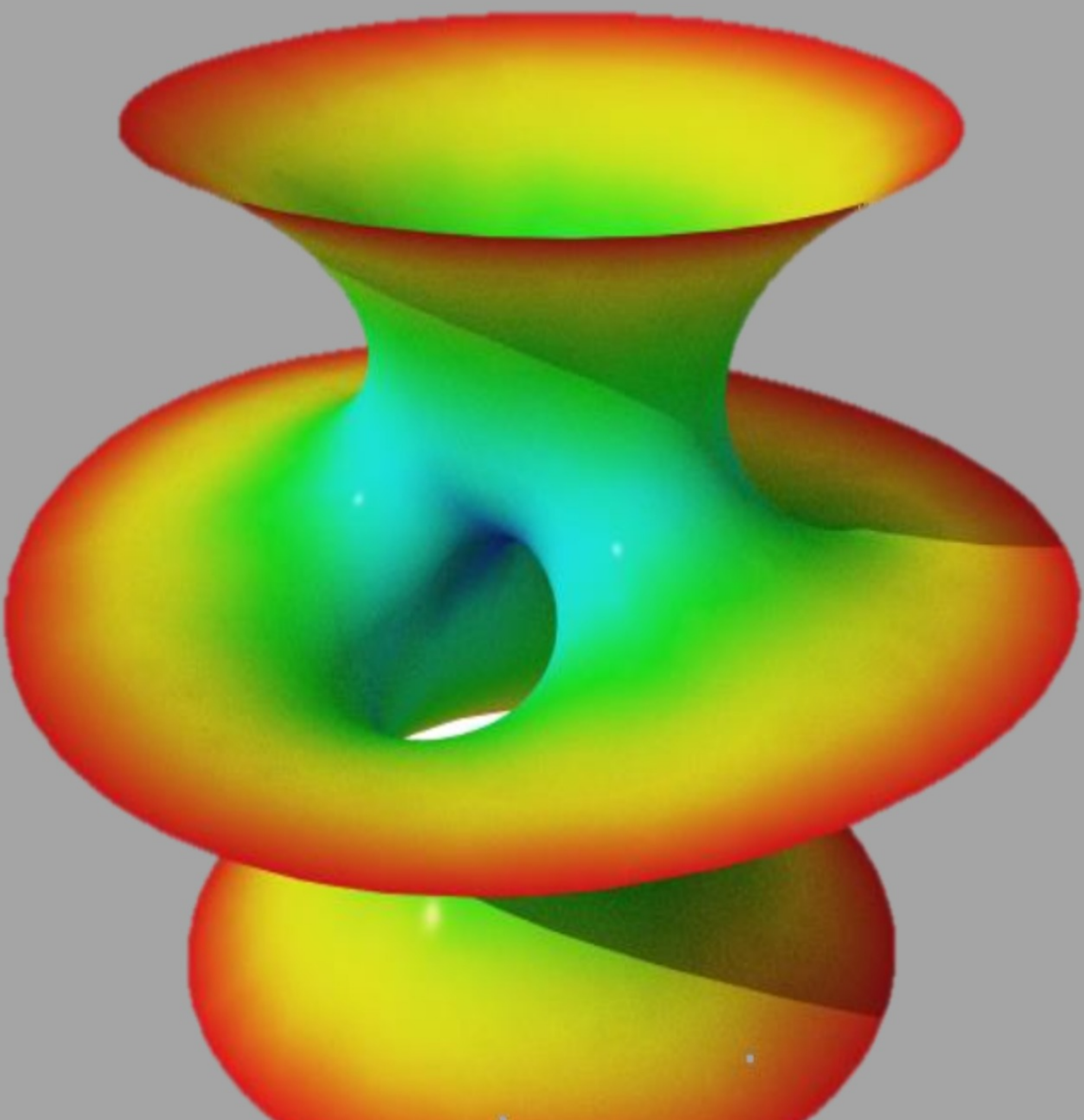
PROBLEMAS RESOLVIDOS DE ÁLGEBRA LINEAR:

PENSANDO UM POUCO MAIS



Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino

Problemas Resolvidos de Álgebra Linear: Pensando Um Pouco Mais

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586P Problemas Resolvidos de Álgebra Linear: Pensando Um Pouco Mais
/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2023

138 f.: il
DOI: 10.37423/2023.edcl696
ISBN: 978-65-5367-271-0
Modo de acesso: World Wide Web
Incluir Bibliografia

1. algebra-linear 2. resolução-de-problemas 3. problemas-básicos 4. problemas-não-triviais I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Título

CDU: 510

https://doi.org/10.37423/2023.edcl696

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO
2023

AGRADECIMENTOS

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade.
- Em especial, aos que contribuíram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha), Prof. Dr. Juan Carlos Oliveira de Medeiros e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- não estaria sendo justo, se não destacasse o nosso amigo Prof. Ms. Roberto Lessa, ao longo de mais de três décadas lecionando Álgebra Linear, conversando sobre: como abordáramos determinados temas, ofertou diversas sugestões, correções e orientações no tocante a escrita.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões ao longo dos anos.
- À UPE, pelo apoio.

DEDICATÓRIA

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais, Filhos, Esposas, Todos os familiares e ao grande Mestre Olavo Otávio Nunes

(In Memoriam)

PREFÁCIO

Diversas vezes, os estudantes de álgebra linear conseguem resolver as questões iniciais dos livros didáticos, entretanto se deparam com alguns exercícios mais elaborados, que não conseguem solucionar. Isto ocorre desde os temas iniciais, como em temas mais aprofundados.

Tendo em vista que poucos materiais estão disponíveis para os estudantes nesta situação, foi escrito este livro com o propósito de apresentar resoluções de problemas não triviais de Álgebra Linear.

Inicialmente, apresentamos a resolução de problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um Letramento Matemático de Mentalidade Crescente, Criativa e Flexível em temas básicos como matrizes, sistemas lineares até abordarmos temas não triviais como espaço vetorial, subespaços, soma direta de subespaços, base e dimensão, transformações lineares, isomorfismos, transformações do plano no plano, composições de transformações lineares, matrizes de transformações lineares, autovalores e autovetores, dentre outros.

Vale a pena salientar que buscamos dentro do possível, resolver os problemas com todos os passos, detalhando os procedimentos de cálculo. Em alguns casos, inclusive, fazendo comentários matemáticos sobre o que está sendo realizado.

Assim, o texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho (ou em grupo), de forma autônoma e com segurança, conferindo não apenas os resultados, mas todo o desenvolvimento lógico operacional.

Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa um certo cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, correções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endereços:

cjs@poli.br
was@poli.br
galdino@poli.br
jornandesdias@poli.br

Recife, 8 de março de 2023

10.37423/2023.edcl696

"Durante toda a sua vida, estudará o Universo; mas, desprezará sua mais clara mensagem: para criaturas tão pequenas como nós, a vastidão só é suportável através do amor."

Carl Edward Sagan (1934 - 1996)

"O tempo é a tardança daquilo que se espera".

Ricardo Eliécer Neftalí Reyes Basoalto (1904 - 1973), mais conhecido pelo seu pseudônimo e, mais tarde, nome legal, Pablo Neruda.

APLICAÇÕES EM MATEMÁTICA

O Matemático Babilônio que vai ao ministério da corte pedir financiamento para sua pesquisa, O ministro fica meio cético porque esse matemático está estudando números primos; ele acha muito teórico, que não serve para nada. O matemático tenta se justificar, daqui a 4.000 anos quando inventarem a internet, a criptografia, o cartão de crédito, os números primos vai ser importantíssimo. Pode levar 4.000 anos para acontecer à aplicação: quem cria matemática por estética, não se preocupa se na próxima semana, próximo mês, se encontre aplicações, é assim que a Ciência Avança.

PROBLEMAS RESOLVIDOS DE ÁLGEBRA LINEAR PENSANDO UM POUCO MAIS

1. Escalone o sistema, dado por: $$S:\begin{cases} x-y+z=1\\ x+y+z=3\\ 2x+y-z=2 \end{cases}.$$

Notações:

$\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_3$ são as equações

$\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ (Lê-se: equação 1 menos a equação 2 substituindo na equação 2).

$2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ (Lê-se: duas vezes a equação 1 menos a equação 3 substituindo na equação 3).

Solução:

Considerando as operações $\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ e $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ obtemos:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x- & y+z & =1 \\ 0 & -2y+0 & =-2 \\ 0 & -3y+3z & =0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & +z-y & =1 \\ 0 & +3z-3y & =0 \\ 0 & +0-2y & =-2 \end{cases}$$

Portanto, o sistema está na forma escalonada

$$\begin{cases} x & +z-y & =1 \\ 0 & +3z-3y & =0 \\ 0 & 0-2y & =-2 \end{cases}$$

Agora, se desejamos determinar a solução, basta substituir $y=1 \Longrightarrow z=1 \text{ e } x=1$.

De sorte que: $S=\{(1,1,1)\}$ é o conjunto solução do sistema dado.

2. Que condição deve impor-se a "a, b e c" para que o sistema nas incógnitas x, y e z tenha solução

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$$

Notações:

$\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_3$ são as equações

$2\mathbb{E}_1-\mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ (Lê-se: duas vezes a equação 1 menos a equação 2 substituindo na equação 2).

$\mathbb{E}_1-\mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ (Lê-se: equação 1 menos a equação 3 substituindo na equação 3).

Solução:

Considerando as operações $2\mathbb{E}_1-\mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_1-\mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$,obtemos:

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & +2y-3z & =a \\ 0 & -2y+5z & =2a-b \\ 0 & 4y-10z & =a-c \end{cases}$$

Desta forma, fazendo $2\mathbb{E}_2+\mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$,segue-se que:

$$\begin{cases} x & +2y-3z & = a \\ 0 & -2y+5z & = 2a-b \\ 0 & +0 & = 5a-2b-c \end{cases}$$

Portanto, o sistema tem solução se, e somente se,

$$5a-2b-c=0.$$

3. Escalone o sistema e discuta-o em função do parâmetro "a".

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 3x- & y+ & 5z & = & 2 \\ 4x+ & y+ & (a^2-14)\,z & = & a+2 \end{cases}$$

As variáveis são x, y e z

$\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$ e $\mathbb{E}_3$ são as equações

$3\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ (Lê-se: três vezes a equação 1 menos a equação 2 substituindo na equação 2).

$4\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ Lê-se: quatro vezes a equação 1 menos a equação 3 substituindo na equação 3)

$\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$(Lê-se: a equação 1 menos a equação 3 substituindo na equação 3)

Solução:

Considerando as operações $3\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ e $4\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ tem-se:

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 3x- & y+ & 5z & = & 2 \\ 4x+ & y+ & (a^2-14)\,z & = & a+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 0 & 7y- & 14z & = & 10 \\ 0 & 7y+ & (2-a^2)\,z & = & 14-a \end{cases}$$

Agora, fazendo $\mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ obtemos:

$$\begin{cases} x+ & 2y- & 3z & = & 4 \\ 0 & 7y- & 14z & = & 10 \\ 0 & 0+ & (a^2-16)\,z & = & a-4 \end{cases}.$$

Assim,

$$(a+4)(a-4)z = a-4.$$

Vale ressaltar que teremos três casos a analisar.

1º Caso: $a=-4 : 0.z=-8 \Longrightarrow$ O sistema é impossível.

2º Caso: $a=4 : 0.z=0 \Longrightarrow 7y-14z=10$.Como para cada y teremos um valor de $z=\frac{7y-10}{14}$.Neste caso, o sistema é compatível e indeterminado.

3º Caso: $a \neq 4$ e $a \neq -4 : z = \frac{a-4.}{(a+4)(a-4)} = \frac{1}{a+4}$. Neste caso, o sistema é compatível e determinado: solução única.

4. Escalone o sistema e discuta-o em função do parâmetro "k":

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & kz & = & 1 \\ 2x+ & ky+ & 8z & = & 3 \end{cases}$$

Solução:

Com efeito, fazendo a operação $2\mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 \longrightarrow \mathbb{E}_2$,obtemos:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & kz & = & 1 \\ 2x+ & ky+ & 8z & = & 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+ & 2y+ & kz & = & 1 \\ - & (k-4)y+ & 2(k-4)z & = & -1 \end{cases}.$$

assim teremos dois casos a considerear $k-4=0$ ou $k-4 \neq 0$.

1º Caso: $k=4 : 0y+0z=-1$ Neste caso, o sistema é impossível. (incompátivel)

2º Caso: $k \neq 4 : -y+2z = \frac{-1}{k-4}$. Desta forma, o sistema é compatível e indeterminado.

5. (i)Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$,onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

(i) Com efeito, temos:

$$\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 5\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -2-\lambda\end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p(\lambda)=\det(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)=(1-\lambda).(3-\lambda).(-2-\lambda)=0\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=1 \text{ ou}\\ \lambda=3 \text{ ou}\\ \lambda=-2.\end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).

Observação:

(A) Notação:

$$\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

Produtório de a_{ii}, variando de $i=1$ até $i=n$

(B) Se $\mathbb{A}=(a_{ij})\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $a_{ij}=0,\ i>j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,

$$\det(\mathbb{A})=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

5. (ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)X=0.$$

(ii) Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}_3)X=0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

1º Caso: $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrcl} & 5z & = & 0 \\ 2y & +z & = & 0 \\ & -3z & = & 0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} y=0 \\ \text{e} \\ z=0 \end{array}\right.$$

Logo, $v_1=(x,0,0)=x(1,0,0),\ \text{com } x\neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda=1$, isto é, o espaço solução $\mathbb{S}_1$ é dada por:

$$\mathbb{S}_1=\left\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3; x\in\mathbb{R}\text{ e } x\neq 0\right\}=[(1,0,0)],$$

isto é, $(1,0,0)$ gera $\mathbb{S}_1$ Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor $(1,0,0)$.

2º Caso: $\lambda=3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcl} -2x+ & + & 5z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & - & 5z & = & 0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=0 \\ \text{e} \\ z=0 \end{array}\right.$$

Logo, $v_1=(0,y,0)=y(0,1,0)$ com $y\neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda=3$, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_2=\left\{(0,y,0)\in\mathbb{R}^3; y\in\mathbb{R}\text{ e } y\neq 0\right\}=[(0,1,0)],$$ ou seja, $(0,1,0)$ gera. $\mathbb{S}_2$.

3º Caso: $\lambda=-2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{rrrl} 3x & & +5z & =0 \\ & 5y & +z & =0 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=\frac{-5}{3}z \\ \text{e} \\ z=\frac{-1}{5}z \end{array}\right.$$

Logo, $v_1 = \left(\frac{-5}{3}z, \frac{-1}{5}, z\right) = z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$ com $z \neq 0$ um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_3 = \left\{z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} \text{ e } z \neq 0\right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)\right],$$

ou seja,

$$\left(\tfrac{-5}{3}, \tfrac{-1}{5}, 1\right)$$

6. Para que valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $\mathbb{S} = \{t+3,\ 2t+\lambda^2+2\}$ de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ é $\mathrm{L.I}$. **(Linearmente independente) ? e** $\mathrm{L.D}$**. (Linearmente dependente**)? Refazendo a questão de uma outra forma: Dada a equação:

$$a(t+3) + b\left(2t+\lambda^2+2\right) = 0t+0$$

Determine $\lambda \in \mathbb{R}$, para que o sistema homogêneo só admita a solução trivial (solução nula), assim $\mathbb{S}$ é $\mathrm{L.I.}$. Caso contrário, $\mathbb{S}$ será $\mathrm{L.D}$. (teremos infinitas soluções)

Solução:

Com efeito,

$$\begin{aligned} a(t+3) + b\left(2t+\lambda^2+2\right) &= 0t+0 \Longleftrightarrow \\ (a+2b)t + \left[3a + b\left(\lambda^2+2\right)\right] &= 0t+0. \end{aligned}$$

Daí, obtemos:

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 3a+b\left(\lambda^2+2\right)=0 \end{cases} \overset{3E_1-E_2\longrightarrow E_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} a+2b=0 \\ 0+\left(4-\lambda^2\right)b=0. \end{cases}$$

Assim,

$$(2-\lambda)(2+\lambda)b = 0.$$

1º Caso: $\lambda \neq \pm 2 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow a = 0$. Neste caso, o sistema só admite solução trivial ou nula. Logo, $\mathbb{S}$ é L.I

2º Caso: $\lambda = 2 \Longrightarrow 0.b = 0$, voltamos para equação anterior $a + 2b = 0$.Neste caso, o sistema admite infinitas soluções. Logo, $\mathbb{S}$ é L.D

3º Caso: $\lambda = -2 \Longrightarrow 0.b = 0$ voltando a equação $a + 2b = 0$. Analogamente, o sistema admite infinitas soluções. Logo, $\mathbb{S}$ é L.D

7. Seja , $\mathbb{S} = \{e^{2x}, e^{5x}\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ Dada a equação:

$$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0.$$

Prove que: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$

Prova:

Dada a equação

$$\lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{5x} = 0. \qquad (I)$$

Multiplicando (I) por $e^{-2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,obtemos:

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{3x} = 0. \qquad (II)$$

Agora, derivando em relação a x $\left[(e^{Kx})' = Ke^{Kx}\right]$,vem:

$$0 + 3\lambda_2 e^{3x} = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \qquad (III)$$

Assim, substituindo (III) em (II),segue-se que:

$$\lambda_1 = 0.$$

Ou ainda,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

De sorte que: $\mathbb{S}$ é linearmente independente.

Observação:

Seja $\mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x)\}$, onde $y_1(x), y_2(x) \in C^1(\alpha, \beta)$, ou seja, $y_1(x), y_2(x)$ tem derivadas contínuas.

Wronskiano é dado pela determinante da matriz, a saber:

$$\mathbb{W}[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta),$$

Onde y'_1 e y'_2 são as derivadas de 1ª ordem das funções $y_1(x), y_2(x)$.

Fato:

$$\mathbb{W}[y_1, y_2] \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta) \Longrightarrow \mathbb{S} \text{ é L.I.}$$

$\mathrm{L.I.}$ (**linearmente independente**).

$\mathbb{W}[y_1, y_2] = 0$ nada se pode concluir.

Generalizando

Seja $\mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$. O Wronskiano, é dado por:

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Fato:

$$\mathbb{W}[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0 \Longrightarrow \mathbb{S} = \{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$$

é $\mathrm{L.I.}$ (Linearmente independente)

Ressaltamos que se $\mathbb{W}[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0$,nada se pode concluir, a título

8. Considere $\mathbb{S} = \{x^3, |x|^3\}$ para todo $x \neq 0$,tem-se: no entanto, $\mathbb{S}$ é L.I.

Solução:

De fato, por definição, sendo $x \neq 0$ tem-se:: $|x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$. Agora, dada a equação:

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 |x|^3 = 0.$$

1º Caso: $x > 0$:

$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^3 = (\lambda_1 + \lambda_2) x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ e, procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $x < 0$:

$$\lambda_1 x^3 - \lambda_2 x^3 = 0 \Longrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) x^3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Decorre dos casos (1) e (2) que:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Como o sistema só admite a solução trivial (solução nula) segue-se que: $\mathbb{S}$ é L.I.

9. Prove que $\mathbb{S} = \{e^{2x}, e^{5x}\}$ é Linearmente independente, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prova: Basta mostrar que o wonskiano é não nulo para todo $x \in \mathbb{R}$.Vejamos

$$\begin{aligned}\mathbb{W}[y_1, y_2] &= \mathbb{W}\left[e^{2x}, e^{5x}\right] = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}.e^{5x}. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = e^{7x}.(1.5 - 2.1) \\ &= 3e^{7x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{S}$ é $\mathrm{L.I}$.

10. Prove que: $\mathbb{S} = \{e^x, e^{3x}, e^{9x}\}$ é linearmente independente.

Prova:

PROBLEMAS RESOLVIDOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Por definição de wonskiano, temos:

$$\begin{aligned}\mathbb{W}\left[e^x, e^{3x}, e^{9x}\right] &= \begin{vmatrix} e^x & e^{3x} & e^{9x} \\ e^x & 3e^{3x} & 9e^{9x} \\ e^x & 9e^{3x} & 81e^{9x} \end{vmatrix} = e^x.e^{3x}.e^{9x}. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3^2 & 9^2 \end{vmatrix} \\ &= e^{13x}(9-3).(9-1).(3-1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbb{S} = \{e^x, e^{3x}, e^{9x}\}$ é $\mathrm{L.I}$.

Observação:

Matriz de Vandermond ou das Potências:

Um exemplo para ilustrar é: o determinante desta matriz $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ é descrito por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b).(c-a).(b-a)$$

11. Mostre que: $\mathbb{S} = \{\cos(kx), \sin(kx)\}$ é linearmente indenepdnete $\mathrm{L.I}$,desde que $k \neq 0$.

Prova:

Por definição de wonskiano, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}\left[\cos(kx), \sin(kx)\right] &= \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} \\ &= k\left[\cos^2(kx) + \sin^2(kx)\right] \\ &= k \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De sorte que: $\mathbb{S}$ é L.I.

Observação:

(A) Cada elemento da matriz produto $A.B$ é descrito por:

$$(A.B)_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}B_{\alpha j} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}.$$

(B) O produto de matrizes generaliza o produto interno ou escalar, com efeito, escolhamos

$$\begin{aligned} u.v &= \langle u, v\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j \end{aligned}$$

12. Prove que:

$$(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T.$$

Prova:

De fato,

$$(\mathbb{AB})^T_{ji} = (\mathbb{AB})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{A}_{i\alpha}\mathbb{B}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{B}^T_{j\alpha}\mathbb{A}^T_{\alpha i} = \left(\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T\right)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T.$$

13. Sejam $\mathbb{A}, \mathbb{P} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.Mostre que:

(a)Se $\mathbb{A}$ é simétrica, então, $\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$ é simétrica.

(b)Se $\mathbb{A}$ é anti-simétrica, então, $\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$ é anti-simétrica.

(a) Com efeito, $\mathbb{A}$ simétrica, então, temos: $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$. Agora, seja $X = \mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$ falta mostrar que: $X^T = X$.

De fato,

$$X^T = (\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P})^T = \mathbb{P}^T\mathbb{A}^T(\mathbb{P}^T)^T = \mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P} = X$$

Logo, X é simétrica.

(b)Se $\mathbb{A}$ é anti-simétrica, então, $\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$,é anti-simétrica.

Prova:

(b)Com efeito, $\mathbb{A}$ é anti-simétrica, então, temos: $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$..Agora, seja $X = \mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}$..queremos mostrar que: $X^T = -X$.

De fato,

$$X^T = (\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P})^T = \mathbb{P}^T\mathbb{A}^T(\mathbb{P}^T)^T = \mathbb{P}^T(-\mathbb{A})\mathbb{P} = -X.$$

Logo, X é anti-simétrica.

14. Seja $\mathbb{J}_n$ a matriz $n \times n$ al que todas as entradas são 1: Mostre que se $n > 1$ então, temos:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n)^{-1} = \mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.$$

Prova:

Com efeito, $\mathbb{J}_n^2 = n\mathbb{J}_n$, $\mathbb{I}\mathbb{J}_n = \mathbb{J}_n$ e $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$.Basta mostrar que:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.\right) = \mathbb{I}.$$

Defato,

$$\begin{aligned}(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.\right) &= \mathbb{I}^2 + \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n^2 - \frac{1}{n-1}\mathbb{I}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n\mathbb{I} \\ &= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1}n\mathbb{J}_n - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n \\ &= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1}n\mathbb{J}_n - \left(\frac{1}{n-1} + 1\right)\mathbb{J}_n \\ &= \mathbb{I} + \frac{n}{n-1}\mathbb{J}_n - \frac{n}{n-1}\mathbb{J}_n = \mathbb{I}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n)^{-1} = \mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.$$

15. Sejam $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.Se $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ e $\mathbb{A}$ forem invertíveis, então, mostre que

$$(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\left(\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1}.$$

Fatos que ajudam:

(i) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$

(ii) $\mathbb{I}_n\mathbb{A} = \mathbb{A}$

(iii) $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$

Prova:

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{-1}\left(\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} &= \left[\left(\mathbb{I}_n + \mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right).\mathbb{A}\right]^{-1} \\ &= \left[\mathbb{I}_n\mathbb{A} + \mathbb{B}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\right]^{-1} \\ &= (\mathbb{A} + \mathbb{B})^{-1} \end{aligned}$$

Observação:

Dizemos que uma matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, quando:

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T.$$

$\mathbb{A}$ é uma matriz ortogonal, isto é,

$$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \Longleftrightarrow \mathbb{A}.\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n.$$

16. Seja $\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.Então, verifique se: $\mathbb{A}_\theta$ é ortogonal.

Solução:

Queremos mostrar que $\mathbb{A}$é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \Longleftrightarrow \mathbb{A}.\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$. Com efeito,

$$\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathbb{A}_\theta^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Segue-se daí que:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta.\mathbb{A}_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + sen^2\theta & \cos\theta sen\theta - sen\theta\cos\theta \\ sen\theta\cos\theta - \cos\theta sen\theta & sen^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{A}_\theta.\mathbb{A}_\theta^T = I_2 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T$$

Ou ainda, $\mathbb{A}_\theta$ é ortogonal.

17. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é ortogonal. Então, prove que:

$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ conclua daí que: $\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y \rangle = \langle x, y \rangle$.

$\mathbb{A}$ é ortogonal, isto é, $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$

Solução:

Considere a base canônica α de $\mathbb{R}^n$

$\alpha = \{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$. Assim, temos:

$$u = (x_1, x_2 \ldots, x_n) = x_1(1,0,\ldots,0) + \ldots + x_n(0,0,\ldots,0,1).$$

Desta forma, a matriz de coordenadas do vetor u na base canônica é dada por:

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \in \mathbb{R}^{nx1},\ x^t x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1xn} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

$$x^t x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 = \|x\|^2.$$

Daí, vem:

$$\|\mathbb{A}x\|^2 = (\mathbb{A}x)^t(\mathbb{A}x) = x^t(\mathbb{A}^t\mathbb{A})x = x^t x = \|x\|^2.$$

Logo,

$$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|.$$

Decorre do delineado acima que:

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{A}\left(x-y\right)\right\|^2 &= \left\|x-y\right\|^2\\ \left\|\mathbb{A}x\right\|^2-2\left\langle \mathbb{A}x,\mathbb{A}y\right\rangle+\left\|\mathbb{A}y\right\|^2 &= \left\|x\right\|^2-2\left\langle x,y\right\rangle+\left\|y\right\|^2\end{aligned}.$$

De sorte que:

$$\left\langle \mathbb{A}x,\mathbb{A}y\right\rangle=\left\langle x,y\right\rangle$$

18. Seja $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix}$.Ache uma matriz invertível $\mathbb{P}$, tal que:

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Solução:

Seja $\mathbb{P}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ e $\left(\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1}\right)\left(\mathbb{A}\mathbb{P}\right)=\mathbb{P}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.Como $\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1}=I_2$ segue-se daí que:

$$\mathbb{A}\mathbb{P}=\mathbb{P}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Agora, substituindo $\mathbb{P}$ obtemos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Longrightarrow\\ \begin{pmatrix}a & b\\ 6a-c & 6b-d\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a & -b\\ c & -d\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\begin{cases} a=a,\ b=-b\\ 6a-c=c \text{ e } 6b-d=-d\end{cases}$$

$$\begin{cases} a=a,\ b=-b\\ 6a-c=c \text{ e } 6b-d=-d\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} a=a,\ b=0\\ c=3a \text{ e } d=d\end{cases}$$

Logo, a matriz $\mathbb{P}$ de forma geral com a e d não-nulos é dada por:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 3a & d \end{pmatrix}, \text{ com } a, d \neq 0.$$

Em particular, para obter uma matriz invertível $\mathbb{P}$, basta escolher valores para a e d, por exemplo, $a = 1$ e $d = 1$, obtemos:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

19. (i) Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,tal que: $\mathbb{A}^3 = 0$.Então, calcule: $(\mathbb{I}_n - \mathbb{A})^{-1}$.

(ii) Dado $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,tal que: $\mathbb{A}^3 - 2\mathbb{A} + 3\mathbb{I}_n = 0$. Obter $\mathbb{A}^{-1}$

Solução:

(i) Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,tal que: $\mathbb{A}^3 = 0$. . Então, temos:

$$\mathbb{I}^3 - \mathbb{A}^3 = \mathbb{I}^3 = \mathbb{I}.$$

Como $\mathbb{I}^3 - \mathbb{A}^3 = (\mathbb{I} - \mathbb{A})(\mathbb{I}^2 + \mathbb{I}\mathbb{A} + \mathbb{A}^2) = (\mathbb{I} - \mathbb{A})(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2)$ segue-se daí que:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2) = \mathbb{I}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{A})^{-1} = \mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2.$$

e também

$$(\mathbb{I} + \mathbb{A} + \mathbb{A}^2)^{-1} = \mathbb{I} - \mathbb{A}.$$

(ii) Lembrando da definição:

$$X.Y = Y.X = I \iff \begin{cases} X = Y^{-1} \\ \text{ou} \\ Y^{-1} = X \end{cases}$$

Dado $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,tal que: $\mathbb{A}^3 - 2\mathbb{A} + 3\mathbb{I}_n = 0$. Então, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^3 - 2\mathbb{A} + 3\mathbb{I}_n &= 0 \iff 2\mathbb{A} - \mathbb{A}^3 = 3\mathbb{I}_n \\ &\iff \frac{2\mathbb{A} - \mathbb{A}^3}{3} = \mathbb{I}_n \\ &\iff \mathbb{A}.\frac{\left(2\mathbb{I} - \mathbb{A}^2\right)}{3} = \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{3}\left(2\mathbb{I} - \mathbb{A}^2\right).$$

20. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,então, prove que:

(i) $s = \frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2}$ é simétrica;

(ii) $a = \frac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}$ é anti-simétrica;

(iii) Conclua daí que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}$,onde S é o espaço das matrizes simétricas e $\mathcal{A}$ o espaço das matrizes anti-simétricas;

(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Prova:

(i) Queremos mostrar que: $s^T = s$.

De fato,

$$s^T = \left(\frac{\mathbb{A} + \mathbb{A}^T}{2}\right)^T = \frac{\mathbb{A}^T + \left(\mathbb{A}^T\right)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T + \mathbb{A}}{2} = s.$$

Logo, s é simétrica.

(ii) Procedendo de forma análoga, temos:

$$\begin{aligned} a^T &= \frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)^T}{2} = \frac{\mathbb{A}^T - \left(\mathbb{A}^T\right)^T}{2} \\ &= \frac{\mathbb{A}^T - \mathbb{A}}{2} = -\frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)}{2} = -a. \end{aligned}$$

De sorte que: a é anti-simétrica.

(iii) Prova:

$\forall \mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\mathbb{A} = \frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2} + \frac{\mathbb{A}-\mathbb{A}^T}{2}$$

Como $\frac{\mathbb{A}+\mathbb{A}^T}{2} = s \in S$ e $\frac{\left(\mathbb{A}-\mathbb{A}^T\right)}{2} = a \in \mathcal{A}$,segue-se daí que:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = S + \mathcal{A}.$$

(iv) $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Prova:

Com efeito, seja $K \in S \cap \mathcal{A}$ então, temos: $K \in S$ e $K \in \mathcal{A}$..

Ora,

$$\left\{\begin{array}{c} K \in S \\ \text{e} \\ K \in A. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} K^T = K \\ \text{e} \\ K^T = -K. \end{array}\right. \Longrightarrow K = -K \Longrightarrow K = 0.$$

Portanto, $S \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

(A) Posteriormente voltaremos ao tema (soma direta de subespaços), quando isto ocorre:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}.$$

Diremos que a soma é direta, denotaremos por:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

(B) Toda matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se decompõe como soma de simétrica $B \in \mathcal{S}$ e anti- simetrica $C \in \mathcal{A}$ ou seja, $A = B + C$, onde: $B^T = B$ e $C^T = -C$

$$\left\{\begin{array}{c} A = B + C \\ \text{e} \\ A^T = (B + C)^T \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A = B + C \\ \text{e} \\ A^T = B^T + C^T \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A + A^T = (B + B^T) + (C + C^T) \\ \text{e} \\ A - A^T = (B - B^T) + (C - C^T) \end{array}\right.$$

Portanto,

$$\left\{\begin{array}{c} A + A^T = B + B^T = 2B \\ \text{e} \\ A - A^T = (C - C^T) = 2C \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} B = \frac{A+A^T}{2} \\ \text{e} \\ C = \frac{A-A^T}{2}. \end{array}\right.$$

21. Seja $\mathbb{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. Então, verifique se:

(i) $\mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\beta = \mathbb{A}_{(\theta+\beta)}$

(ii) $\mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_\theta^{-1}$

(iii) $\mathbb{A}_\theta^{-1} = \mathbb{A}_\theta^T$

(iv) $\mathbb{A}_\theta^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -sen(2\theta) \\ sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$.

Prova:

(i) Basta multiplicar as matrizes e usar as identidades trigonométricas para se obter:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_\theta \cdot \mathbb{A}_\beta &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -sen\beta \\ sen\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\beta - sen\theta sen\beta & -(sen\theta\cos\beta + sen\beta\cos\theta) \\ sen\theta\cos\beta + sen\beta\cos\theta & \cos\theta\cos\beta - sen\theta sen\beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta+\beta) & -sen(\theta+\beta) \\ sen(\theta+\beta) & \cos(\theta+\beta) \end{bmatrix} = \mathbb{A}_{(\theta+\beta)} \end{aligned}$$

$(ii)\ \mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_{\theta}^{-1}$

Com efeito, fazendo $\beta = -\theta$,no item anterior, obtemos:

$$\mathbb{A}_{\theta} \cdot \mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_{(\theta-\theta)} = \mathbb{A}_{(0)} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -sen0 \\ sen0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2.$$

Portanto,

$$\mathbb{A}_{(-\theta)} = \mathbb{A}_{\theta}^{-1}.$$

$(iii)\ \mathbb{A}_{\theta}^{-1} = \mathbb{A}_{\theta}^{T} \Longleftrightarrow \mathbb{A}_{\theta}.\mathbb{A}_{\theta}^{T} = \mathbb{I}_2$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\theta}.\mathbb{A}_{\theta}^{T} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + sen^2\theta & \cos\theta sen\theta - sen\theta\cos\theta \\ sen\theta\cos\theta - \cos\theta sen\theta & sen^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\mathbb{A}_{\theta}.\mathbb{A}_{\theta}^{T} = \mathbb{I}_2 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_{\theta}^{-1} = \mathbb{A}_{\theta}^{T}.$$

$(iv)\ \mathbb{A}_{\theta}^{2} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -sen(2\theta) \\ sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$

Basta notar que: no item (i),tomando-se $\beta = \theta$, vem:

$$\mathbb{A}_{\theta}^{2} = \mathbb{A}_{\theta} \cdot \mathbb{A}_{\theta} = \mathbb{A}_{(\theta+\theta)} = \mathbb{A}_{(2\theta)} = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -sen(2) \\ sen(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

22. Seja $f \in \mathfrak{F}([-a,a])$;então, prove que:

(i) $H_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ é par;

(ii) $H_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ é ímpar;

(iii) Conclua daí que $\mathfrak{F}([-a,a]) = U + W$ onde U é o subespaço das funções pares e W o suespaço das funções ímpares;

(iv) $U \cap W = \{0\}$.

(v) A soma é direta, ou seja,

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U \oplus W$$

Prova:

(i) Queremos mostrar que: $H_1(x) = H_1(-x)$

De fato,

$$H_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = H_1(x), \ \forall x \in [-a,a].$$

Logo, H_1 é uma função par.

(ii) Procedendo de forma análoga, temos:

$$H_2(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{[f(x)-f(-x)]}{2} = -H_2(x), \ \forall x \in [-a,a].$$

De sorte que: H_2 é uma função ímpar.

(iii) Prova:

$\forall f \in \mathfrak{F}([-a,a])$,tem-se:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Como $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = H_1(x) \in U$ e $\frac{f(x)-f(-x)}{2} = H_2(x) \in W$,segue-se daí que:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U + W.$$

(iv) $U \cap W = \{0\}.$

Prova:

Com efeito, seja $K \in U \cap W$,então, temos: $K \in U$ e $K \in W$.

Ora,

$$\begin{cases} K \in U \\ \text{e} \\ K \in W. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K(x) = K(-x) \\ \text{e} \\ -K(x) = K(-x). \end{cases} \Longrightarrow K(x) = -K(x) \Longrightarrow K = 0.$$

Portanto, $U \cap W = \{0\}.$

Posteriormente voltaremos ao tema (soma direta de subespaços), quando:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U + W \text{ e } U \cap W = \{0\}.$$

Diremos que a soma é direta, denotaremos por:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = U \oplus W$$

23. Uma matriz $\mathbb{A}$ é idempotente se $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}.$

(a) Mostre que: Se $\mathbb{A}$ é idempontente, então, ou $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ ou $\mathbb{A}$ não é invertível.

(b)Mostre que: Se $\mathbb{AB} = \mathbb{A}$ e $\mathbb{BA} = \mathbb{B}$,então, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são idempotentes..

Prova:

(a) Com efeito, $\mathbb{A}$ é idempontente, então por definição temos:

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}.$$

Agora, se admitirmos $\mathbb{A}$ invertível, obtemos:

$$\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}^{2} = \mathbb{A}^{-1}.\mathbb{A} \iff \left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\right).\mathbb{A} = \mathbb{I} \implies \mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Caso contrário, $\mathbb{A}$ é não invertível.

$$(b)\ \text{De fato,} \begin{cases} \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A} \\ \text{e} \\ \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{B} \end{cases} \implies \mathbb{A}\left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right) = \mathbb{A} \implies \left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right)\mathbb{A} = \mathbb{A} \implies \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}.$$

Logo, $\mathbb{A}$ é idempotente.

Analogamente, temos: $\begin{cases} \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A} \\ \text{e} \\ \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{B} \end{cases} \implies \mathbb{B}\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right) = \mathbb{B} \implies \left(\mathbb{B}\mathbb{A}\right)\mathbb{B} = \mathbb{B} \implies \mathbb{B}.\mathbb{B} = \mathbb{B}.$

Portanto, $\mathbb{B}$ é idempotente.

24. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ nilpotente de índice n.Prove que $\mathbb{A}$ não é invertível.

Prova:

Antes de passar a demonstrarmos, revisitemos o método de redução ao absurdo: Queremos mostrar que:

$$p \implies q$$

O método consiste em negar a tese e manter a hipótese: chegando assim, a uma contradição.A contradição (ou absurdo!) foi gerada pelo fator de negar a tese. Logo, a tese é verdadeira. Em linguagem simbólica, temos:

$\sim q \wedge p \implies$Contradição, logo, $\sim(\sim q) = q$ é verdadeiro. Agora, deixemos de prosopopéia e passemos a prova:

Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ nilpotente de índice n..Por definição, temos: $\mathbb{A}^n = 0$,, com $\mathbb{A} \neq 0$. .

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right)^n &= \left(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A}\right)^n = \mathbb{I}^n = \mathbb{I} \\
&\Longrightarrow \overbrace{\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right).\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right)\ldots\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}\right)}^{\text{n vezes}} = \mathbb{I} \\
&= \mathbb{A}^n\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^n = 0.\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^n = \mathbb{I} \Longrightarrow \mathbb{I} = 0.
\end{aligned}$$

Absurdo! Visto que admitimos $\mathbb{A}$ invertível.

Portanto, $\mathbb{A}$ é não invertível.

25. Provar por indução finita sobre n que: $\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \left(\mathbb{A}^T\right)^n$ e $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Daí, segue-se que: $\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \mathbb{A}^n$,vamos mostrar!

Prova:

De fato,

(i) Para $n = 2$,tem-se:

$$\left(\mathbb{A}^2\right)^T = \left(\mathbb{A}\mathbb{A}\right)^T = \mathbb{A}^T\mathbb{A}^T = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}^2.$$

(ii) Suponha válido para n, , isto é, $\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \mathbb{A}^n$, então, queremos mostrar para $n+1$

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Vejamos

$$\left(\mathbb{A}^{n+1}\right)^T = \left(\mathbb{A}^n\mathbb{A}\right)^T = \mathbb{A}^T.\left(\mathbb{A}^n\right)^T = \mathbb{A}\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n+1}.$$

26. Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$, tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica. Então, mostre que:

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n,$$

é simétrica.

Prova:

Se $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,tal que: $\mathbb{A}$ é simétrica, então, por definição, tem-se:

$\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$.

Qeremos provar que:

$$\mathbb{S}^T = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j = I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}.$$

Inicialmente, pela questão anterior temos: $(\mathbb{A}^n)^T = (\mathbb{A}^T)^n$ e

$\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Daí, segue-se que: $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$

De fato,

(i) Para $n = 2$, tem-se:

$$(\mathbb{A}^2)^T = (\mathbb{A}\mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T\mathbb{A}^T = \mathbb{A}\mathbb{A} = \mathbb{A}^2.$$

(ii) Suponha válido para n, isto é, $(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}^n$,então, queremos mostrar para $n+1$

$$(\mathbb{A}^{n+1})^T = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Vejamos

$$(\mathbb{A}^{n+1})^T = (\mathbb{A}^n\mathbb{A})^T = \mathbb{A}^T.(\mathbb{A}^n)^T = \mathbb{A}\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{n+1}.$$

Consequentemente, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^T &= \left(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{A}^j\right)^T = (I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n)^T \\ &= \left(I^T + \mathbb{A}^T + \ldots + (\mathbb{A}^n)^T\right) \\ &= I + \mathbb{A} + \ldots + \mathbb{A}^n = \mathbb{S}. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, $\mathbb{S}$ é uma matriz simétrica.

27. Mostre que: $(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$.

Prova:

De fato,

$$(\mathbb{AB})^T_{ji} = (\mathbb{AB})_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{A}_{i\alpha}\mathbb{B}_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbb{B}^T_{j\alpha}\mathbb{A}^T_{\alpha i} = \left(\mathbb{B}^T \mathbb{A}^T\right)_{ji}.$$

De sorte que:

$$(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T.$$

28. Mostre que:

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}^T_n.\mathbb{A}^T_{(n-1)} \ldots \mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1.$$

Generalizado!

Prova:

(Prove usando indução finita sobre n)

E fácil ver que:

(i) Para $n = 2$ temos:

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2)^T = \mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1.$$

(Caso anterior)

(ii) Suponha válido para n, ou seja,

$$(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n)^T = \mathbb{A}^T_n.\mathbb{A}^T_{(n-1)} \ldots \mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1.$$

(Hipótese de indução)

Então, falta mostrar para $n+1$.

Basta notar que:

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\overbrace{\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n\right)^T}^{\text{hipótese de indução}} = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\overbrace{\mathbb{A}_n^T\ldots\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T}^{\text{hipótese de indução}}.$$

Logo,

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2\ldots\mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}_{(n+1)}^T.\mathbb{A}_n^T\ldots\mathbb{A}_2^T.\mathbb{A}_1^T.$$

29. Mostre que se x é qualquer vetor-coluna não-nulo de $\mathbb{R}^n$, então a matriz $\mathbb{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathbb{A} = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}xx^T$$

é ortogonal e também simétrica.

Definição: Dizemos que uma matriz $\mathbb{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, quando:

$\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$.

Queremos provar que:

(i) $\mathbb{A}$ uma matriz simétrica, isto é, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$.

(ii) $\mathbb{A}$ é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \Longleftrightarrow \mathbb{A}.\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n$.

Prova:

(i) Com efeito,

$$x^T.x = (x_1\ldots x_n).\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2$$

.

e

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^T &= \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}xx^T\right)^T = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}\left(xx^T\right)^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}\left(x^T\right)^T x^T = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}xx^T = \mathbb{A}\end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{A}$ é uma matriz simétrica.

(ii) A priori, como $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{A}.\mathbb{A}^T &= \mathbb{A}.\mathbb{A} = \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}xx^T\right).\left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2}xx^T\right) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2}xx^T + \frac{4}{\|x\|^4}\left(xx^T\right).\left(xx^T\right) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2}xx^T + \frac{4}{\|x\|^4}x\left(x^T.x\right)x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2}xx^T + \frac{4}{\|x\|^4}x\left(x^T.x\right)x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2}xx^T + \frac{4}{\|x\|^2}xx^T = \mathbb{I}_n.\end{aligned}$$

De sorte que: $\mathbb{A}$ é uma matriz ortogonal

30. (a) Sejam a_1, a_2 e a_3 números reais positivos. Prove que:

$$(a_1 + a_2 + a_3).\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

Generalize.

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo); com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que:

$$(a_1 + \ldots + a_n).\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Prova:

Não faremos o caso particular (Fica como exercício!)

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$, com $a_j > 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, então, façamos por simplicidade

$$u = \left(\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}\right) \text{ e } v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Além disso, veja que resultados lindos e elegantes, usando a norma euclidiana e o produto interno usual, temos:

$$\|u\| = \sqrt{a_1 + \ldots + a_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \; \|v\| = \sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}$$

e

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right) = \sqrt{a_1}.\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \sqrt{a_n}.\frac{1}{\sqrt{a_n}} = n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o belíssimo resultado:

$$n = \left|\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right| \leq \sqrt{a_1 + \ldots + a_n}.\sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

e, portanto, elevando-se ao quadrado, ambos os membos da desigualdade, vem:

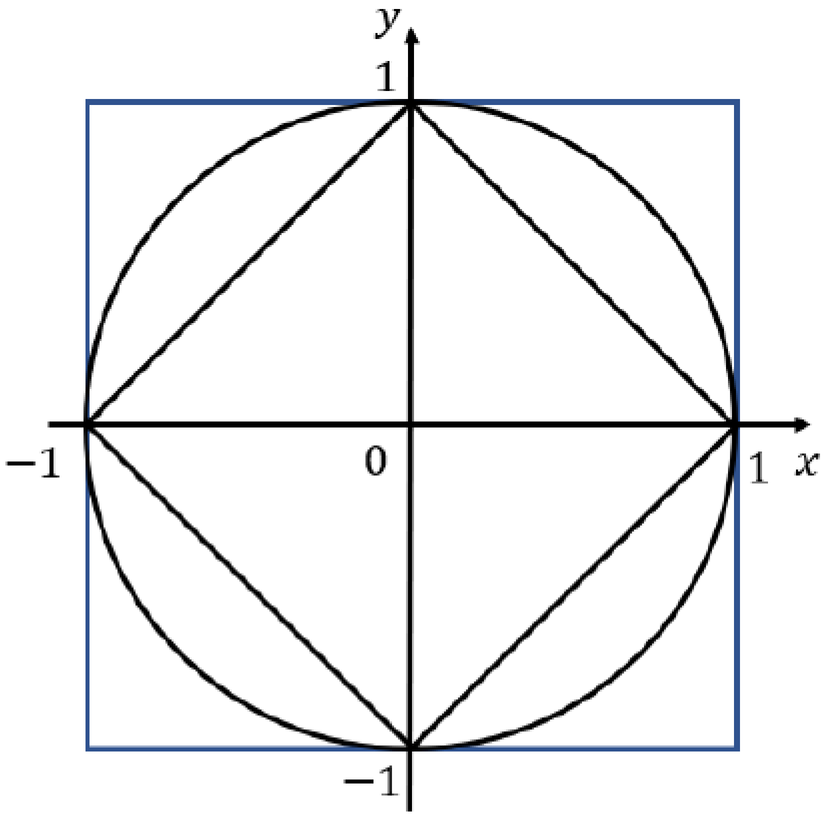
$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n).\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

31. Esboce os gráfico de $\mathbb{A} = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\| = 1\}, \mathbb{B} = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_s = 1\}$ e $\mathbb{C} = \{u \in \mathbb{R}^2; \|u\|_\infty = 1\}$ onde: $u = (x, y)$. .

Observação: Algumas normas:

$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma euclidiana),

$\|u\|_s = |x| + |y|$ (norma da soma) e $\|u\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ (norma do máximo ou supremo)



32: (i) Calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$,onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)X = 0.$$

Solução:

(i) Com efeito, temos:

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3) = (1-\lambda).(3-\lambda).(-2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = 3 \text{ ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).

Observação:

(A) Notação:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

Produtório de a_{ii}, variando de $i = 1$ até $i = n$

(B) Se $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $a_{ij} = 0,\ i > j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(ii) Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}_3)X = 0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

1º Caso: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrcl} & 5z & = & 0 \\ 2y & +z & = & 0 \\ & -3z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y=0 \\ \text{e} \\ z=0 \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = (x,0,0) = x\,(1,0,0)$,com $x \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$, $\mathbb{S}_1$ é dada por:

$$\mathbb{S}_1 = \left\{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\right\} = [(1,0,0)],$$

isto é, $(1,0,0)$gera $\mathbb{S}_1$.Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor $(1,0,0)$.

2º Caso: $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x+ & + & 5z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & - & 5z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=0 \\ \text{e} \\ z=0 \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = (0,y,0) = y\,(0,1,0)$,com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$,ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_2 = \left\{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\right\} = [(0,1,0)],$$

ou seja, (0; 1; 0) gera $\mathbb{S}_2$.

3º Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} 3x & & +5z & =0 \\ & 5y & +z & =0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{-5}{3}z \\ \text{e} \\ z = \frac{-1}{5}z \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = \left(\frac{-5}{3}z, \frac{-1}{5}, z\right) = z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$,com $z \neq 0$ é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_3 = \left\{z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} \text{ e } z \neq 0\right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)\right],$$

ou seja, $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$ gera $\mathbb{S}_3$.

33. Não existem matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,tais que:

$$AB - BA = I.$$

Prova:

Suponha válido, então, usando o traço da matriz identidade, vem: $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I) = n$.

Por outro lado, tem-se:

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}B_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i}A_{i\alpha} = \operatorname{tr}(\mathbb{BA}).$$

Assim,

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) - \operatorname{tr}(\mathbb{BA}) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(\mathbb{AB} - \mathbb{BA}) = tr(I) = 0.$$

Absurdo! Visto que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Portanto, tais matrizes não existem satisfazendo

$$AB - BA = I.$$

34. (i) Seja M uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,prove que:

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^{A}M.$$

Prova:

Com efeito,

$$e^{A} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^{j}}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

então,

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(M^{-1}AM\right)^{j}}{j!} = I + M^{-1}AM + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^{2}}{2!} + \ldots + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^{n}}{n!} + \ldots,$$

$$\left(M^{-1}AM\right)^j = M^{-1}A^jM$$

(É fácil ver por indução finita sobre n),segue-se que:

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IM + M^{-1}AM + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^n}{n!} + \ldots \\ &= M^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots\right)M \\ &= M^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\right)M = M^{-1}e^AM. \end{aligned}$$

(ii)

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt},\ \forall t \iff A \text{ comuta com } B \text{ com } A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

Prova:

$(\Longrightarrow)$ Se $e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}$,então, derivando ambos os lados, temos:

$$(A+B)\,e^{(A+B)t} = Ae^{At}.e^{Bt} + Be^{At}.e^{Bt}.$$

Agora, derivando novamente e fazendo $t = 0$,obtemos:

$$(A+B)^2\,e^{(A+B)t} = A^2e^{At}.e^{Bt} + ABe^{At}.e^{Bt} + BAe^{At}.e^{Bt} + B^2e^{At}.e^{Bt}.$$

Logo,

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA.$$

$(\Longleftarrow)$ Se $AB = BA$.então, é fácil ver que:

$$X(t) = e^{At}.e^{Bt}$$

satisfaz ao problema de valor inicial $(\mathrm{p.v.i})$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A+B)\,X(t) \\ X(0) = I. \end{cases}$$

(**Verifique!**). Então, pela unicidade da solução temos:

$$X(t) = e^{(A+B)t}.$$

De sorte que:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}, \ \forall t$$

Observação:

Se A é nilpotente de indice k temos: $A^k = 0$ com $A \neq 0$ e $0 < k \leq n$. .

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \ldots 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0\ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \ldots 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

Todos estes fatos básicos serão de fundamental importância para a Forma Canônica de Jordan.

35.

Seja $\mathfrak{A}$ álgebra das matrizes quadradas sobre um corpo ordenado completo K e seja P uma matriz invertível em $\mathfrak{A}$.Mostre que a transformação $A \longmapsto P^{-1}.A.P$,onde $A \in \mathfrak{A}$ P é um isomorfismo de álgebra $\mathfrak{A}$ em si mesma.

Antes porém um esclarecimento: Podemos considerar o corpo ordenado completo $K = \mathbb{R}$ (Corpo ordenado completo dos números reais):

Prova:

Seja $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ definida por $\varphi(A) = P^{-1}.A.P$,vamos determinar o núcleo de φ a saber:

$$Ker\left(\varphi\right)=\left\{A_0\in\mathfrak{A};\varphi\left(A_0\right)=0\right\}.$$

Vejamos

$$\begin{aligned}\varphi\left(A_0\right) &= P^{-1}.A_0.P=0\Longrightarrow\left(P.P^{-1}\right).A_0.P=P.0\\ &\Longrightarrow I.A_0.\left(P.P^{-1}\right)=0.P^{-1}\Longrightarrow A_0=0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$Ker\left(\varphi\right)=\left\{0\right\}\Longleftrightarrow\varphi \text{ é injetora.}$$

Agora, mostrar que φ é sobrejetora. por definição, temos:

$$\forall B\in\operatorname{Im}\left(\varphi\right);\exists A\in\mathfrak{A}:A=P.B.P^{-1}$$

Cálculos Auxiliares:

$$\begin{aligned}\varphi\left(A\right) &= P^{-1}.A.P=B\Longleftrightarrow\left(P.P^{-1}\right).A.P=P.B\\ &\Longleftrightarrow A.\left(P.P^{-1}\right)=P.B.P^{-1}\Longleftrightarrow A=P.B.P^{-1}.\end{aligned}$$

Assim.

$$\varphi\left(A\right)=\varphi\left(P.B.P^{-1}\right)=P^{-1}.\left(P.B.P^{-1}\right).P=\left(P^{-1}.P\right).B.\left(P^{-1}.P\right)=B.$$

Dito de outro modo, $\operatorname{Im}\left(\varphi\right)=\mathfrak{A},$ ou seja, φ é sobrejetora.

Logo, φ é bijetora e finalmente, mostremos que:

(i) $\lambda_1,\lambda_2\in K;\forall A_1,A_2\in\mathfrak{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2\right) &= P^{-1}.\left(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2\right).P\\ &= \lambda_1\left(P^{-1}.A_1.P\right)+\lambda_2\left(P^{-1}.A_2.P\right)\\ &= \lambda_1\varphi\left(A_1\right)+\lambda_2\varphi\left(A_2\right).\end{aligned}$$

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi(A_1.A_2) &= P^{-1}.(A_1.A_2).P \\ &= \left(P^{-1}.A_1.P\right).\left(P^{-1}.A_2.P\right) \\ &= \varphi(A_1).\varphi(A_2). \end{aligned}$$

De sorte que: φ é um isomorfimos.

36. Prove que:

$$(i)\ \alpha.0 = 0 \quad (ii)\ 0.u = 0 \quad (iii)\ \alpha.u = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } u = 0.$$

Demonstração:

(i) Com efeito,

$$\begin{cases} \alpha.0 = \alpha.0 + 0 \\ \text{e} \\ \alpha.0 = \alpha.(0+0) = \alpha.0 + \alpha.0, \end{cases}$$

então, temos:

$$\alpha.0 + \alpha.0 = \alpha.0 + 0 \Longrightarrow \alpha.0 = 0$$

(ii) É fácil ver que:

$$\begin{cases} 0.u = 0.u + 0 \\ \text{e} \\ 0.u = (0+0).u = 0.u + 0.u \end{cases}$$

e, portanto,

$$0.u + 0.u = 0.u + 0.$$

Ou ainda,

$$0.u = 0.$$

(iii) **1ª Parte:**

$\alpha.u = 0$ e suponha $\alpha \neq 0$,então, temos: $\alpha^{-1}.\alpha = 1$ e

$$\left(\alpha^{-1}.\alpha\right).u = \alpha^{-1}.0 = 0 \Longrightarrow 1.u = 0.$$

2ª Parte: O espaço vetorial é normado; assim, podemos usar a definir da noma euclidiana $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ e suponha $u \neq 0$,então, $\|u\|^2 \neq 0$, teremos:

$$\alpha.u = 0 \Longrightarrow \langle \alpha.u, u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha.\|u\|^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{0}{\|u\|^2} = 0.$$

De sorte que:

$$\alpha = 0 \text{ ou } u = 0.$$

37. Mostre que: $\mathbb{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = 2x\}$ é um subespaço:

Prova:

(i) $(0,0) \in \mathbb{W}$? Pois, $0_y = 2.0_x$,(a segunda coordenada é o dobro da primeira).

(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}$, onde: $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$, tem-se: $y_1 = 2x_1$ e $y_2 = 2x_2$.

Assim,

$$u_1 + u_2 = (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)).$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathbb{W}$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda(x_1, y_1) = \lambda(x_1, 2x_1) = (\lambda x_1, 2(\lambda x_1))$ (A segunda coordenada continua sendo o dobro da primeira).

Daí, vem: $\lambda u_1 \in \mathbb{W}$.

De sorte que: $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial

38. Prove que: $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x.y = 0\}$ não é um subespaço.

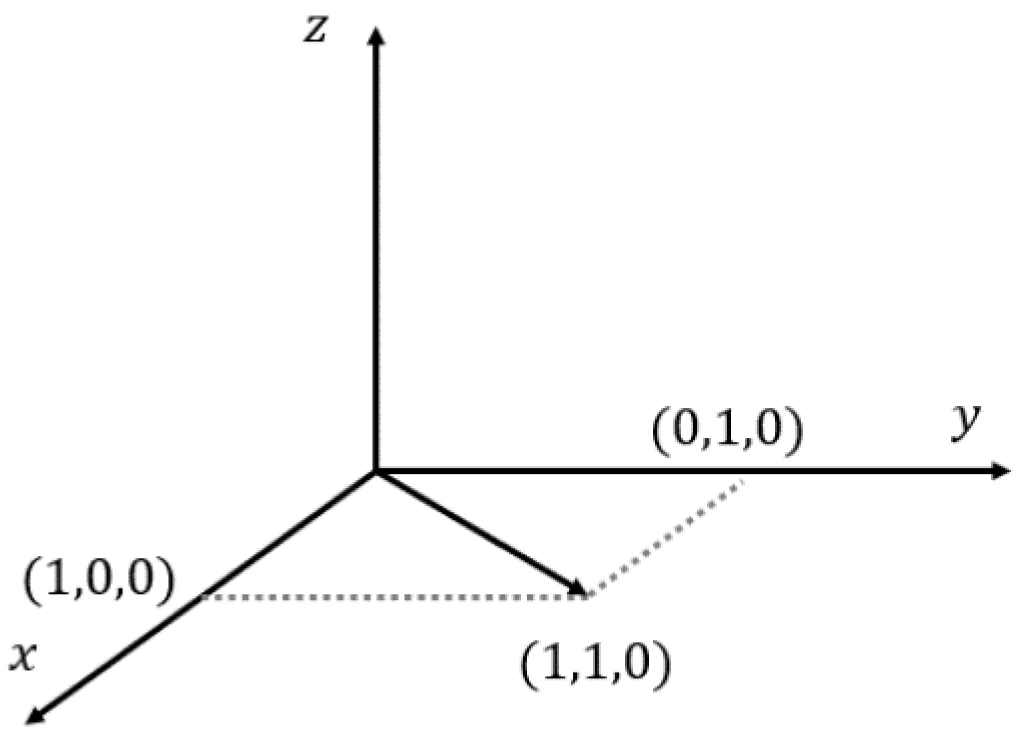
Prova:

Contra-exemplo:

Sejam $u_1 = (1,0,0)$ e $u_2 = (0,1,0)$Então, temos: $u_1, u_2 \in \mathbb{W}$.Daí, obtemos:

$$u_1 + u_2 = (1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ não é um subespaço.



39. Prove que: $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c = 0 \right\}$ é um subespaço.

Prova:

A priori, vamos reescrever as matrizes de $\mathbb{W}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W} : b = c = 0$ desta forma, temos:

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ (os elementos de $\mathbb{W}$ são matrizes diagonais de ordem 2 com entradas reais)

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}?$ Visto que, $0_a = 0_b = 0_c = 0_d = 0$ (todos os elementos são nulos)

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{W}$,com $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.Assim, tem-se:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Por conseguinte, vem: $A_1 + A_2 \in \mathbb{W}$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A_1, \in \mathbb{W}$,temnos:

$$\lambda A_1 = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0 \\ 0 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Logo, $\mathbb{W}$ é subespaço.

40. Mostre que: $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = A\}$ é um subespaço.

Prova:

Inicialmente, $A \in \mathbb{W};\ A^T = A$ (diz que $\mathbb{W}$ descreve todas as matrizes simétricas de ordem n com entradas reais)

(i) $0 \in \mathbb{W}?$ Visto que, $0^T = 0$..(todos os elementos são nulos)

(ii) $\forall A, B \in \mathbb{W}$,tem-se por hipóteses: $A^T = A$ e $B^T = B$,

$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

Por conseguinte, vem: $(A+B) \in \mathbb{W}$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{W}$, temnos:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A.$$

Daí, obtemos: $\lambda A \in \mathbb{W}$.

Portanto, $\mathbb{W}$ é subespaço.

41. Prove que: $\mathbb{W} = \{(p(x) = ax + b) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \mid b = 0\}$ é um subespaço.

Prova:

Vejamos, $p \in \mathbb{W};\ p(x) = ax$ (Nos diz que $\mathbb{W}$ descreve todos os polinômios de grau no máximo m 1 e termo independente nulo)

$(i)\ 0(x) \in \mathbb{W}?$ Visto que, $0(x) = 0$ (polinômio identicamente nulo)

$(ii)\ \forall p, q \in \mathbb{W}$,tem-se por hipóteses: $p(x) = a_1 x$ e $q(x) = a_2 x$,

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = a_1 x + a_2 x = (a_1 + a_2)\, x.$$

Por conseguinte, vem: $(p+q) \in \mathbb{W}$.

$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{W}$,temnos:

$$(\lambda p)(x) = \lambda p(x) = \lambda (a_1 x) = (\lambda a_1)\, x.$$

Daí, obtemos: $\lambda p \in \mathbb{W}$.

Portanto, $\mathbb{W}$ é subespaço.

42. Prove que: $\mathbb{W} = \{f \in C^1(\alpha, \beta) \mid f'(x) + f(x) = 0\}$ é um subespaço.

Prova:

Inicialmente, $f \in \mathbb{W};\ f'(x) + f(x) = 0$ (diz que $\mathbb{W}$ descreve a soma da derivada de primeira ordem com a função e nula)

$(i)\ 0(x) \in \mathbb{W}?$ Visto que, $0'(x) + 0(x) = 0$.

$(ii)\ \forall f, g \in \mathbb{W}$,tem-se por hipóteses: $f'(x) + f(x) = 0$ e $g'(x) + g(x) = 0$,

$$(f+g)'(x) + (f+g)(x) = [f'(x) + f(x)] + [g'(x) + g(x)] = 0 + 0 = 0$$

Por conseguinte, vem: $(f+g) \in \mathbb{W}$.

$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathbb{W}$,temnos:

$$(\lambda f)'(x) + (\lambda f)(x) = \lambda [f'(x) + f(x)] = \lambda 0 = 0.$$

Daí, obtemos: $(\lambda f) \in \mathbb{W}$.

Portanto, $\mathbb{W}$é subespaço.

43. Seja $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in \mathbb{Q}$(racionais)g, mostre que: $\mathbb{W}$ não é um subespaço.

Prova:

1º Modo:

$(i)\ (0,0) \in \mathbb{W}?$Pois, $0_x \in \mathbb{Q}$ (racionais) (As duas coordenadas são nulas obviamente números racionais)

$(ii)\ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}$,onde: $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$,tem-se: $x_1,x_2 \in \mathbb{Q}$.Assim,

$$u_1 + u_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathbb{W}$.Visto que $(x_1 + x_2) \in \mathbb{Q}$.

$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda (x_1, y_1) = \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \notin \mathbb{W}.$ (A primeira coordenada λx_1 não necessarimante continua racional).

De sorte que: $\mathbb{W}$ não é subespaço vetorial

2º Modo:

Usaremos um contra-exemplo: Escolha $u_1 = (1,0)$ e $\lambda = \sqrt{2}$.Daí, obtemos:

$$\lambda u_1 = \sqrt{2}(1,0) = (\sqrt{2}, 0) \notin \mathbb{W}.\ \text{Pois, } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$não é um subespaço.

44. Prove que: $\mathbb{W}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : c=0\right\}$ é um subespaço.

Prova:

A priori, vamos reescrever as matrizes de $\mathbb{W}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W} : c=0$. desta forma, temos:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$(os elementos de $\mathbb{W}$ são matrizes triangulares superiores de ordem 2)

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}?$ Visto que, $0_a = 0_b = 0_c = 0_d = 0$.(todos os elementos são nulos)

(ii) $\forall A_1, A_2 \in \mathbb{W}$, com $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$.Assim, tem-se:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Por conseguinte, vem: $A_1 + A_2 \in \mathbb{W}$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A_1, \in \mathbb{W}$,temnos:

$$\lambda A_1 = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ 0 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Logo, $\mathbb{W}$é subespaço.

45. Seja $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = |x|\}$,então, prove que: $\mathbb{W}$ não é um subespaço.

Prova:

1º Modo:

Um vetor

$$u = (x,y) \in \mathbb{W} \Leftrightarrow y = |x| \Leftrightarrow (x,|x|) \in \mathbb{W}$$

($u \in \mathbb{W}$,desde que: a segunda coordenada do vetor corresponda ao módulo a primeira coordenada.)

(i) $(0,0) \in \mathbb{W}?$ Pois, $0_y = |0_x| = 0_x$.

(ii) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}$,onde: $u_1 = (x_1, |x_1|)$ e $u_2 = (x_2, |x_2|)$,tem-se:

$$u_1 + u_2 = (x_1, |x_1|) + (x_2, |x_2|) = (x_1 + x_2, |x_1| + |x_2|) \neq (x_1 + x_2, |x_1 + x_2|).$$

Visto que: $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ (Desigualdade triangular).

Logo, $\mathbb{W}$ não é subespaço vetorial

2º Modo:

Prova usando contra-exemplo:

Sejam, $u_1 = (-5, |-5|) = (-5, 5)$ e $u_2 = (3, |3|) = (3, 3)$,então, temo-se:

$$u_1 + u_2 = (-5, 5) + (3, 3) = (-2, 8) \notin \mathbb{W}$$

Pois, a segunda coordenada não é igual ao módulo a primeira coordenada.

Portanto, $\mathbb{W}$ não é um subespaço.

46. Mostree que :

$$\mathbb{W} = \{f \in C^2(\alpha, \beta) \mid f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0\}$$

é um subespaço

Prova:

Alguns comentários e definições, antes de resolver:

Quem são os elementos f do espaço vetorial

$C^2(\alpha, \beta) = \{f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$;onde: f'' é contínua no aberto $(\alpha, \beta)\}$ e, portanto, $\mathbb{W}$.. Neste caso, são as funções que cumpre a condição da equação diferencial ordinária de 2a ordem com coeficientes constantes.

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0.$$

$(i)\ 0(x) \in \mathbb{W}?$ Pois, $0''(x) + a0'(x) + b0(x) = 0$.

$(ii)\ \forall f, g \in \mathbb{W}$, tem-se por hipóteses: $\begin{cases} f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \\ \text{e} \\ g''(x) + ag'(x) + bg(x) = 0. \end{cases}$.

Agora,

$$\begin{aligned}(f+g)''(x) + a(f+g)'(x) + b(f+g)(x) &= [f''(x) + af'(x) + bf(x)] \\ &\quad + [g''(x) + ag'(x) + bg(x)] \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Por conseguinte, vem: $(f+g) \in \mathbb{W}$.

$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{W}$, temos:

$$(\lambda f)''(x) + a(\lambda f)'(x) + b(\lambda f)(x) = \lambda[f''(x) + af'(x) + bf(x)] = \lambda 0 = 0.$$

Daí, obtemos: $(\lambda f) \in \mathbb{W}$.

De sorte que: $\mathbb{W}$ é subespaço.

47. Seja $\mathbb{W}_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = \alpha\}$. Prove que: $\mathbb{W}_\alpha$ é um subespaço se, e somente se, $\alpha = 0$.

Prova:

1ª Parte:

$(\Longrightarrow)$ Suponhamos que $\mathbb{W}_\alpha$ é um subespaço, então, em particular, o vetor nulo $(0,0) \in \mathbb{W}_\alpha : 0_x + 0_y = \alpha$. Logo, $\alpha = 0$.

2ª Parte: $\alpha = 0 \Longrightarrow \mathbb{W}_\alpha$ é um subespaço.

$(\Longleftarrow)$

De fato,

$(i)\ (0,0) \in \mathbb{W}?$ Pois, $0_x + 0_y = 0$.

$(ii)\ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{W}_0$, onde: $u_1 = (x_1, -x_1)$ e $u_2 = (x_2, -x_2)$, tem-se:

$$u_1 + u_2 = (x_1, -x_1) + (x_2, -x_2) = (x_1 + x_2, -(x_1 + x_2)).$$

Logo, $u_1 + u_2 \in \mathbb{W}_0$.

$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda (x_1, -x_1) = (\lambda x_1, -(\lambda x_1))$. Daí,vem: $\lambda u_1 \in \mathbb{W}_0$.

De sorte que: $\mathbb{W}_0$ é um subespaço vetorial

48. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$. Prove que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

Prova:

$(i)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}?$ Pois, $0_a = 0_b = 0_c = 0_d$ em particular, $0_b = 0_d$

(A exigência é que os elementos da diagonal sacundária sejam iguais)

$(ii)\ \forall A, B \in \mathbb{W}$, com $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{W}$, temos:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Logo, $\mathbb{W}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

49. Seja $\mathbb{W} = \{A, X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : AX - XA = 0,$ com X fixa. Prove que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

Prova:

1º modo:

$(i)\ 0 \in \mathbb{W}?$ De fato, $0X - X0 = 0$. .

$(ii)\ \forall A, B \in \mathbb{W}$,por hipóteses, temos: $\begin{cases} AX - XA = 0 \\ \text{e} \\ BX - XB = 0 \end{cases}$. . Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} (A+B)X - X(A+B) &= (AX - XA) + (BX - XB) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

$(iii)\ \forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{W}$,temos:

$$(\lambda_1 A)X - X(\lambda_1 A) = \lambda_1 (AX - XA) = \lambda_1 0 = 0.$$

2º modo:

De fato, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{W}$,por hipóteses, temos: $\begin{cases} AX - XA = 0 \\ \text{e} \\ BX - XB = 0 \end{cases}$. Assim,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 A + \lambda_2 B)X - X(\lambda_1 A + \lambda_2 B) &= \lambda_1 (AX - XA) + \lambda_2 (BX - XB) \\ &= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbb{W}$ é um subespaço.

50. Seja $\mathbb{W} = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : b = 0\}$. Prove que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

Prova:

$(i)\ 0(x) \in \mathbb{W}?$ Visto que: $0(x) = 0x + 0$, com $0_a = 0_b = 0$.

$(ii)\ \forall p_1(x) = a_1 x, \forall p_2(x) = a_2 x$ pertencentes a $\mathbb{W}$,temos:

$$(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) = a_1 x + a_2 x = (a_1 + a_2)x \in \mathbb{W}.$$

$(iii)\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall p_1(x)=a_1x\in\mathbb{W}$, tem-se:

$$(\lambda p_1)(x)=\lambda p_1(x)=\lambda(a_1x)=(\lambda a_1)x\in\mathbb{W}.$$

De sorte que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

51. Sejam $\mathbb{U}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ z=0\}$ e $\mathbb{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\ x=y=0\}$

subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.Prove que:

(a) $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$ são subespaços (b) $\mathbb{R}^3=\mathbb{U}+\mathbb{W}$ (c) $\mathbb{U}\cap\mathbb{W}=\{0\}$. Daí, concluímos que:

a soma é direta, ou seja, $\mathbb{R}^3=\mathbb{U}\oplus\mathbb{W}$.

Prova:

(a)

$$\mathbb{U}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=0\}$$

(i) $(0,0,0)\in\mathbb{U}$? Pois, $0_x=0_y=0_z=0$.

$(ii)\ \forall u_1,u_2\in\mathbb{U}$, onde: $u_1=(x_1,y_1,0)\,,u_2=(x_2,y_2,0)$, Daí obtemos:

$$u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2,0)\in\mathbb{U}.$$

$(iii)\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall u_1\in\mathbb{U}\Longrightarrow\lambda u_1=\lambda(x_1,y_1,0)=(\lambda x_1,\lambda y_1,0)\in\mathbb{U}.$

Logo, $\mathbb{U}$ é um subespaço.

$$\mathbb{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=y=0\}.$$

Procedendo de forma inteiramente análoga, temos:

(i) $(0,0,0)\in\mathbb{W}$? Pois, $0_x=0_y=0_z=0$.

$(ii)\ \forall u_1,u_2\in\mathbb{W}$, onde: $u_1=(0,0,z_1)\,,u_2=(0,0,z_2)$ .Por conseguinte, vem:

$$u_1 + u_2 = (0, 0, z_1 + z_2) \in \mathbb{W}.$$

$$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u_1 \in \mathbb{W} \Longrightarrow \lambda u_1 = \lambda (0, 0, z_2) = (0, 0, \lambda z_2) \in \mathbb{W}.$$

Logo, $\mathbb{W}$ é um subespaço.

$(b)\ \mathbb{R}^3 = \mathbb{U} + \mathbb{W}\ (c)\ \mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$

Basta observar que: $\forall u \in \mathbb{R}^3$,tem-se:

$$u = (x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z).$$

Agora, como $(x, y, 0) \in \mathbb{U}$ e $(0, 0, z) \in \mathbb{W}$ segue-se que:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} + \mathbb{W}.$$

(c) Além disso, seja $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{U} \cap \mathbb{W}$,então, $k \in \mathbb{U}$ e $k \in \mathbb{W}$. Ora,

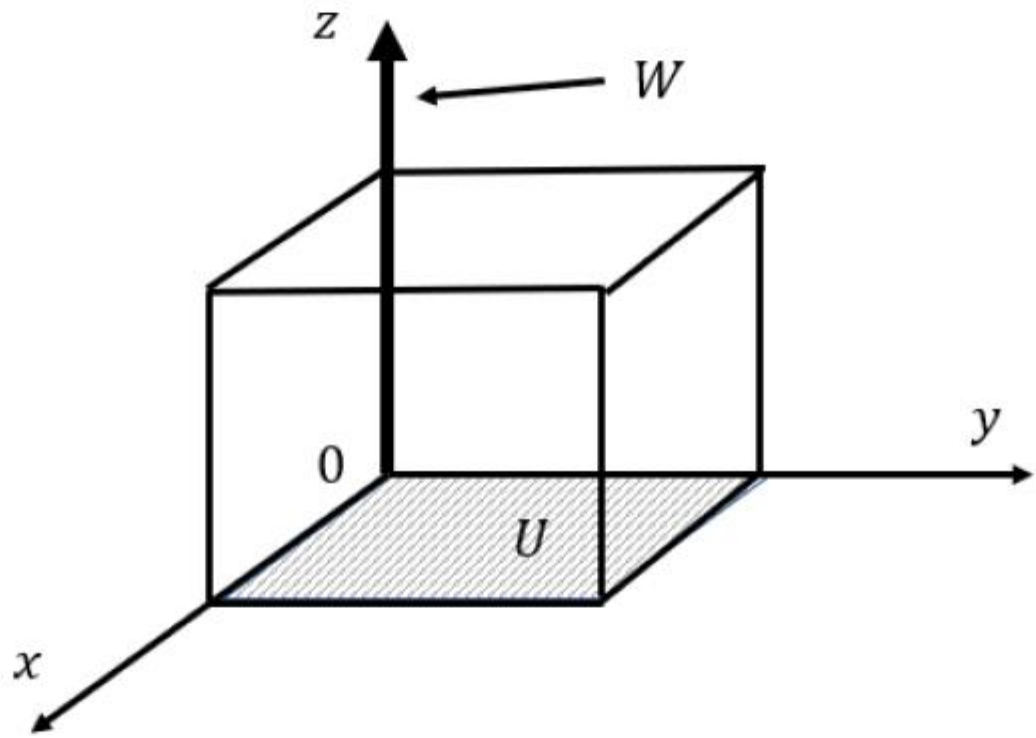
$$\left\{ \begin{array}{c} k \in \mathbb{U} \\ \text{e} \\ k \in \mathbb{W} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k_3 = 0 \\ \text{e} \\ k_1 = k_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow k = (0, 0, 0).$$

Logo,

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}.$$

Dito de outro modo, $\mathbb{R}^3$ é soma direta dos subespaços $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$,isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}.$$



52. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$ $(\mathbf{E.V.})$. . Prove que: $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ também é um subespaço de $\mathbb{V}$.

Prova:

(i) O vetor nulo $0 \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$? Visto que, $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços.

(ii) $\forall u, v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, por definição de intersecção, tem-se: $u, v \in \mathbb{W}_1$ e $u, v \in \mathbb{W}_2$.

Como por hipóteses $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços, segue-se que: $u + v \in \mathbb{W}_1$ e $u + v \in \mathbb{W}_2$.

Logo,

$$u + v \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2.$$

Por conseguinte, vem: $(u + v) \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$, por definição de intersecção, tem-se: $u \in \mathbb{W}_1$ e $u \in \mathbb{W}_2$.

Agora, por hipóteses $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ são subespaços. Daí, vem: $\lambda u \in \mathbb{W}_1$ e $\lambda u \in \mathbb{W}_2$.

$$\lambda u \in \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2.$$

Portanto, $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ é subespaço.

53. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$ ($\mathbf{E.V.}$).Dê um contra-exemplo para provar que:

$\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não necessariamente é um subespaço de $\mathbb{V}$.

Prova:

Vamos mostrar apresentando quatro contra-exemplos, a saber:

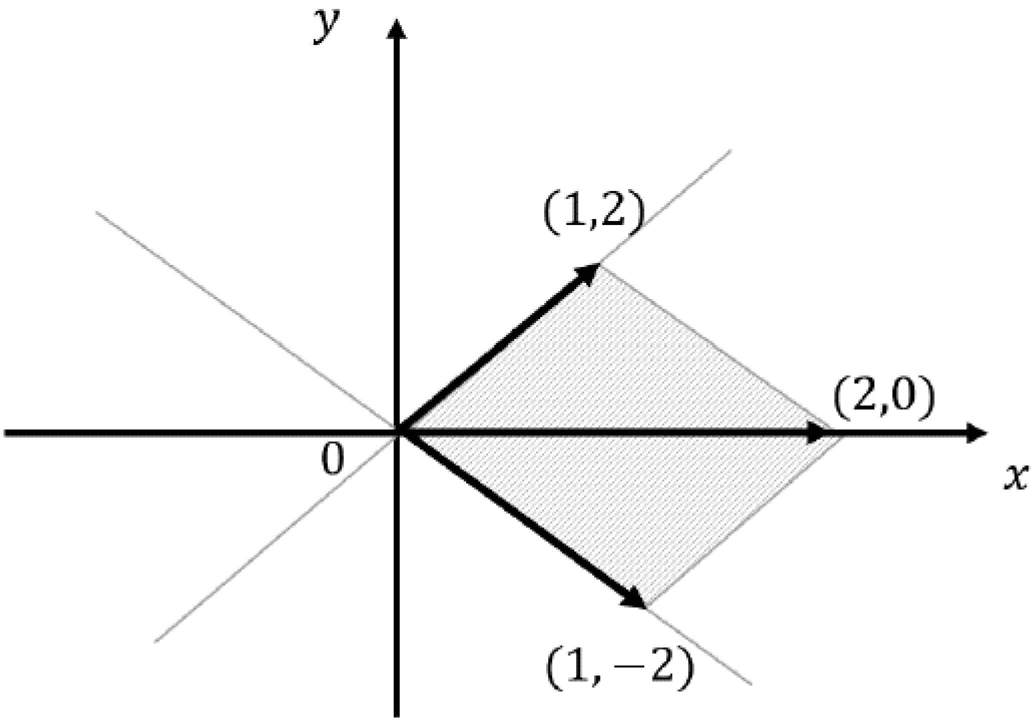
54. Vejamos um contra-exemplo, escolhamos

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} \\ & e \\ \mathbb{W}_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\}. \end{aligned}$$

Sejam $u_1 = (1,2)$ e $u_2 = (1,-2)$, onde: $u_1, u_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$,então, tem-se:

$$u_1 + u_2 = (1,2) + (1,-2) = (2,0) \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Logo, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço.



55. Sejam $\mathbb{W}_1$ e $\mathbb{W}_2$ subespaços vetoriais, dados por:

$$\mathbb{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : c = 0 \right\}$$

e

$$\mathbb{W}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = 0 \right\}$$

Sejam $A_1, A_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ com $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, então temos:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Portanto, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço.

56. Ilustrativamente, escolhamos os seguintes subespaços, definidos por:

$$\mathbb{W}_1 = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : a = c = 0 \right\} \text{ e}$$
$$\mathbb{W}_2 = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : b = c = 0 \right\}$$

Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ com $p_1(x) = 2x$ e $p_2(x) = x^2$,então, temos:

$$p_1(x) + p_2(x) = x^2 + 2x \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Logo, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço.

57. Seja $\mathfrak{F}\{f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ funções definidas no intervalo $[-, a, a]\}$ escolha os subespaços

$$\mathbb{W}_1 = \{f \in \mathfrak{F}([-a, a] \to \mathbb{R}) : f(x) = f(-x), \forall x [-a, a]\}$$

e

$$\mathbb{W}_2 = \{f \in \mathfrak{F}([-a, a] \to \mathbb{R}) : f(x) = -f(-x), \forall x [-a, a]\}.$$

Consideremos $f_1, f_2 \in \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ com $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^3$,então, temos:

$$f_1(x) + f_2(x) = x^2 + x^3 \notin \mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2.$$

Daí, concluímos, $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ não é um subespaço.

58. Sejam $\mathcal{S} = \{B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = B\}$ e $\mathcal{A} = \{C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \mid C^t = -C\}$

Prove que:

(i) $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ são subespaços. (ii) $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ (iii) $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Daí, concluímos que: a soma é direta, ou seja,

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Prova:

(i) $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

De fato,

(a) $0 \in \mathcal{S}$? Pois, $0^T = 0$.

(b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{S}$, tem-se:

$$(B_1 + B_2)^t = B_1^t + B_2^t = (B_1 + B_2) \in \mathcal{S}.$$

$(c)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall B_1, \in \mathcal{S},$ tem-se:.

$$(\lambda B_1)^t = \lambda B_1^t = (\lambda B_1) \in \mathcal{S}.$$

Logo, $\mathcal{S}$.é um subespaço.

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$(i)\ \mathcal{A}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

$(a)\ 0 \in \mathcal{A}?\ \text{Pois},\ 0^T = -0.$

$(b)\ \forall C_1, C_2 \in \mathcal{A},$ tem-se:

$$(C_1 + C_2)^t = C_1^t + C_2^t = -(C_1 + C_2) \in \mathcal{A}.$$

$(c)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall C_1 \in \mathcal{A},$ tem-se:

$$(\lambda C_1)^t = \lambda C_1^t = -(\lambda C_1) \in \mathcal{A}.$$

De sorte que: $\mathbb{A}$ é um subespaço.

(ii) Notações:

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$$

dizemos que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é soma direta $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$.

$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$:Espaço das matrizes de ordem n com entradas reais.

$\mathcal{S}$:Subespaço das matrizes simétricas.

$\mathcal{A}$:Subespaço das matrizes anti-simétricas.

Note que: $B^t = B$ (matriz simétrica) e $C^t = -C$ (matriz anti-simétrica).

$B \in \mathbb{S} : B^t = B$ e $C \in \mathcal{A} : C^t = -C$.

Observe que:

$$\begin{cases} A = B + C \\ \text{e} \\ A^t = (B+C)^t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = B + C \\ \text{e} \\ A^t = B^t + C^t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A + A^t = (B + B^t) + (C + C^t) \\ \text{e} \\ A - A^t = (B - B^t) + (C - C^t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + A^t = 2B \\ \text{e} \\ A - A^t = 2C \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{A+A^t}{2} = B \\ \text{e} \\ \frac{A-A^t}{2} = C \end{cases}.$$ Assim, $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tem-se:

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}.$$

Logo,

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}. \qquad (1)$$

(iii) Seja $K \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, então, temos: $K \in \mathbb{S}$ e $K \in \mathcal{A}$

Ora, $\begin{cases} K \in \mathcal{S} \\ \text{e} \\ K \in \mathcal{A} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K^t = K \\ \text{e} \\ K^t = -K \end{cases} \Longrightarrow K = -K \Longrightarrow K = 0.$

Portanto,

$$\mathbb{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}. \qquad (2)$$

Decorre de (1) e (2) que: a soma é direta

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

59. Dados

$$\mathbb{U} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]); f(x) = f(-x)\} \text{ e } \mathbb{W} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]); f(-x) = -f(x)\},$$

onde: $\mathfrak{F}([-a,a]) = \{f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ funçõesg é o espaço de todas as funções definidas no intervalo fechado $[-a,a]$.Prove que:

(i) $\mathbb{U}$ e $\mathbb{W}$ são subespaços. (ii) $\mathfrak{F}([-a,a]) = \mathbb{U} + \mathbb{W}$ (iii) $\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$.

Prova:

(i) **1ª Parte:**

$$\mathbb{U} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]) \, ; \, f(x) = f(-x)\}$$

$\mathbf{1}$ $0(x) \in \mathbb{U}?$ Pois, $0(x) = 0(-x) = 0.$

$\mathbf{2}$ $\forall f, g \in \mathbb{U}$, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) = f(-x) \\ \text{e} \\ g(x) = g(-x) \end{array} \right. \Longrightarrow (f+g)(x) = (f+g)(-x) \Longrightarrow (f+g) \in \mathbb{U}.$$

$\mathbf{3}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{U}$, tem-se:

$$f(x) = f(-x) \Longrightarrow (\lambda f)(x) = (\lambda f)(-x) \Longrightarrow \lambda f \in \mathbb{U}.$$

Portanto, $\mathbb{U}$ é um subespaço.

(i) **2ª Parte:**

$$\mathbb{W} = \{f \in \mathfrak{F}([-a,a]) \, ; \, f(-x) = -f(x)\}$$

Procedendo de forma inteiramente análoga, temos:

$\mathbf{1}$ $0(x) \in \mathbb{W}?$ Pois, $0(x) = -0(-x) = 0.$

$\mathbf{2}$ $\forall f, g \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} f(x) = -f(-x) \\ \text{e} \\ g(x) = -g(-x) \end{array}\right. \Longrightarrow (f+g)(x) = -(f+g)(-x) \Longrightarrow (f+g) \in \mathbb{W}.$$

3 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$f(x) = -f(-x) \Longrightarrow (\lambda f)(x) = (-\lambda f)(-x) \Longrightarrow \lambda f \in \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ é um subespaço.

(ii) $\forall f \in \mathfrak{F}([-a,a])$, tem-se:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Como $\left[\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right] \in \mathbb{U}$ e $\left[\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right] \in \mathbb{W}$ segu-se que:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = \mathbb{U} + \mathbb{W}.$$

(iii) Seja $K \in \mathbb{U} \cap \mathbb{W}$, então, temos: $K \in \mathbb{U}$ e $K \in \mathbb{W}$.

Vejamos, $\left\{\begin{array}{c} K \in \mathbb{U} \\ \text{e} \\ K \in \mathbb{W} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} K(x) = K(-x) \\ \text{e} \\ -K(x) = K(-x) \end{array}\right. \Longrightarrow K(x) = -K(x) \Longrightarrow K(x) = 0.$

Portanto,

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{W} = \{0\}$$

Agora, como

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{F}([-a,a]) & = & \mathbb{U} + \mathbb{W} \\ & \text{e} & \\ \mathbb{U} \cap \mathbb{W} & = & \{0\}. \end{array}$$

Daí, segue-se que: a soma é direta:

$$\mathfrak{F}([-a,a]) = \mathbb{U} \oplus \mathbb{W}$$

60. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$.Pede-se:

(A) Provar que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

(B) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(C) Uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$.

Prova:

$(A)\ (i) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}?$ Visto que: $0_a = 0_b = 0_c = 0_d$.

$(ii)\ \forall A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$,tem-se:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$, tem-se:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ é um subespaço.

$(B) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$: $b = c$.

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + bA_2 + cA_3, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [A_1, A_2, A_3].$$

(C) Afirmação: $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 3$.

Observação:

$$\begin{cases} \beta = \{A_1, A_2, A_3\} \text{ gera } \mathbb{W}. \\ \text{e} \\ \beta = \{A_1, A_2, A_3\} \text{ é L.I.} \end{cases} \Longleftrightarrow \beta$$ é uma base para $\mathbb{W}$.

61. Seja $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y = 0\}$ um subespaço. Pede-se:

(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$.

Solução:

(A) $(x, y, z) \in \mathbb{W}$: $z = -y$.

Assim,

$$(x, y, -y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1).$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)].$$

Afirmação: $\beta = \{(1,0,0),(0,1,-1)\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,-1) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{(1,0,0),(0,1,-1)\}$ é L.I. Consequentemenete, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 2$.

62. Seja $\mathbb{W} = \{(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : c = 0\}$ um subespaço. Pede-se:

(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$.

Solução:

(A) $ax^2 + bx + c \in \mathbb{W}$: $c = 0$.

Assim,

$$ax^2 + bx + c = a.x^2 + b.x.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [x^2, x].$$

Afirmação: $\beta = \{x^2, x\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x = 0x^2 + 0x \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{x^2, x\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 2$.

63. Seja $\mathbb{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$ um subespaço. Pede-se:

(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$..

Solução:

(A) $(x, y, z) \in \mathbb{W}$: $z = x + y$.

Assim,

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = x\,(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 1)\,.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)]\,.$$

Afirmação: $\beta = \{(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1\,(1, 0, 1) + \lambda_2\,(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\}$ é L.I. Consequentemenete, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 2$.

64. Seja $\mathbb{W} = \{A \in \mathbb{M}_3\,(\mathbb{R}) : A^T = A\}$ um subespaço. Obter uma base para $\mathbb{W}$. Qual a dim $\mathbb{W}$?

Solução:

Basta notar que: $A \in \mathbb{M}_3\,(\mathbb{R}) : A^T = A$, tem-se: $A = \begin{pmatrix} a & \lambda & \beta \\ \lambda & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix}$. Assim,

$$\begin{pmatrix} a & \lambda & \beta \\ \lambda & b & \gamma \\ \beta & \gamma & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$\beta\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= aA_1 + bA_2 + cA_3 + \lambda A_4 + \beta A_5 + \gamma A_6$$

Logo,

$$\mathbb{W} = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6].$$

Agora, mostremos que $\alpha = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ é um conjunto L.I.

De fato, dada a equação

$$k_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$k_5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + k_6\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Produzir o seguinte resultado

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = 0, \quad k_5 = 0 \quad \text{e} \quad k_6 = 0.$$

Portanto, $\alpha = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ é um conjunto L.I.

Por conseguinte, obtemos: $\alpha = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 6$.

65. Se $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = A\}$. Qual a dim $\mathcal{S}$?

Solução:

A dimensão generalizada para o subespaços das matrizes simétricas $\mathcal{S}$, é dada por:

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & & \Delta \\ * & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Delta & & & a_n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Note que:

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

66. Se $\mathcal{S}=\left\{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\right\}$.Qual a dim$\mathcal{S}$?

Solução:

Basta observar que: O espaço de todas as matrizes quadradas $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é soma direta dos subespaços das matrizes simétricas $\mathcal{S}$ e anti-simétricas, ou seja,

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Consequentemente, vem:

$$n^2 = \dim \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} + \dim \mathcal{A} \Longrightarrow \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

67. Sejam $u, v \in \mathbb{V}$ espaço vetorial euclidiano, sabendo-se que: $\|u+v\| = 1$ e $\|u-v\| = 5$

Calcule: $\langle u, v\rangle$

Solução:

Com efeito,

$$\begin{cases} \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = 1 \\ \|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = 25 \end{cases} \Longrightarrow \{2\langle u,v\rangle - [-2\langle u,v\rangle] = -24.$$

Logo,

$$\langle u, v\rangle = -6.$$

68. Seja $\mathbb{V}$(espaço vetorial euclidiano), prove que:

$$\|u\| = \|v\| \iff \langle u+v, u-v\rangle = 0.$$

Prova:

De fato,

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle u-v, u+v\rangle = 0,$$

visto que: $\langle -v, u\rangle + \langle u, v\rangle = 0.$

69. Seja $\mathbb{V}$ (espaço vetorial euclidiano), prove que:

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$ (Identidade do paralelogramo).

Prova:

Com efeito, tem-se:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (1)$$

de forma inteiramente anãloga, temos:

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (2)$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

70. Seja $\mathbb{V}$ (espaço vetorial euclidiano), prove que:

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \langle u, v\rangle = 0.$

Prova:

De fato,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Logo,

$$2\langle u, v\rangle = 0 \iff \langle u, v\rangle = 0.$$

71. Sejam $u, v \in \mathbb{V}$ espaço vetorial euclidiano). Determine o cosseno do ângulo entre u e v,sabendo-se que:

$\|u\| = 5, \|v\| = 8$ e $\|u+v\| = \sqrt{129}$.

Solução:

Por definição temos:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{5.8} = \frac{\langle u, v\rangle}{40}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = 129 \\ &\Longrightarrow 5^2 + 2\langle u, v\rangle + 8^2 = 129 \\ &\Longrightarrow 2\langle u, v\rangle = 129 - 25 - 64 = 40 \\ &\Longrightarrow \langle u, v\rangle = 20. \end{aligned}$$

Assim,

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

e, como $0 \leq \theta \leq \pi$ segu-se que:

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Observação: Desigualdade de Cauchy-Schwarz

(No problema 114 faremos uma prova mais rigorosa desta desigualdade) Com efeito, para $0 \leq \theta \leq \pi$, temos::

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \|v\|}.$$

Agora, como $|\cos\theta| \le 1$ segue-se que:

$$\left|\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \|v\|}\right| \le 1 \iff |\langle u, v\rangle| \le \|u\| \|v\| \iff (|\langle u, v\rangle|)^2 \le \|u\|^2 \|v\|^2 .$$

(**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**)

72. Seja $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,então, prove que:

$$|x_j| \le \|u\| \le \sqrt{3} \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}, \text{ com } j = 1, 2, 3.$$

Prova:

Seja $u = (x_1, x_2, x_3)$,então temos:

$$|x_j|^2 \le \|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Além disso, escolha $\mathbb{M} = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$,então, daí, obtemos:

$$|x_j|^2 \le \|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le \mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^2 = 3\mathbb{M}^2,$$

ou ainda,

$$|x_j|^2 \le \|u\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 3\mathbb{M}^2,$$

e, portanto,

$$|x_j| \le \|u\| \le \sqrt{3}\mathbb{M}.$$

com $j = 1, 2, 3.$

73. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{V}$ (espaço vetorial normado). Mostre que:

$\lambda . u = 0, u \ne 0 \Longrightarrow \lambda = 0$

Prova:

1ª Parte:

$\alpha.u = 0$ e suponha $\alpha \neq 0$,então, temos: $\alpha^{-1}.\alpha = 1$ e

$$\left(\alpha^{-1}.\alpha\right).u = \alpha^{-1}.0 = 0 \Longrightarrow 1.u = 0.$$

2ª Parte:

O espaço vetorial é normado; assim, podemos usar a definir da noma euclidiana $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ e suponha $u \neq 0$, então, $\|u\|^2 \neq 0$,teremos:

$$\alpha.u = 0 \Longrightarrow \langle \alpha.u, u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha.\,\|u\|^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{0}{\|u\|^2} = 0.$$

De sorte que:

$$\alpha = 0 \text{ ou } u = 0.$$

74. Sejam a_1 e a_2 números reais positivos. Prove que:

$$\left(a_1 + a_2\right).\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geq 4.$$

Generalize.

Sejam $a_j \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo); com $a_j > 0$,para todo $j = 1, 2, \ldots, n.$

Mostre que:

$$\left(a_1 + \ldots + a_n\right).\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Prova:

Não faremos o caso particular (Fica como exercício!)

Sejam $a_j \in \mathbb{R}$,com $a_j > 0$,para todo $j = 1, 2, \ldots, n,$ então, façamos por simplicidade

$$u = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) \text{ e } v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

Além disso, veja que resultados lindos e elegantes, usando a norma euclidiana e o produto interno usual, temos:

$$\|u\| = \sqrt{a_1 + \ldots + a_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \; \|v\| = \sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}$$

e

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right) = \sqrt{a_1}.\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \sqrt{a_n}.\frac{1}{\sqrt{a_n}} = n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o belíssimo resultado:

$$n = \left|\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j}.\frac{1}{\sqrt{a_j}}\right| \leq \sqrt{a_1 + \ldots + a_n}.\sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

e, portanto, elevando-se ao quadrado, ambos os membos da desigualdade, vem:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n) . \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

75. Sejam a_1 e a_2 números reais positivos. Prove que:

$$(a_1 + a_2) . \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \geq 4.$$

Generalize.

Sejam $a_j \in \mathbb{R}$(corpo ordenado completo); com $a_j > 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n.$ Mostre que:

$$(a_1 + \ldots + a_n) . \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Prova:

À luz dadas desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}. \qquad (1)$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)}{n}. \qquad (2)$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \cdot \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} = \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}.\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} = 1,$$

obtemos:

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

76. Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,mostre que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|u\|_s \leq \|u\| \leq \|u\|_s,$$

onde: $\|u\|_s = |x| + |y|$ (norma da soma) e $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma euclidiana).

Prova:

Com efeito,

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = \|u\|_s \Longrightarrow \|u\| \leq \|u\|_s. \qquad (1)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
(|x|-|y|)^2 &\geq 0 \Longleftrightarrow 2\left(|x|^2+|y|^2\right) \geq |x|^2+2|x||y|+|y|^2 \\
&\Longleftrightarrow 2\|u\|^2 \geq (|x|+|y|)^2 = \|u\|_s \qquad (0.1)\\
&\Longleftrightarrow \sqrt{2}\|u\| \geq \|u\|_s \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_s \leq \|u\|. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Agora, de (1) e (2) ; obtemos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\|u\|_s \leq \|u\| \leq \|u\|_s ,$$

77. Dê um contra-exemplo para mostrar que as normas da soma e do máximo não satisfazem a identidade do paralelogramo.

Solução:

A Identidade do pararelogramo, é dada por:

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

(i)Sejam $u=(x,y)$ e $\|u\|_s = |x|+|y|$ (norma da soma)

Sejam $e_1=(1,0)$ e $e_2=(0,1)$,então, temos: $\begin{cases} e_1+e_2=(1,1) \\ \text{e} \\ e_1-e_2=(1,-1). \end{cases}$

Assim,

$$\|e_1\|_S = |1|+|0| = 1, \|e_2\|_S = |0|+|1| = 1, \|e_1+e_2\|_S = 2 \text{ e } \|e_1-e_2\|_S = 2.$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\|e_1+e_2\|_S^2+\|e_1-e_2\|_S^2 &= 2^2+2^2 = 8 \\
&\text{e} \\
2\left(\|u\|_S^2+\|v\|_S^2\right) &= 2\left(1^2+1^2\right) = 4.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \neq 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

(ii) Sejam $u=(x,y)$ e $\|u\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$ (norma do máximo ou supremo)

Consideremos, $e_1=(1,0)$ e $e_2=(0,1)$, então, tem-se:

$$\|u\|_\infty = \max\{|1|,|0|\} = 1$$

e

$$\|v\|_\infty = \max\{|0|,|1|\} = 1$$

$e_1+e_2=(1,1)$ e $e_1-e_2=(1,-1)$. Assim, vem:

$$\|u+v\|_\infty = \max\{|1|,|1|\} = 1$$

e

$$\|u-v\|_\infty = \max\{|1|,|-1|\} = 1$$

Logo,

$$\|u+v\|_\infty^2 + \|u-v\|_\infty^2 = 1^2+1^2 = 2$$

e

$$2\left(\|u\|_\infty^2 + \|v\|_\infty^2\right) = 2\left(1^2+1^2\right) = 4.$$

De sorte que: Portanto,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \neq 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

78. Seja $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: $\mathbb{A}$ é ortogonal. Então, prove que:

$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, conclua daí que: $\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$. .

($\mathbb{A}$ é ortogonal, quando: $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$)

Prova:

Considere a base canônica α de $\mathbb{R}^n$

$\alpha = \{(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$.Assim, temos:

$$u = (x_1, x_2 \ldots, x_n) = x_1 (1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Desta forma, a matriz de coordenadas do vetor u na base canônica é dada por:

$$[u]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \in \mathbb{R}^{nx1},\ x^t x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1xn} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

$$x^t x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|x\|^2.$$

Daí, vem:

$$\|\mathbb{A}x\|^2 = (\mathbb{A}x)^t (\mathbb{A}x) = x^t(\mathbb{A}^t\mathbb{A})x = x^t x = \|x\|^2.$$

Logo,

$$\|\mathbb{A}x\| = \|x\|.$$

Decorre do delineado acima que:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}(x-y)\|^2 &= \|x-y\|^2 \\ \|\mathbb{A}x\|^2 - 2\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle + \|\mathbb{A}y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$$

79. $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = x + y\}$.Obter uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$..

Solução:

$(A)\ (x, y, z) \in \mathbb{W}\colon\ z = x + y.$

Assim,

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = x\,(1, 0, 1) + y\,(0, 1, 1)\,.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)]\,.$$

Afirmação: $\beta = \{(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\}$é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1\,(1, 0, 1) + \lambda_2\,(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{array}\right.$$

Logo, $\beta = \{(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\}$é L.I. Consequentemenete, vem: βé uma base para $\mathbb{W}$e dim $\mathbb{W} = 2$.

80. Seja $\mathbb{W} = \{(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{P}_2\,(\mathbb{R}) : c = 0\}$ um subespaço. Obter uma base para $\mathbb{W}$e dim $\mathbb{W}$..

Solução:

$(A)\ ax^2 + bx + c \in \mathbb{W}\colon\ c = 0.$

Assim,

$$ax^2 + bx + c = a.x^2 + b.x.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = \left[x^2, x\right].$$

(B) Afirmação: $\beta = \{x^2, x\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x = 0x^2 + 0x \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{x^2, x\}$ L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 2$..

81. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$ um subespaço. Obter uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$.

Solução:

Observe que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W}$: $b = c$.

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + bA_2 + cA_3, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [A_1, A_2, A_3].$$

Afirmação: $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$$

Logo, $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}=3$..

82. Considere $\mathbb{W}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\mid b=c=0\right\}$ um subespaço. Obter uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$.

Solução:

Observe que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathbb{W}$: $b=c=0$.

Assim,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &= aA_1+dA_2,\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W}=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=[A_1, A_2].$$

(C) Afirmação: $\beta=\{A_1, A_2\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0.\end{cases}$$

Logo, $\beta=\{A_1, A_2\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}=2$.

83. Determine os subespaços gerados por:

$u_1 = (-1, 2)$ e $u_2 = (2, -4)$;

Solução:

Queremos determinar o subespaço

$$\mathbb{W} = \left\{ v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \right\}.$$

Vejamos

$$(x, y) = \lambda_1 (-1, 2) + \lambda_2 (2, -4) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 = y \end{array} \right. .$$

Assim, fazendo $2E_1 + E_2 \longrightarrow E_2$,obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ 0 = 2x + y. \end{array} \right.$$

Portanto, o subespaço $\mathbb{W}$será descrito por:

$$\mathbb{W} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x \right\}.$$

84. Determine os subespaços gerados por:

$p_1(x) = x^2$ e $p_2(x) = x^2 + x$.

Solução:

Queremos determinar o subespaço

$$\mathbb{W} = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : ax^2 + bx + c = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \left(x^2 + x\right) \right\}.$$

Agora, fazendo algumas operações e da igualdade de polinômios,obtemos:

$$ax^2 + bx + c = (\lambda_1 + \lambda_2) x^2 + \lambda_2 x \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_2 = b \\ 0 = c \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda_1 = a - b \\ \lambda_2 = b \\ 0 = c. \end{array} \right.$$

De sorte que: o subespaço desejado é delineado por:

$$\mathbb{W} = \left\{ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : c = 0\right\}.$$

85. Seja $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : b = c \right\}$.Pede-se:

(A) Provar que: $\mathbb{W}$ é um subespaço.

(B) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(C) Uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$.

Prova:

$$(A)\ (i) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}?\ \text{Visto que: } 0_a = 0_b = 0_c = 0_d.$$

$$(ii)\ \forall A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}, \text{ tem-se:}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

$$(iii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}, \text{ tem-se:}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{W}.$$

Portanto, $\mathbb{W}$ é um subespaço.

$$(B) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{W}:\ b = c.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= aA_1 + bA_2 + cA_3, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbb{W} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [A_1, A_2, A_3].$$

(C) Afirmação: $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{A_1, A_2, A_3\}$ é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 3$..

86. Seja $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y = 0\}$ um subespaço. Pede-se:

(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e dim$\mathbb{W}$..

Solução:

(A) $(x, y, z) \in \mathbb{W}$: $z = -y$.

Assim,

$$(x, y, -y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -1).$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [(1, 0, 0), (0, 1, -1)].$$

Afirmação: $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, -1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{(1,0,0),(0,1,-1)\}$ é L.I. Consequentemenete, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 2$.

87. Seja $\mathbb{W} = \{(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : c = 0\}$ um subespaço. Pede-se:

(A) Obter um conjunto gerador para $\mathbb{W}$.

(B) Uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W}$.

Solução:

(A) $ax^2 + bx + c \in \mathbb{W}$: $c = 0$.

Assim,

$$ax^2 + bx + c = a.x^2 + b.x.$$

Portanto,

$$\mathbb{W} = [x^2, x].$$

Afirmação: $\beta = \{x^2, x\}$ é linearmente independente L.I..

De fato, dada a equação:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x = ox^2 + 0x \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $\beta = \{x^2, x\}$é L.I. Por conseguinte, vem: β é uma base para $\mathbb{W}$ e dim $\mathbb{W} = 2$..

88. (i) Seja M uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,,prove que:

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^{A}M.$$

Prova:

Com efeito,

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

então,

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(M^{-1}AM)^j}{j!} = I + M^{-1}AM + \frac{(M^{-1}AM)^2}{2!} + \ldots + \frac{(M^{-1}AM)^n}{n!} + \ldots,$$

Daí, não esquecendo que a série converge uniformemente e

$$(M^{-1}AM)^j = M^{-1}A^jM$$

(É fácil ver por indução finita sobre n), segue-se que:

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IM + M^{-1}AM + \frac{(M^{-1}AM)^2}{2!} + \ldots + \frac{(M^{-1}AM)^n}{n!} + \ldots \\ &= M^{-1}\left(I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots\right)M \\ &= M^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}\right)M = M^{-1}e^AM. \end{aligned}$$

(ii)

$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}, \ \forall t \iff A$ comuta com B; com $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Prova:

$(\Longrightarrow)$ Se $e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}$,então, derivando ambos os lados, temos:

$$(A+B)\,e^{(A+B)t} = Ae^{At}.e^{Bt} + Be^{At}.e^{Bt}.$$

Agora, derivando novamente e fazendo $t = 0$,obtemos:

$$(A+B)^2\, e^{(A+B)t} = A^2 e^{At}.e^{Bt} + ABe^{At}.e^{Bt} + BAe^{At}.e^{Bt} + B^2 e^{At}.e^{Bt}.$$

Logo,

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Longleftrightarrow AB = BA.$$

$(\Longleftarrow)$ Se $AB = BA$,então, é fácil ver que:

$$X(t) = e^{At}.e^{Bt}$$

satisfaz ao problema de valor inicial (p.v.i)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A+B)\,X(t) \\ X(0) = I. \end{cases}$$

(Verifique!). Então, pela unicidade da solução temos:

$$X(t) = e^{(A+B)t}.$$

De sorte que:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt},\ \forall t$$

89. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}.$$

Pede-se:

$i)$ $Ker(T)$ e dim $Ker(T)$;

$ii)$ Uma base β para a Im (T). T é sobrejetora? Justifique.

Solução:

Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

$i)$ Afirmação: T não é injetora. De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker\,(T) = \left\{ (a_o, b_o, c_o) \in \mathbb{R}^3 ; T\,(a_o, b_o, c_o) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Com efeito, $T\,(a_o, b_o, c_o) = \begin{pmatrix} a_o - c_o & 0 \\ 0 & a_o + b_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} a_o - c_o = 0 \\ a_o + b_o = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_o = a_o \\ b_o = -a_o \end{cases}$. Portanto,

$Ker\,(T) = \{(a_o, -a_o, a_o) \in \mathbb{R}^3 ; a_o \in \mathbb{R}\} = [(1,-1,1)]$.

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, dim $Ker\,(T) = 1$.

(ii) Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$3 = \dim \mathbb{R}^3 = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2,$

$\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$ e $\dim \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R}) = 4$. Assim, $\mathrm{Im}\,(T) \neq \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$ e, portanto,

T é não é sobrejetora.

Vamos determinar os geradores para $\mathrm{Im}\,(T)$:

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, vem: $\mathrm{Im}\,(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$. Como dim $\mathrm{Im}(T) = 2$, , segue-se que $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ uma base para $\mathrm{Im}(T)$..

90. Considere uma transformação linear $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ se dim $\mathbb{U} >$ dim $\mathbb{V}$..

Prove que existe um vetor não nulo $u_0 \in \mathbb{U}$ tal que $F(u_0) = 0$ (vetor nulo de $\mathbb{V}$).

Prova:

Suponha que $\mathrm{Ker}\,(F) = \{0\}$,então, dim $\mathrm{Ker}\,(F) = 0$.

Agora, pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$\dim \mathbb{U} = \dim \mathrm{Ker}\,(F) + \dim \mathrm{Im}\,(F) = \dim \mathrm{Im}\,(F) > \dim \mathbb{V}.$$

Absurdo! Pois, supomos $\mathrm{Ker}\,(F) = \{0\}$.

De sorte que: existe $u_0 \neq 0, u_0 \in \mathbb{U}$ tal que: $F(u_0) = 0$.

91. Seja $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear satisfazendo a seguinte propriedade: Se $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{U}$ então,

$$\gamma = \{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)\}$$

é L.I. em $\mathbb{V}$. Prove que: F é injetora.(**por definição**).

L.I. =linearmente independente

Prova:

Queremos mostrar que: F é injetora, isto é,

$$\forall u, v \in \mathbb{U} : F(u) = F(v) \Longrightarrow u = v.$$

Com efeito, $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de $\mathbb{U}$,então, existem

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{R}, \text{ tais que: } \begin{cases} u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \\ \text{e} \\ v = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \{u - v = (\alpha_1 - \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) u_n. \tag{1}$$

Além disso,

$$F(u) = F(v) \Longrightarrow F(u) - F(v) = 0 \Longrightarrow F(u - v) = 0 \tag{2}$$

Daí, substituindo (1) em (2), obtemos:

$$\begin{aligned} F(u - v) &= F[(\alpha_1 - \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) u_n] = 0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1) F(u_1) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) F(u_n) = 0. \end{aligned}$$

Como $F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)$ são linearmente independentes, segue-se que:

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\alpha_1 - \beta_1) = 0 \\ \vdots \\ (\alpha_n - \beta_n) = 0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \beta_n. \end{cases} \Longrightarrow u = v.$$

Logo, F é injetora.

92. Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d, a - d, b + c).$$

Pede-se:

(i) Ker (T) e dim Ker (T)

(ii) dim Im (T) e uma base para Im (T).

Solução:

Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por:

$$T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a+d, a-d, b+c) \,.$$

$i)$ De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker\,(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})\,; T\left[\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}\right] = (0,0,0) \right\}.$$

Com efeito, $T\left[\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}\right] = (a_0+d_0, a_0-d_0, b_0+c_0) = (0,0,0)$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 + d_0 = 0 \\ a_0 - d_0 = 0 \\ b_0 + c_0 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_0 = d_0 = 0 \\ c_0 = -b_0 \end{array} \right.$$

. Portanto,

$$Ker\,(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ -b_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})\,; b_0 \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, dimKer $(T) = 1$.

(ii) Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$4 = \dim \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3.$$

$$\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ e } \dim\,(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Vamos determinar os geradores para $\mathrm{Im}\,(T)$:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= (a+d, a-d, b+c) \\ &= a\,(1,1,0) + d\,(1,-1,0) + b\,(0,0,1) + c\,(0,0,1)\,. \end{aligned}$$

Daí, vem: $\operatorname{Im}(T) = [(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1),(0,0,1)]$.Como dim $\operatorname{Im}(T) = 3$ segue-se que $\beta = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\operatorname{Im}(T)$.

93. Determine $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é uma transformação linear dada por: uma contração de fator $\frac{1}{2}$ seguida de uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{3}$ rad :

Destaque $[A]$.

Com efeito,

$$A = R_{(\pi/3)} \circ C_{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "C_{\left(\frac{1}{2}\right)}"] \arrow[dr] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "R_{(\pi/3)}"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} [A] &= \left[A = R_{(\pi/3)} \circ C_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \left[R_{(\pi/3)}\right]\left[C_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\sqrt{3}y}{4} \\ \frac{\sqrt{3}x+y}{4} \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$A(x,y) = \left(\frac{x-\sqrt{3}y}{4}, \frac{\sqrt{3}x+y}{4}\right).$$

91. Sejam $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ e $G : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ transformações lineares, tais que:

$Ker\,(F) = \{0\}$ e $Ker\,(G) = \{0\}$. Mostre que: $Ker\,(G \circ F) = \{0\}$

(ii) Prova:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \xrightarrow{F} & \mathbb{V} \\ G \circ F & \searrow & \downarrow G \\ & & \mathbb{W}. \end{array}$$

Seja $u_0 \in Ker\,(G \circ F)$,então, $(G \circ F)\,(u_0) = G\,(F\,(u_0)) = 0$ e

$Ker\,(G) = \{0\} \Rightarrow F\,(u_0) = 0$ e $Ker\,(F) = \{0\} \Rightarrow u_0 = 0.$

Portanto, $Ker\,(G \circ F) = \{0\}$

94. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por:

$$T\,(x, y) = (x + y, 4y)\,.$$

Determine seus autovalores e autovetores correspondentes.

Solução:

Com efeito, a matriz de T na base canônica é dada por:

$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$,então a equação característica é descrita por:

$$p\,(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)\,.\,(4-\lambda) = 0$$

$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 4 \end{cases}$ ou são os autovalores. determinemos os autovetores corres pondentes.

1º Caso: $\lambda = 1$:

$$\begin{aligned}(A-\lambda I_2).X &= 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 0x+2y=0 \\ 0x+3y=0 \end{cases} \Longrightarrow y=0.\end{aligned}$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x\,(1,0)$,com $x \neq 0$ ou ainda,

$S_1 = \{x\,(1,0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,0)]$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $\lambda = 4 : (A-\lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} -3x+y=0 \\ 0x+0y=0 \end{cases} \Longrightarrow y = 3x.$ Logo, o autovetor é: $v_2 = x\,(1,3)$,com $x \neq 0$, dito de outro modo temos:

$S_2 = \{x\,(1,3) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,3)]$

95. Seja $S : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por:

$$S\,(p\,(x)) = \int_0^1 p\,(x)\,dx.$$

(i) Prove que S não é injetora e obtenha dim Ker (S).

(ii) Interprete geometricamente Ker (S).

(iii) Mostre que $S\,(a) = a$.Conclua daí que S é sobrejetora.

Prova:

(i) Seja $p\,(x) = ax+b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$,então, temos:

$$S\left(p\left(x\right)\right)=S\left(ax+b\right)=\int_0^1\left(ax+b\right)dx=a\frac{x^2}{2}+bx\Big|_0^1=\frac{a}{2}+b.$$

Agora, vamos determinar o núcleo de S:

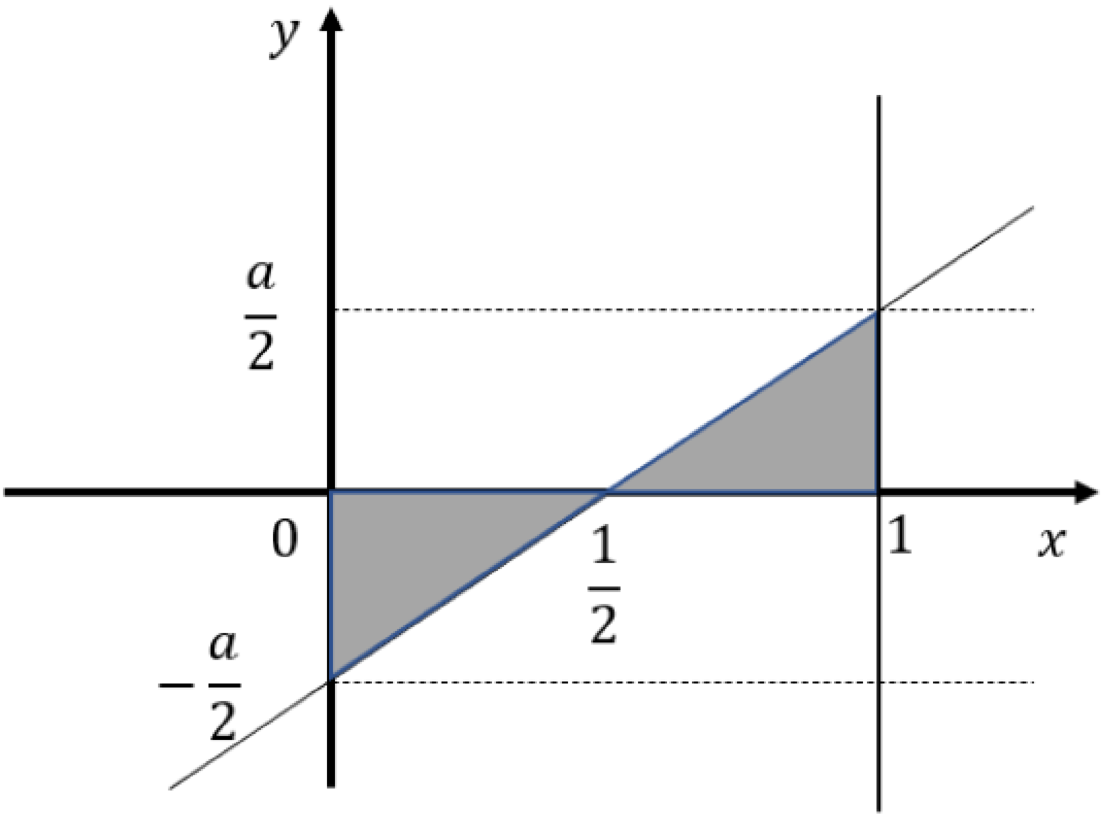
$$\mathrm{Ker}\left(S\right)=\left\{\left(a_0x+b_0\right)\in\mathbb{P}_1\left(\mathbb{R}\right);\ S\left(a_0x+b_0\right)=0\right\}.$$

Assim, $S\left(a_0x+b_0\right)=\frac{a_0}{2}+b_0=0\Longrightarrow b_0=-\frac{a_0}{2}$,e portanto,

$$\mathrm{Ker}\left(S\right)=\left\{a_0.\left(x-\frac{1}{2}\right)\in\mathbb{P}_1\left(\mathbb{R}\right);\ a_0\in\mathbb{R}\right\}=\left[x-\frac{1}{2}\right].$$

Desta forma, obtemos: S não é injetora.

(ii) Interprete geometricamente Ker (S)..



$$(iii)\ S(a)=\int_0^1 a\,dx = ax|_0^1 = a,\ \forall a\in\mathbb{R}\Longrightarrow \operatorname{Im}(S)=\mathbb{R}.$$

Portanto, S é sobrejetora.

96. Prove que: O espaço das transformações lineares de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$,tais que: dim $\mathbb{U}=n$ e dim $\mathbb{V}=m$ é isomorfo ao espaço das matrizes de ordem $m\times n$ com entradas reais, ou seja, $L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e, denotamos por:

$$L(\mathbb{U};\mathbb{V})\simeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

A fixação das bases $\beta\subset\mathbb{U}$ e $\beta'\subset\mathbb{V}$ determina portanto uma transformação

$$\begin{array}{rl}\Phi: & L(\mathbb{U};\mathbb{V}) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{R})\\ & f\longmapsto \Phi(f)=[A]_{\beta'}^{\beta}=\mathbb{M}(f)\end{array}$$

Prova:

Afirmação 1: Φ é linear

$$(i)\ \Phi(f_1+f_2)=[A_1+A_2]_{\beta'}^{\beta}=[A_1]_{\beta'}^{\beta}+[A_2]_{\beta'}^{\beta}=\Phi(f_1)+\Phi(f_2)$$
$$(ii)\ \Phi(\lambda f_1)=[\lambda A_1]_{\beta'}^{\beta}=\lambda[A_1]_{\beta'}^{\beta}=\lambda\Phi(f_1).$$

Portanto, Φ é linear.

Afirmação 2: Φ é injetora

De fato, Ker $(\Phi)=\{f\in L(\mathbb{U};\mathbb{V}):\Phi(f)=0\}$.

Vejamos $\Phi(f)=[A]_{\beta'}^{\beta}=\mathbb{M}(f)=0,$

Como $[f(u)]_{\beta'}=[A]_{\beta'}^{\beta}[u]_{\beta}=0$,segue-se que:

$f(u)=0,\ \forall u\in\mathbb{U}$.Consequentemente, vem: $f\equiv 0$.

Logo, Ker $(\Phi) = \{0\}$,ou ainda, Φ é injetora.

Afirmação 3: Φ é sobrejetora

$\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \exists f \in L(\mathbb{U};\mathbb{V})$, tal que:

$$\Phi(f) = [A]_{\beta\prime}^{\beta} = \mathbb{M}(f) = B$$

Consideremos $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$, tal que:

$$f(u_1) = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \ldots + b_{m1}v_m$$

$$f(u_2) = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \ldots + b_{m2}v_m$$

$$-- - - - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ -$$

$$f(u_n) = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + \ldots + b_{mn}v_m.$$

Então, temos:

$$\mathbb{M}(f) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B^1 & B^2 & \ldots & B^j & \ldots & B^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{m\times n} = B.$$

De sorte que: Φ é sobrejetora.

Por conseguinte, obtemos:

$L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

97. Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ tais que: dim $\mathbb{U} = n$ e dim $\mathbb{V} = m$.. Então, o espaço $L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ tem dimensão $m.n$

Prova:

Sejam β e β', as bases respectivamente de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$..

$\mathbb{U} \xrightarrow{T} \mathbb{V},\ \Phi : L(\mathbb{U};\mathbb{V}) \longrightarrow M_{mxn}(\mathbb{R})$, temos então,

$$\Phi(T) = [T]_{\beta'}^{\beta} \Longrightarrow \dim L(\mathbb{U};\mathbb{V}) = \dim M_{mxn}(\mathbb{R}) = m.n$$

98. Seja $T \in L(\mathbb{U})$,tal que: dim $\mathbb{U} = n$.Então, prove que:

$$\dim \operatorname{Ker}(T) . \dim \operatorname{Im}(T) \leq \frac{n^2}{4}.$$

Prova:

Basta notar que: $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.onde $a = \dim \operatorname{Ker}(T)$ e $b = \dim \operatorname{Im}(T)$.

Assim, usando o teoremado Núcleo e da Imagem, obtemos:

$$\dim \operatorname{Ker}(T) . \dim \operatorname{Im}(T) \leq \left(\frac{\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)}{2}\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}.$$

Portanto,

$$\dim \operatorname{Ker}(T) . \dim \operatorname{Im}(T) \leq \frac{n^2}{4}.$$

99. Sejam $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $S : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ transformações lineares, definidas por:

$$(i) \quad T(A) = A^t \qquad \text{e} \qquad (ii) \quad S(A) = tr(A).$$

Pede-se:

(i) $S \circ T$ e $\operatorname{Ker}(S \circ T)$ (ii) $\dim \operatorname{Im}(S \circ T)$. $S \circ T$ é sobretejora?

(ii) Qual é a $\dim \operatorname{Ker}(S \circ T)$?

Prova:

(i) $(S \circ T)(A) = S(T(A)) = S(A^t) = tr(A^t) = tr(A)$, onde:

$$tr\,(A) = \sum_{j-1}^{n} a_{jj} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

É o traço da matriz A.

Núcleo de $S \circ T$ é

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(S \circ T) &= \{A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) ; (S \circ T)(A_0) = 0\} \\ &= \{A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) ; (S \circ T)(A_0) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0\}. \end{aligned}$$

(ii) Com efeito,

$$S \circ T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

então, tem-se:

$$\dim \operatorname{Im}(S \circ T) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 0 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \dim \operatorname{Im}(S \circ T) = 1 \text{ e } \operatorname{Im}(S \circ T) \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{Im}(S \circ T) = \mathbb{R}.$$

De sorte que: $S \circ T$ é sobrejetora.

(iii) Decorre do Teorema do Núcleo e da Imagem que:

$$\dim \operatorname{Ker}(S \circ T) + \dim \operatorname{Im}(S \circ T) = n^2 \Longrightarrow \dim \operatorname{Ker}(S \circ T) = n^2 - 1$$

100. Seja $\mathbb{V} = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ espaço de todos os polinômios e sejam $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformações lineares, definidas por:

$$(i) \quad S[p(x)] = p'(x) \qquad \text{e} \qquad (ii) \quad T(p(x)) = xp(x).$$

Então, verifique se:

$$(i)\ S \circ T - T \circ S = I \qquad (ii)\ S \circ T^m - T^m \circ S = mT^{m-1},\ m \geq 2.$$

Prova:

Com efeito,

$$(S \circ T)(p(x)) = S[T(p(x))] = S[xp(x)] = [xp(x)]' = p(x) + xp'(x) \qquad (1)$$

Procedendo de forma análoga, temos:

$$(T \circ S)(p(x)) = T[S(p(x))] = T[p'(x)] = xp'(x). \qquad (2)$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$(S \circ T)(p(x)) - (T \circ S)(p(x)) = p(x) = I[p(x)].$$

De sorte que:

$$S \circ T - T \circ S = I.$$

(ii) Consideremos, a priori,

$$\begin{aligned} T^2(p(x)) &= (T \circ T)(p(x)) = T[T(p(x))] \\ &= T[xp(x)] = x[xp(x)] = x^2 p(x). \end{aligned}$$

Agora, continuando com o processo, vem:

$$T^m(p(x)) = x^m p(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (S \circ T^m)(p(x)) &= S[T^m(p(x))] = S[(x^m p(x))] \\ &= [(x^m p(x))]' = mx^{m-1} p(x) + x^m p'(x) \qquad (3) \end{aligned}$$

Além disso,temos:

$$(T^m \circ S)(p(x)) = T^m[S(p(x))] = T^m[p'(x)] = x^m p'(x). \qquad (4)$$

Consequentemente, de (3) e(4) ; obtemos::

$$\begin{aligned}(S \circ T^m)(p(x)) - (T^m \circ S)(p(x)) &= mx^{m-1}p(x) = mT^{(m-1)}(p(x)) \\ (S \circ T^m - T^m \circ S)(p(x)) &= \left(mT^{(m-1)}\right)(p(x)),\ n \geq 2.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$S \circ T^m - T^m \circ S = mT^{(m-1)}.$$

Observação:

$\mathbb{P}(\mathbb{R})$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão infinita, ou seja, dim $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \infty$. Vale ressaltar que em dimensão finita, não vale.

Conjectura:

Este resultado continua válido em espaço de dimensão finita? A resposta é não, o que seja delineado no problema a seguir.

101. Não existem matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tais que:

$$AB - BA = I.$$

Prova:

Suponha válido, então, usando o traço da matriz identidade,

vem: $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(I) = n.$

Por outro lado, tem-se:

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}B_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i}A_{i\alpha} = \operatorname{tr}(\mathbb{BA}).$$

Assim,

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) - \operatorname{tr}(\mathbb{BA}) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(\mathbb{AB} - \mathbb{BA}) = tr(I) = 0.$$

Absurdo! Visto que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Portanto, tais matrizes não existem satisfazendo

$$AB - BA = I.$$

102. Seja $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, prove que::

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M}\,\|X\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Conclua daí que: T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

Prova:

Seja $X \in \mathbb{R}^m$ então, tem-se: $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ e $e_j = (0, \ldots, 0, 1)$. desta forma, vem:

$$X = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_m.$$

Assim,

$$T(X) = T\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_m),$$

por conseguinte, obtemos:

$$\|T(X)\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j|\,\|T(e_j)\| \leq \|X\| \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\| = \mathbb{M}\,\|X\|.$$

Onde $\mathbb{M} = \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\|$ de modo que:

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M}\,\|X\|_{\mathbb{R}^m},\ \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

Como T é linear, temos:

$T(X - X_0) = T(X) - T(X_0)$ para todo $X_0 \in \mathbb{R}^m$, segue-se daí que

$$\|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M}\,\|X - X_0\|\,.$$

(T é Lipschitziana).

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbb{M}} > 0$., tal que:

$$\|X - X_0\| < \delta \Longrightarrow \mathbb{M}\,\|X - X_0\| < \varepsilon \Longrightarrow \|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M}\,\|X - X_0\| < \varepsilon.$$

Portanto, T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

103. Sejam $T \in L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ e $G \in L(\mathbb{V};\mathbb{W})$,prove que: $G \circ T : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$ é linear.

Observação:

$L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é o espaço de todas as transformações lineares de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$.

Prova:

Sejam G e T transformações lineares, então, queremos mostrar que:

$$G \circ T : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$$

é linear.

$(i)\ \forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$,tem-se:

$$\begin{aligned}(G \circ T).(u_1 + u_2) &= G[T(u_1 + u_2)] = G[T(u_1) + T(u_2)] \\ &= G[T(u_1)] + G[T(u_2)] \\ &= (G \circ T)(u_1) + (G \circ T)(u_2)\,.\end{aligned}$$

$(ii)\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u_1 \in \mathbb{U}$,obtem-se:

$$\begin{aligned}(G \circ T) . (\lambda u_1) &= G\left[T(\lambda u_1)\right] = G\left[\lambda T u_1)\right] = \lambda G\left[T(u_1)\right] \\ &= \lambda (G \circ T)(u_1) .\end{aligned}$$

Logo, $G \circ T : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$ é linear.

104. Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$,definida por:

$$T(a, b) = ax + b$$

Mostre que:

(A) T é linear (b) T é injetora por definição. (c) T é sobrejetora por definição.

(B) T é bijetora (prove!)

(A) (i) Afirmação 1:

Prova:

Queremos provar que T é injetora:

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2 : T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

De fato, $\forall u_1 = (a_1, b_1), u_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$,tem-se:

$$\begin{aligned}T(u_1) &= T(u_2) \Longrightarrow T(a_1, b_1) = T(a_2, b_2) \Longrightarrow a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2 \\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a_1 = a_2 \\ \text{e} \\ b_1 = b_2 \end{array}\right. \Longrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.\end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora por definição.

(ii) Afirmação 2:

Queremos provar que T é sobrejetora:

$$\forall p_0(x) = a_0x + b_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) ; \exists u_0 = (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 : T(u_0) = p_0(x) .$$

Com efeito, $T(u_0) = T(a_0, b_0) = a_0x + b_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$,daí, obtemos:

$\operatorname{Im}(T) = \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, ou seja, o contra-domínio $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ é igual a imagem de T.

Logo, T é sobrejetora, consequentemente, T é bijetora.

Obtenha a

$$T^{-1} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

105. Seja a transformação $T : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R})$,definida por:

$$T[p(x)] = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n,$$

onde: $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) =${$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polinômios}

Prove que : T é linear

Observação:

$$T[p(x)] = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^j(0)}{j!}x^j = \frac{p^0(0)}{0!}x^0 + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x + \ldots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n.$$

Prova:

$(i)\ \forall p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$,temos:

$$\begin{aligned}
T\left[(p+q)(x)\right] &= (p+q)(0)+\frac{(p+q)'(0)}{1!}x+\frac{(p+q)''(0)}{2!}x^2 \\
&\quad +\ldots+\frac{(p+q)^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= \left[p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\
&\quad +\left[q(0)+\frac{q'(0)}{1!}x+\frac{q''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{q^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\
&= T\left[p(x)\right]+T\left[q(x)\right].
\end{aligned}$$

$(ii)\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall p\in\mathbb{P}(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\begin{aligned}
T\left[(\lambda p)(x)\right] &= (\lambda p)(0)+\frac{(\lambda p)'(0)}{1!}x+\frac{(\lambda p)''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{(\lambda p)^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= \lambda\left[p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\
&= \lambda T\left[p(x)\right].
\end{aligned}$$

Portanto, T é linear.

106. (Norma Euclidiana)

Seja $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,então, prove que:

$$|x_j|\leq\|x\|\leq\sqrt{n}\mathbb{M},$$

onde: $\mathbb{M}=\sup\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$para todo $j=1,2,\ldots,n.$

Prova: Basta notar que:

$$|x_j|^2\leq\|x\|^2=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2,$$

tomando-se: $\mathbb{M}=\sup\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$,vem:

$$|x_j|^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \overbrace{\mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^2 + \ldots + \mathbb{M}^2}^{n \text{ vezes}} = n\mathbb{M}^2,$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Portanto,

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\mathbb{M},$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Observação: Algumas Normas em $\mathbb{R}^n$.

(i) Norma Euclidiana:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

(ii) Norma da Soma:

$$\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

(iii) Norma do máximo (ou supremo):

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

(Em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes), em particular, em $\mathbb{R}^n$ temos:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_\infty.$$

107. (Projeção Estereográfica)

São necessárias duas cartas locais no mínimo para cobrir a esfera. Além disso, tem-se: um difeomorfismo local Considere $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e sejam

$N(0,0,1)$, tal que:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{X}_1 & : \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ & (u,v) \longmapsto & \mathbb{X}_1(u,v) = (x,y,z) \,. \end{array}$$

A equação da reta ξ que passa por $N(0,0,1)$ e $P(u,v,0)$ na direção $\overrightarrow{NP}$, é dada por:

$$\xi : X = (0,0,1) + (u-0, v-0, -1)\, r \Leftrightarrow X = (ur, vr, 1-r)\,. \qquad (I)$$

Agora, a intersecção da reta ξ com $\mathbb{S}^2$ é descrita por:

$$\begin{cases} X = (ur, vr, 1-r) \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow u^2r^2 + v^2r^2 + (1-r)^2 = 1$$ e, portanto,

$$r = 0 \text{ ou } r = \frac{2}{u^2+v^2+1}. \qquad \text{(II)}$$

Decorre de (I) e (II) que: $\mathbb{X}_1(u,v) = (x,y,z)$,onde: $\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$

Observação 1: A aplicação inversa de $\mathbb{X}_1$ $\left(\mathbb{X}_1^{-1} = \pi\right)$ é chamada de Projeção Estereográfica.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{X}_1^{-1} = \pi & : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) \longmapsto & \mathbb{X}_1^{-1}(x,y,z) = (u,v) \end{array}$$

(i) equação da reta γ que passa por $N(0,0,1)$ e $P_0(x,y,z)$ na direção do vetor $\overrightarrow{NP_0} = (x,y,z-1)$,é dada por:

$$\gamma : X_0 = (0,0,1) + (x,y,z-1)\,t \Leftrightarrow X = (xt, yt, 1+(z-1)\,t)\,.$$

(ii) A intersecção da reta γ com o plano $\alpha : z = 0$,produz o seguinte resultado:

$$1 + (z-1)\,t = 0 \Longrightarrow t = \tfrac{1}{1-z}, \text{ com } z \neq 1.$$

Assim,

$$X_0 = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right) \simeq \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = (u, v).$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \pi \quad : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow & & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto & & \pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right). \end{array}$$

Observação 2: Revisitando a Álgebra Linear: O $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço vetorial $\mathbb{U}$ de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$. Sugestão: Por simplicidade tome $T(x, y) = (x, y, 0)$ é trivial que T é um isomorfismo. Vale ressaltar que: podemos fazer a seguinte identificação $(x, y) \simeq (x, y, 0)$.

108. (Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $R)$ Escreva as esquações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N(0, 1)$ e $Q(u, 0)$ no plano. Mostre que, além do ponto N, essa reta corta a circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$ no ponto (x, y), onde $x = \frac{2u}{u^2+1}$ e $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$. Em seguida, escreva as equações paramétricas da reta que passa por $N(0, 1)$ e pelo ponto $P(x, y)$ da circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$. Mostre que está reta corta o eixo das abcissas no ponto $\xi(P) = (u, 0)$, onde $u = \frac{x}{1-y}$.. A função $\xi : C \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}$,definida por

$$\xi(P) = \xi(x, y) = u = \frac{x}{1-y},$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$,cuja inversa

$$\begin{array}{rcl} \xi^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{array}$$

tal que:

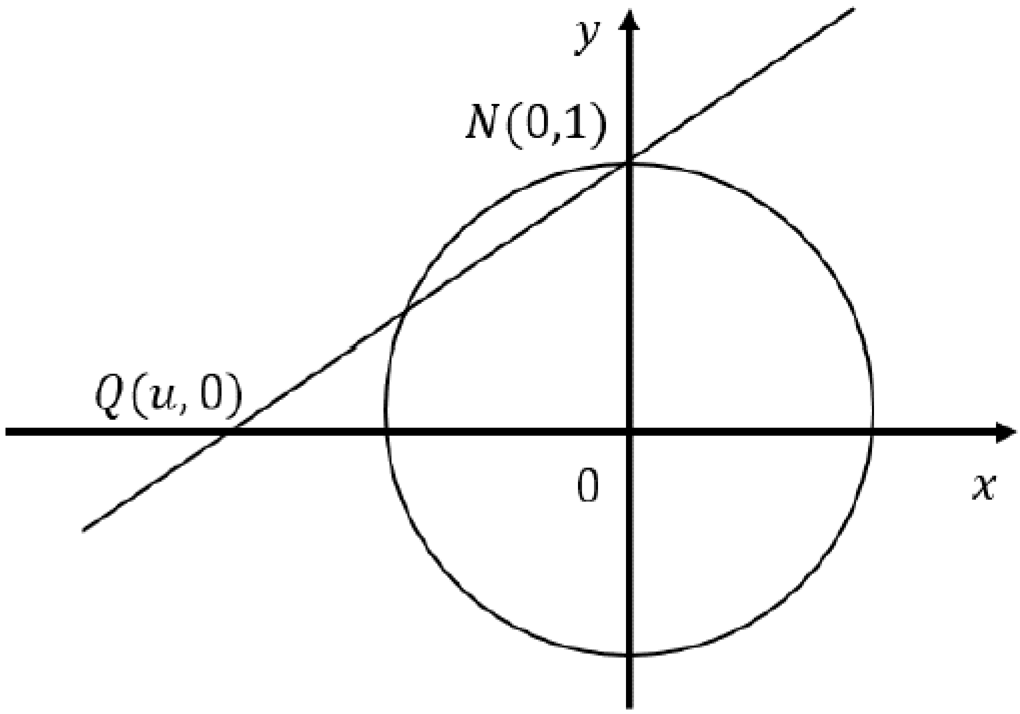
$$\begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}$$

A função ξ chama-se a projeção estereográfica de $C \setminus \{N\}$ sobre $\mathbb{R}$, e sua inversa fornece uma outra parametrização da circunferência (exceto o "polo norte" N) por meio de funções racionais.

Prova:

Projeção Estereográfica ξ e sua inversa em ξ^{-1} em $\mathbb{R}^2$..

A equação da circunferência dada por $C : x^2 + y^2 = 1$



(i) A equação da reta L que passa por $N(0,1)$ e $Q(u,0)$, é dada por:

$$X(t) = (x(t), y(t)) \text{ ,onde: } \begin{cases} x(t) = 0 + at \\ yt) = 1 + bt, \end{cases}$$

Sendo $v = (a,b) = \overrightarrow{NQ} = (u,-1)$ a direção de L.

Logo, $X(t) = (x(t), y(t)) = (ut, 1-t)$, onde:

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Afirmação: $L \cap C = \{P\}$,onde:

$$P(x, y)$$

Com efeito, $u^2t^2 + (1-t)^2 = 1$,então, temos: $(u^2+1)t^2 - 2t = 0$..

Portanto,

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{u^2+1} \qquad \text{(II)}$$

Agora, levando (II) em (I) ; obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+1} \\ y = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}$$

De sorte que: $P(x, y) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$.

(ii) A equação da reta que passa por $\mathrm{N}(0,1)$ e $P\left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$ cujo vetor diretor é $v_0 = \overrightarrow{NP}$ é descrita por:

$$L : \begin{cases} x_0 = 0 + \frac{2u}{u^2+1}t \\ y_0 = 1 - \frac{2}{u^2+1}t \end{cases} .$$

Agora, L corta o eixo xx em $Q(x_0, 0)$.

Portanto, $\xi(P) = \xi(x, y) = (u, 0)$, onde L : $\begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \Longrightarrow y = 1 - \frac{x}{u} \Longrightarrow x = (1-y)\,u \Longrightarrow u = \frac{x}{1-y},\ y \neq 1.$

Consequentemente, vem:

A Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$, ou seja, $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$ é um isomorfismo $(C \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R})$,onde:

$$\begin{array}{rcl} \xi & : & C \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \xi(x,y) = u = \dfrac{x}{1-y}. \end{array}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{array}{rcl} \xi^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}(u) = (x,y)\,, \end{array}$$

onde:

$$L : \begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}.$$

109. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, tal que: $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$..Prove que: f é linear.

A priori, vamos mostrar que:

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f(x)}{2^n},\ n \geq 1.$$

Prova:

De fato, para $n = 1$,temos: $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$ (hipótese) Suponha válido para $n-1$ ou seja,

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)=\frac{f(x)}{2^{n-1}},$$

então, falta mostrar para n.

Vejamos

$$f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)=f\left(\frac{1}{2}.\frac{x}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{f(x)}{2^{n-1}}=\frac{f(x)}{2^{n}},\ n\geq 1.$$

para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Além disso, $f(0)=f\left(\frac{0}{2}\right)=\frac{1}{2}f(0)\Longrightarrow f(0)=0$.

Agora, pela diferenciabilidade de f, temos:

$$Df(0).\xi=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\xi)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t\xi)}{t}.$$

Portanto,

$$Df(0).\xi=\lim_{t\to 0}\frac{f(t_n\xi)}{t_n},$$

Com $t_n=\frac{1}{2^n}\longrightarrow 0$,donde, obtemos:

$$Df(0).\xi=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{\xi}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2^n}f(\xi)}{\frac{1}{2^n}}=f(\xi)\Longrightarrow Df(0).\xi=f(\xi).$$

De sorte que: f é linear.

110. Seja $B:E\times F\to G$ uma aplicação bilinear. Se B é uniformemente contínua. Mostre que: $B\equiv 0$.

Prova:

Suponha que $B\neq 0$, então, existe $(x_0,y_0)\in E\times F$, tal que:

$$\alpha_0 = |B(x_0, y_0)| > 0.$$

Assim, tomando-se: $\begin{cases} x_n = nx_0 \\ x_n^* = nx_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) y_0 \\ y_n^* = ny_0 \end{cases}$,onde:

$z_n = (x_n, y_n)$ e $z_n^* = (x_n^*, y_n^*)$, vem:

$$\begin{aligned} \|z_n - z_n^*\| &= \|(x_n, y_n) - (x_n^*, y_n^*)\| = \left\| \left(nx_0, \left(n + \frac{1}{n}\right) y_0\right) - (nx_0, ny_0) \right\| \\ &= \left\| \left(0, \frac{1}{n} y_0\right) \right\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Agora,

$$|B(x_n, y_n) - B(x_n^*, y_n^*)| = \left| B\left(nx_0, \left(n + \frac{1}{n}\right) y_0\right) - B(nx_0, ny_0) \right|.$$

Usando o fato de que B é uma forma bilinear, obtemos:

$$\begin{aligned} |B(x_n, y_n) - B(x_n^*, y_n^*)| &= \left| B\left(nx_0, \frac{1}{n} y_0\right) \right| = \left| nB\left(x_0, \frac{1}{n} y_0\right) \right| \\ &= \left| n.\frac{1}{n} B(x_0, y_0) \right| = |B(x_0, y_0)| > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$|B(x_n, y_n) - B(x_n^*, y_n^*)| \nrightarrow 0.$$

Dito de outro modo, tem-se:

$$B \equiv 0, \text{ ou seja, } B(x_0, y_0) = 0 \ \forall (x_0, y_0) \in E \times F.$$

111. (Isomorfismo e espaço quociente)

Seja $T : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ uma transformação linear. Mostre que:

$\mathrm{Im}\,(T) \simeq \mathbb{U}/\mathrm{Ker}\,(T)$, onde $\mathbb{U}/\mathrm{Ker}\,(T)$ indica o espaço quociente de $\mathbb{U}$ por $\mathrm{Ker}\,(T)$..

Sugestão:

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathbb{U}/\mathrm{Ker}\,(T) &\longrightarrow \mathrm{Im}\,(T) \\ [x] &\longmapsto \Phi\,([x]) = T_x \end{aligned}$$

(i) Φ está bem definida

$[x_1] = [x_2] \Longrightarrow \Phi\,([x_1]) = \Phi\,([x_2]) \Longrightarrow T_{x_1} = T_{x_2}.$

(ii) Φ é injetora

(iii) Φ é sobrejetora por construção.

112: (Isomorfismo)

Prove que: $C\,([0,1])$ é isomorfo a $C\,([2,3])$,isto é, $C\,([0,1]) \simeq C\,[2,3]$. Vale destacar que:

$$C\,([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ uma função contínua}\}:$$

Prova:

Com efeito, $2 \leq x \leq 3 \Longleftrightarrow 0 \leq x - 2 \leq 1$,então podemos tomar

$$\begin{aligned} T: \quad C\,([0,1]) &\to \quad C\,[2,3] \\ f &\longmapsto \quad T\,(f)\,(x) = f\,(x-2)\,. \end{aligned}$$

É fácil ver que T é linear (Verifique!)

Provemos que T é um isomorfismo, por simplicidade façamos o seguinte:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad [2,3] &\to \quad [0,1] \\ x &\longmapsto \quad \varphi\,(x) = x - 2, \end{aligned}$$

de modo análogo, a inversa de φ será dada por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & [0,1] \rightarrow & & [2,3] \\ & (x-2) \longmapsto & \varphi^{-1}(x-2) = x. \end{array}$$

Além disso, observe o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & [2,3] \\ & \searrow & \downarrow g \\ go\varphi^{-1} & & \mathbb{R}. \end{array}$$

Afirmação 1: T é injetora

Seja $f_0 \in \operatorname{Ker}(T)$,então, $T[f_0](x) = (f_0 o\varphi)(x) = 0$, daí seque-se que:

$f_0 o\varphi$.Portanto,

$$(f_0 o\varphi)\, o\varphi^{-1} = 0.\varphi^{-1} = 0.$$

Dito de outro modo, temos:

$$f_0 o\left(\varphi o\varphi^{-1}\right) = f_0 = 0.$$

De sorte que: T é injetora.

Afirmação 2: T é sobrejetora

$\forall g \in C([2,3])\,,\ \exists\varphi^{-1} \in C([0,1]) : go\varphi^{-1} \in C([0,1])$,tal que:

$$T\left(go\varphi^{-1}\right) = go\left(\varphi^{-1}o\varphi\right) = g.$$

Portanto, T é sobrejetora.

Por conseguinte, T é um isomorfismo. Além disso, podemos escrever de outra forma:

$$C([0,1]) \simeq C[2,3]\,.$$

113. (Representação matricial de um número complexo)

A representação matricial de um número complexo $z = x + yi$ é dada pela função $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, onde:

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Sejam z, w dois números complexos, então, mostre que:

(i) $\Phi(z + w) = \Phi(z) + \Phi(w)$

(ii) $\Phi(z \cdot w) = \Phi(z) \cdot \Phi(w)$

(iii) $z \neq 0$,tem-se: $\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = [\Phi(z)]^{-1}$

(iv) Φ é injetora.

Prova:

Vamos considerar (i) e (ii) como triviais.

(iii) Nesta caso, basta observar que:

$$\Phi(1) = \Phi(1 + 0i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2,$$

onde: $\mathbb{I}_2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ é a matriz identidade do espaço de todas as matrizes de ordem 2 com entradas em $\mathbb{R}$. Desta forma é imeditato que:

$$\Phi(1) = \Phi\left(\frac{1}{z} \cdot z\right) = \Phi\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \Phi(z) = \mathbb{I}_2.$$

O descrito acima nos diz que $\Phi(z)$ é uma matriz invertível, sendo: $z \neq 0$.,além disso, nos dá:

$$\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = [\Phi(z)]^{-1}.$$

Dito de outra forma, $\Phi\left(\frac{1}{z}\right)$ que é a matriz do complexo $\frac{1}{z}$ dada pela matriz inversa de $\Phi(z)$.

(iv) Afirmação : Φ é injetora.

De fato, $\forall z_1 = x_1 + y_1 i$ e $\forall z_2 = x_2 + y_2 i$, com $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,temos:

$$\Phi(z_1) = \Phi(z_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 = z_2.$$

De sorte que: Φ é injetora.

Remark 1 *Poderíamos ter determinado o núcleo (kernel) do homomofismo* Φ *a saber:*

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\Phi) &= \left\{ z_0 = x_0 + y_0 i \in \mathbb{C} : \Phi(z_0) = \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_0 = 0 + 0i. \end{aligned}$$

Portanto,

$\text{Ker}(\Phi) = \{z_0 = 0 + 0i\} \Leftrightarrow \Phi$ é injetora.

114. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais,então, prove que:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_n y_n)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Prova: Ponha $f(t) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - t y_j)^2$, então, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2t \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + t^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &= At^2 - 2Bt + C \geq 0, \end{aligned}$$

onde: $A=\sum_{j=1}^{n} y_j^2$, $B=\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ e $C=\sum_{j=1}^{n} x_j^2$

$$f(t)=At^2-2Bt+C\geq 0 \Longleftrightarrow B^2\leq AC.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right).$$

115. Sejam K e L corpos. Uma função $f:K\to L$ chama-se um homomorfismo quando se tem

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \text{e} \quad f(x.y)=f(x).f(y)$$

quaisquer que sejam $x,y\in K$.

(i) Dado um homomorfismo $f:K\to L$, prove que: $f(0)=0$

(ii) Prove também que, ou $f(x)=0$ para todo $x\in K$, ou então, $f(1)=1$ e f é injetora.

Prova:

(i) Com efeito, $f(0+0)=f(0)+f(0)$, então, $f(0)=0$.

(ii) Note que:

$$f(1.1)=f(1).f(1)\Longrightarrow f(1)[1-f(1)]=0\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(1)=0 \\ \text{ou} \\ f(1)=1 \end{array}\right..$$

Assim, teremos dois casos a considerar.

1º Caso: $f(1)=0$ neste caso: $f(x)=f(x.1)=f(x).f(1)=f(x).0=0.$

Portanto,

$$f(x)=0,\ \forall x\in K.$$

2º Caso: $f(1)=1$ e f é injetora.

Afirmação: f é injetora: $\forall x_1, x_2 \in K : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Suponhamos $x_1 \neq x_2$,então, existe $b \in K : b \neq 0$, tal que:

$$(x_1 - x_2).b = 1$$

Agora,

$$f[(x_1 - x_2).b] = f(x_1 - x_2).f(b) = \overbrace{[f(x_1) - f(x_2)]}^{=0}.f(b) = 0. \qquad (1)$$

Por outro lado, temos:

$$f[(x_1 - x_2).b] = f(1) = 1 \qquad (2)$$

Consequentemente comparando (1) e (2), segue-se o absurdo!

Visto que supomos $x_1 \neq x_2$ e , portanto, $x_1 = x_2$.

Isto é, f é injetora.

116. Seja $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ um homomorfismo. Prove que, ou $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ ou $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Prova: $f(1) = [f(1)]^2 \Longrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ \text{ou} \\ f(1) = 1 \end{cases}$ (problema anterior).

Assim, teremos dois casos a analisar.

1º Caso: $f(x) = f(x.1) = f(x).f(1) = f(x).0 = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$.

2º Caso: $f(1) = 1$,neste caso, teremos:

$(i)\ x = n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 0$ é fácil ver que: $f(0) = 0$ e $\mathbb{Z}$

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\ldots+f(1)}_{n \text{ vezes}}) = nf(1) = n.$$

(ii) $x = m = -n,\ n > 0,\ m \in \mathbb{Z}$

$$0 = f(n+(-n)) = f(n) + f(-n) = n + f(-n) \Longrightarrow f(-n) = -n = m.$$

Logo,

$$f(m) = m,\ \forall x \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Observe que:

$$1 = f(1) = f\left(n.\frac{1}{n}\right) = \overbrace{f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ vezes}} = \overbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ vezes}} = n.f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Logo,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

(iv) $x = \frac{m}{n},\ m > 0,\ m \in \mathbb{Z}$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m \text{ vezes}}) = m.f\left(\frac{1}{n}\right) \underbrace{\Longrightarrow}_{m \text{ vezes}} f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

De sorte que:

$$f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Observação: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, dado $x_0 \in \mathbb{R}$,existe uma sequência de racionais (r_n) da densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$,,tal que:

$$r_n \to x_0 \text{ e } f(r_n) = r_n.$$

Agora, passando o limite e pela continuidade de f, temos:

$$f(x_0) = x_0, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

117. Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa no intervalo I, Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pertemcem a I, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ pertencem a $[0,1]$ e $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$, prove que:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j)$$

Prova:

Vejamos, basta usando indução finita sobre n.

(i) Para $n = 2$, temos:

$$\begin{array}{ccc} f(t_1 a_1 + t_2 a_2) & \leq & t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) \\ & \Updownarrow & \\ f\left(\sum_{j=1}^{2} t_j a_j\right) & \leq & \sum_{j=1}^{2} t_j f(a_j). \end{array}$$

(ii) Suponha válido para n (hipótese de indução) :

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j).$$

Então, falta mostrar para $n+1$.

De fato,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) &= f\left[\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) + t_{n+1} a_{n+1}\right] \\ &\underset{\text{hipótese de indução}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n} t_j f\left(a_j\right)\right) + t_{n+1} f\left(a_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} t_j f\left(a_j\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} t_j f\left(a_j\right).$$

118. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números não-negativos, com

$\sum_{i=j}^{n} t_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$. Prove que:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} \leq \sum_{j=1}^{n} t_j x_j,$$

onde o produtório e somatório são, descritos respectivamente por:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} = x_1^{t_1} . x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n.$$

Prova:

À luz do problema (A), tomando-se $f\left(x\right) = e^x$, temos:

$$\begin{array}{rcl} ft_1a_1 + t_2a_2 + \ldots + t_na_n & \leq & t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + \ldots + t_n f(a_n) \\ & \Updownarrow & \\ e^{t_1a_1+t_2a_2+\ldots+t_na_n} & \leq & t_1e^{a_1} + t_2e^{a_2} + \ldots + t_ne^{a_n} \\ & \Updownarrow & \\ (e^{a_1})^{t_1}.(e^{a_2})^{t_2}\ldots(e^{a_n})^{t_n} & \leq & t_1e^{a_1} + t_2e^{a_2} + \ldots + t_ne^{a_n} \end{array}$$

Daí, fazendo $e^{a_j} = x_j$, com $j = 1, 2, \ldots, n$, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} (e^{a_1})^{t_1}.(e^{a_2})^{t_2}\ldots(e^{a_n})^{t_n} & \leq & t_1e^{a_1} + t_2e^{a_2} + \ldots + t_ne^{a_n} \\ & \Updownarrow & \\ x_1^{t_1}.x_2^{t_2}\ldots x_n^{t_n} & \leq & t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n. \end{array}$$

De sorte que:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} \leq \sum_{j=1}^{n} t_jx_j,$$

119. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, definida por:

$$T(x, y, z) = (y - z, y + z).$$

Pede-se:

(i) Ker (T) e dim Ker (T). T é injetora? Justifique.

(ii) dim Im (T) e uma base para Im (T).

Solução:

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,definida por:

$$T\left(x,y,z\right)=\left(y-z,y+z\right).$$

(i) Afirmação: T não é injetora. De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker\left(T\right)=\left\{\left(x_o,y_o,z_o\right)\in\mathbb{R}^3;T\left(x_o,y_o,z_o\right)=\left(0,0\right)\right\}.$$

$$T\left(x_o,y_o,z_o\right)=\left(y_o-z_o,y_o+z_o\right)=\left(0,0\right)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} y_o-z_o=0\\ y_o+z_o=0\end{array}\right.$$

$\Longrightarrow y_o=z_o=0$. Portanto,

$$Ker\left(T\right)=\left\{\left(x_o,0,0\right)\in\mathbb{R}^3;y_o\in\mathbb{R}\right\}=\left[\left(1,0,0\right)\right].$$

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, $\alpha=\left\{\left(1,0,0\right)\right\}$ é uma base para Ker $\left(T\right)$ e dimKer $\left(T\right)=1$.

(ii) Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$3=\dim\mathbb{R}^3=1+\dim\mathrm{Im}(T)\Longrightarrow\dim\mathrm{Im}(T)=2$$

e Im $\left(T\right)\subseteq\mathbb{R}^2$. Assim, Im$\left(T\right)=\mathbb{R}^2$ e, portanto, T é sobrejetora.

Vamos determinar os geradores para Im $\left(T\right):T\left(x,y,z\right)=y\left(1,1\right)+z\left(-1,1\right)$.

Daí, vem: Im $\left(T\right)=\left[\left(1,1\right),\left(-1,1\right)\right]$. Como dim Im $\left(T\right)=2$ segue-se que $\beta=\left\{\left(1,1\right)\right.$, $\left.\left(-1,1\right)\right\}$ é uma base para Im $\left(T\right)$..

120. Determine $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que é uma transformação linear dada por: uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{4}$ rad seguida de uma expansão de fator $\sqrt{2}$. Destaque $\left[A\right]$.

Solução:

$$A = E_{(\sqrt{2})} \circ R_{(\pi/4)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{R_{(\pi/4)}} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow & \downarrow E_{(\sqrt{2})} \\ & & \mathbb{R}^2 . \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [A] &= \left[E_{(\sqrt{2})} \circ R_{(\pi/4)}\right] = \left[E_{(\sqrt{2})}\right] . \left[R_{(\pi/4)}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} .$$

Ou ainda,

$$A(x, y) = (x - y, x + y) .$$

121. (ii) Seja $F : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ uma transformação linear, tal que: $F^2 - F + I = 0$. Mostre que: F é inversível e que $F^{-1} = I - F$.

Prova:

Seja $F : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ uma transformação linear, tal que: $F^2 - F + I = 0$..

Com efeito, $F^2 - F + I = 0 \Rightarrow F - F^2 = I \Rightarrow F \circ I - F \circ F = I$

$\Rightarrow F \circ (I - F) = I$. Portanto, $F^{-1} = I - F$.

122. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma T.L. definida por: $T(x, y) = (x + 2y, -3y)$.

Determine seus autovalores e autovetores correspondentes.

Solução:

Com efeito, a matriz de T na base canônica é dada por: $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, então a equação característica é descrita por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda).(-3-\lambda) = 0$$

$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{cases}$ ou são os autovalores. determinemos os autovetores corres pondentes.

1º Caso:

$$\lambda = 1 : (A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow y = 0$. Logo, o autovetor é: $v_1 = x(1,0)$,com $x \neq 0$,ou ainda,

$$S_1 = \{x(1,0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,0)]$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso:

$$\lambda = -3 : (A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \{4x + 2y = 0 \Longrightarrow y = -2x$ .Logo, o autovetor é: $v_2 = x(1,-2)$,com $x \neq 0$,dito de outro modo temos:

$$S_2 = \{x(1,-2) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,-2)]$$

123. Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, a-d, b+c).$$

Pede-se:

(i) Ker (T) e dim Ker (T)..

(ii) dim Im (T) uma base para Im (T).

Solução:

Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por:

$$T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a+d, a-d, b+c).$$

$i)$ De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker\,(T) = \left\{\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})\,; T\left[\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}\right] = (0,0,0)\right\}.$$

Com efeito, $T\left[\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}\right] = (a_0 + d_0, a_0 - d_0, b_0 + c_0) = (0,0,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 + d_0 = 0 \\ a_0 - d_0 = 0 \\ b_0 + c_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = d_0 = 0 \\ c_0 = -b_0 \end{cases}.$$

Portanto,

$$Ker\,(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ -b_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})\,; b_0 \in \mathbb{R}\right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, dimKer $(T) = 1$..

(ii) Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$4 = \dim \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 3.$$

$$\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ e } \dim\,(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Vamos determinar os geradores para Im (T) :

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= (a+d, a-d, b+c) \\ &= a(1,1,0) + d(1,-1,0) + b(0,0,1) + c(0,0,1). \end{aligned}$$

Daí, vem: Im $(T) = [(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1), (0,0,1)]$. Como dim Im $(T) = 3$, segue-se que $\beta = \{(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1)\}$ é uma base para Im (T).

124. Determine $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que é uma transformação linear dada por: uma contração de fator $\frac{1}{2}$ seguida de uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{3}$ rad .

Destaque [A] .

Solução:

$$A = R_{(\pi/3)} \circ C_{\left(\frac{1}{2}\right)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{C_{\left(\frac{1}{2}\right)}} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow & \downarrow R_{(\pi/3)} \\ & & \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} [A] &= \left[A = R_{(\pi/3)} \circ C_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \left[R_{(\pi/3)}\right]\left[C_{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, A na forma matricial, é dada por:

$$[A]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\sqrt{3}y}{4} \\ \frac{\sqrt{3}x+y}{4} \end{pmatrix}.$$

Ou ainda,

$$A(x,y)=\left(\frac{x-\sqrt{3}y}{4},\frac{\sqrt{3}x+y}{4}\right).$$

125. Sejam $F:\mathbb{U}\to\mathbb{V}$ e $G:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ transformações lineares, tais que:

$Ker\,(F)=\{0\}$ e $Ker\,(G)=\{0\}$ .Mostre que: Ker $(G\circ F)=\{0\}$

Prova:

Seja $u_0\in Ker\,(G\circ F)$,então, $(G\circ F)(u_0)=G(F(u_0))=0$ e

$Ker\,(G)=\{0\}\Rightarrow F(u_0)=0$ e $Ker\,(F)=\{0\}\Rightarrow u_0=0.$

Portanto, $Ker\,(G\circ F)=\{0\}$

126. Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por:

$$T(x,y)=(x+y,4y).$$

Determine seus autovalores e autovetores correspondentes.

Solução:

Com efeito, a matriz de T na base canônica é dada por: $[T]=\begin{bmatrix}1&1\\0&4\end{bmatrix}$,então a equação característica é descrita por:

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\0&4-\lambda\end{vmatrix}=0\Longrightarrow(1-\lambda).(4-\lambda)=0$$

$\Longrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=4\end{cases}$ ou são os autovalores. determinemos os autovetores corres pondentes.

1º Caso: $\lambda=1$:

$$(A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 0x + 2y = 0 \\ 0x + 3y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

Logo, o autovetor é: $v_1 = x(1,0)$,com $x \neq 0$,ou ainda,

$$S_1 = \{x(1,0) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,0)]$$

Procedendo de forma análoga, temos:

2º Caso: $\lambda = 4 : (A - \lambda I_2).X = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 3x.$ Logo, o autovetor é: $v_2 = x(1,3)$,com $x \neq 0$,

dito de outro modo temos:

$$S_2 = \{x(1,3) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\} = [(1,3)]$$

ALFABETO GREGO:

A α (alfa)

B β (beta)

Γ γ (gama)

Δ δ (delta)

E ϵ (epsilon)

Z ζ (zeta)

H η (eta)

Θ θ (teta)

I ι (iota)

K κ (capa)

Λ λ (lambda)

M μ (mu)

N υ (nu)

Ξ ξ (ksi)

O o (omicron)

Π π (pi)

P ρ (rô)

Σ σ (sigma)

Υ τ (tal)

Y ν (upsilon)

Φ ϕ (fi)

X χ (chi)

Ψ ψ (phi)

Ω ω (omega)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, SBM 2012:

[2] Boldrini/ Costa/ Figueiredo/Wetzler. Álgebra Linear. Editora Harbra.3a ed. 1986:

[3] Callioli, Carlos A., Hygino H. dimingues, Roberto C. F. Costa. 6a ed. Atual editora. 1990

[4] De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Manual de Redação Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2a Edição, SBM 2018:

[5] Jänich, Klaus, Álgebra Linear. LTC. 1998:

[6] Lang, Serge. Álgebra Linear. Coleção Clássicos da Matemática. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna, 2003.

[7] Lipschutz, Seymour, Schaum´s solved problems series: 3000 solved problems in Linear Algebra. McGran-Hill company, 1989:

[8] Oliveira, Augusto J. Franco de. Lógica e Aritmética, Editora UNB. 2004:

[9] https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/147 capturado em 15 de dezembro de 2022 às 13h05min

[10] Ho¤man, K., Kunze, R. Álgebra Linear.2a ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. 1979:

[11] (https://pt.wikipedia.org/wiki/Espa%C3%A7o_vetorial capturado em 15 de dezembro de 2022 às 15h10min.

[12]Friedlander, Ana. Elementos de Programação Não-linear, Editora da Unicamp, 2016:

[13] Coelho, Flávio Ulhoa; Lourenço, Maria Lilian, Álgebra Linear Editora da Universidade de São Paulo, 2001

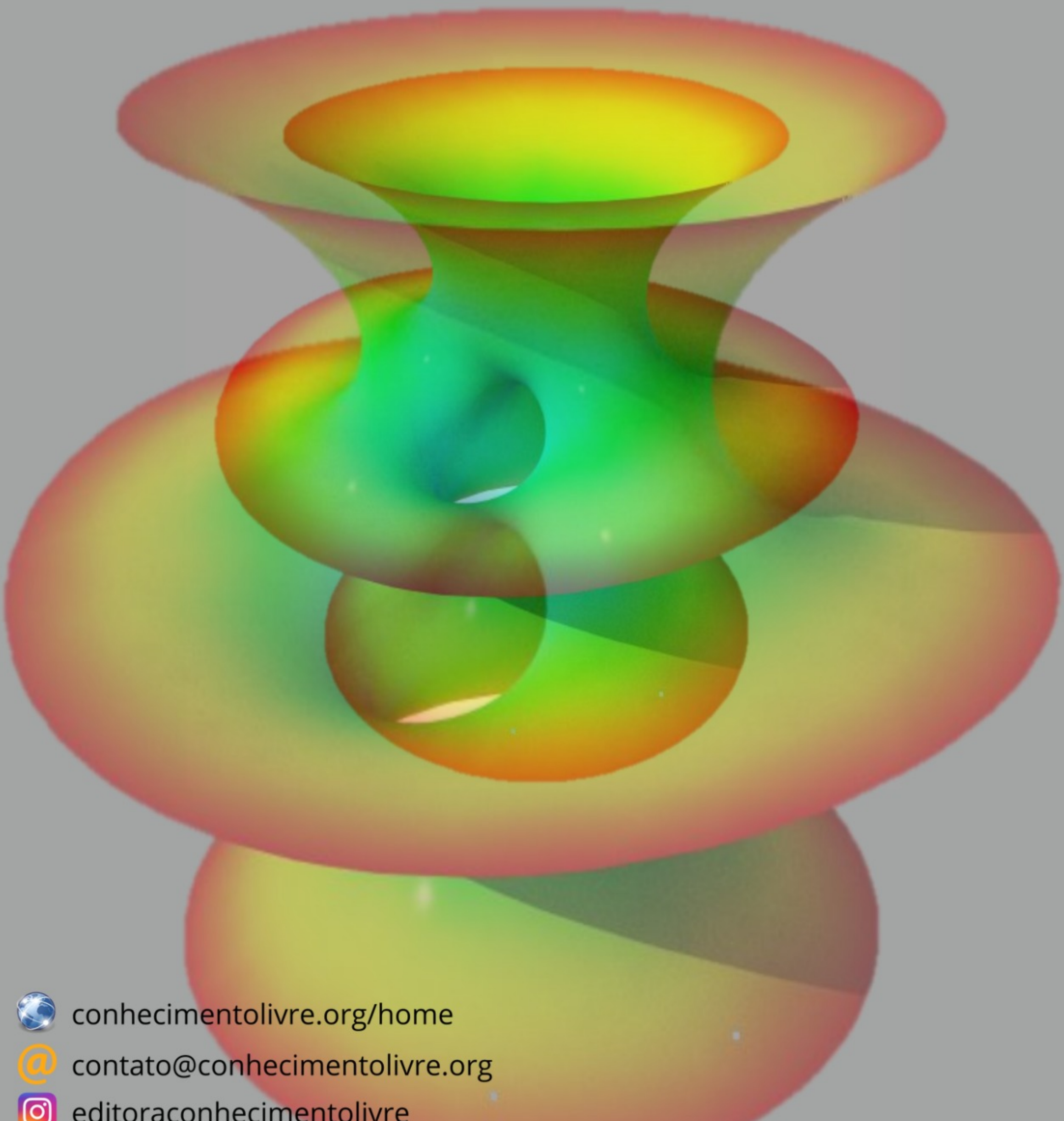
[14] Martinez, J. Mario, S. A. Santos. Métodos Computacionais de Otimização.20ºColóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000

[15] Anton, Howard. Rorres. Álgebra Linear com Aplicações 8 ed., Porto Alegre: Bokman,2001:

[16] Lima, Elon Lages. Álgebra Linear. Coleção Matemática Universitária IMPA. 3ª ed. 1998.

PROBLEMAS RESOLVIDOS DE ÁLGEBRA LINEAR:

PENSANDO UM POUCO MAIS



conhecimentolivre.org/home
contato@conhecimentolivre.org
editoraconhecimentolivre

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE