+ay}{1+a^2} \\ \lambda_2 = \frac{y+a^2y-ax-a^2y}{1+a^2}. \end{cases} \tag{2}$$

Agora, substituindo (2) *em* (1)*, obtemos:*

$$(x, y) = \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}\right)(1, a) + \left(\frac{y - ax}{1 + a^2}\right)(-a, 1).$$

Aplicando P *e sua linearidade, tem-se:*

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}\right) P(1, a) + \left(\frac{y - ax}{1 + a^2}\right) P(-a, 1) \\ &= \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}\right)(1, a) + \left(\frac{y - ax}{1 + a^2}\right)(0, 0) \\ &= \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}, \frac{xa + a^2 y}{1 + a^2}\right). \end{aligned}$$

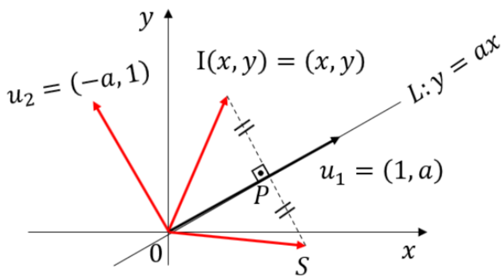
Reescrevendo a projeção ortogonal na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

■

27. Obter a reflexão $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de um vetor $u = (x, y)$ em torno da reta $L : y = ax, a \neq 0$

Solução



Basta notar que:

$$S - P = P + I \Longleftrightarrow S(x, y) = 2.P(x, y) - I(x, y),$$

onde a identidade $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é dada por:* $I(x, y) = (x, y)$.

A matriz da reflexão S *é dada por:*

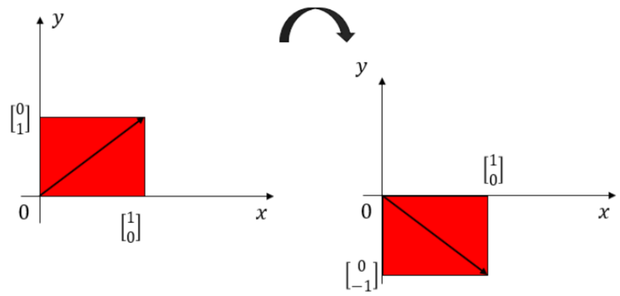
$$[S] = 2[P] - I_2 \Longleftrightarrow [S] = 2. \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

4.3 Introdução aos Autovalores e Autovetores

Motivação:

Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por: $T(x,y)=(x,-y)$.



Seja A a matriz de T na base canônica, ou seja $A=[T]$.

$$\begin{aligned} Tv &= \lambda v \Longleftrightarrow Tv-\lambda I_n v=0 \\ &\Longleftrightarrow (A-\lambda I_n)\,v=0. \end{aligned}$$

Queremos as soluções não-nulas. É necessário e suficiente que:

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=0.$$

Equação característica

Neste caso $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, então,

$$A-\lambda I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda&0\\0&-1-\lambda\end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\begin{bmatrix}1-\lambda&0\\0&-1-\lambda\end{bmatrix}=0\Longrightarrow(1-\lambda).(-1-\lambda)=0 \\ &\Longrightarrow 1-\lambda=0 \text{ ou } -1-\lambda=0\Longrightarrow\lambda=1 \text{ ou } \lambda=-1. \end{aligned}$$

São os autovalores ou valores característicos. Vamos determinemos os autovetores correspondentes.

1^o Caso: $\lambda=1$:

$$\begin{aligned} (A-\lambda I_2).X &= 0\Longrightarrow\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow\begin{cases}0x+0y=0\\0x-2y=0\end{cases}\Longrightarrow y=0. \end{aligned}$$

Logo, o autovetor é: $v_1=x(1,0)$, com $x\neq0$, ou ainda,
$S_1=\left\{x(1,0)\in\mathbb{R}^2;x\neq0\right\}=[(1,0)]$

2^o Caso: $\lambda=-1$: $(A-\lambda I_2).X=0\Longrightarrow\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 0.y = 0 \\ 0.x + 0.y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x = 0$. Logo, o autovetor é: $v_2 = y\,(0,1)$, com $y \neq 0$, dito de outro modo, temos:
$S_2 = \left\{ y\,(0,1) \in \mathbb{R}^2 ; y \neq 0 \right\} = [(0,1)]$.

■

Autovalores e Autovetores:

Seja $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ um operador linear $T\,(v) = \lambda v$
Por simplicidade seja a matriz na base canônica $A = [T]_{\beta}^{\beta}$. Assim,

$$Av = \lambda v \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)\,v = 0 \tag{1}$$

O sistema homogêneo sempre admite solução, pelo menos, a solução trivial ou nula. Queremos determinar as soluções não-nulas de (1). Então, é necessário e suficiente que o polinômio característico $p\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_n)$ seja nulo, ou seja,

$$p\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_n) = 0, \tag{2}$$

onde $\det\,(A - \lambda I_n) = 0$ é chamada equação característica.cujas raízes são os autovalores. Para cada solução λ de (2) substituímos em (1) para obter as soluções não-nulas que são os autovetores associados.

Exemplo 4.4
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. definida por:

$$T\,(x,y) = (x + y, 4y)\,.$$

Determine seus autovalores e autovetores correspondentes.

Com efeito, a matriz de T na base canônica é dada por: $[T] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{array} \right]$, então a equação característica é descrita por:

$$\begin{aligned} p\,(\lambda) &= \det\,(A - \lambda I_2) = \left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)\,.\,(4-\lambda) = 0 \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = 4, \end{array} \right. \end{aligned}$$

são os autovalores. determinemos os autovetores correspondentes.

Agora,, temos dois casos a considerar para resolver o sistema homogêneo e obter as soluções não-nulas.
1^o Caso: $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_2).X &= 0 \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0x + 2y = 0 \\ 0x + 3y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow y = 0. \end{aligned}$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x\,(1,0)$, com $x \neq 0$, ou ainda,
$S_1 = \left\{ x\,(1,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq 0 \right\} = [(1,0)]$
Procedendo de forma análoga, temos:

2^o Caso: $\lambda = 4 : (A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 3x$. Logo, o autovetor é: $v_2 = x\,(1,3)$, com $x \neq 0$, dito de outro modo temos:

$S_2 = \left\{ x\,(1,3) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq 0 \right\} = [(1,3)]$

■

Exemplo 4.5

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma T.L. definida por: $T\,(x,y) = (x + 2y, -3y)$.
Determine seus autovalores e autovetores correspondentes.

Com efeito, a matriz de T na base canônica é dada por: $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$,

então a equação característica é descrita por:

$$\begin{aligned} p\,(\lambda) &= \det\,(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow (1-\lambda)\,.\,(-3-\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

são os autovalores. Determinemos os autovetores correspondentes.

1^o Caso: $\lambda = 1 : (A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow y = 0$. Logo, o autovetor é: $v_1 = x\,(1,0)$, com $x \neq 0$, ou ainda,

$S_1 = \left\{ x\,(1,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq 0 \right\} = [(1,0)]$

Procedendo de forma análoga, temos:

2^o Caso: $\lambda = -3 : (A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \{4x + 2y = 0 \Longrightarrow y = -2x$. Logo, o autovetor é: $v_2 = x\,(1,-2)$, com $x \neq 0$, dito de outro modo temos:

$S_2 = \left\{ x\,(1,-2) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq 0 \right\} = [(1,-2)]$

■

Exemplo 4.6

Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Mostre que:

(i) Os autovetores correspondentes são linearmente independentes (L.I.)

(ii) $T\,(v_1)$ e $T\,(v_2)$ são L.I.

Demonstração

Com efeito, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ambos não-nulos: $\begin{cases} T\,(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ T\,(v_2) = \lambda_2 v_2 \end{cases}$

(i) Dada a equação

$$av_1 + bv_2 = 0 \Longrightarrow \tag{1}$$

$$T\left(av_1 + bv_2\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$aT\left(v_1\right) + bT\left(v_2\right) = 0.$$

Ou ainda,

$$a\left(\lambda_1 v_1\right) + b\left(\lambda_2 v_2\right) = 0. \tag{2}$$

Agora, multiplicando (1) por $\lambda_1 \neq 0$, obtemos:

$$a\lambda_1 v_1 + b\lambda_1 v_2 = 0 \tag{3}$$

Subtraindo (2) e (3), vem:

$$b\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) v_2 = 0 \Longrightarrow b = 0,$$

visto que: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $v_2 \neq 0$.
Além disso, levando $b = 0$ em (1), obtemos:

$$av_1 = 0 \Longrightarrow a = 0.$$

De sorte que: v_1 e v_2 são L.I. ■

(ii) Dada a equação:

$$k_1 T\left(v_1\right) + k_2 T\left(v_2\right) = 0 \Longrightarrow k_1\left(\lambda_1 v_1\right) + k_2\left(\lambda_2 v_2\right) = 0.$$

Agora, como v_1 e v_2 são L.I. segue-sae que:

$$\begin{cases} k_1\lambda_1 = 0 \\ \quad \text{e} \\ k_2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow k_1 = k_2 = 0.$$

Visto que: λ_1 e λ_2 são não-nulos.
Logo, $T\left(v_1\right)$ e $T\left(v_2\right)$ são L.I. ■

Exemplo 4.7

Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por:

$$T\left(x, y, z\right) = \left(x + 2y - z, 4y + 2z, -2z\right)$$

Pede-se: (i) A matriz de T na base canônica $[T] = A$ (ii) Determinar os autovalores e autovetores correspondentes.

Solução

(i) *A matriz de T na base canônica*

$$[T] = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

de modo que:

$$p\left(\lambda\right) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3) = (1-\lambda)\,.\,(4-\lambda)\,.\,(-2-\lambda) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{cases} 1-\lambda=0 \\ 4-\lambda=0 \\ -2-\lambda=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=4 \\ \lambda=-2 \end{cases}$$

são os autovalores ou valores caracteríticos.

Antes de passarmos a obter os autoverores, vejamos uma observação relembrando situações do cálculo do determinante de uma matriz triangular superior e notações para o produtório.

Nota

(A) *Notação:*

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

Produtório de a_{ii}*, variando de* $i=1$ *até* $i=n$

(B) *Se* $\mathbb{A}=(a_{ij})\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*, tal que:* $a_{ij}=0, i>j$ *é chamada matriz triangular superior. Neste caso,*

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(ii) *Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo* $(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)X=0$*, que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:*

1º Caso: $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2y & -z & = & 0 \\ 3y & +2z & = & 0 \\ & -3z & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=0 \\ e \\ z=0 \end{cases}.$$

Logo, $v_1=(x,0,0)=x(1,0,0)$*, com* $x\neq 0$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda=1$*, isto é, o espaço solução* $\mathbb{S}_1$ *é dada por:*

$$\mathbb{S}_1=\left\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3; x\in\mathbb{R} \text{ e } x\neq 0\right\}=[(1,0,0)],$$

isto é, $(1,0,0)$ *gera* $\mathbb{S}_1$*. Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor* $(1,0,0)$.

2º Caso: $\lambda=4$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x+ & 2y- & z & = & 0 \\ & & 2z & = & 0 \\ & - & 6z & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3}y \\ e \\ z=0 \end{cases}.$$

Logo, $v_2=\left(\frac{2}{3}y,y,0\right)=y\left(\frac{2}{3},1,0\right)$*, com* $y\neq 0$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda=3$*, ou ainda, a solução é dada por:*

$$\mathbb{S}_2=\left\{\left(\frac{2}{3}y,y,0\right)\in\mathbb{R}^3; y\in\mathbb{R} \text{ e } y\neq 0\right\}=\left[\left(\frac{2}{3},1,0\right)\right],$$

ou seja, $\left(\frac{2}{3},1,0\right)$ *gera* $\mathbb{S}_2$.

3º Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} 3x & +2y & -z & = 0 \\ & 6y & +2z & = 0. \end{array} \right.$$

Ou ainda,

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3x + 2y + 3y = 0 \\ e \\ z = -3y \end{array} \right. . \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{-5}{3}y \\ e \\ z = -3y \end{array} \right.$$

Logo, $v_3 = \left(\frac{-5}{3}y, y, -3y\right) = y\left(\frac{-5}{3}, 1, -3\right)$, *com* $y \neq 0$ *é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:*

$$\mathbb{S}_3 = \left\{ y\left(\frac{-5}{3}, 1, -3\right) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0 \right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, 1, -3\right) \right],$$

ou seja, $\left(\frac{-5}{3}, 1, -3\right)$ *gera* $\mathbb{S}_3$.

■

4.4 $L(\mathbb{U};\mathbb{V}) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Teorema 4.1

O espaço das transformações lineares de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$, tais que: $\dim \mathbb{U} = n$ e $\dim \mathbb{V} = m$ é isomorfo ao espaço das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas reais, ou seja, $L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e, denotamos por:

$$L(\mathbb{U};\mathbb{V}) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

A fixação das bases $\beta \subset \mathbb{U}$ e $\beta' \subset \mathbb{V}$ determina portanto uma transformação

$$\begin{array}{rcl} \Phi: \quad L(\mathbb{U};\mathbb{V}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto & & \Phi(f) = [A]^{\beta}_{\beta'} = \mathbb{M}(f) \end{array}$$

♡

Demonstração

Afirmação 1: Φ é linear

(i) $\Phi(f_1 + f_2) = [A_1 + A_2]^{\beta}_{\beta'} = [A_1]^{\beta}_{\beta'} + [A_2]^{\beta}_{\beta'} = \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$

(ii) $\Phi(\lambda f_1) = [\lambda A_1]^{\beta}_{\beta'} = \lambda [A_1]^{\beta}_{\beta'} = \lambda\Phi(f_1)$.

Portanto, Φ é linear.

■

Afirmação 2: Φ é injetora

De fato, $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{f \in L(\mathbb{U};\mathbb{V}) : \Phi(f) = 0\}$.

Vejamos $\Phi(f) = [A]^{\beta}_{\beta'} = \mathbb{M}(f) = 0$,

como $[f(u)]_{\beta'} = [A]^{\beta}_{\beta'}[u]_{\beta} = 0$, segue-se que:

$f(u) = 0, \forall u \in \mathbb{U}$. Consequentemente, vem: $f \equiv 0$.

Logo, $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$, ou ainda, Φ é injetora.

■

Afirmação 3: Φ é sobrejetora

$\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \exists f \in L(\mathbb{U};\mathbb{V})$, tal que:

$\Phi(f) = [A]^{\beta}_{\beta'} = \mathbb{M}(f) = B$

Consideremos $f: \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$, tal que:

$f(u_1) = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \ldots + b_{m1}v_m$

$f(u_2) = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \ldots + b_{m2}v_m$

— – – – – – – – – – – – – – – –

$f(u_n) = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + \ldots + b_{mn}v_m$.

Então, temos:

$$\mathbb{M}(f) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B^1 & B^2 & \ldots & B^j & \ldots & B^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{m\times n} = B.$$

De sorte que: Φ é sobrejetora.

Por conseguinte, obtemos:

$L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

■

Corolário 4.1

Sejam $\mathbb{U}$ *e* $\mathbb{V}$ *dois espaços vetoriais sobre* $\mathbb{R}$ *tais que:*
$\dim \mathbb{U} = n$ *e* $\dim \mathbb{V} = m$*. Então, o espaço* $L(\mathbb{U}; \mathbb{V})$ *tem dimensão* $m.n$ ♡

Demonstração

Sejam β e β', as bases respectivamente de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$.
$\mathbb{U} \xrightarrow{T} \mathbb{V}$, $\Phi : L(\mathbb{U}; \mathbb{V}) \longrightarrow M_{mxn}(\mathbb{R})$, temos então,
$\Phi(T) = [T]_{\beta\prime}^{\beta} \Longrightarrow \dim L(\mathbb{U}; \mathbb{V}) = \dim M_{mxn}(\mathbb{R}) = m.n$

■

4.5 Apêndice

Alfabeto Grego:

A α (alfa)
B β (beta)
Γ γ (gama)
Δ δ (delta)
E ϵ (epsilon)
Z ζ (zeta)
H η (eta)
Θ θ (teta)
I ι (iota)
K κ (capa)
Λ λ (lambda)
M μ (mu)
N υ (nu)
Ξ ξ (ksi)
O o (omicron)
Π π (pi)
P ρ (rô)
Σ σ (sigma)
Υ τ (tal)
Y ν (upsilon)
Φ ϕ (fi)
X χ (chi)
Ψ ψ (phi)
Ω ω (omega)

Bibliografia

[1] De Morais Filho, Daniel Cordeiro. Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, SBM 2012.

[2] Boldrini/ Costa/ Figueiredo/Wetzler. Álgebra Linear. Editora Harbra, 3^a ed., 1986.

[3] Callioli, Carlos A., Hygino, Domingues H. , Costa, Roberto C. F. Álgebra Linear e Aplicações, 6^a ed., Atual editora, 1990

[4] De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Manual de Redação Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2^a ed., SBM 2018.

[5] Jänich, Klaus, Álgebra Linear, LTC, 1998.

[6] Lang, Serge. Álgebra Linear, Coleção Clássicos da Matemática. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna, 2003.

[7] Lipschutz, Seymour, Schaum's solved problems series: 3000 solved problems in Linear Algebra, McGran-Hill book company, 1989,

[8] Oliveira, Augusto J. Franco de. Lógica e Aritmética, Editora UNB. 2004.

[9] https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/147 capturado em 15 de dezembro de 2022 às 13h05min

[10] Hofman, K., Kunze, R. Álgebra Linear, 2^a ed., Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1979:

[11] https://pt.wikipedia.org/wiki/Espa%C3%A7o_vetorial capturado em 15 de dezembro de 2022 às 15h10min.

[12] Friedlander, Ana. Elementos de Programação Não-linear, Editora da Unicamp, 2016.

[13] Coelho, Flávio U., Lourenço, Maria L. Álgebra Linear Editora da Universidade de São Paulo, 2001

[14] Martinez, J. Mario, Santos, S. A. Métodos Computacionais de Otimização.2^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000

[15] Howard, A., Rorres, C. Álgebra Linear com Aplicações, 8^a ed., Porto Alegre, Bokman, 2001.

[16] Lima, Elon L. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 3^a ed., 1998.

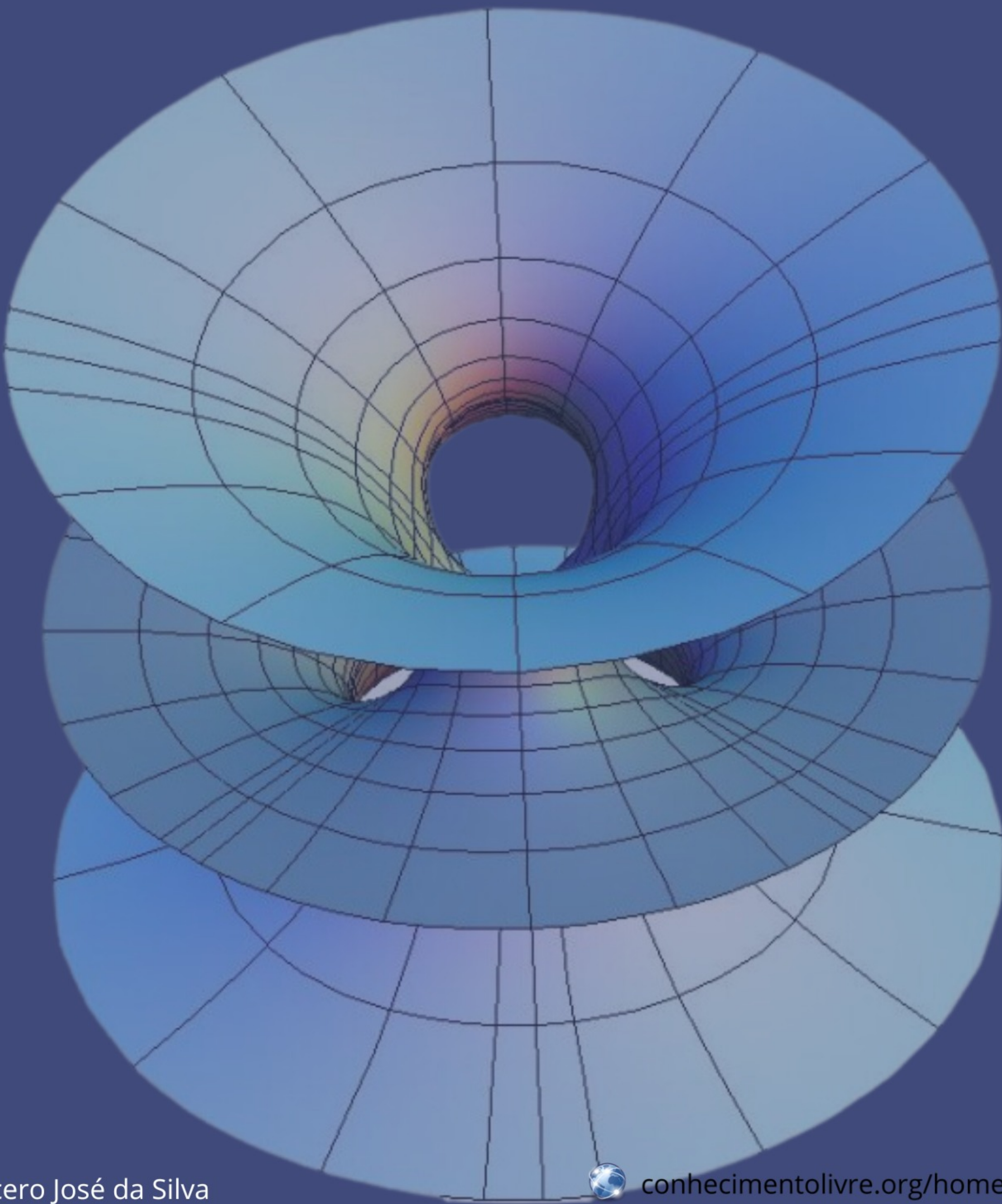
[17] Silva, Cícero J., Soares, Willames de A., Galdino, Sérgio M. L. Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos, ebook , Editora, Conhecimento Livre, 2022

[18] Silva, Antônio de A. Álgebra Linear, João Pessoa, Ed. Universitária UFPB 2007

[19] https://chat.openai.com/ capiturada em 17 de abril 2023 às 13h25min

PROBLEMAS RESOLVIDOS DE ÁLGEBRA LINEAR: PENSANDO UM POUCO MAIS

VOLUME II



Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva

conhecimentolivre.org/home
contato@conhecimentolivre.org
editoraconhecimentolivre

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE