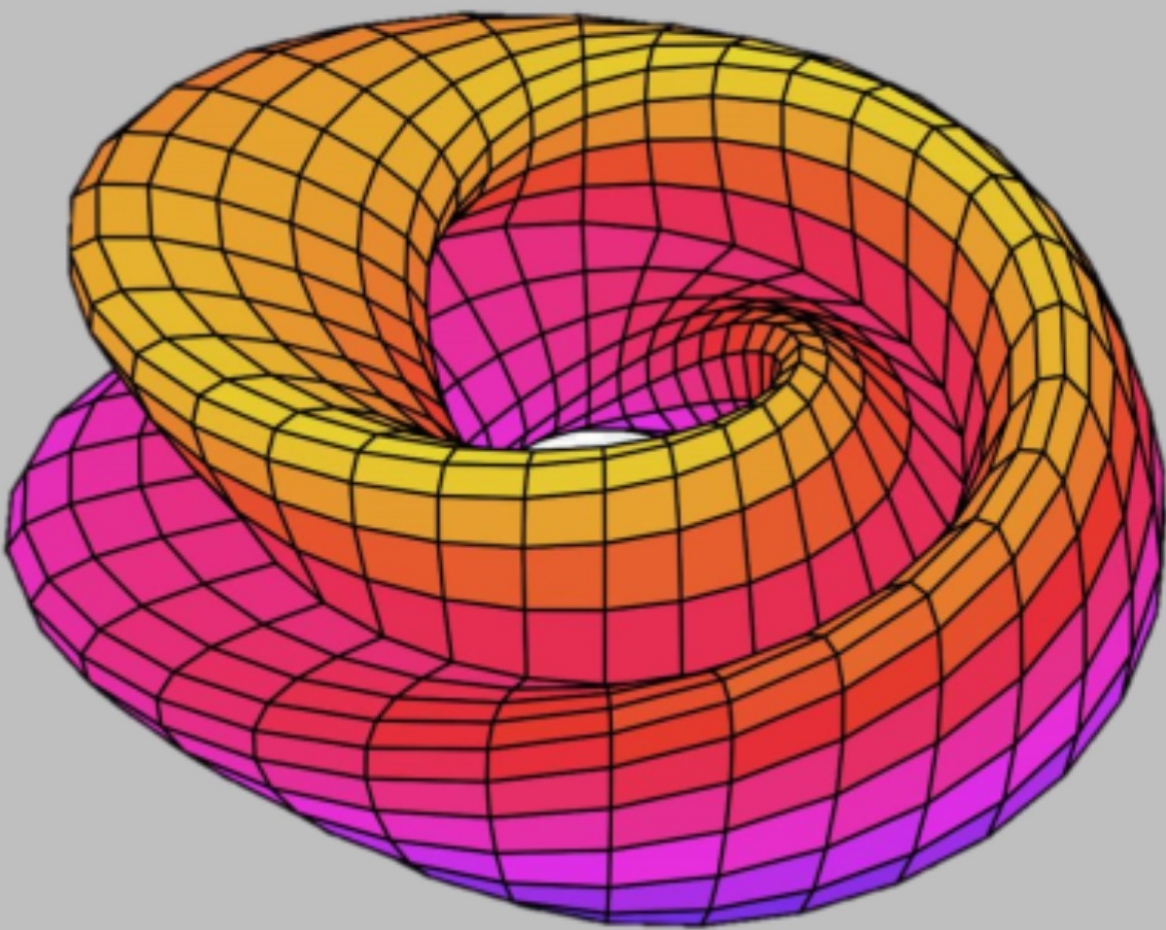
Pré-Cálculo

com

Problemas Resolvidos

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino

Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586P Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos

/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2022

310 f.: il
DOI: 10.37423/2022.edcl632
ISBN: 978-65-5367-243-7
Modo de acesso: World Wide Web
Incluir Bibliografia

1. cálculo-diferencial-e-integral 2. álgebra-linear 3. geometria-analítica-vetorial I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Título

CDU: 510

https://doi.org/10.37423/2022.edcl632

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO
2022

Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos

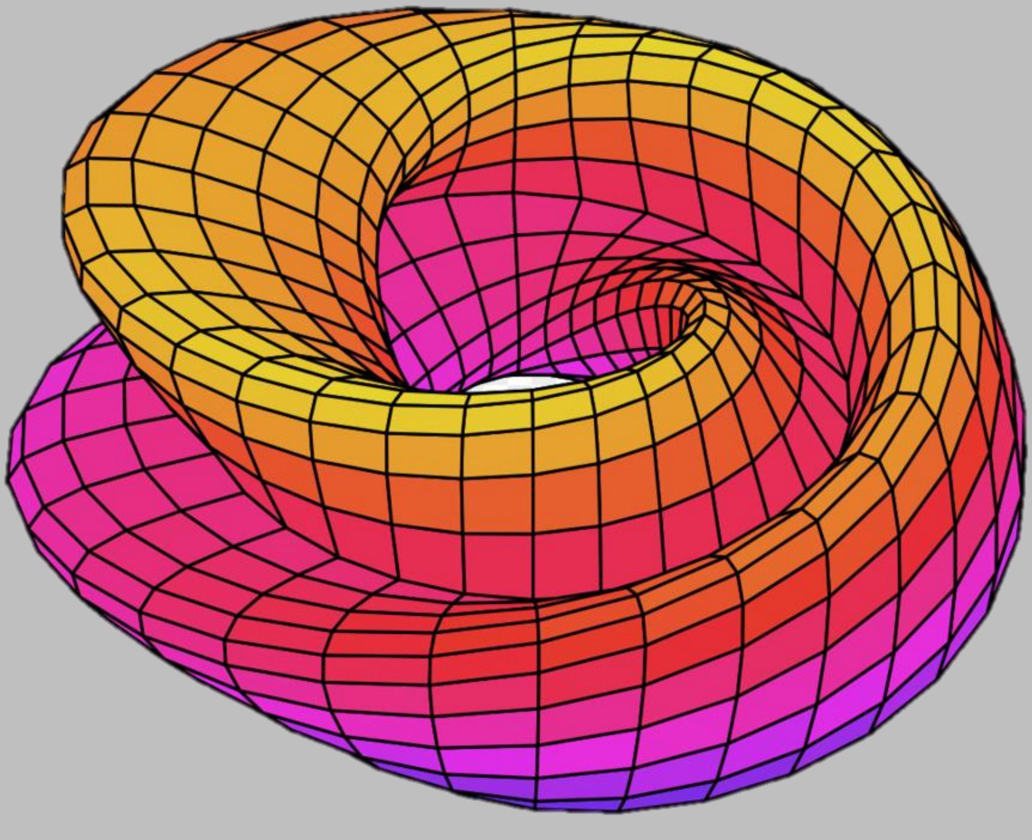
10.37423/2022.edcl632

Pré-Cálculo

com

Problemas Resolvidos

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino



2022

Pré-Cálculo com os Problemas Resolvidos

por

Cícero José da Silva

Willames de Albuquerque Soares

Sérgio Mário Lins Galdino

Universidade de Pernambuco-UPE

Escola Politécnica de Pernambuco-Poli

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento Básico

Novembro/2022

Pré-Cálculo com os Problemas Resolvidos

Público alvo: Professores de Matemática, Alunos de Graduação nas Áreas de Tecnologias, Licenciatura, Bacharelado em Matemática, Engenharias e Áreas Afins. Área de Concentração: Matemática

Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.

- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.

- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.

- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuiram diretamente na concretização deste.

- À Carminha, Eduarda, toda a minha família, por tudo que fizeram em meu favor. Agradeço pelo apoio e incentivos recebidos e pela compreensão do motivo de tê-los privado da minha presença por vários momentos importantes de suas vidas e por me esperarem sempre, carinhosamente, de braços abertos.

- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Ms. Roberto Lessa, Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha), Prof. Dr. Juan Carlos Oliveira de Medeiros e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.

- Ao amigo Prof. Dr. Ruben Carlo Benante por ter um vernáculo no linguajar condoreiro e ofertou diversas orientações no tocante a escrita.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões ao longo dos anos.
- Não poderia deixar de agradecer a humildade e generosidade dos amigos de equipe na substanciação deste trabalho Prof. Dr. Willames de Albuquerque Soares e Prof. Dr. Sérgio Mário Lins Galdino.
- À UPE, pela apoio.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais, Filhos, Esposas,Todos os familiares e Ao grande Mestre Olavo Otávio Nunes (In Memoriam)

Introdução

O propósito deste texto é apresentar a ponte na linguagem entre Matemá-

tica do Ensino Médio e O primeiro ano na Universidade com Cálculos 1,2, Geométrica Analítica Vetorial e Álgebra Linear, frutos das experiências de décadas na Unicap e Poli com os amigos Cleto Bezerra de França, Cláudio Maciel (poeta risadinha), José Roberto Lessa e na Universidade de Pernambuco-UPE-Escola Politécnica de Pernambuco Poli, com os amigos citados anteriormente e professores da UPE-Poli e os amigos Prof. Dr. Willames de Albuquerque Soares e Prof. Dr Sérgio Mário Lins Galdino. Devemos ressaltar que: O público alvo são: Professores de Matemática, alunos da Licenciatura em Matemática, Bacharelado em Matemática, Engenharias e Áreas Afins.

Neste trabalho, estudamos problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um Letramento Matemático de Mentalidade Crescente, Criativa e Flexível em temas básicos do Ensino Médio; mas, próximo a linguagem do Cálculo Diferencial e Integral; bem como, Geometria Analítica Vetorial e Álgebra Linear.

Vale a pena salientar: buscamos dentro do possível, resolver os problemas com todos os detalhes; em alguns casos inclusive, fazendo comentários.

O texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho e com segurança (conferindo não apenas os resultados; mas, todo o desenvolvimento lógico operacional).

No Capítulo 1, dedicado quase que exclusivamente as notações de todo o trabalho, destacando e corrigindo alguns erros comuns do Ensino Médio. No Capítulo 2, vamos usar o Corpo Ordenado Completo com o nome básico de conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, são definidas duas operações que satisfazem aos **axiomas ou postulados (** Veja ref [1]), como consequência teremos várias propriedades, sendo o conjunto com ordem dos elementos: podemos trabalhar com produtos notáveis, fatorações e racionalizações, módulo ou valor absoluto, desigualdades, casos particulares de equações polinomiais. No primeiro momento, as demonstrações das propriedades podem deixar para um estudo posterior, quando se sentir mais seguro e precisar mergulhar; em águas mais profundas: se tratando de letramento matemático, se volta e estuda as demonstrações em detalhes. Ressaltando alguns aspectos históricos. Neste Capítulo 3 daremos enfase a função, alguns tipos de funções, tais como: funções polinomiais do primeiro grau e casos particulares e segundo grau, função cúbica, recíproca, raiz quadrada, raiz cúbica, composições de funções, funções inversas. Ressaltando que faremos esboços de gráficos por translações e reflexões de eixos. No Capítulo 4, vamos abordar funções do tipo: pares e ímpares, injetoras, sobrejetoras e bijetora, composições de funções, definindo a função inversa através da composição de funções, ressaltando que: a inversa será definida usando a composição, tendo a composta da função com sua inversa o resultado a função identidade. Além disso, deduzindo que se a função é invertível, por conseguinte: a mesma será injetora e sobrejetora, óbvio que a recíproca ou contra-positiva é trivial (funções bijetoras são invertíveis). Para concluir o capítulo, voltamos ao tema de funções exponenciais e logaritmicas (destacando a exponencial de base "e" por se tratar de uma função exponencial, onde tem diversos fenômenos naturais que as utiliza como modelagem matemática: crescimento populacional, infcções por vírus, meia-vida de elementos radioativos ou decaimento radioativos, com função logarítmica modela situações de abalos sísmicos, veremos também como consequências da injetividade, crescimento e decrescimento das funções exponenciais e logarítmicas, as equações e inequações exponenciais e logarítmicas. Finalmente, no Capítulo 5, vamos abordar trigonometria no triângulo retângulo, funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, esboços graficos das funções um período fundamental; outros gráficos trigonométricos: usando translações e reflexões de eixos, as funções trigonométricas inversas: arcoseno, arcocosseno, arcotangente. arcocotangente, arcosecante e arcocossecante e seus respectivos gráficos,calculando alguns arcos particulares como exercícios. Salientando que foi apresentado no Apêndice C um pouco da história de Gauss e os Números Complexos identificando a forma algébrica com o par ordenado $z = a + bi \simeq (a, b)$, com a, b pertencente aos números reais.

CAPÍTULO 1

"...Essa forma de colocar a questão parece exigir uma explicação dos princípios de não contradição, de razão suficiente ou determinante, de escolha do melhor e de identidade dos indicerníveis..." Ensaios de Teodiceia: Sobre a Bondade de Deus, a Liberdade do Homem e a Origem do Mal. Editora Estação Liberdade, 1^a edição, 2013.

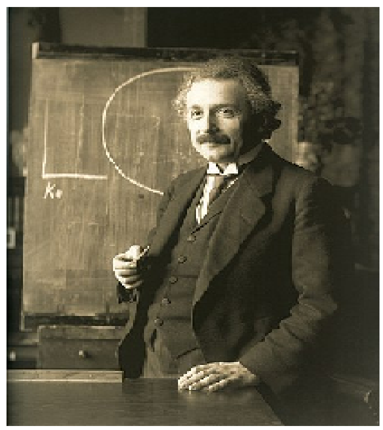
G.W. Leibniz (1646 – 1716)

"... Ângela é doida. Mas tem uma lógica matemática na sua doidice aparente. E se diverte muito a escandalosa. Aguça-se demais e depois não sabe o que fazer de si. Que se dane. Entre o "sim" e o "não" só há um caminho. Escolher. Ângela escolheu "sim". Ela é tão livre que um dia será presa. "Presa por quê?" "Por excesso de liberdade." "Mas essa liberdade é inocente?" "É." "Até mesmo ingênua." "Então por que a prisão?" "Porque a liberdade ofende.“ Um Sopro de Vida: (Pulsações), 8a. ed. Editora Nova Fronteira, 1978.

Clarice Lispector Escritora Ucraniano-brasileira (1920 – 1977)

“Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo de prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse, mas a aquisição, não é a presença, mas o ato de atingir a meta."
Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

"Não se preocupe muito com as suas dificuldades em Matemática, posso assegurar-lhe que as minhas são ainda maiores."



Albert Einstein (1879 – 1955)

Notações:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ O conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ O conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$: O conjunto dos números racionais
$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: Conjunto dos números irracionais, ou seja, conjunto de todos os números reais que não são racionais.
$\mathbb{R}$: Corpo Ordeando Completo (O conjunto dos números reais)
$\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$ O conjuntos dos números reais positivos

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ O conjuntos dos números reais negativos.
$\forall$: Para todo ou quaisquer que sejam (Quantificador Universal)
é o A invertido, inicial da palavra **all do inglês** e **allgemein do Alemão**.
$\exists$: Existe (Quantificador Existencial)
$\exists!$: Existe um único
Se p, então, q ($p \Longrightarrow q$), Lê-se: p implica em q
($p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \Longrightarrow \sim p$), Lê-se: p implica em q é equivalente a, não q implica em não p
p se, e somente se, q,($p \Longleftrightarrow q$) pode se ler: p é equivalente a q
$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$
Ordem: $x < y \Longleftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow y - x > 0$.
Número par $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$
$a = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$
$m.d.c.\,(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ Máximo dividor comum entre $E_1, E_2, \ldots, E_n$.
$M.H. = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ (Média Harmônica)
$M.G. = \sqrt{xy}$ (Média Geométrica)
$M.A. = \frac{x+y}{2}$ (Média Aritmética)
Sejam $x_j > 0$ com $j = 1, 2, \ldots$ e $x_j \in \mathbb{R}$, as médias,no caso geral, temos:

$$M.H. = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}}$$

(Média Harmônica)

$$M.G. = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

(Média Geométrica)

$$M.A. = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

(Média Aritmética)
Vale o seguinte resultado:

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

(somatório de a_j, j variando de 1 até n)

$$\left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \ldots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right) :$$

À medida que o expoente de
x decresce de $n - 1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y, só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 ate $n - 1$.

$$\left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \ldots - xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right):$$

À medida que o expoente de x decresce de $n-1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y, só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 ate $n-1$. Além disso, os sinais são alternados. Função definida por duas sentenças: funções que são dadas por " dois pedaços de tipos de funções diferentes" Quociente de Newton

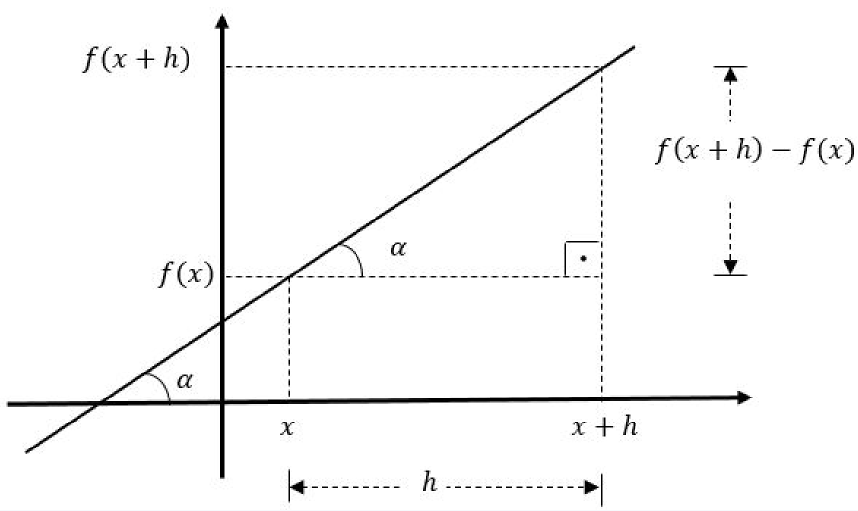
$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0 \\ &\text{ou} \\ q(x) &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \text{ com } x \neq a, \end{aligned}$$

A inclinação da reta que passa pelos pontos distintos

$$P(x, f(x)) \quad \text{e } Q(x+h, f(x+h))$$

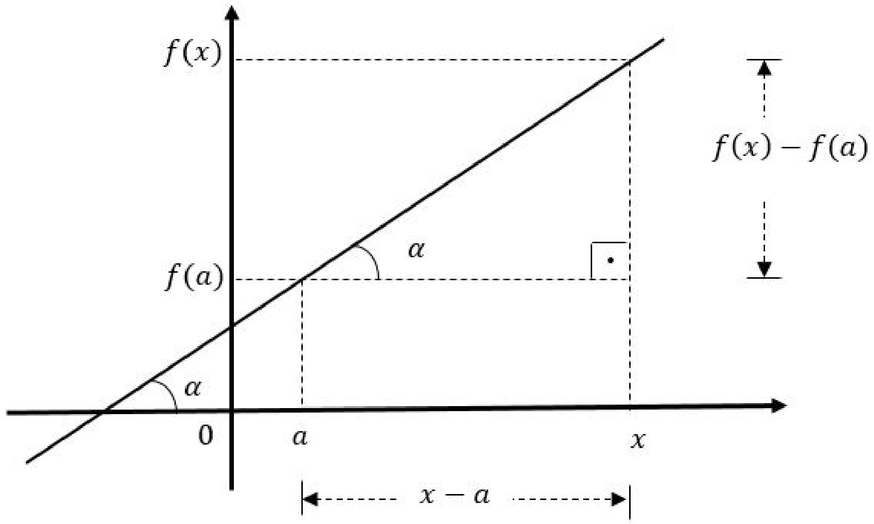
chamada posteriormente de quociente de Newton é de fundamental importância para o Cálculo.

$$q(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0,$$



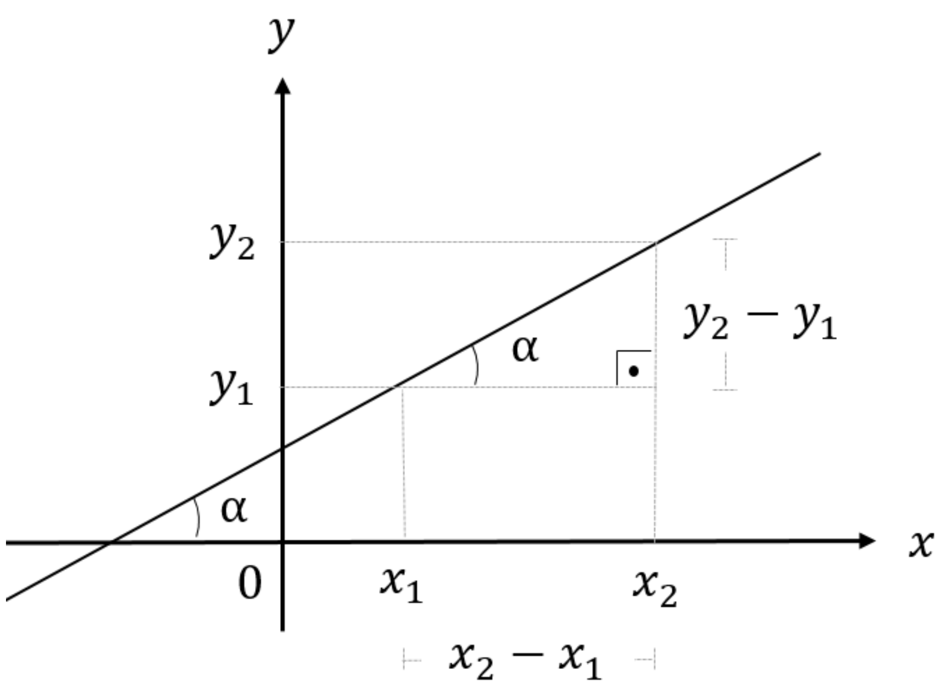
Inclinação da reta que passa pelos pontos distintos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$ será descrita por:

$$q(x) = tg\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

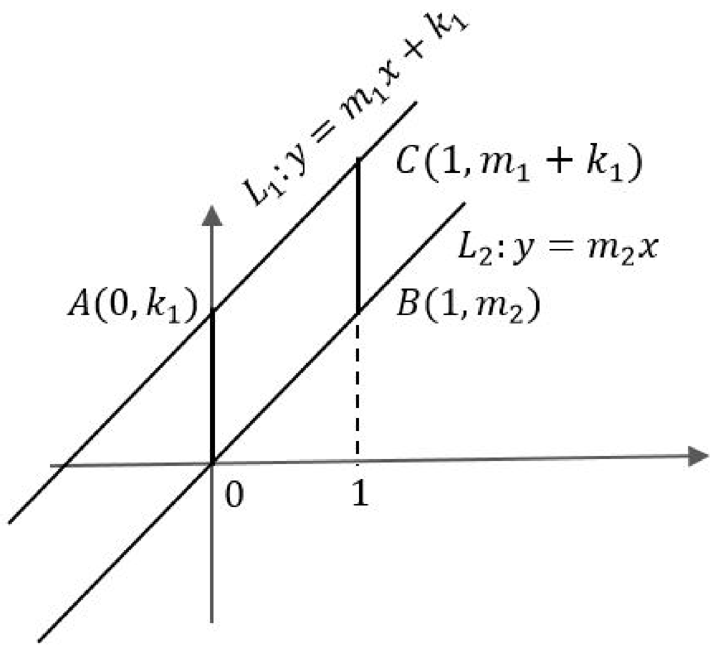


O coeficiente angular da reta que passa por $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ é dada por:

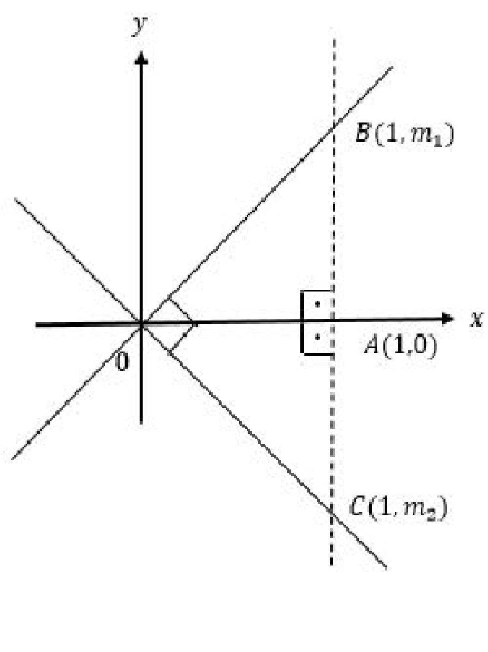
$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1.$$



Retas paralelas $L_1 : y = m_1x + k_1$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1//L_2$:



Retas Perpendiculares $L_1 : y = m_1x$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1 \perp L_2$:



As retas são perpendiculares equivale a dizer:

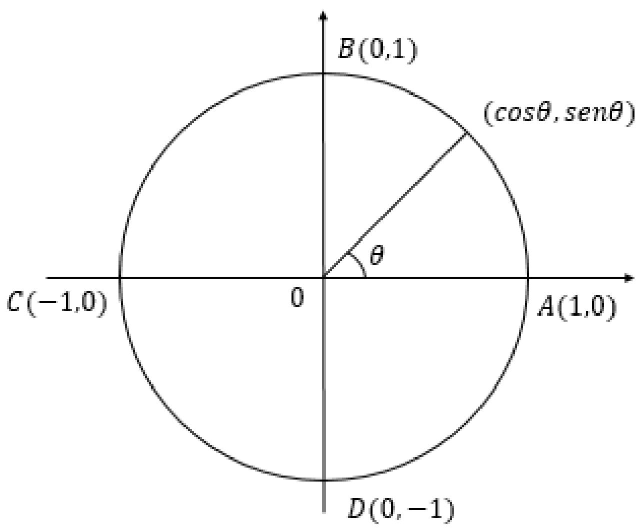
$$L \perp S \Longleftrightarrow m_L.m_S = -1.$$

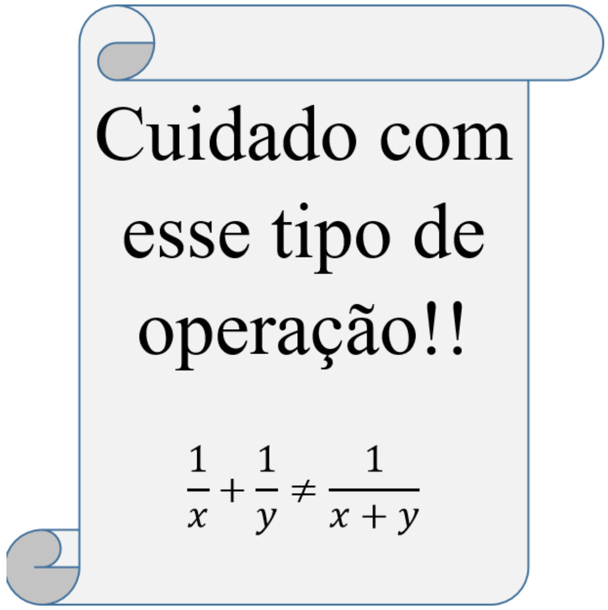
Equação da circuferência de centro $C\,(0,0)$ e raio $R = 1$ é dada por

$$\xi : x^2 + y^2 = 1.$$

Como consequência, tem-se:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

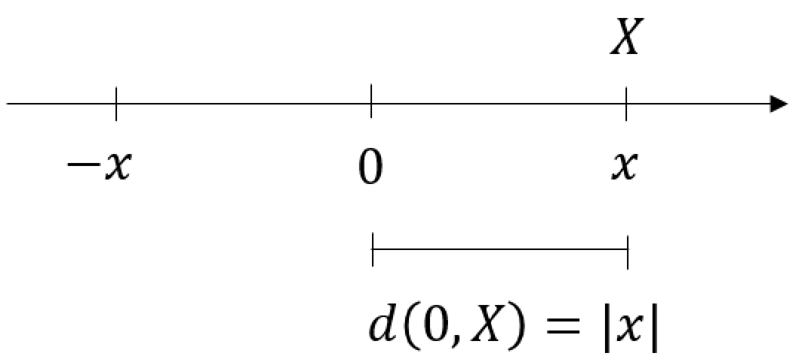




Módulo ou valor absoluto, denotado por:

$$|x| = d(0,X) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

é a distância da origem O ao ponto X na reta.



Vizinhança aberta de centro x_0 e raio $\delta > 0$.

$$\mathbb{V}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{X} : |x - x_0| < \delta\}$$

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< \delta \Longleftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Longleftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \\ x &\in \mathbb{V}_\delta(x_0) \Longleftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \end{aligned}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right|$$

(Módulo do somatório de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

(Somatório do módulo de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| = |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$$

(Módulo da soma de $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

(Soma dos módulos de $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$\left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|$$

(Desigualdade triangular generalizada)

$$\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = |x_1.x_2 \ldots x_n| .$$

(Módulo do produtório de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\prod_{j=1}^{n} |x_j| = |x_1| . |x_2| \ldots |x_n|$$

(produtório do módulo de x_j com $1 \leq j \leq n$)

$$\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} x_j\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} x_j . x_{n+1}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| . |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n} |x_j| . |x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|$$

Majorações:
$|x| \leq \mathbb{M}$, $\forall x \in \mathbb{A}$, diz-se que $\mathbb{M}$ é um majorante para $\mathbb{A}$.

Problema:(**Norma Euclidiana**)

Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então, prove que:

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\mathbb{M},$$

onde: $\mathbb{M} = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Prova:

Basta notar que:

$$|x_j|^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

tomando-se: $\mathbb{M} = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$, vem:

$$|x_j|^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \overbrace{\mathbb{M}^2 + \mathbb{M}^2 + \ldots + \mathbb{M}^2}^{n \text{ vezes}} = n\mathbb{M}^2,$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.
Portanto,

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\mathbb{M},$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

■

$m.d.c.\,(p, q)$ máximo divisor comum entre p e q.
$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.
$\mathbb{D}(f) = \mathbb{A}$ é chamado de domínio de f, denotamos por:

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{D}_f = \mathbb{A}.$$

$CD(f) = \mathbb{B}$ é o contra-domínio de f, descrito por:

$$CD(f) = CD_f = \mathbb{B}.$$

A função é f (é a lei que diz o que fazer) e não $f(x)$ que é o resultado da lei. A imagem de f será representada por $\operatorname{Im}(f)$ e dada por:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{B} : y = f(x),\, x \in \mathbb{A}\}.$$

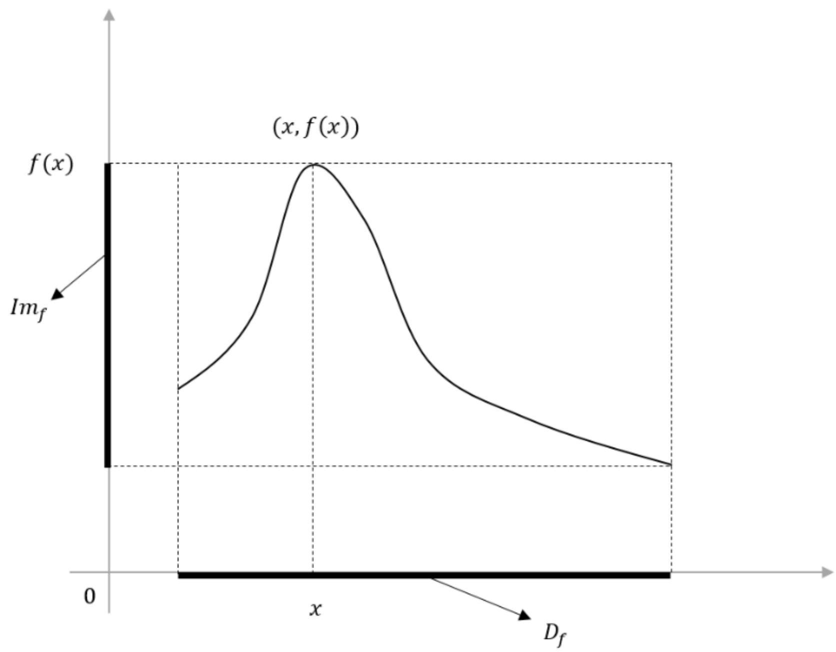
O gráfico de f, denotado por G_f, é dado por:

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B} : y = f(x)\}$$

o gráfico de f é um subconjunto do produto cartesiano de $\mathbb{A}$ por $\mathbb{B}$, Notação:

$$G_f \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}.$$

($\subseteq$ está contido ou é igual a).
$\leq$ menor do que ou igual a (menor ou igual a)
$\geq$ maior do que ou igual a (maior ou igual a)
Esboço do gráfico de f:



Guarde com bastante atenção estes fatos:

(i) De forma intuitiva, o $\mathbb{D}_f$ é a projeção do gráfico f, sobre o eixo x e a $\operatorname{Im}(f)$ é a projeção do gráfico de f, sobre o eixo y.

(ii) toda reta paralela ao eixo y, passando pelo $x \in \mathbb{D}_f$, corta o gráfico de f em um único ponto.
Zero da função $f(x) = 0$ (Valores que corta o eixo x)
f é crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f é decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Função (transformação) linear

Toda **função (transformação)** que satisfaz estas duas condições chamamos de **Linear**
(i) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$: $f(\alpha x_1) = a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = \alpha f(x_1)$
Esboço gráfico por translações de eixos (Significa deslocar o gráfico à direita ou à esquerda para cima ou para baixo)

Sequência numérica (a_n) que converge ao número "e"

Seja

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 2,718 = e.$$

então fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots$, tem-se:[1]

$$\begin{aligned} a_1 &= (1+1)^2 = 2 \\ a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \\ a_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \simeq 2,37 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Daí, continuando com o processo, segue-se que:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 2,718\ldots = e.$$

Cujo valor é aproximadamente

$$e \simeq 2,71828182845904523536028 7.$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 2,718\ldots = e.$$

Cujo valor é aproximadamente

$$e \simeq 2,718281828459045235360287.$$

[1] O número "e" é uma constante matemática que é a base dos logaritmos naturais. Por vezes é chamado número de Euler (não confundir com a constante de Euler) em homenagem ao **matemático suíço Leonhard Euler**, número de Napier, em homenagem a **John Napier**, número de Neper, constante de Néper, número neperiano, número exponencial e outros. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 2,711828\ldots = e$

$\sin x = senx$ (seno de x)

Período Fundamental :

$$f\left(x+K\right)=f\left(x\right)\ \ \forall x\in D\left(f\right)$$

o menor valor de $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ é chamado de período fundamental.

$\mathrm{Im}\left(g\right)$: Imagem da função g.

Composições de n funções f e $f^0 = \mathbb{I}$ (identidade)

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\text{ vezes}}, \quad f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f \quad \text{e} \quad f^0 = \mathbb{I}.$$

Guarde bem e nunca esqueça!

Obter a composta de duas funções $f \circ g$ e $g \circ f$, antes é necessário, obter o domínio de existência, caso sejam possíveis.
Função Inversa $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ Inverso da função: $\frac{1}{f}$

Cuidado com as Notações e simplificações:

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, com $a, b \geq 0$

$\sin^2\left(x\right) \neq \sin\left(x^2\right)$

$f^2\left(x\right) = \left(f \circ f\right)\left(x\right) \neq f\left(x^2\right)$

$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

$\sin\left(2x\right) \neq 2\sin x$

$\frac{\sin(2x)}{x} \neq \sin 2$

$\ln^2\left(x\right) \neq 2\ln\left(x\right) = \ln\left(x^2\right)$

$\ln\left(a+b\right) \neq \ln a + \ln b\,,\ \forall a, b > 0$

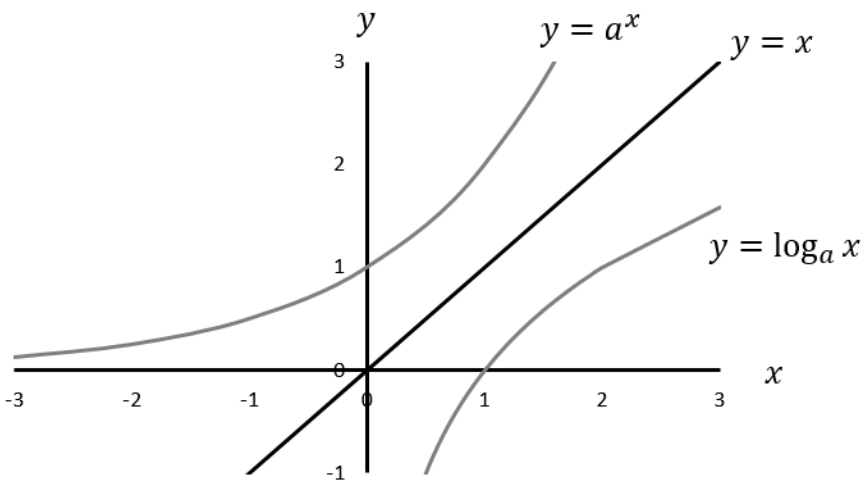
$\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$

$\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y|$.

$$f(x) = a^x \text{ e } f^{-1}(x) = \log_a x$$

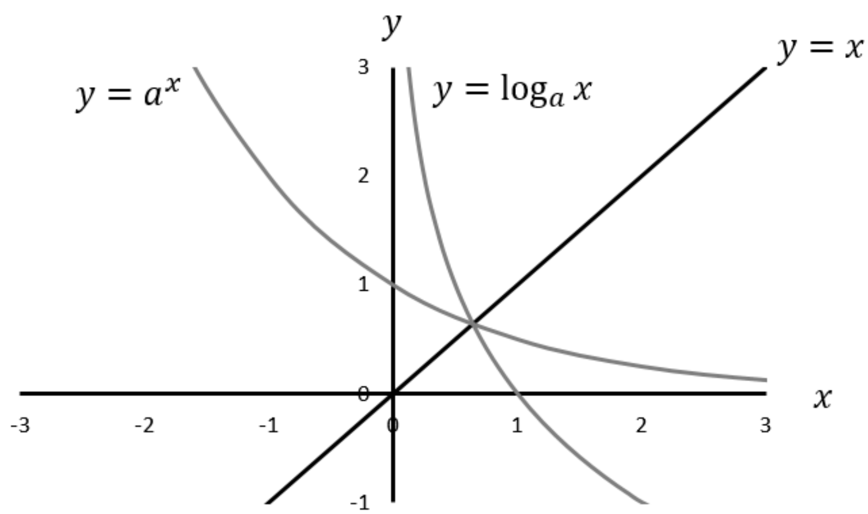
(i) $a > 1 : f$ é crescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$

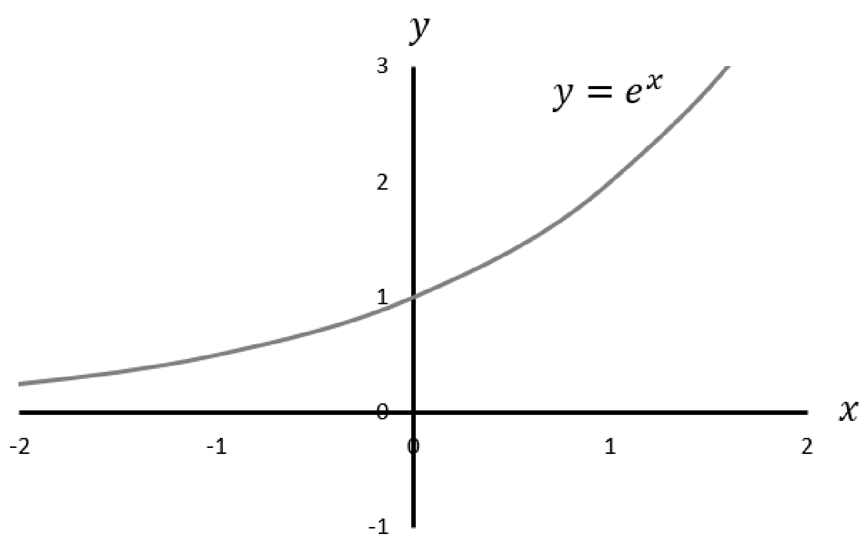


(ii) $0 < a < 1 : f$ é decrescente:

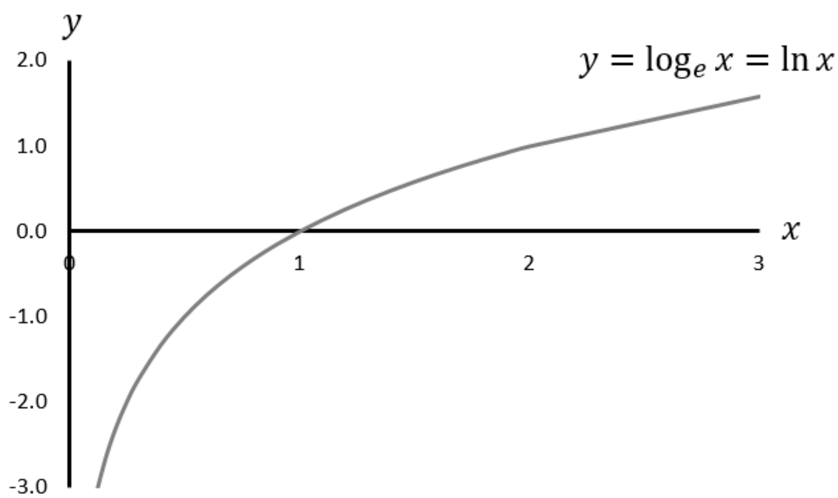
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$



Funções Exponencial e logarítmica de base natural e
$f(x) = e^x$ (Função exponencial de base e)



$f(x) = \ln x = \log_e x$ (logaritmo natural ou neperiano de base e)



Em textos do Ensino Médio, é comum escrever $logx = log_{10}x$.
No nosso texto, adotaremos a mesma notação dos livros dos cursos de Cálculo sempre que o logaritmo de x for na base 10 será escrito:

$$\log_{10}(x) = \log_{10} x.$$

Reservaremos a notação para logaritmo natural de x na base "e", pondo:

$$\log_e(x) = \ln x.$$

Mudança de base para logaritmos: $\forall a, b, x \in \mathbb{R}^+$ e $a, b \neq 1$, temos:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

A prova desta propriedade é algo bastante simples:

Seja $\log_b x = y$, então temos: $x = b^y$. Assim,

$$\log_a x = \log_a(b^y) = y.\log_a b \Longleftrightarrow y = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

De sorte que:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

$\blacksquare$

Algumas propriedades:

Usando a mudança para base a do logaritmo dado, temos:

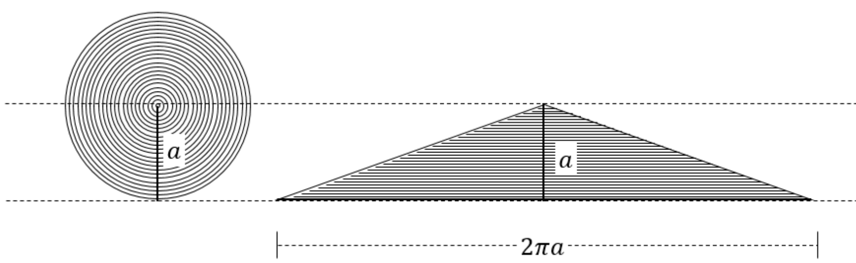
$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k} . \frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k} . \log_a x, \text{ pois, } \log_a a = 1,$$

com $x, a, k \in \mathbb{R}$, $x, a > 0$ e $a \neq 1$.

Sejam $x_1, x_2, a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, então tem-se:

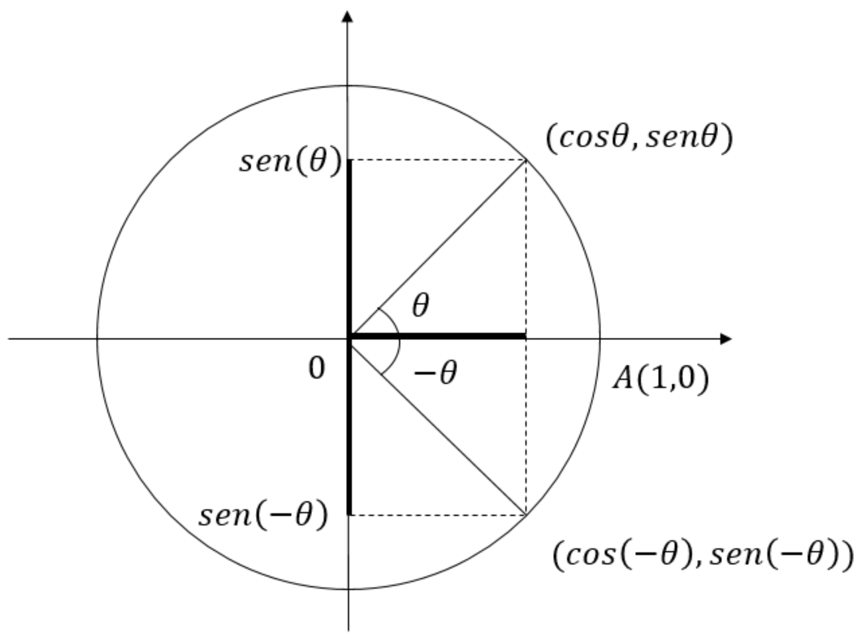
$$\begin{array}{ll} (i) & \log_a (x_1 x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2) \\ (ii) & \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a (x_1) - \log_a (x_2) . \end{array}$$

Usando o **Princípio de Cavalieri** para cálcular as áreas do círculo e do triângulo, obtemos:



A base do triângulo corresponde ao comprimento da circunferência de raio "a" dada por: $B = 2\pi a$ e altura $H = a$. Logo,

$$\mathbb{A}_1 (\xi_1) = \frac{B.H}{2} = \frac{2\pi a.a}{2} = \pi a^2 \text{ u.a. } (\textbf{unidade de área}).$$



Raiz n-ésima ou de ordem n

Sejam $a > 0, a \in \mathbb{R}$, e $n \geq 1$ um natural

$$b \in \mathbb{R}, b > 0 : b^n = a \Longleftrightarrow b = \sqrt[n]{a}$$

b é a raiz n-ésima (ou de ordem n) positiva de a.

Observação:

$$\begin{cases} a^n = \overbrace{a.a.\ldots.a}^{n \text{ vezes}} \\ \qquad e \\ a^0 = 1, \ a \neq 0. \end{cases}$$

Algumas propriedades:

Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $m, n, k \geq 1$, com $m, n, k \in \mathbb{N}$ três naturais, temos então que:

P_1. $a^m.a^n = a^{m+n}$ P_2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ P_3. $(a^m)^n = a^{m.n}$

P_4. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ P_5. $\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}$ P_6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Fatos:

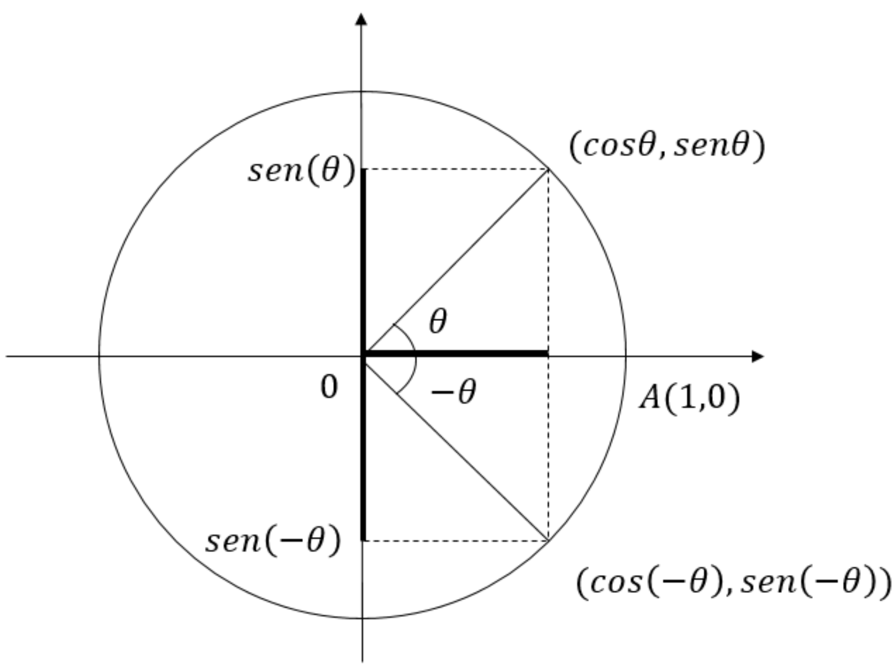
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ um natural

$$\begin{array}{ll} (i) & \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \\ (ii) & a < b \Longleftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \end{array}$$

Exemplos:

1. $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
2. $2 < 3 \Longleftrightarrow \sqrt[6]{2} < \sqrt[6]{3}$
3. $a^{10} \cdot a^3 = a^{10+3} = a^{13}$
4. $\frac{a^{10}}{a^3} = a^{10-3} = a^7$
5. $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2..2]{2^2} = \sqrt{2}$
6. $\sqrt[n]{2}.\sqrt[n]{3} = \sqrt[n]{6}$

Funções Pares e Ímpares:



$$(i) \quad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad (ii) \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

Consequências:

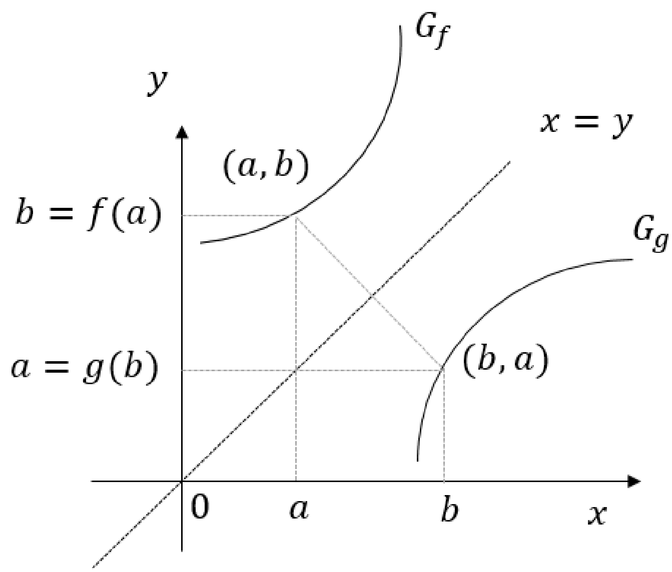
$$\begin{array}{llll} (i) & \sec(-\theta) = \sec\theta & (ii) & \operatorname{cossec}(-\theta) = -\operatorname{cossec}\theta \\ (iii) & \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta & (iv) & \operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg}\theta \end{array}$$

Algumas notações sobre: Composições de Funções:
Definições:

$$\begin{cases} f^0 = id \text{ (Identidade)} \\ \qquad e \\ f^n = \overbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}^{n \text{ vezes}} \end{cases}$$

Em geral, temos:

$$f \circ g \neq g \circ f$$



Vale a pena ressaltar que:

$$\begin{aligned} (a, b) &\in G(f) \Longleftrightarrow b = f(a) \\ &\Longleftrightarrow g(b) = g[f(a)] = a \\ &\Longleftrightarrow g(b) = a \\ &\Longleftrightarrow (b, a) \in G(g) = G\left(f^{-1}\right). \end{aligned}$$

Uma diagramação nos mostra:
(i)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & Y \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow g \\ & g \circ f & X \end{array}$$

(iii) Cuidado!

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

Função exponencial

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ & x & \mapsto & f(x) = a^{x} \end{array}$$

com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Uma pausa para alguns questionamentos e comentários:

Porquê das restrições a base a?

Uma resposta comum de alguns: queremos a função exponencial admitindo inversa. Ora, estamos definindo uma função, as retrições devem bastar em si mesma. Vejamos de fato uma explicação plausível. A saber:

1. Na definição o que aconteceria se $a = 1$? A função é constante.
2. Se $a < 0$, ilustrativamente, escolha $a = -2$, então,

$$f(x) = (-2)^{x}.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \\ &\text{e} \\ f\left(\frac{2}{4}\right) &= (-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^{2}} \\ &= \sqrt[4]{2^{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que: f não define uma função.

1 Metodo de Redução ao Absurdo:

A prova por redução ao absurdo, consiste em:

$$P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \sim Q \wedge P \Longrightarrow \text{Contradição}.$$

Logo,

$$\sim(\sim Q) = Q \text{ é verdadeira}$$

Vejam referências [2] e [6].

2 Notações para funções trigonométricas

1. **Função cosseno:**
$$f(x) = \cos x$$
2. **Função seno:**
$$f(x) = \sin x = senx$$
3. **Função tangente:**
$$f(x) = \operatorname{tg} x$$
4. **Função cotangente:**
$$f(x) = \operatorname{cotg} x$$
5. **Função secante:**
$$f(x) = \sec x$$
6. **Função cossecante:**
$$f(x) = \operatorname{cossec} x$$

3 Notações para funções trigonométricas inversas:

1. **Função arcocosseno:**
$$f(x) = \arccos x$$
2. **Função arcoseno:**
$$f(x) = \arcsin x$$
3. **Função arcotangente:**
$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

4. **Função arcocotangente:**

$$f(x) = \operatorname{arccotg} x$$

5. **Função arcosecante:**

$$f(x) = \operatorname{arcsec} x$$

6. **Função arcocossecante:**

$$f(x) = \operatorname{arccossec} x$$

4 Apêndice A

1. Dividir um número "a" em partes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ proporcionais a: $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$. Prove que: $x_1 = \frac{aa_1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$, $x_2 = \frac{aa_2}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$ e $x_n = \frac{aa_n}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$.

   Prova:
   Com efeito, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é diretamente proporcional a $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, com que:

   $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j = a.$$

   Então, tem-se:

   $$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = B.$$

   Consequentemente, temos:

   $$\begin{cases} x_1 = Ba_1 \\ x_2 = Ba_2 \\ \quad\vdots \\ x_n = Ba_n \end{cases} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j = B \sum_{j=1}^{n} a_j \Longrightarrow \frac{a}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} = B.$$

   Daí, segue-se que:

   $$x_1 = \frac{aa_1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}, \quad x_2 = \frac{aa_2}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}, \quad e \quad x_n = \frac{aa_n}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}$$

   ■

2. **(Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$)**
Escreva as esquações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N(0,1)$ e $Q(u,0)$ no plano. Mostre que, além do ponto N, essa reta corta a circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$ no ponto (x, y), onde $x = \frac{2u}{u^2+1}$ e $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$. Em seguida, escreva as equações paramétricas da reta que passa por $N(0,1)$ e pelo ponto $P(x, y)$ da circunferência $C : x^2 + y^2 = 1$. Mostre que esta reta corta o eixo das abcissas no ponto $\xi(P) = (u, 0)$, onde $u = \frac{x}{1-y}$. A função $\xi : C \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\xi(P) = \xi(x, y) = u = \frac{x}{1-y},$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$, cuja inversa

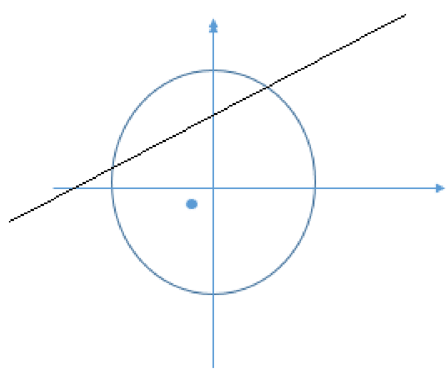
$$\begin{array}{rcl} \xi^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{array}$$

tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{array} \right. .$$

A função ξ chama-se a projeção estereográfica de $C \setminus \{N\}$ sobre $\mathbb{R}$, e sua inversa fornece uma outra parametrização da circunferência (exceto o "polo norte" N) por meio de funções racionais.

Prova:
Projeção Estereográfica ξ e sua inversa ξ^{-1} em $\mathbb{R}^2$.
A equação da circunferência dada por $C : x^2 + y^2 = 1$



(i) A equação da reta L que passa por $N(0,1)$ e $Q(u,0)$, é dada por:

$$X(t) = (x(t), y(t)), \text{ onde:} \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 0 + at \\ yt) = 1 + bt, \end{array} \right.$$

sendo $v = (a, b) = \overrightarrow{NQ} = (u, -1)$ a direção de L.
Logo, $X(t) = (x(t), y(t)) = (ut, 1-t)$, onde:

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \tag{I}$$

.

Afirmação: $L \cap C = \{P\}$, onde:

$$P(x, y).$$

Com efeito, $u^2t^2 + (1-t)^2 = 1$, então, temos: $\left(u^2+1\right)t^2 - 2t = 0$.
Portanto,

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{u^2+1} \tag{II}$$

Agora, levando (II) em (I), obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+1} \\ y = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}$$

De sorte que: $P(x, y) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$.
(ii) A equação da reta que passa por N$(0,1)$ e $P\left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$ cujo vetor diretor é $v_0 = \overrightarrow{NP}$ é descrita por:

$$L : \begin{cases} x_0 = 0 + \frac{2u}{u^2+1}t \\ y_0 = 1 - \frac{2}{u^2+1}t \end{cases}.$$

Agora, L corta o eixo xx em $Q(x_0, 0)$.
Portanto, $\xi(P) = \xi(x, y) = (u, 0)$,
onde $L : \begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1 - t \end{cases} \Longrightarrow y = 1 - \frac{x}{u} \Longrightarrow x = (1-y)u \Longrightarrow u = \frac{x}{1-y},\ y \neq 1.$
Consequentemente, vem:
A Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$, ou seja, $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$ é um isomorfismo $(C \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R})$, onde:

$$\begin{array}{rcl} \xi & : & C \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \xi(x, y) = u = \dfrac{x}{1-y}. \end{array}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{array}{rcl} \xi^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{array}$$

onde:

$$L : \begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}.$$

$\blacksquare$

3. **(Projeção Estereográfica)**
São necessárias duas cartas locais no mínimo para cobrir a esfera. Além disso, tem-se: um **difeomorfismo local** (Não se preocupe com este nome sofisticado, tudo isso estudarão ao longo dos cursos de Cálculo)
Considere $\mathbb{S}^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2=1\right\}$ e sejam $N(0,0,1)$, tal que:

$$\begin{array}{rlc} \mathbb{X}_1 & : \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{S}^2 \diagdown \{N\} \\ & (u,v) \longmapsto & \mathbb{X}_1(u,v) = (x,y,z). \end{array}$$

A equação da reta ξ que passa por $N(0,0,1)$ e $P(u,v,0)$ na direção $\overrightarrow{NP}$, é dada por:

$$\xi : X = (0,0,1) + (u-0, v-0, -1)\, r \Leftrightarrow X = (ur, vr, 1-r). \qquad (I)$$

Agora, a intersecção da reta ξ com $\mathbb{S}^2$ é descrita por:
$\left\{\begin{array}{c} X = (ur,vr,1-r) \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{array}\right. \Longrightarrow u^2r^2+v^2r^2+(1-r)^2 = 1$ e, portanto,

$$r = 0 \text{ ou } r = \frac{2}{u^2+v^2+1}. \qquad \text{(II)}$$

Decorre de (I) e (II) que: $\mathbb{X}_1(u,v) = (x,y,z)$, onde: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{array}\right.$

Observação 1: A aplicação inversa de $\mathbb{X}_1$ $\left(\mathbb{X}_1^{-1} = \pi\right)$ é chamada de **Projeção Estereográfica.**

$$\begin{array}{rlc} \mathbb{X}_1^{-1} = \pi & : \mathbb{S}^2 \diagdown \{N\} \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) \longmapsto & \mathbb{X}_1^{-1}(x,y,z) = (u,v) \end{array}$$

(i) A equação da reta γ que passa por $N(0,0,1)$ e $P_0(x,y,z)$ na direção do vetor $\overrightarrow{NP_0} = (x,y,z-1)$, é dada por:

$$\gamma : X_0 = (0,0,1) + (x,y,z-1)\, t \Leftrightarrow X = (xt, yt, 1+(z-1)\, t).$$

(ii) A intersecção da reta γ com o plano $\alpha : z = 0$, produz o seguinte resultado:
$1+(z-1)\, t = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{1-z}$, com $z \neq 1$.
Assim,

$$X_0 = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0\right) \simeq \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) = (u,v).$$

Logo,

$$\begin{array}{rlc} \pi & : \mathbb{S}^2 \diagdown \{N\} \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) \longmapsto & \pi(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right). \end{array}$$

Observação 2: Será estudado em Álgebra Linear: O $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço vetorial $\mathbb{U}$ de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$. Sugestão: Por simplicidade tome $T(x,y) = (x,y,0)$ é trivial que T é um isomorfismo. Vale ressaltar que: podemos fazer a seguinte identificação

$$(x,y) \simeq (x,y,0).$$

(Não se preocupe com este nome sofisticado)

5 Fazendo Médias: Harmônica, Geométrica e Aritmética

George Pólya nasceu em Budapeste (em húngaro: Pólya György), Áustria-Hungria, de pais asquenazes, Anna Deutsch e Jakab Pólya que, posteriormente, se converteram ao catolicismo romano em 1886. Embora seus pais fossem religiosos, Pólya foi batizado na Igreja Católica Romana e, posteriormente, tornou-se agnóstico. Pólya morreu em Palo Alto, Califórnia, Estados Unidos.

George Pólya, foi um matemático e professor de 1914 a 1940 no ETH Zürich na Suíça, e de 1940 a 1953 na Stanford University. Pólya permaneceu como professor emérito de Stanford o resto de sua vida e carreira. Trabalhou com uma variedade de tópicos matemáticos, incluindo séries, teoria dos números, análise matemática, geometria, álgebra, combinatória e probabilidade. T ambém é notável sua contribuição para a heurística em educação matemática.

Wikipédia, a enciclopédia livre. (Consultado em 18 de outubro de 2022 às 11h 45min)

A belíssima demonstração, a seguir, se deve a ele.

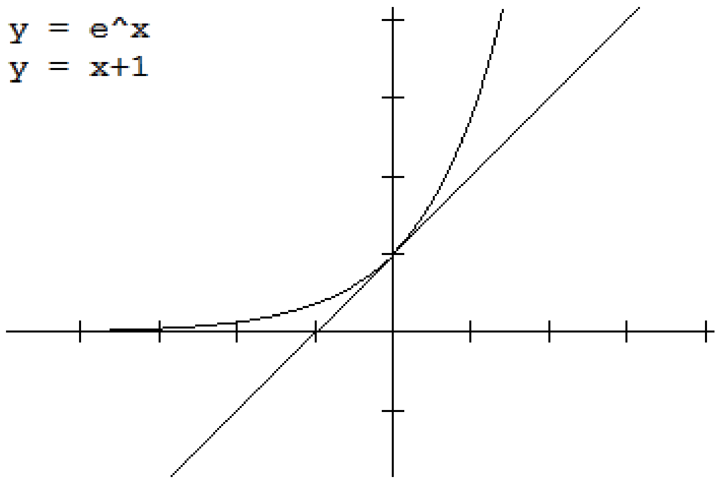
Problema:

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, prove que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Sugestão: Use o fato de que:

$$e^x \geq 1 + x, x \geq 0.$$



Prova:

Basta observar que:

$$e^{\frac{x_j}{A}-1} \geq \frac{x_j}{A},$$

com $j = 1, 2, \ldots, n$ e

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Vejamos

$$\begin{cases} e^{\frac{x_1}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} \\ e^{\frac{x_2}{A}-1} \geq \frac{x_2}{A} \\ \quad\vdots \\ e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_n}{A} \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \left(e^{\frac{x_1}{A}-1}\right) \cdot \left(e^{\frac{x_2}{A}-1}\right) \ldots e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} . \frac{x_2}{A} \cdots \frac{x_n}{A} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \overbrace{e^{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}-n}}^{=1} \geq \frac{x_1 . x_2 \ldots x_n}{A^n} \right. .$$

Logo,

$$A \geq \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{x_1 . x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

■

A primeira desigualdade é imediata, de fato:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} . \frac{1}{x_2} \ldots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}{n}.$$

Ou ainda,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n}.$$

De sorte que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

$\blacksquare$

6 Algumas Normas em R^n :

Este tema, em geral, é abordado de forma detalhada, nos cursos de Geometria Analítica Vetorial.

(i) Norma Euclidiana:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

(ii) Norma da Soma:

$$\|x\|_S = |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n| = \sum_{j=1}^{n}|x_j|$$

(iii) Norma do máximo (ou supremo):

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}.$$

(Em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes), em particular, em $\mathbb{R}^n$, temos:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\,\|x\|_\infty.$$

7 Translações e Reflexões:

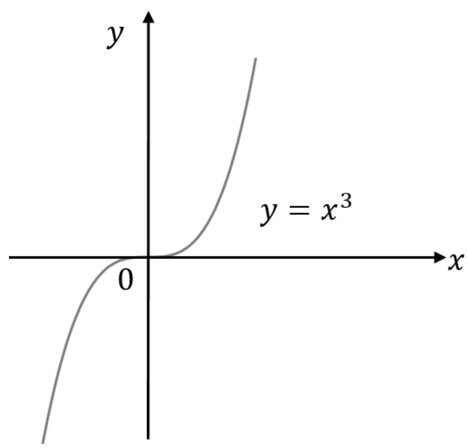
A Translações

$$y_1 = f(x) \Longrightarrow y_2 = f(x-k)$$

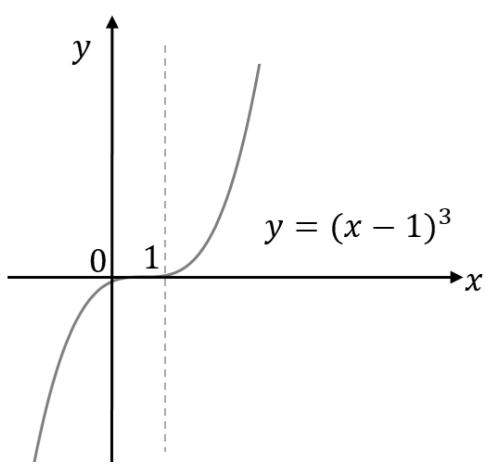
(i) $k > 0$: deslocamento à direita (ii) $k < 0$: deslocamento à esquerda

Exemplos:

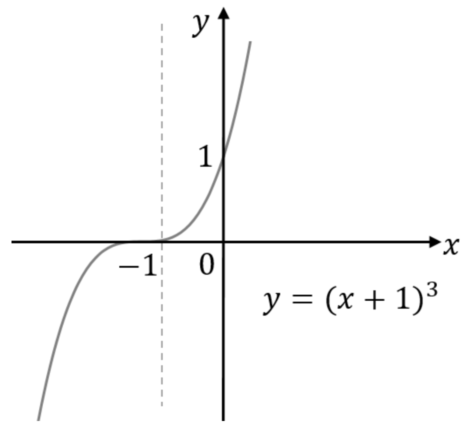
1. $f(x) = x^3$



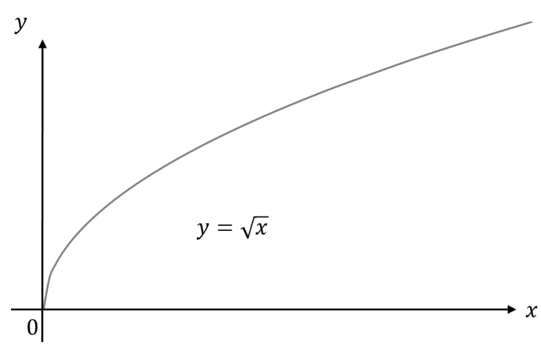
2. $f(x) = (x-1)^3$



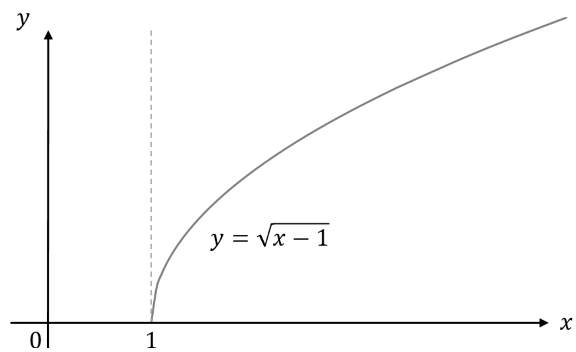
3. $f(x) = (x+1)^3 = (x-(-1))^3$



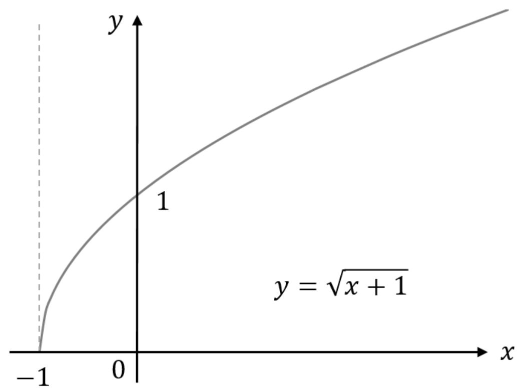
4. $f(x) = \sqrt{x}$



5. $f(x) = \sqrt{x-1}$



6. $f(x) = \sqrt{x+1} = \sqrt{x-(-1)}$



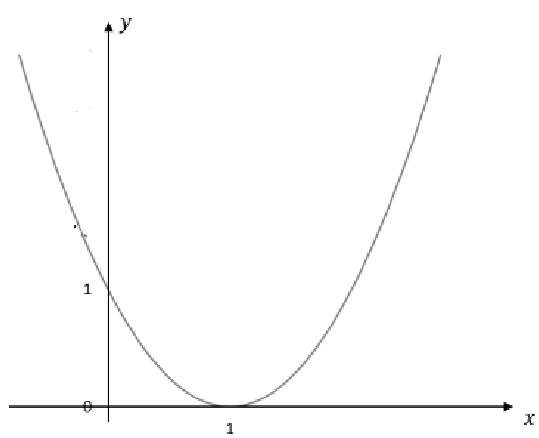
B Translações

$$y_1 = f(x) \Longrightarrow y_2 = f(x) + k$$

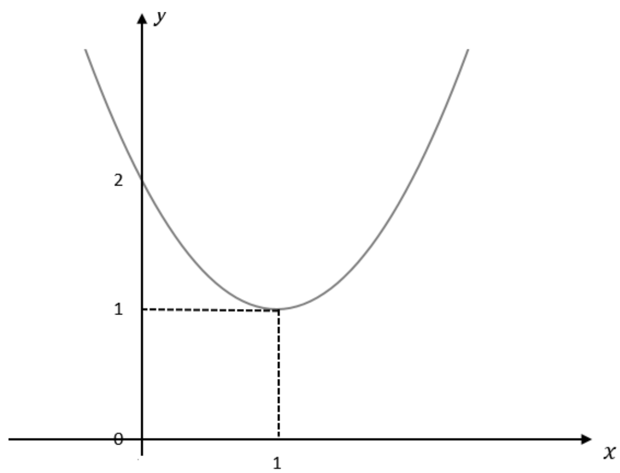
(i) $k > 0$: deslocamento para cima $\quad$ (ii) $k < 0$: deslocamento para basixo

Exemplos:

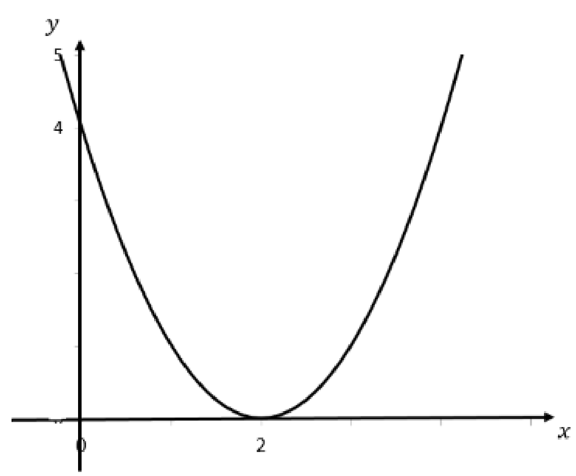
1.$y_1 = f(x) = (x-1)^2$



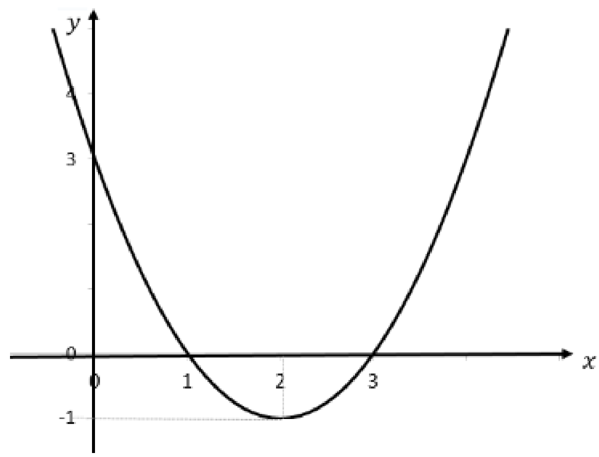
2. $y_2 = f(x) + 1 = (x-1)^2 + 1$



3. $y_1 = f(x) = (x-2)^2$



4. $y_2 = f(x) - 1 = (x-2)^2 - 1$

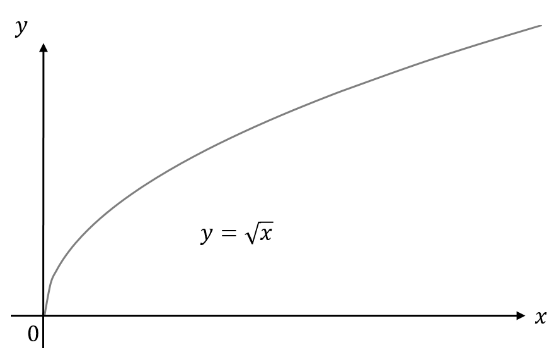


A Reflexão em torno do eixo y:

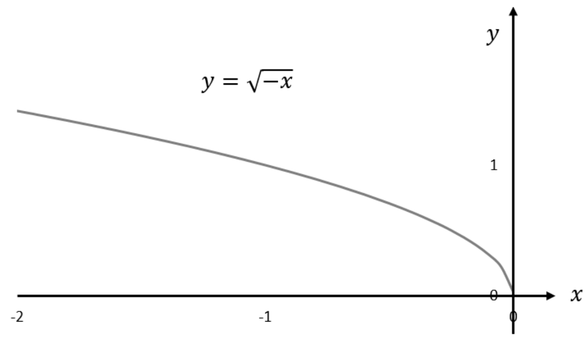
$$y_1 = f(x) \Longrightarrow y_2 = f(-x)$$

Exemplos:

1. $y_1 = f(x) = \sqrt{x}$



2. $y_2 = f(-x) = \sqrt{-x}$

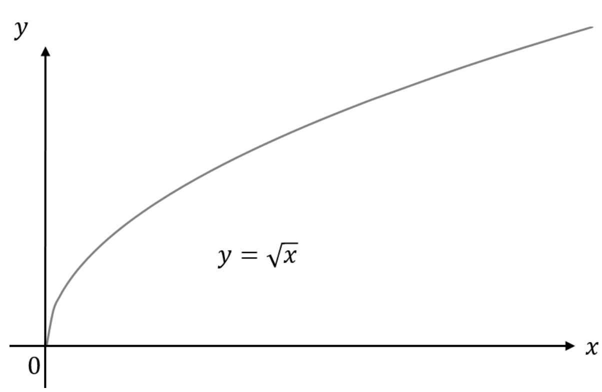


B Reflexão em torno do eixo x :

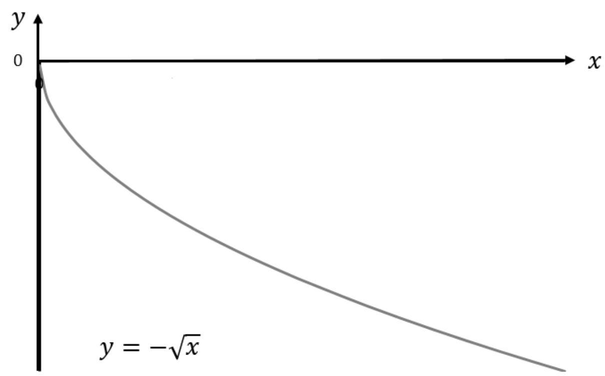
$$y_1 = f(x) \Longrightarrow y_2 = -f(x)$$

Exemplos:

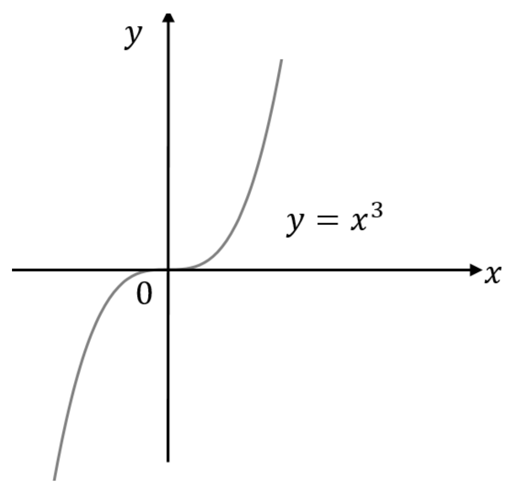
1. $y_1 = f(x) = \sqrt{x}$



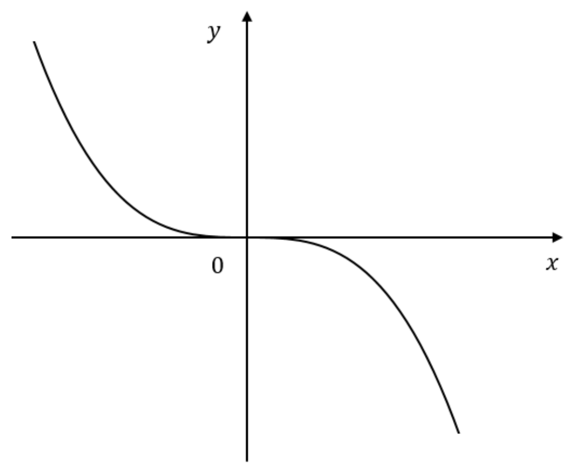
2. $y_2 = -\ f(x) = -\sqrt{x}$



3.$y_1 = f\left(x\right) = x^3$



4. $y_2 = -f(x) = -x^3$



Alfabeto Grego:

A α (alfa)
B β (beta)
Γ γ (gama)
Δ δ (delta)
E ϵ (epsilon)
Z ζ (zeta)
H η (eta)
Θ θ (teta)
I ι (iota)
K κ (capa)
Λ λ (lambda)
M μ (mu)
N υ (nu)
Ξ ξ (ksi)
O o (omicron)
Π π (pi)
P ρ (rô)
Σ σ (sigma)
Υ τ (tal)
Y ν (upsilon)
Φ ϕ (fi)
X χ (chi)
Ψ ψ (phi)
Ω ω (omega)

CAPÍTULO 2

A Máxima de George Pólya
"Não se pode fazer Matemática sem sujar as mãos".

George Pólya Nasceu em Budapeste
(Hungria) (1887 – 1985)

"O luto é o preço do amor"

Ciência de Dados
A habilidade de trabalhar com, entender e usar dados tornou-se uma habilidade essencial na vida e uma exigência para um grupo de trabalhos e carreiras que estão se expandindo. Os dados estão por toda parte. Noventa por cento dos dados do mundo foi gerado nos últimos dois anos (Marr, 2018).

Neste capítulo, vamos usar o corpo ordenado completo com o nome básico de conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, são definidas duas operações que satisfazem aos **axiomas ou postulados (** Veja ref [1]), como consequência teremos várias propriedades, onde: no conjunto se tem ordem dos elementos: podemos trabalhar com produtos notáveis, fatorações e racionalizações, módulo ou valor absoluto, desigualdades, casos particulares de equações polinomiais. Num primeiro momento, as demonstrações das propriedades podem deixar para um estudo posterior, quando se sentir mais seguro e precisar mergulhar; em águas mais profundas: se tratando de letramento matemático, se volta e estuda as demonstrações em detalhes. Ressaltando alguns aspectos históricos.

1 Aspectos Históricos

Frações simples foram usadas pelos egípcios por volta de 1000 a.C.; o védico "Shulba Sutras" (**"As regras dos acordes"**) em, cerca de 600 a.C., incluiu o que pode ter sido o primeiro "uso" de números irracionais. O conceito de irracionalidade foi implicitamente aceito pelos primeiros matemáticos indianos desde Manava (750−690 a.C.), que sabiam que certos números como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{61}$ não podiam ser exatamente determinadas. Por volta de 500 a.C., os matemáticos gregos liderados por **Pitágoras** perceberam a necessidade de números irracionais, em particular a irracionalidade da $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de 2.)

A Idade Média trouxe a aceitação de números zero e dos números negativos, inteiros e fracionários, primeiro pelos matemáticos indianos e chineses e depois pelos matemáticos árabes, que também foram os primeiros a tratar números irracionais como objetos algébricos, o que foi possível graças ao desenvolvimento de álgebra. Os matemáticos árabes fundiram os conceitos de "número" e "magnitude" em uma ideia mais geral de números reais. O matemático egípcio Abu Kamil $(850 - 930$ a.C.) foi o primeiro a aceitar números irracionais como soluções para equações quadráticas ou como coeficientes em uma equação, geralmente na forma de raízes quadradas, raízes cúbicas e raízes quartas.

No século XVI, Simon Stevin criou a base da notação decimal moderna e insistiu que não havia diferença entre números racionais e irracionais a esse respeito. No século $XVII$, **Descartes** introduziu o termo **"real"** para descrever as raízes de um polinômio, distinguindo-as das **"imaginárias"**.

Nos séculos $XVIII$ e XIX, houve muito trabalho sobre números irracionais e transcendentes. Johann Heinrich Lambert (1761) deu a primeira prova falha de que π não pode ser um número racional; Adrien-Marie Legendre (1794) completou a demonstração e mostrou que π não é a raiz quadrada de um número racional. Paolo Ruffini (1799) e Niels Henrik Abel (1842) construíram provas do teorema de Abel-Ruffini: que afirma que as equações gerais de grau cinco ou superior não podem ser resolvidas por uma fórmula geral que envolve apenas operações aritméticas e raízes.

Évariste Galois (1832) desenvolveu técnicas para determinar se uma determinada equação poderia ser resolvida por radicais, o que deu origem ao campo da teoria de Galois. Joseph Liouville (1840) mostrou que nem "e" nem "e^2" podem ser a raiz de uma equação quadrática inteira e, então, estabeleceram a existência de números transcendentes; Georg Cantor (1873) estendeu e simplificou bastante. Charles Hermite (1873) provou que e é transcendente e Ferdinand von Lindemann (1882) mostrou que π é transcendente. A prova de Lindemann foi muito simplificada por Weierstrass (1885), sendo ainda mais por David Hilbert (1893) até que, finalmente, foi tornada elementar por Adolf Hurwitz e Paul Gordan.

O desenvolvimento do cálculo no século $XVIII$ usou todo o conjunto de números reais sem defini-los de maneira clara. A primeira definição rigorosa foi publicada por **Georg Cantor** em 1871. Em 1874, ele mostrou que o conjunto de todos os números reais é não enumerável, mas o conjunto de todos os números algébricos é enumerável. Ao contrário das crenças amplamente difundidas, seu primeiro método não foi seu famoso argumento diagonal, publicado em 1891.

(**Wikipédia, a enciclopédia livre.**).

2 Estrutura, Ordem e Completeza de $\mathbb{R}$

Adição: $\begin{aligned} + : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x+y \end{aligned}$ e Multiplicação: $\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x\cdot y \end{aligned}$

Axiomas

1 Associatividade: (i) $x+(y+z)=(x+y)+z$ e (ii) $x.(y.z)=(x.y).z$

2 Comutatividade: (i) $x+y=y+x$ e (ii) $x.y=y.x$

3 Elemento Neutro: (i) $x+0=x$ e (ii) $x.1=x$

4 Elemento Inverso: (i) $x+(-x)=0$ e (ii) $\forall x\in\mathbb{R}.$, com $x\neq 0, \exists x^{-1}\in\mathbb{R} : x.x^{-1}=1.$

5 Distributividade: $x\,(y+z)=x.y+x.z$, $\forall x,y,z,\in\mathbb{R}$.

Observação:
Algumas notações:
$\forall$ = Para todo ou quaisquer que sejam e $\exists$= Existe

2.1 Algumas consequências do corpo $\mathbb{R}$

i) Lei do Cancelamento:

$\forall x,y,z,\in\mathbb{R}:$ (a) $y+x=y+z\Longrightarrow x=z$ (b) $y.x=y.z$ com $y\neq 0\Longrightarrow x=z.$

Prova:
(a) Com efeito, $\forall y\in\mathbb{R} : \exists\,(-y)\in\mathbb{R} : y+(-y)=0$. Então,

$$y+x=y+z\Longrightarrow [y+(-y)]+x=[y+(-y)]+z\Longrightarrow x=z.$$

$\blacksquare$

(b) Basta notar que: $\forall y\in\mathbb{R} : y\neq 0, \exists y^{-1}\in\mathbb{R} : y^{-1}.y=y.y^{-1}=1$,
e, portanto,

$$y.x=y.z\Longrightarrow \left(y^{-1}.y\right)x=\left(y^{-1}.y\right)z\Longrightarrow x=z.$$

$\blacksquare$

ii) $\forall x\in\mathbb{R}$: (a) $x.0=0$ (b) $\forall x,y\in\mathbb{R}$: $(-x)\,.\,(-y)=xy.$

Prova:
(a) Com efeito, $x.0=x\,(0+0)=x.0+x.0$ e $x.0=x.0+0$. Daí, vem:

$$x.0+x.0=x.0+0\Longrightarrow x.0=0.$$

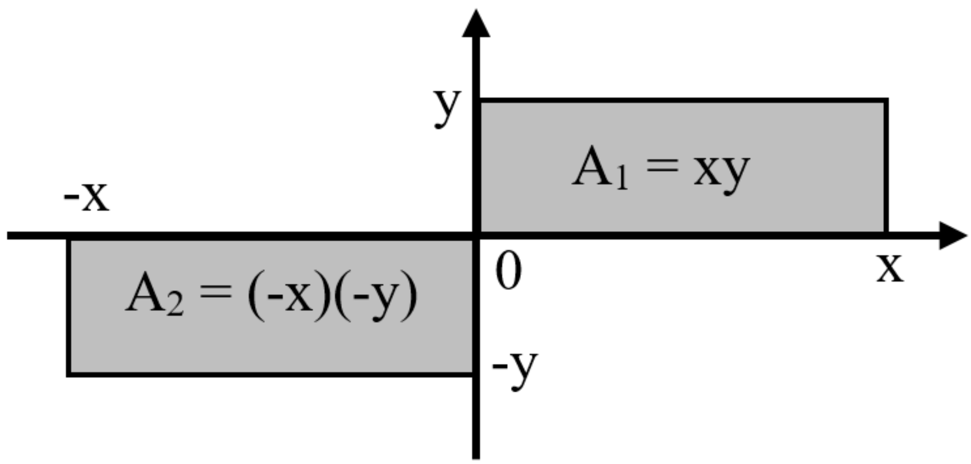
$\blacksquare$

(b) $(-x) \, . \, (-y) = xy.$

Prova:

Não faremos uma prova; e sim, apenas uma ilustração gráfica, a saber:
As áreas limitadas pelos dois retângulos $A_1 = x.y$ e $A_2 = (-x) \, . \, (-y)$ são iguais, visto que: A_2 foi obtido por reflexão em torno da origem do retângulo A_1 e, portanto,

$$x.y = (-x) \, . \, (-y)$$



iii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x.y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Prova:

De fato, $\forall x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \exists x^{-1} \in \mathbb{R} : x^{-1}.x = x.x^{-1} = 1$, por conseguinte, obtemos:

$$x.y = 0 \Longrightarrow \left(x^{-1}.x\right).y = \left(x^{-1}.x\right).0 \Longrightarrow y = 0. \tag{1}$$

Analogamente, $\forall y \in \mathbb{R} : y \neq 0, \exists y^{-1} \in \mathbb{R} : y^{-1}.y = 1$, temos:

$$y.x = 0 \Longrightarrow \left(y^{-1}.y\right).x = \left(y^{-1}.y\right).0 \Longrightarrow x = 0. \tag{2}$$

Decorre de (1) e (2) que: $x = 0$ ou $y = 0$. ■

iv) As equações

$$a + x = b \quad \text{e} \quad a.x = b,$$

esta última com $a \neq 0$ tem solução única.

Prova:

$$a + x = b$$

Existência

De fato, $w = b - a$ é uma solução. Visto que:

$$w + a = (b - a) + a = b + [(-a) + a] = b.$$

$\blacksquare$

Unicidade
Agora, suponha que $\bar{w}$ também é solução, então, temos:

$$\begin{cases} a + w = b \\ a + \bar{w} = b \end{cases} \Longrightarrow a + w = a + \bar{w}.$$

Logo, $w = \bar{w}$. (única) $\blacksquare$

Prova:

$$ax = b.$$

Existência
De fato, $x_0 = a^{-1}b$ é uma solução. Visto que:

$$ax_0 = a.\left(a^{-1}b\right) = \left(a.a^{-1}\right) b = b.$$

$\blacksquare$

Unicidade
Agora, suponha que $\bar{x}_0$ seja outra solução, então, temos:

$$\begin{cases} ax_0 = b \\ a\bar{x}_0 = b \end{cases} \Longrightarrow ax_0 = a\bar{x}_0 \Longrightarrow x_0 = \bar{x}_0.$$

Logo, $x_0 = \bar{x}_0$. (única) $\blacksquare$

2.2 Axioma de Ordem

Existe em $\mathbb{R}$ um subconjunto $\mathbb{R}^+$, com as seguintes propriedades:

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se: $(x + y) \in \mathbb{R}^+$ e $(x.y) \in \mathbb{R}^+$,

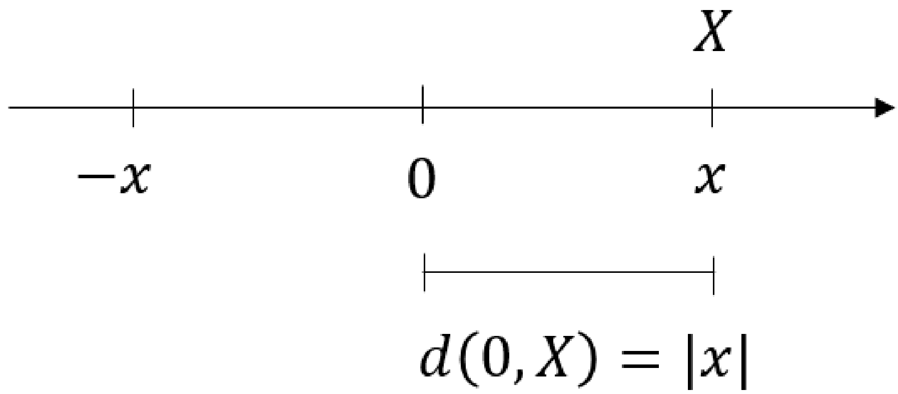
(ii) Dado $x \in \mathbb{R}$. Então, tem-se: $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$ (**tricotomia**)

onde: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$ e $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : \ -x \in \mathbb{R}^+\}$ são respectivamente, os conjuntos dos números reais positivos e negativos.

Observação:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-.$$

$x \in \mathbb{R}^+ \iff x > 0 \iff (-x) < 0 \iff (-x) \in \mathbb{R}^-$.



2.3

Ordem: $x < y \iff (y - x) \in \mathbb{R}^+ \iff y - x > 0$

Propriedades

(i) **Transitiva:**

$x < y$ e $y < z \Longrightarrow x < z$.

Prova:

De fato,

$$\left\{\begin{array}{c} x < y \\ \text{e} \\ y < z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (y-x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ (z-y) \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right. \Longrightarrow (z - x) \in \mathbb{R}^+ \iff z > x.$$

$\blacksquare$

(ii) **Monotonicidade:**

(a) $x < y$ e para todo $z \in \mathbb{R} \Longrightarrow x + z < y + z$.

Prova:

Basta notar:

$$\left\{\begin{array}{c} x < y \\ \text{e} \\ z \in \mathbb{R} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} (y-x) \in \mathbb{R}^+ \\ \text{e} \\ z \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Logo,
$$[(y+z)-(x+z)] \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow y+z > x+z.$$

■

(b) $x < y$ e $z > 0 \Longrightarrow x.z < y.z.$

Prova:

Com efeito,
$$\left\{\begin{array}{c} x<y \\ \text{e} \\ z>0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (y-x) \in \mathbb{R}^{+} \\ \text{e} \\ z \in \mathbb{R}^{+} \end{array}\right. \Longrightarrow (yz-xz) \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow yz > xz.$$

■

(c) $x < y$ e $z < 0 \Longrightarrow x.z > y.z.$

Prova:

Com efeito,
$$\left\{\begin{array}{c} x<y \\ \text{e} \\ z<0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (y-x) \in \mathbb{R}^{+} \\ \text{e} \\ (-z) \in \mathbb{R}^{+} \end{array}\right. \Longrightarrow (xz-yz) \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow xz > yz.$$

■

Exercícios:

E_1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, tem-se: $x^2 > 0$

Prova:

Basta considerar dois casos

1^o Caso: $x > 0$
$$x \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow x.x = x^2 \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow x^2 > 0.$$
Analogamente, temos:
2^o Caso: $x < 0$
$$(-x) \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow (-x)\,.\,(-x) = x^2 \in \mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow x^2 > 0.$$
De sorte que:
$$x^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

■

E_2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$, prove que:

A) $x < y \Longrightarrow x^2 < y^2.$

Prova:

De fato,

$$\left\{\begin{array}{c} x<y \\ \text{e} \\ x,y>0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (y-x)\in\mathbb{R}^{+} \\ \text{e} \\ (y+x)\in\mathbb{R}^{+} \end{array}\right. \Longrightarrow \left(y^{2}-x^{2}\right)\in\mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow y^{2}>x^{2}.$$

Destacando : $(y-x)\,.\,(y+x)=y^{2}-x^{2}$ (será provado posterioremnte) ■

B) $x<y \Longrightarrow 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

Prova:

Basta observar:

$$\left\{\begin{array}{c} x<y \\ \text{e} \\ x,y>0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (y-x)\in\mathbb{R}^{+} \\ \text{e} \\ \frac{1}{xy}\in\mathbb{R}^{+} \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{y-x}{xy}\right)\in\mathbb{R}^{+}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{y-x}{xy}\right)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\in\mathbb{R}^{+} \Longleftrightarrow 0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}.$$

■

C) Determine $x\in\mathbb{R}$, tal que: $5x+3<2x+8$.

Solução:

$$\begin{aligned} 5x+3 &< 2x+8 \Longleftrightarrow 5x+(3-3)<2x+(8-3) \\ &\Longleftrightarrow 5x<2x+5 \Longleftrightarrow 5x-2x<5 \Longleftrightarrow 3x<5 \\ &\Longleftrightarrow x<\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

■

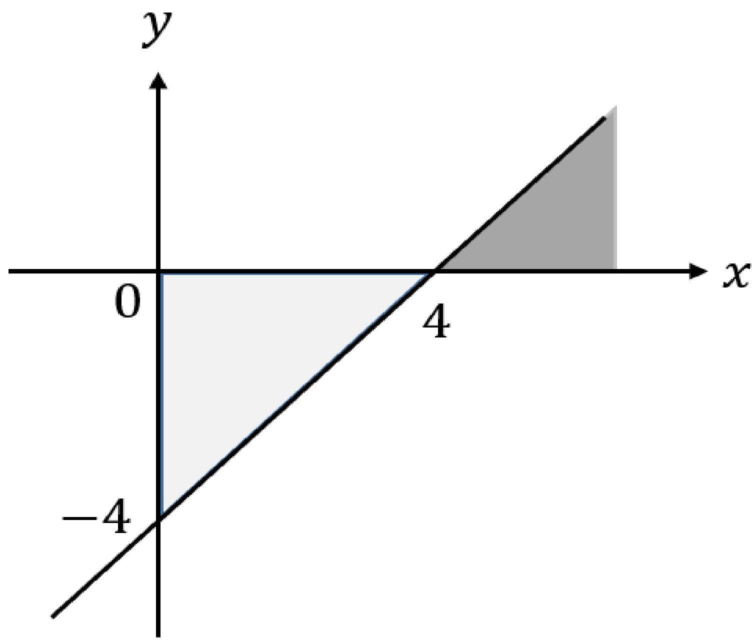
D) estude o sinal da expressão: $y=x-4$

(i) $x-4>0 \Longleftrightarrow x>4$

(ii) $x-4=0 \Longleftrightarrow x=4$

(iii) $x-4<0 \Longleftrightarrow x<4$.

esboçando o gráfico, $y = x - 4$, temos:



D) Seja a um número inteiro. Prove que:
(i) a é ímpar$\Longrightarrow a^2$ também é ímpar.
(ii) a é par$\Longrightarrow a^2$ continua par.
Prova:
(i) Seja $a = 2k + 1$ um número inteiro ímpar, então, temos:

$$\begin{aligned} a^2 &= (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 = 2n + 1, \end{aligned}$$

com $n = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$.
Logo, "a^2" é ímpar. ■

(ii) Analogamente, se $a = 2k$ é par, tem-se:

$$a^2 = (2k)^2 = 2\left(2k^2\right) = 2n_1, \text{onde: } n_1 = 2k^2,$$

e, portanto, "a^2" continua um número inteiro par. ■

2.4 Fatoração

Dizemos que uma expressão $\mathbb{E}$ está na forma fatorada, se existem $E_1, E_2, \ldots, E_n$;

com $m.d.c.\,(E_1, E_2, \ldots, E_n) = 1$, tais que:

$$\mathbb{E} = E_1.E_2 \ldots E_n.$$

Exemplos:

1. Fatore: $\mathbb{E} = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Solução:

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2 (x-2) - (x-2) \\ &= (x-2)\left(x^2 - 1\right) = (x-2)(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

■

2. Fatore: $\mathbb{E} = A^2 - B^2$.

Solução:

Observe que:

$$\mathbb{E} = A^2 - B^2 = (A-B)(A+B).$$

(Será provado em seguida) ■

3. Fatore: $\mathbb{E} = x^3 + y^3$.

Solução:

Com efeito,

$$\mathbb{E} = x^3 + y^3 = (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right).$$

Será provado em seguida, com os axiomas do conjunto dos números reais. ■

4. (i) Fatore: $\mathbb{E} = (x+h)^2 - (x-h)^2$.

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \\ &= (x+h)^2 - (x-h)^2 \\ &= [(x+h) - (x-h)] \,.\, [(x+h) + (x-h)] \\ &= 2h.2x = 4xh. \end{aligned}$$

■

(ii) Seja $f(x) = x^2$, supondo $h \neq 0$, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

Solução:

Com efeito, $f(\square) = (\square)^2$, $f(x+h) = (x+h)^2$ e $f(x-h) = (x-h)^2$, então, temos:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{h} = \frac{4xh}{h} = 4x.$$

$\blacksquare$

2.5 Produtos Notáveis

P_1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Prova:

Facilmente, temos:

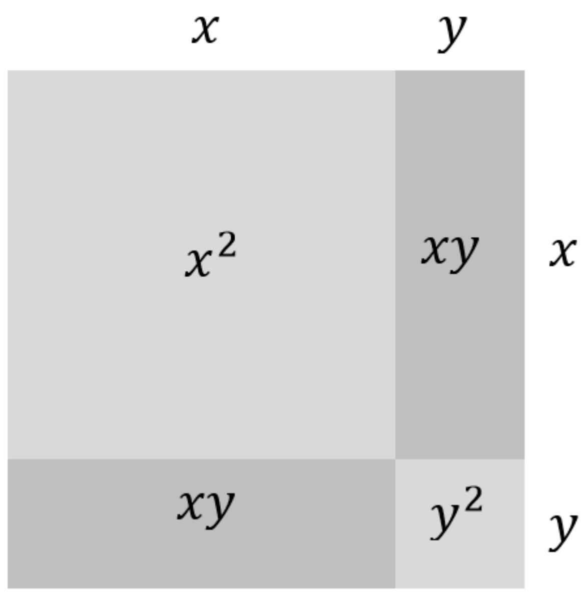
$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) \\ &= x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

$\blacksquare$

A área do quadrado da soma de dois termos, pode ser interpretado como soma das áreas de dois quadrados x^2e y^2 conjuntamente com as áreas de dois retângulos $xy + yx = 2xy$.



P_2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

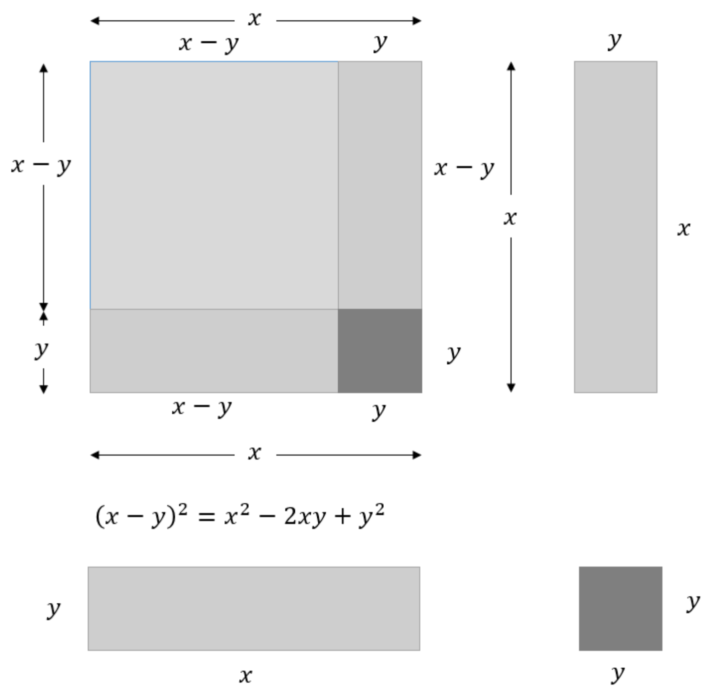
Prova:
Com efeito, temos:

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= (x-y)(x-y) = x\,(x-y) - y\,(x-y) \\ &= x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

$\blacksquare$



P_3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

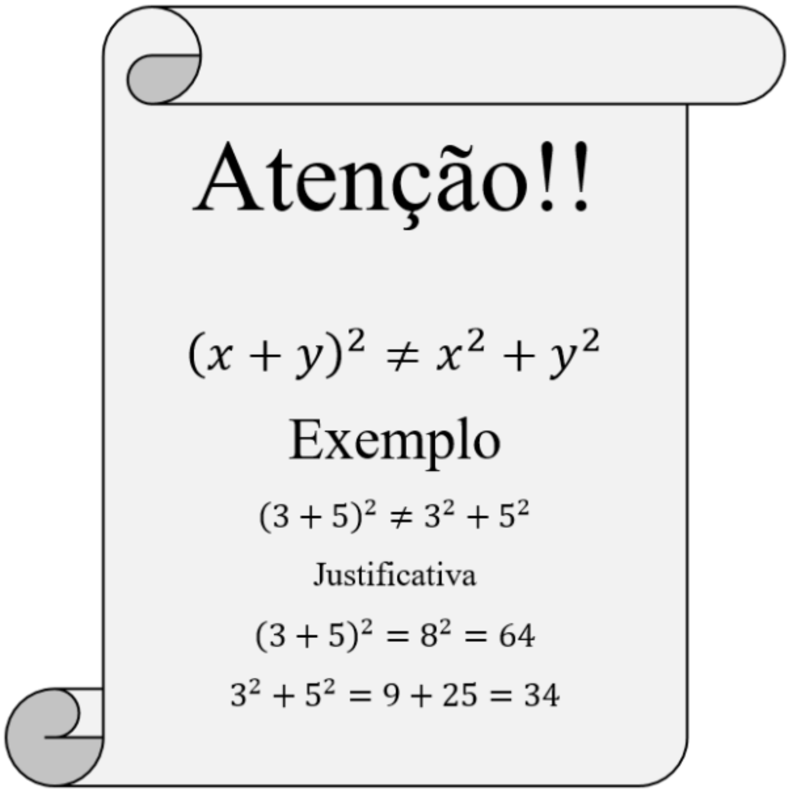
Prova:
De fato,

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y) &= x(x + y) - y(x + y) = x^2 + xy - yx - y^2. \\ &= x^2 + xy - yx + y^2 = x^2 - y^2. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$$

■



Observação: Se $x \neq y$, então, temos:

$$\frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y. \blacksquare$$

Aplicação:

Calcule a expressão e simplifique, com $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

1^o modo: $(x+h)^2 = x^2+2xh+h^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} &= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x+h. \end{aligned}$$

■

2^o modo: $(x+h)^2 - x^2 = [(x+h)-x]\,[(x+h)+x]$. Daí, vem:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{h\,[(x+h)+x]}{h} = 2x + h.$$

■

P_4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = x^3 - y^3$.

Prova:

Com efeito,

$$\begin{aligned}
(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) &= x\left(x^2+xy+y^2\right) - y\left(x^2+xy+y^2\right) \\
&= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 \\
&= x^3 - y^3.
\end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) = x^3 - y^3.$$

■

Observação: Se $x \neq y$, então, temos:

$$\frac{x^3 - y^3}{x-y} = \frac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{x-y} = x^2 + xy + y^2.$$

■

P_5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, temos: $(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) = x^3 + y^3$.

Prova:

Com efeito,

$$\begin{aligned}
(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) &= x\left(x^2-xy+y^2\right) + y\left(x^2-xy+y^2\right) \\
&= x^3 - x^2y + xy^2 + yx^2 - xy^2 + y^3 \\
&= x^3 + y^3
\end{aligned}$$

De sorte que:

$$(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right) = x^3 + y^3.$$

■

Observação: Se $x \neq -y$, então, temos:

$$\frac{x^3 + y^3}{x+y} = \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x+y} = x^2 - xy + y^2.$$

$\blacksquare$

Aplicação:

Calcule e simplifique, com $h \neq 0$:

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

1^o modo: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

2^o modo: $A^3 - B^3 = (A-B)\left(A^2 + AB + B^2\right)$. Assim,
$(x+h)^3 - x^3 = [(x+h) - x]\left[(x+h)^2 + (x+h)\,x + x^2\right]$. Por conseguinte, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \frac{h\left[(x+h)^2 + (x+h)\,x + x^2\right]}{h} \\ &= (x+h)^2 + (x+h)\,x + x^2.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Para facilitar a compreensão, vamos mostrar que:

$$(x+h)^2 + (x+h)\,x + x^2 = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned}(x+h)^2 + (x+h)\,x + x^2 &= x^2 + 2xh + h^2 + x^2 + xh + x^2 \\ &= 3x^3 + 3xh + h^2.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Problema

(A) Sejam x, y números reais positivos. Prove que:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Prova:

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, tais que: $x, y > 0$, temos:

$$x < y \text{ ou } x = y \text{ ou } x > y.$$

Em quaisquer dos casos, tem-se:

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 &\geq 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Longleftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \\
\Longleftrightarrow &\quad (x+y)^2 \geq 4xy \Longleftrightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Longleftrightarrow \sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4}} \Longleftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad (1)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}} &\leq \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \Longleftrightarrow \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}} \\
\Longleftrightarrow &\quad \frac{\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}{2} \leq \sqrt{xy}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Agora, de (1) e 2), segue-se que:

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

■

(B) Mostre que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

está compreendido entre o menor e o maior dos números $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, desde que: $b_1, b_2, \ldots b_n$ sejam todos positivos.

Prova:

Sejam $b_j > 0$ com $j = 1, 2, \ldots, n$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, então temos:

$$\left\{\begin{array}{c} m \leq \frac{a_1}{b_1} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \mathbb{M} \\ \vdots \\ m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \mathbb{M} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} mb_1 \leq a_1 \leq \mathbb{M}b_1 \\ mb_2 \leq a_2 \leq \mathbb{M}b_2 \\ \vdots \\ mb_n \leq a_n \leq \mathbb{M}b_n. \end{array}\right.$$

Dito de outro modo, temos:

$$m(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \mathbb{M}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Logo,

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \mathbb{M} \Longrightarrow m \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \leq \mathbb{M}.$$

$\blacksquare$

(Por simplicidade faça o caso $n = 2$)

(C) Sejam a, b e c pertencentes a $\mathbb{R}$. Prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Prova:

Com efeito, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca. \end{cases} \qquad (I)$$

Agora, somando membro a membro as desigualdades de (I), obtemos:

$$2\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \geq 2\left(ab + bc + ac\right).$$

De sorte que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

$\blacksquare$

Aplicação:

Calcule e simplifique:

$(i)\ \frac{x^2-a^2}{x^3-a^3} \qquad (ii)\ \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} \qquad (iii)\ \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} \qquad (iv)\ \frac{4x^2-9}{2x+3} \qquad (v)\ \frac{x^3+1}{x-1}$

Fatos que Ajudam:

$$\begin{cases} x^2-a^2 = & (x-a)(x+a) \\ x^3-a^3 = & (x-a)\left(x^2+xa+a^2\right) \\ x^3+a^3 = & (x+a)\left(x^2-xa+a^2\right) \\ (2x)^2-3^2 = & (2x-3)(2x+3) \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{a} = & \frac{a-x}{xa} = \frac{-(x-a)}{xa}. \end{cases}.$$

Daí, vem:

(i)

$$\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3} = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+xa+a^2)} = \frac{x+a}{x^2+xa+a^2},\ x \neq a$$

(ii)

$$\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x}.\frac{1}{(x-1)} = \frac{-1}{x},\ x \neq 0 \text{ e } x \neq 1$$

(iii)

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \frac{\frac{-(x-a)}{xa}}{x-a} = \frac{-(x-a)}{xa}.\frac{1}{(x-a)} = \frac{-1}{xa},\ x \neq a \neq 0.$$

(iv)

$$\frac{4x^2-9}{2x+3} = \frac{(2x-3)(2x+3)}{2x+3} = 2x-3,\ x \neq \frac{-3}{2}$$

(v)

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)\left(x^2+x+1^2\right)}{x-1} = x^2+x+1,\ x \neq 1.$$

■

2.5.1 Proposição 1:

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e n um número inteiro positivo, tal que: $n \geq 2$. Então, tem-se:

$$x^n - y^n = (x-y).\left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \ldots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$$

Prova:

(Daniel Cordeiro de Morais, Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3^a Ed.,SBM, 2016 ref.[1] sobre indução finita sobre n)

2.5.2 Alguns Casos Particulares da proprosição 1:

Não faremos uma demostração, apenas exemplos, de casos particulares:

$x^2 - y^2 = (x - y) \,.\, (x + y)$
$x^3 - y^3 = (x - y) \,.\, \left(x^2 + xy + y^2\right)$
$x^4 - y^4 = (x - y) \,.\, \left(x^3y^0 + x^2y^1 + xy^2 + x^0y^3\right)$
$x^5 - y^5 = (x - y) \,.\, \left(x^4y^0 + x^3y^1 + x^2y^2 + xy^3 + x^0y^4\right)$
$x^6 - y^6 = (x - y) \,.\, \left(x^5y^0 + x^4y^1 + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + x^0y^5\right)$
$x^7 - y^7 = (x - y) \,.\, \left(x^6y^0 + x^5y^1 + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + x^0y^6\right).$
Assim, continuando com o processo, obtemos:

$$x^n - y^n = (x - y) \,.\, \left(x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + \ldots + xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$$

Observe que:
À medida que o expoente de x decresce de $n - 1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y, só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 ate $n - 1$.

Exemplos
1. Seja $f(x) = x^n$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \ x \neq 1.$$

Solução:

Decorre da proposição anterior que:

$$x^n - 1^n = (x - 1) \,.\, \left(x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \ldots + x1^{n-2} + x^0 1^{n-1}\right).$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{x^n - 1^n}{x - 1} = \frac{(x - 1) \,.\, \left(x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \ldots + x1^{n-2} + x^0 1^{n-1}\right)}{x - 1} \\ &= x^{n-1}1^0 + x^{n-2}1^1 + \ldots + x1^{n-2} + x^0 1^{n-1} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1. \end{aligned}$$

Vale a pena observar: o expoente de x decresce de $n - 1$ até 0, ou seja, teremos n termos.
De sorte que:

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

■

2. Seja $f(x) = x^4$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+1) - f(1)}{x},\ x \neq 0.$$

Solução:

Se $f(x) = x^4$, então, $f(\square) = (\square)^4$ e $f(x+1) = (x+1)^4$. Assim,

$$\frac{f(x+1) - f(1)}{x} = \frac{(x+1)^4 - 1}{x}.$$

Agora, da proposição 1 sabemos:
$x^4 - y^4 = (x-y) . \left(x^3y^0 + x^2y^1 + xy^2 + x^0y^3\right)$
$(x+1)^4 - 1^4 = [(x+1) - 1] \left[(x+1)^3 1^0 + (x+1)^2 1^1 + (x+1)^1 1^2 + (x+1)^0 1^3\right].$
Daí segue-se:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+1) - f(1)}{x} &= \frac{(x+1)^4 - 1}{x} = \frac{x\left[(x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1\right]}{x} \\ &= (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1. \end{aligned}$$

■

2.5.3 Proposição 2:

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e n um número inteiro positivo ímpar, tal que: $n \geq 3$. Então, tem-se:

$$x^n + y^n = (x+y) . \left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \ldots + xy^{n-2} - x^0y^{n-1}\right)$$

Prova:
(Daniel Cordeiro de Morais, Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3^a Ed.,SBM, 2016 ref.[1] sobre indução finita sobre n)

2.5.4 Alguns Casos Particulares da proprosição 2:

Não faremos uma demostração, apenas exemplos, de casos particulares:

$x^3 + y^3 = (x+y) . \left(x^2 - xy + y^2\right)$
$x^5 + y^5 = (x+y) . \left(x^4y^0 - x^3y^1 + x^2y^2 - xy^3 + x^0y^4\right)$
$x^7 + y^7 = (x+y) . \left(x^6y^0 - x^5y^1 + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + x^0y^6\right)$
$x^9 + y^9 = (x+y) . \left(x^8y^0 - x^7y^1 + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + x^0y^8\right).$
Assim, continuando com o processo, obtemos:

$$x^n + y^n = (x+y) \, . \left(x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + \ldots - xy^{n-2} + x^0y^{n-1}\right)$$

Observe que:
À medida que o expoente de x decresce de $n-1$ até 0. O mesmo ocorre com o expoente de y, só que na ordem inversa, ou seja, cresce de 0 até $n-1$. Além disso, os sinais são alternados.

Exemplos
Seja $f(x) = x^9$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1}, \; x \neq -1.$$

Solução:

Decorre da proposição anterior que:

$$\begin{aligned} x^9 + y^9 &= (x+y) \, . \left(x^8y^0 - x^7y^1 + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + x^0y^8\right). \\ x^9 - (-1)^9 &= x^9 + 1 = (x+1) \, . \left(x^8 1^0 - x^7 1^1 + \ldots - x1^7 + x^0 1^8\right). \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + f(1)}{x+1} &= \frac{x^9 + 1^9}{x+1} = \frac{(x+1) \, . \left(x^8 1^0 - x^7 1^1 + \ldots - x1^7 + x^0 1^8\right)}{x+1} \\ &= \left(x^8 1^0 - x^7 1^1 + \ldots - x1^7 + x^0 1^8\right) \end{aligned}$$

Vale a pena observar: o expoente de x decresce de 8 até 0, ou seja, teremos 9 termos.
De sorte que:

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Os sinais são alternados e notemos: os termos de expoente ímpares são negativos. ■

2. Seja $f(x) = x^3$, então, calcule e simplifique:

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2}, \; x \neq -2.$$

Solução:

Se $f(\square) = (\square)^3$, $f(x) = x^3$ e $f(-2) = (-2)^3 = -8$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} &= \frac{x^3 - (-8)}{x+2} = \frac{x^3 + 8}{x+2} = \frac{(x+2) \, . \left(x^2 - x.2 + 2^2\right)}{x+2} \\ &= x^2 - 2x + 4. \end{aligned}$$

■

2.6 Racionalização

2.6.1 Fator Racionalizante

Chama-se fator racionalizante de uma expressão I, a outra expressão R, tal que:

$$I.R$$

seja uma expressão sem radical.

Exemplos:

1. Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x}$.

Solução:

Seja $R = \sqrt[3]{x^2}$, então, facilmente, obtemos:

$$I.R = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x.x^2} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

$\blacksquare$

2. Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt{x}$-$\sqrt{a}$

Solução:

Seja $R = \sqrt{x} + \sqrt{a}$, então, tem-se:

$$I.R = \left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right).\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right) = x - a.$$

$\blacksquare$

Cálculos Auxiliares:

$(A - B).(A + B) = A^2 - B^2$

$(\sqrt{x} - \sqrt{a}).(\sqrt{x} + \sqrt{a}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{a})^2 = x - a$, pois $x, a \geq 0$.

O **fator racionalizante**, neste caso,

$$R = \sqrt{x} + \sqrt{a}.$$

3. Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}$.

Solução:

Basta observador que:

$(A - B).\left(A^2 + AB + B^2\right) = A^3 - B^3$

$(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}).\left[(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2\right] = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = x - a.$

O **fator racionalizante**, neste caso,

$$R = \left[\left(\sqrt[3]{x} \right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^2 \right].$$

Logo,

$$I.R = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a} \right) . \left[\left(\sqrt[3]{x} \right)^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^2 \right] = x - a.$$

■

4. Determine o fator racionalizante para a expressão dada $I = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a}$.

Solução:

Basta observador que:
$(A + B) . \left(A^2 - AB + B^2 \right) = A^3 + B^3$
$\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a} \right) . \left[\left(\sqrt[3]{x} \right)^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^2 \right] = \left(\sqrt[3]{x} \right)^3 + \left(\sqrt[3]{a} \right)^3 = x + a.$
O **fator racionalizante**, neste caso,

$$R = \left[\left(\sqrt[3]{x} \right)^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^2 \right].$$

Logo,

$$I.R = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a} \right) . \left[\left(\sqrt[3]{x} \right)^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \left(\sqrt[3]{a} \right)^2 \right] = x + a.$$

■

Exercícios 1:

Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $h \neq 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

onde:

1) $f(x) = ax + b$	2) $f(x) = x^2 + x$	3) $f(x) = \frac{1}{x}$	4) $f(x) = x^3 + 1$
5) $f(x) = -2x$	6) $f(x) = x^2 + 1$	7) $f(x) = \sqrt{x}$	8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solução:

1) Consideremos dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$
1^o Caso: $a = 0 : f(\square) = b$.(note que qualquer valor do "quadrado"
o resultado será sempre b).
Ilustrativamente, $f(\square) = f(x + k + n) = b$ e $f(\square) = f(x + h) = b$. Assim,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b - b}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

2^o Caso: $a \neq 0 : f(\square) = a\square + b$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{[a(x+h)+b]-(ax+b)}{h} = \frac{ax+ah-ax}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

$\blacksquare$

2) $f(x) = x^2 + x,\ f(\square) = (\square)^2 + (\square)$.(Observe que o "quadrado" é apenas um símbolo representando o significado.

$$f(k) = k^2 + k, f(\triangle) = (\triangle)^2 + (\triangle), f(x+h) = (x+h)^2 + (x+h).$$

Além disso, fazendo alguns cálculos auxiliares, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 + (x+h) - \left(x^2 + x\right) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + h - x^2 \\ &= h(2x+h+1). \end{aligned}$$

Por conseguinte, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + (x+h) - \left(x^2+x\right)}{h} = \frac{h(2x+h+1)}{h} \\ &= 2x+h+1. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, usando a mesma ideia do "quadrdo" $f(\square) = \frac{1}{\square}$.
$f(k) = \frac{1}{k}$, $f(\triangle) = \frac{1}{\triangle}$, $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$. Daí vem:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{(x+h)x}.\frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h)x}.$$

$\blacksquare$

4) $f(x) = x^3 + 1$,usando a mesma ideia do "quadrdo" $f(\square) = (\square)^3 + 1$.
Para ilustração, vamos simular alguns valores para o "quadrado"
$f(x+t+1) = (x+t+1)^3 + 1, f(\triangle) = (\triangle)^3 + 1$ e $f(x+h) = (x+h)^3 + 1$.
Logo,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left[(x+h)^3+1\right] - \left[x^3+1\right]}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{[(x+h)-x]\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]}{h} \\ &= \frac{h\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]}{h} \\ &= (x+h)^2 + (x+h)x + x^2 \\ &= 3x^3 + 3xh + h^2. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

5) $f(x) = -2x$ usando a mesma figurinha do "quadrdo" $f(\square) = -2(\square)$.
$f(\triangle) = -2\triangle$, $f(x+t+k) = -2(x+t+k)$ e $f(x+h) = -2(x+h)$.
Atenção especial no cálculo $-f(x) = -[-2x] = 2x$
$f(x+h) - f(x) = -2(x+h) - [-2x] = -2x - 2h + 2x = -2h$.
De sorte que:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-2(x+h)-[-2x]}{h} = \frac{-2h}{h} = -2.$$

$\blacksquare$

6) $f(x) = x^2+1$, a ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si $f(\square) = (\square)^2 + 1$. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+t+1) = (x+t+1)^2 + 1 \text{ e } f(x+h) = (x+h)^2 + 1.$$

Voltando ao problema inicial, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left[(x+h)^2+1\right]-\left(x^2+1\right)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \frac{[(x+h)-x]\,[(x+h)+x]}{h} = \frac{h\,[2x+h]}{h} \\ &= 2x+h. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

7) $f(x) = \sqrt{x}$, $f(\square) = \sqrt{\square}$.
A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si. Ilustrando a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p) = \sqrt{x+p}, f(\triangle) = \sqrt{\triangle} \text{ e } f(x+h) = \sqrt{x+h}.$$

Voltando ao problema dado, tem-se:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Vejamos um argumento de mudanças de variáveis, façamos:

$$\left\{\begin{array}{c} t = \sqrt{x+h} \\ \text{e} \\ k = \sqrt{x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2 = x+h \\ \text{e} \\ k^2 = x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2 - k^2 = h \\ \text{e} \\ k^2 = x. \end{array}\right.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{t-k}{t^2-k^2} = \frac{t-k}{(t-k)(t+k)} \\ &= \frac{1}{(t+k)} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}(A-B).(A+B) &= A^2-B^2\\ &= \left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)\\ &= \left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)\\ &= x+h-x=h.\end{aligned}$$

Óbvio, sendo $x>0$ e $h>0$ (**porquê não consideramos** $x\geq 0$ e $h\geq 0$?).
Agora, procedendo usando a racionalização, obtemos:

$$\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2=x+h-x=h$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{h}.\frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{h}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

■

8) $f(x)=\sqrt[3]{x}.f(\square)=\sqrt[3]{\square}$.
A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra que usamos. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p)=\sqrt[3]{x+p},\, f(\triangle)=\sqrt[3]{\triangle}\text{ e } f(x+h)=\sqrt[3]{x+h}.$$

Voltando ao delineado, temos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}.$$

Poderia usar racionalização. Vejamos usando mudanças de variáveis, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} t=\sqrt[3]{x+h}\\ \text{e}\\ k=\sqrt[3]{x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^3=x+h\\ \text{e}\\ k^3=x\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^3-k^3=h\\ \text{e}\\ k^3=x.\end{array}\right.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{t-k}{t^3-k^3}=\frac{t-k}{(t-k)\left(t^2+tk+k^2\right)}\\ &= \frac{1}{t^2+tk+k^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}.\end{aligned}$$

Observe que:

Determinando o **fator racionalizante,** tem-se:

$$\begin{aligned}
(A-B)\,.\left(A^2+AB+B^2\right) &= A^3-B^3\\
\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right).\left[\left(\sqrt[3]{(x+h)}\right)^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right] &= \left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\\
&= x+h-x=h.
\end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)}{h}.\frac{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \frac{h}{h.\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exercícios 2:

Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

onde:

1) $f(x)=kx+b$ 2) $f(x)=x^2+x$ 3) $f(x)=\frac{1}{x}$ 4) $f(x)=x^3+1$
5) $f(x)=-2x$ 6) $f(x)=x^2+1$ 7) $f(x)=\sqrt{x}$ 8) $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Solução:

1) Consideremos dois casos: $k=0$ e $a\neq 0$

1^o Caso: $a=0: f(\square)=b$.(note que qualquer valor do "quadrado" o resultado será sempre b).
Ilustrativamente, $f(\square)=f(x+n+1)=b$ e $f(\triangle)=b$. Desta forma, obtemos:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{b-b}{x-a}=\frac{0}{x-a}=0.$$

2^o Caso: $k \neq 0 : f(\square) = k\square + b$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{kx + b - (ka + b)}{x - a} = \frac{k(x - a)}{x - a} = k.$$

$\blacksquare$

2) $f(x) = x^2 + x$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{x^2 + x - \left(a^2 + a\right)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a) + (x - a)}{x - a} \\ &= \frac{(x - a)\left[(x + a) + 1\right]}{x - a} = x + a + 1. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

3) $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a - x}{xa}}{x - a} = \frac{\frac{-(x - a)}{xa}}{x - a} = \frac{-(x - a)}{xa} . \frac{1}{(x - a)} \\ &= \frac{-1}{xa},\ x \neq a \neq 0. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

4) $f(x) = x^3 + 1$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x - a)\left(x^2 + xa + a^2\right)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

$\blacksquare$

5) $f(x) = -2x$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-2x - (-2a)}{x - a} = \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2.$$

$\blacksquare$

6) $f(x) = x^2 + 1$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 + 1 - \left(a^2 + 1\right)}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

$\blacksquare$

7) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}.$$

Agora, façamos as mudanças de variáveis, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt{x} \\ \text{e} \\ k = \sqrt{a} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} t^2 = x \\ \text{e} \\ k^2 = a. \end{array} \right.$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^2 - k^2} = \frac{t - k}{(t - k)(t + k)} \\ &= \frac{1}{t + k} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Este processo é o mesmo; neste caso, que racionalizar. ∎

8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}. \qquad (1)$$

Assim, fazendo as mudanças de variáveis necessárias, vem:

$$\left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt[3]{x} \\ \text{e} \\ k = \sqrt[3]{a} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} t^3 = x \\ \text{e} \\ k^3 = a. \end{array} \right. \qquad (2)$$

Daí, levando (2) em (1), segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a} = \frac{t - k}{t^3 - k^3} = \frac{t - k}{(t - k)(t^2 + tk + k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2 + tk + k^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}. \end{aligned}$$

∎

Problema:

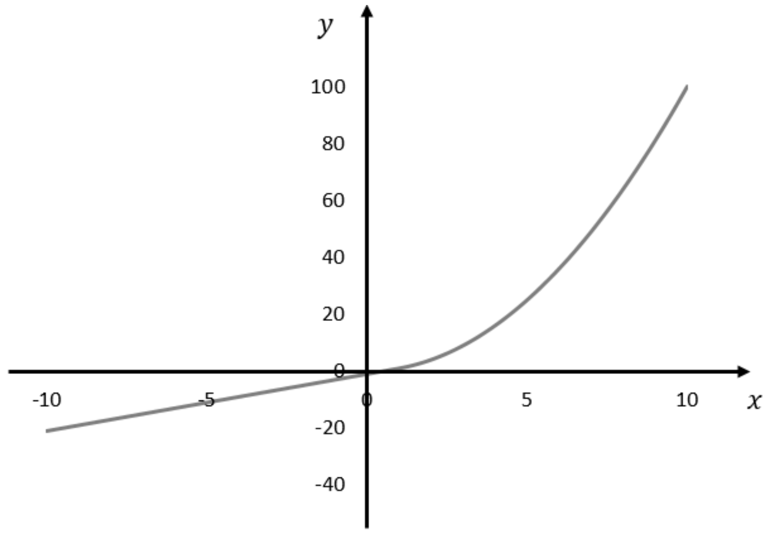
Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \text{ com } x \neq 1,$$

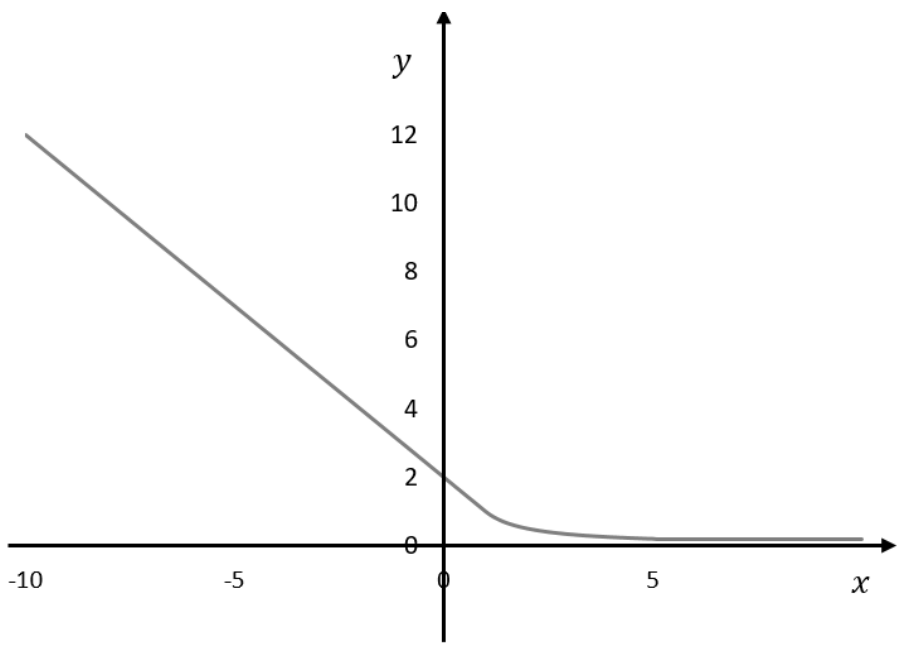
onde:

$$(i) \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^2, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{array} \right. \qquad (ii) \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -x + 2, & x \leq 1. \end{array} \right.$$

Esboçando os gráficos em cada caso, temos:
(i)



(ii)



(i) **1^o Caso:** $x \geq 1 : f(1) = 1^2$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x - 1$$

2^o **Caso:** $x < 1 : f(1) = 1^2$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto dado $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{2x - 1 - 1^2}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$

■

(ii) 1^o **Caso:** $x > 1 : f(1) = -1 + 2 = 1.$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x-1} = \frac{\frac{(1-x)}{x}}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x} . \frac{1}{(x-1)} = -\frac{1}{x}$$

2^o **Caso:** $x \leq 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto, neste caso $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{-x + 2 - 1}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

■

2.6.2 Um pouco de História e Nascimento do Cálculo

(http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm em 1. de agosto de 2022 às 12h e 25min)

" Para realizar um estudo completo sobre as origens, desenvolvimento e consequências do Cálculo, necessitaríamos de uma pesquisa muito extensa cujo resultado final seria, sem dúvida, um texto longo que estaria além do propósito deste trabalho como um todo. O nosso intuito é o de dar uma apresentação geral que contenha alguns fatos importantes que permeiam os acontecimentos históricos relacionados com a construção desta poderosa ferramenta da matemática: o Cálculo. Além disso, gostaríamos que ficasse claro que essa construção é o resultado de diversas contribuições de muitos personagens, como ocorre de modo geral, com o conhecimento humano.

Convidamos também o usuário a apreciar alguns fatos interessantes que estão presentes no site, assim como encorajá-lo na visita às páginas dos matemáticos que aqui aparecem para conhecer um pouco a história de cada um.

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles, mesmo que de forma imprecisa ou não rigorosa, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas - por exemplo, Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler. Nesse tempo ainda não havia uma sistematização, no sentido de uma construção logicamente estruturada. A união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.

O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas ou Cálculo Diferencial e outra parte relacionada às integrais, ou Cálculo Integral.

O Cálculo Diferencial: alguns fatos históricos

O aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos intimamente ligados à questão das tangentes. Desde a época dos Gregos antigos, já se conhecia a reta tangente como sendo uma reta que intersecta "corta" uma curva em um único ponto, generalizando a situação observada no caso da circunferência. Na realidade, essa ideia é muito imprecisa e precisamos de um tratamento bem mais rigoroso para a questão da tangente à uma curva.

Arquimedes e Apolônio utilizavam métodos geométricos, que diferiam entre si, para a determinação de tangentes a parábolas, elipses e hipérboles. Vários outros métodos para resolver o problema de encontrar a tangente a uma curva em um ponto foram desenvolvidos ao longo da história.

Na realidade, após os Gregos, o interesse por tangentes a curvas reapareceu no século $XVII$, como parte do desenvolvimento da geometria analítica. Como equações eram então utilizadas para descrever curvas, a quantidade e variedade de curvas estudadas aumentou bastante em comparação àquelas conhecidas na época clássica. A introdução de símbolos algébricos como uma ferramenta para estudar a geometria das curvas também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de derivada. Com o tempo, o tratamento se tornou mais algébrico e menos geométrico, proporcionando um contínuo progresso no desenvolvimento dos conceitos de funções, derivadas, integrais e outros tantos tópicos relacionados ao Cálculo.

Pierre de Fermat foi o primeiro a considerar a idéia de famílias de curvas. Ele chamou, por exemplo, de "parábolas maiores", as curvas cujas equações eram do tipo, , onde k é constante e $n = 2, 3, 4$, etc.

Fermat elaborou um método algébrico para determinar os pontos de máximo e os pontos de mínimo de uma função. Ele encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação zero, ou seja, buscava os pontos em que o coeficiente angular da reta tangente era nulo. Escreveu a Descartes explicando o seu método que é basicamente utilizado ainda hoje. Na realidade, devido a esse trabalho, que estava intimamente relacionado com as derivadas, Lagrange afirmou considerar Fermat o inventor do Cálculo.

A questão de encontrar a tangente a uma curva é, historicamente, de especial importância, pois, ao que parece, foi o que Newton pensou quando teve um insight sobre como utilizar tangentes para estudar o movimento dos planetas. O método para a determinação foi desenvolvido pelo antecessor de Newton, Isaac Barrow, e consistia no limite de uma corda com os pontos aproximando-se entre si.

Acredita-se que um dia, enquanto observava o movimento dos planetas, Newton tenha-se perguntado porque as órbitas dos planetas eram curvas, pois se fossem formadas por segmentos de retas seriam muito mais fáceis de serem estudadas. Por que não considerá-las como um conjunto de pequenas retas que, aproximadamente, representariam o movimento daquela curva? Este simples, porém genial insight significou para Newton o começo de uma longa e frutífera produção científica que englobou, entre outras coisas, as derivadas, as integrais e toda a base da mecânica clássica.

O estudo do movimento dos corpos havia começado de maneira sistemática com Galileo. Entretanto ele estudara o movimento geometricamente, utilizando as proposições de Euclides e as propriedades das cônicas de Apolônio para chegar a relações entre distância, velocidade e aceleração, que, hoje em dia, são aplicações básicas da derivada.

Vários matemáticos estavam, a essa altura, estudando problemas relacionados ao movimento. Torricelli e Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. Já se sabia que a taxa de variação pontual - derivada - do deslocamento era a velocidade e que a operação inversa da velocidade era o deslocamento. Isso mostra que já existia uma certa noção da operação inversa da derivada, sendo que a idéia de que a integral era inversa da derivada era familiar a Barrow.

Para Newton, o movimento era a base fundamental para o estudo das curvas e de outros tópicos relacionados ao Cálculo. Newton escreveu o seu tratado sobre fluxions em 1666. Ele pensou em uma partícula descrevendo uma curva com duas linhas que se movimentavam e que representavam o sistema de coordenadas. A velocidade horizontal e a velocidade vertical eram as fluxões de x e y associadas ao fluxo do tempo. Os fluents eram x e y. Em linguagem moderna, seria a derivada de x com relação ao tempo, ou simplesmente $x'(t)$ e seria analogamente a derivada de y com relação ao tempo ou ainda y'(t). Tanto os nomes quanto as notações de Newton foram deixadas de lado ao longo dos anos, prevalecendo a notação criada por Leibniz. Vale a pena notar, entretanto, que é ainda bastante utilizada pelos físicos quando a derivada em questão é em relação ao tempo e é dada a função deslocamento $x = x(t)$; nesse caso, será a velocidade e será a aceleração.

Embora Newton tenha desenvolvido e revisto o seu Cálculo entre 1666 e 1671, nada foi publicado até 1736. Ele havia apenas mostrado os seus manuscritos para alguns colegas e amigos.

Leibniz, em 1672, enquanto vivia em Paris, encontrou-se com Huygens e com ele aprendeu muito e recebeu muitos conselhos que constituíram um forte impulso para que viesse a desenvolver o seu Cálculo Diferencial e Integral. Nesse período, ele estabeleceu contato com muitos dos matemáticos respeitados da Royal Society e, dentre eles, destaca-se Barrow. Leibniz teve acesso aos seus trabalhos e estabeleceu um longo período de correspondências. Seu Cálculo Diferencial tinha uma fundamentação bem diferente daquele de Newton. Leibniz não estudou o movimento para chegar aos conceitos de derivada e integral. Ele pensou nas variáveis x e y como grandezas que variavam por uma sucessão de valores infinitamente pequenos. Introduziu dx e dy como a diferença entre esses valores sucessivos. Embora Leibniz não tenha usado como definição de derivada, ele sabia que representava o coeficiente angular da tangente.

Há um capítulo especial na história do Cálculo: uma longa e quase sempre inescrupulosa disputa entre Newton e Leibniz sobre quem havia "criado" o Cálculo. Ambos não pouparam acusações picantes para descrever o outro e os seus feitos e geraram uma discussão acalorada no meio científico da época sobre quem seria a mais importante autoridade em Cálculo. Essa situação chegou a tal ponto que os matemáticos que viviam no Reino Unido se distanciaram durante um período bastante longo dos matemáticos do continente. Enquanto o Cálculo "Leibniziano" ganhava cada vez mais adeptos na Europa - entre esses a família Bernoulli - os matemáticos da "ilha", como dizem alguns historiadores, davam mais atenção às pompas e circunstâncias criadas para a cerimônia fúnebre de Newton na Abadia de Westminister. Durante ainda algum tempo, esses matemáticos ficaram um pouco "ilhados" e, quando voltaram a estabelecer relações com os europeus do continente, haviam não só perdido parte do avanço do Cálculo como também não compreendiam muito bem a notação "Leibniziana" então largamente utilizada.

Carl B. Boyer, em seu livro A History of Mathematics , afirma: Como consequência da infeliz disputa entre Newton e Leibniz, os matemáticos britânicos ficaram de certa forma alienados dos trabalhos do continente (...) e o desenvolvimento da Matemática não conseguiu acompanhar o rápido progresso dos outros países da Europa ao longo do século $XVIII$.

Apesar das diferenças, tanto Newton quanto Leibniz reconheceram até certo ponto a importância do "adversário". Leibniz disse: Considerando a Matemática desde o início do mundo até a época de Newton, o que ele fez é sem dúvida a melhor metade. Newton, por sua vez, na primeira edição do Principia, admitiu que Leibniz possuía um método semelhante ao seu. Infelizmente, na terceira edição, após o ápice das desavenças, Newton retirou a referência a Leibniz.

O desenvolvimento do Cálculo continuou com muitos outros matemáticos, como, por exemplo, Jacques Bernoulli, Johann Bernoulli, MacLaurin, Agnesi, Euler, d'Alembert, Lagrange e Cauchy."

Problema:

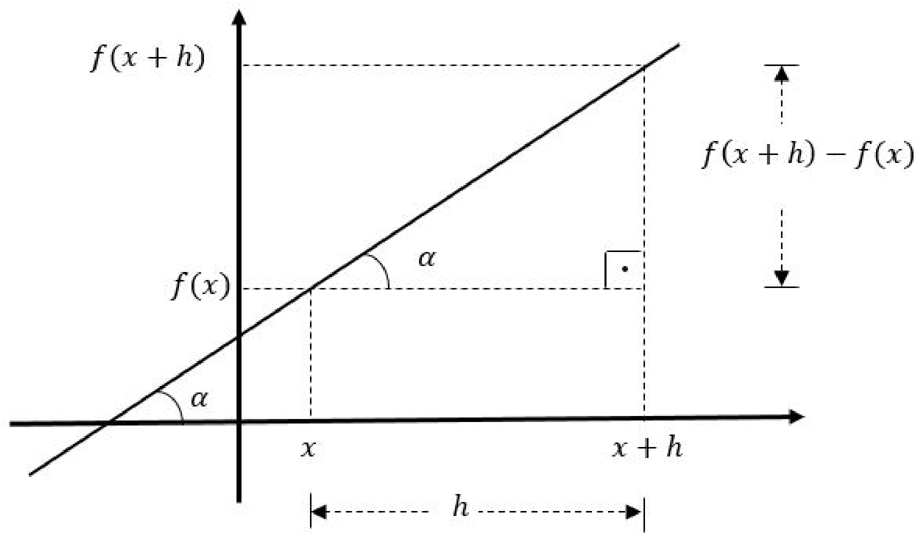
(A) Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ com } h \neq 0,$$

onde:

$$(i) \quad f(x) = 2x + 4 \qquad (ii) \quad f(x) = x^2 \quad (ii) \quad f(x) = x^3.$$

(Dê uma interpretação geométrica para q)[1]



A inclinação da reta que passa pelos pontos distintos $P(x, f(x))$ e $Q(x+h, f(x+h))$ chamada posteriormente de quociente de Newton é de fundamental importância para o Cálculo, será dada por:

$$q(x) = tg\alpha = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Solução:

[1]Há 300 anos, os grandes cientistas Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz (que também era filósofo) travavam uma célebre disputa pela paternidade do cálculo infinitesimal. Por causa desta controvérsia, Newton declarou a famosa frase: "Os segundos inventores não têm direitos".

O que o torna o cálculo infinitesimal tão versátil é a grande variedade de áreas em que pode ser aplicado, como na matemática, na física, na tecnológica e na economia. A derivada é, por exemplo, um conceito fundamental da física, pois explica acelerações, velocidades instantâneas e forças.

O conflito chamou atenção por mostrar o que havia "nos bastidores" da matemática e como esses gênios se comportavam. Newton se apresentou como religioso e vingativo, enquanto Leibniz era mais sibilante e incisivo, embora menos obsecado e até menos brincalhão.

A disputa teve seu fim em 1727, com a morte de Newton. O que se sabe com certeza é que ambos descobriram o cáculo infinitesimal de maneira independente e publicaram em momentos diferentes da vida.

(i) $f(x) = 2x + 4$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[2(x+h)+4] - (2x+4)}{h} = \frac{2x + 2h - 2x}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

■

(ii) $f(x) = x^2$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{[(x+h) - x][(x+h) + x]}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

■

(iii) $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{[(x+h) - x]\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]}{h} \\ &= \frac{h\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]}{h} = (x+h)^2 + (x+h)x + x^2. \end{aligned}$$

■

(B) Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ com } x \neq a,$$

onde:

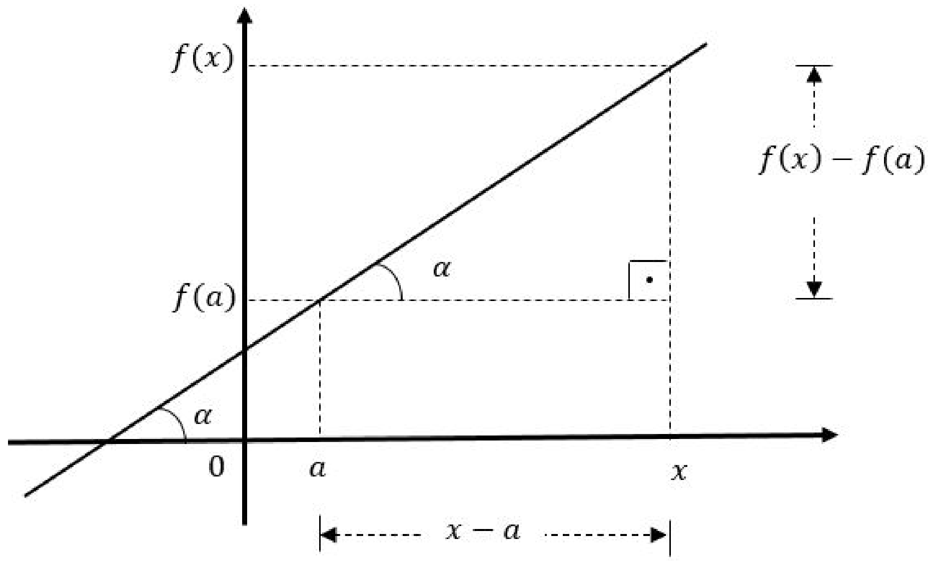
(i) $f(x) = 2x + 4$ (ii) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = x^3$.

(Dê uma interpretação geométrica para q)

Procedendo de forma análoga, a inclinação da reta que passa por $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$ será descrita por:

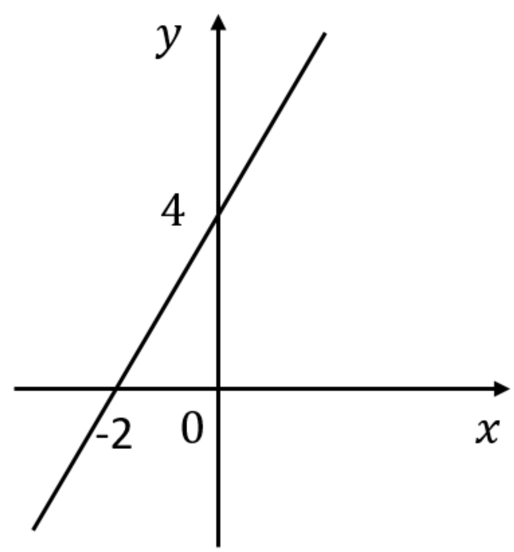
$$q(x) = tg\alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Geometricamente, tem-se:



Exemplo:

(i) $f(x) = 2x + 4$



$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2x + 4 - (2a + 4)}{x - a} = \frac{2x - 2a}{x - a} = \frac{2(x - a)}{x - a} = 2.$$

∎

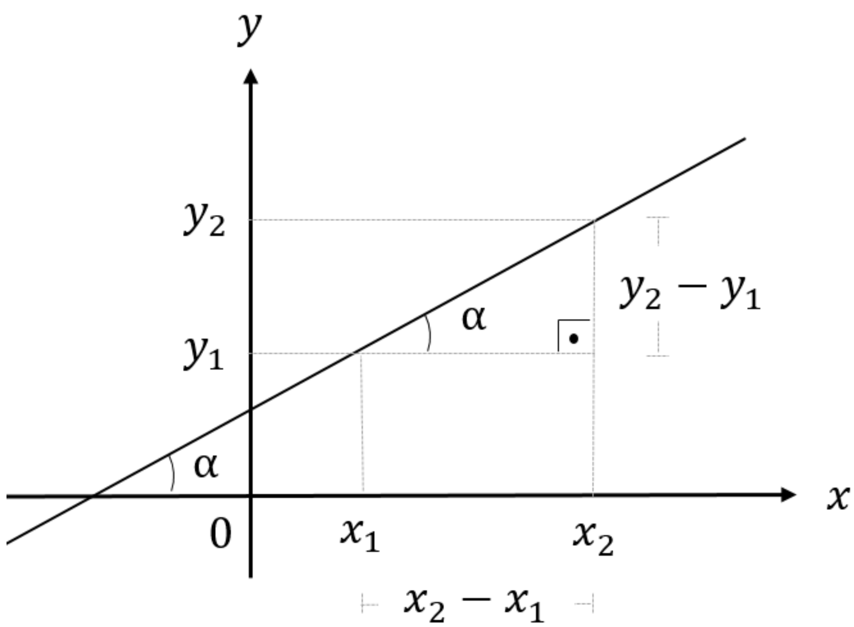
(Coisa maravilhosa a tangente de α é exatamente o coeficiente angular da reta)

3 Uma pausa para alguns Comentário sobre retas

Para determinar uma equação da reta em $\mathbb{R}^2$, precisamos de: Um ponto $P_0\,(x_0, y_0)$ e o coeficiente angular da reta m ou dois pontos; em seguida, obtemos o coeficiente angular m.

3.1 Equação da reta que passa pelo ponto $P_0\,(x_0, y_0)$ e coeficiente angular m :

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$



Exemplo:

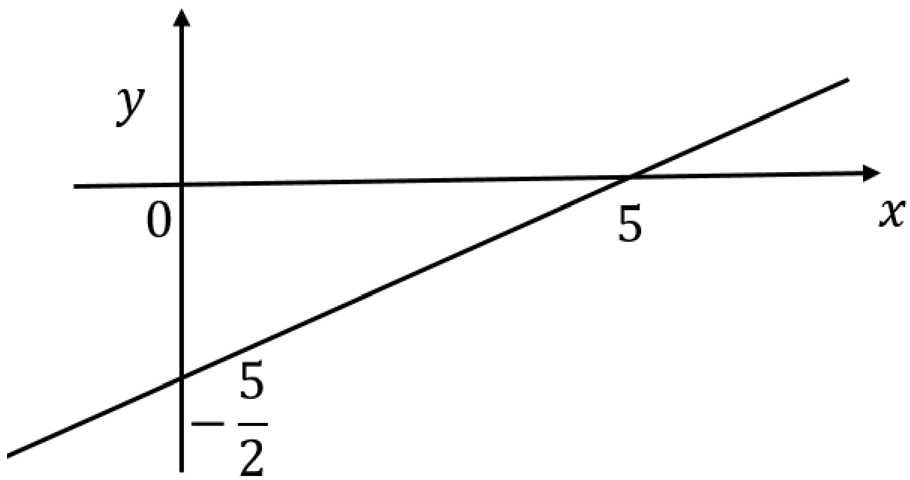
Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P_0\,(1, -2)$ com coeficiente angular $\frac{1}{2}$.

Solução:

Com efeito, a equação da reta tem coeficiente angular $m = \frac{1}{2}$ e passa por $P_0\,(1, -2)$, então, vem:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}\,(x - 1) \Longleftrightarrow y + 2 = \frac{1}{2}\,(x - 1) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}.$$

$\blacksquare$



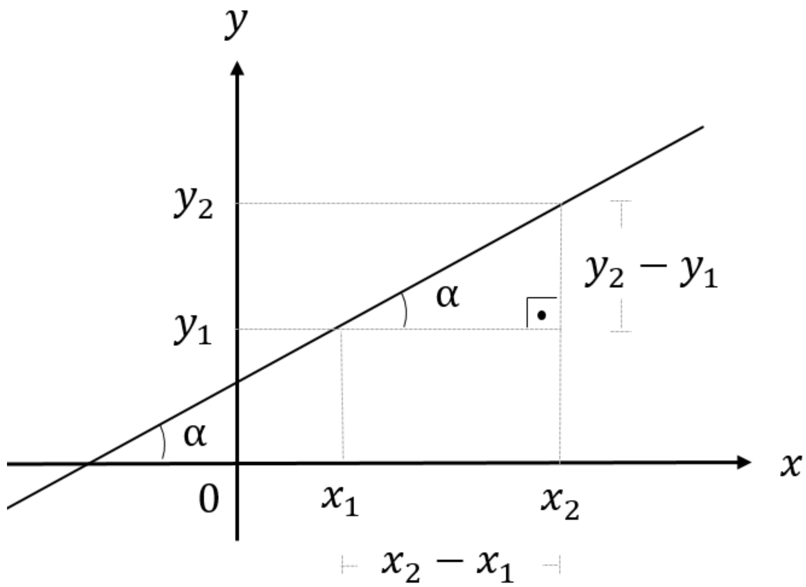
3.2 Equação da reta que passa pelos pontos $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$:

Determinando o coeficiente angular da reta que passa por P e Q, temos:

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1.$$

Em seguida, podemos escolher um dos dois pontos, digamos $P(x_1, y_1)$, descrevendo uma equação da reta

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Exemplo:

Determine uma equação da reta que passa pelo ponto $P\,(1,-2)$ e $Q\,(4,6)$.

Solução:

Com efeito, a equação da reta que passa por $P\,(1,-2)$ e $Q\,(4,6)$, tem coeficiente angular

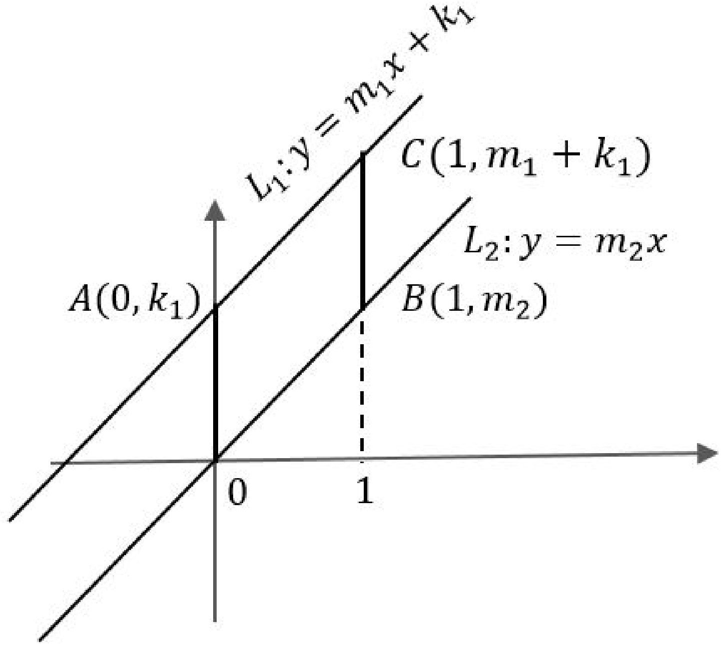
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-2)}{4-1} = \frac{8}{3}$$

Daí, podemos escolher qualquer um dos dois pontos; por exemplo, tomando $P\,(1,-2)$, vem:

$$y - (-2) = \frac{8}{3}\,(x-1) \Longleftrightarrow y + 2 = \frac{8}{3}\,(x-1)$$

■

3.3 Retas paralelas $L_1 : y = m_1x + k$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1//L_2$:



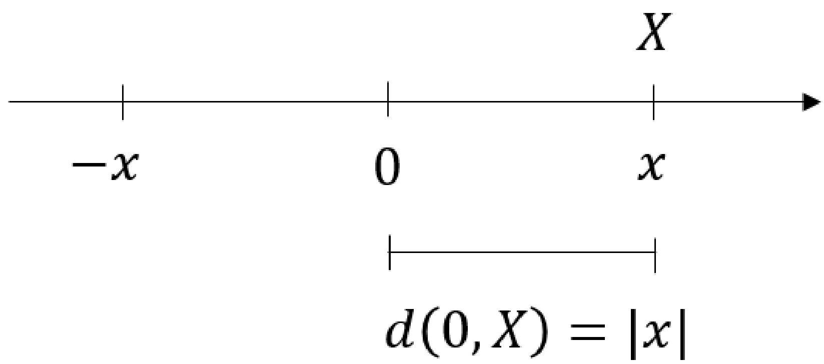
Devo ressaltar que não é uma demonstração; e sim, uma justificativa plausível:
$L_1//L_2 : med\left(\overline{OA}\right) = med\left(\overline{BC}\right)$ e $med\left(\overline{AC}\right) = med\left(\overline{OB}\right)$. Assim, tem-se :

$$K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2.$$

■

Um esboço de uma demonstração formal, será delineada a seguir, ressaltando que módulo de

x, denotado por $|x| = d(0, X) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ é a distância da origem O ao ponto X na reta.



Como a 5^a Sinfonia de Ludwing Van Beethoven; dita sinfonia do destino, voltaremos ao tema módulo posteriormente.

Prova:

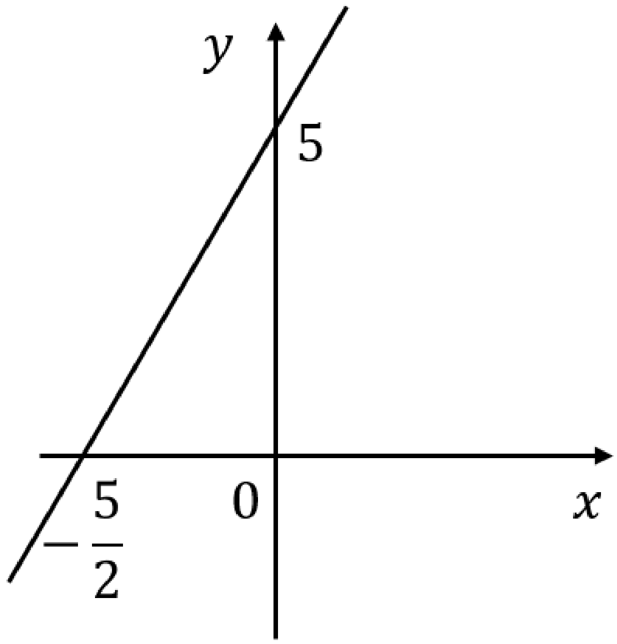
Com efeito, $L_1 // L_2 : d(O, A) = d(B, C)$ e $d(A, C) = d(O, B)$. Por conseguinte, vem:

$$\begin{aligned}
d^2(O, A) &= d^2(B, C) \Longleftrightarrow 0^2 + K_1^2 = (1-1)^2 + (m_1 + K_1 - m_2)^2 \\
&\Longleftrightarrow K_1^2 = (m_1 + K_1 - m_2)^2 \Longleftrightarrow |K_1| = |m_1 + K_1 - m_2| \\
&\Longleftrightarrow \pm K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \\ \text{ou} \\ -K_1 = m_1 + K_1 - m_2 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_1 = m_2 \\ \text{ou} \\ -2K_1 = m_1 - m_2 > 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m_1 = m_2 \\ \text{ou} \\ 0 = -2K_1 = m_1 - m_2 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow m_1 = m_2.
\end{aligned}$$

■

Exemplo:

Determine uma equação da reta L que passa pelo ponto $P(1, -2)$ e é paralela a reta S dada por $y = 2x + 5$.



Solução:

Com efeito, as retas

$$L//S \Longleftrightarrow m_L = m_S.$$

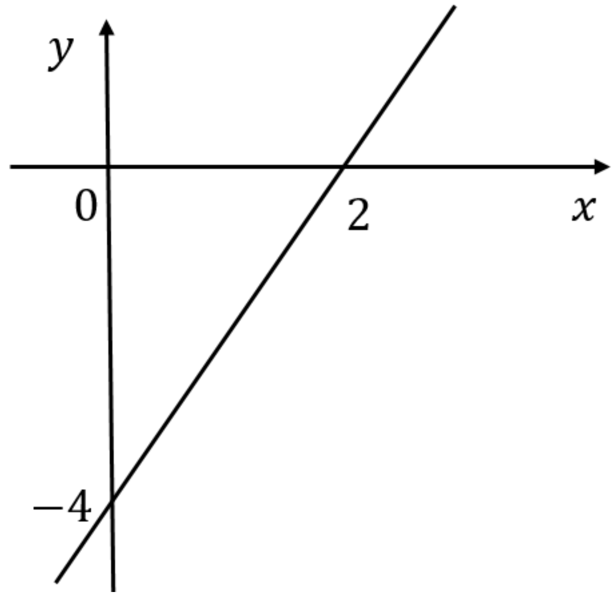
Além disso, o coeficiente angular da reta S é $m_S = 2$ e a reta L é descrita por:

$$y - (-2) = m_L\,(x-1) \Longleftrightarrow y + 2 = m_L\,(x-1)$$

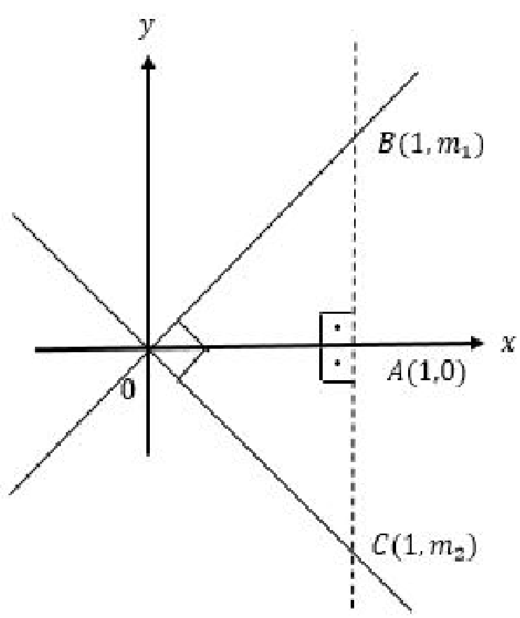
Como $m_L = m_S = 2$ segue-se que:

$$y + 2 = 2\,(x-1) \Longleftrightarrow y = 2x - 4.$$

■



3.4 Retas Perpendiculares $L_1 : y = m_1x$ e $L_2 : y = m_2x$ denotaremos por $L_1 \perp L_2$:



Não perde a generalidade a demonstração, visto que: usando retas paralelas faríamos o caso geral.

Prova:

Sejam $L_1 : y = m_1 x$ e $L_2 : y = m_2 x$ retas perpendiculares $L_1 \perp L_2$ à luz do Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} [d(B,C)]^2 &= [d(O,B)]^2 + [d(O,C)]^2 \iff (1-1)^2 + (m_1 - m_2)^2 = 1^2 + m_1^2 + 1^2 + m_2^2 \\ &\iff m_1^2 + -2m_1m_2 + m_2^2 = 2 + m_1^2 + m_2^2 \iff -2m_1m_2 = 2 \iff m_1m_2 = -1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 m_2 = -1.$$

■

Exemplo:

Determine uma equação da reta L que passa pelo ponto $P(-1,2)$ e é perpendicular a reta S dada por $x - 3y - 1 = 0$.

Solução:

Um esboço do gráfico da reta S é descrito por:

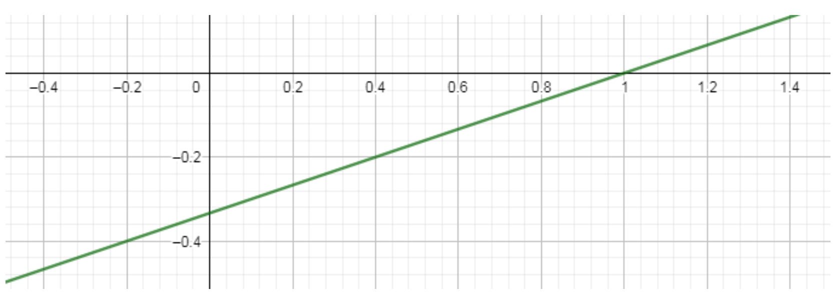
$$S : x - 3y - 1 = 0 \iff y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

Para

$$x = 0 \implies y = -\frac{1}{3}.$$

(valor que conta o eixo y)
Para

$$y = 0 \implies \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \implies x = 1.$$



De fato, as retas são perpendiculares equivale a dizer:

$$L \perp S \iff m_L . m_S = -1.$$

Além disso, a reta S pode ser reescrita como

$$S : y = \frac{1}{3}x - 1,$$

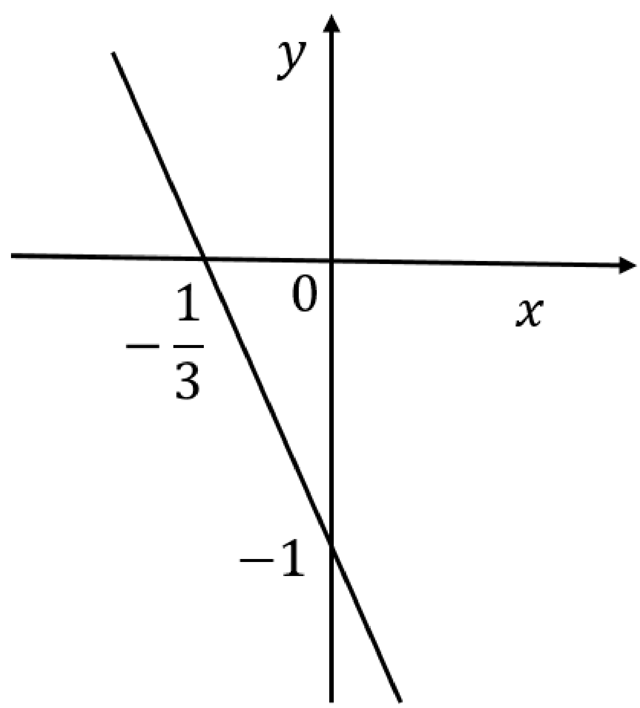
o coeficiente angular da reta S é $m_S = \frac{1}{3}$ assim,

$$m_L = -\frac{1}{m_S} = -\frac{1}{\frac{1}{3}} = -3.$$

De sorte que:

$$\begin{aligned} y - 2 &= -3(x+1) = -3x - 3 \\ y &= -3x - 3 + 2 \Longleftrightarrow y = -3x - 1. \end{aligned}$$

Agora, fazendo um esboço do gráfico da reta L, a seguir:

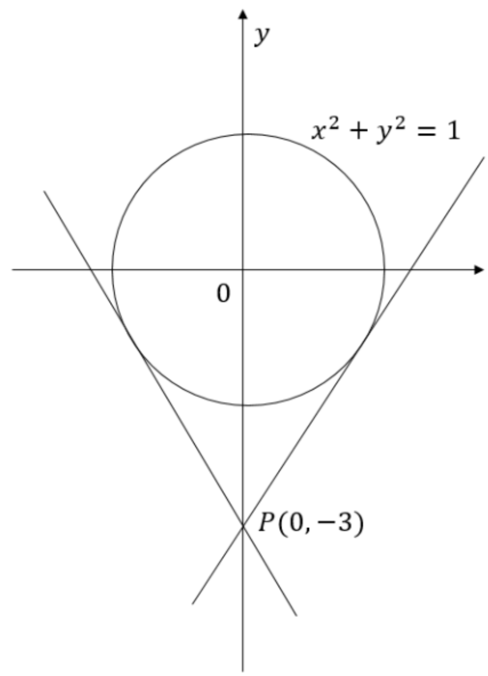


■

Problema:

Determine as equações das retas que passam pelo ponto $P(0, -3)$

e são tangentes a circuferência $\xi : x^2 + y^2 = 1$.



Solução:

Com efeito, a equação da reta que passa por $P\,(0, -3)$ é dada por:

$$y = mx - 3.$$

Agora, para que as retas sejam tangente a circunferência, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx - 3 \end{array} \right. \Longrightarrow x^2 + (mx - 3)^2 = 1 \Longrightarrow \left(1 + m^2\right) x^2 - 6mx + 8 = 0.$$

Daí, vem:

$$\begin{array}{rcl} \Delta & = & (-6m)^2 - 4.\left(1 + m^2\right).8 = 0 \Longrightarrow 36m^2 - 32 - 32m^2 = 0 \\ & \Longrightarrow & 4m^2 - 32 = 0 \Longrightarrow m^2 = \dfrac{32}{4} = 8 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} m = 2\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ m = -2\sqrt{2}. \end{array} \right. \end{array}$$

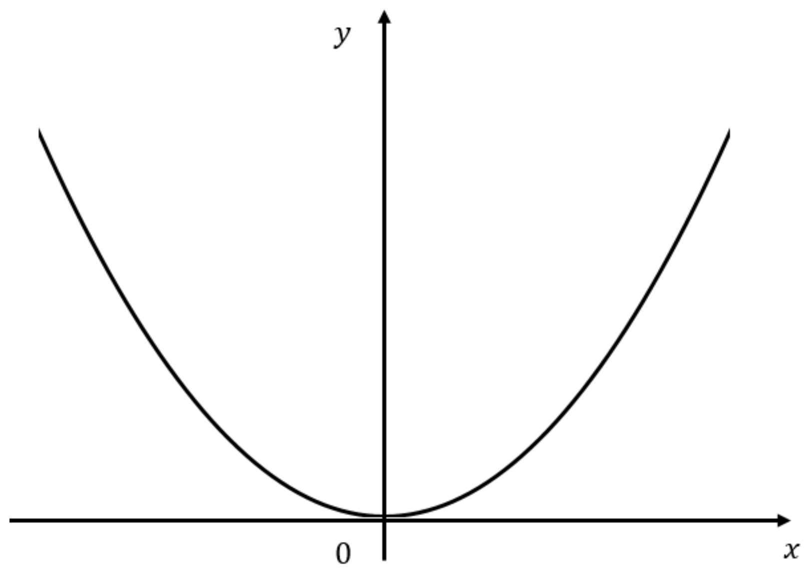
Assim, temos dois casos a considerar:

1^o Caso: $m = 2\sqrt{2} \Longrightarrow y = 2\sqrt{2}x - 3.$

2^o Caso: $m = -2\sqrt{2} \Longrightarrow y = -2\sqrt{2}x - 3.$

$\blacksquare$

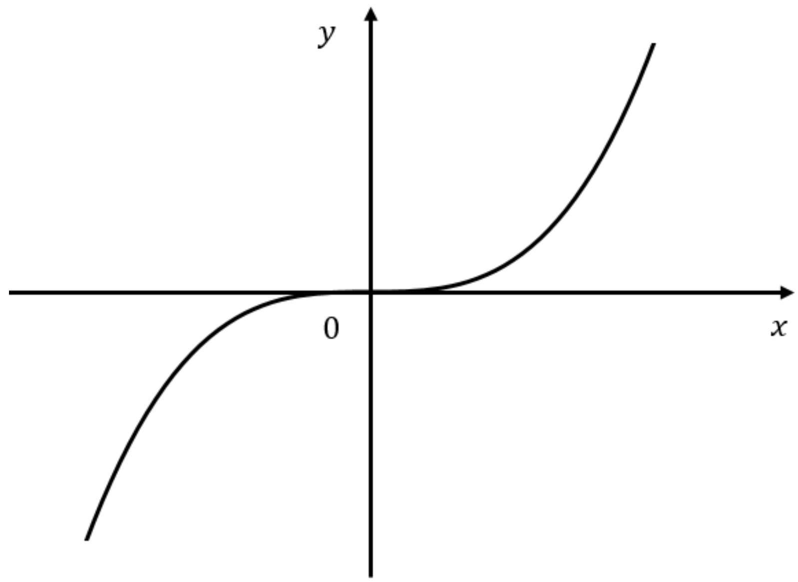
(ii) $f(x) = x^2$



$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a) . (x + a)}{x - a} = x + a.$$

$\blacksquare$

(iii) $f(x) = x^3$



$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x-a)\,.\left(x^2 + xa + a^2\right)}{x - a} = x^2 + xa + a^2.$$

■

4 Equação do 2^o Grau

Chama-se equação do 2^o grau a uma variável x, a toda expressão da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Exemplos

1. $x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^2 - 6x + 9 = 9 \Longrightarrow (x-3)^2 = 9 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x - 3 = 3 \\ \text{ou} \\ x - 3 = -3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 6 \\ \text{ou} \\ x = 0. \end{array}\right.$ ■

2. $x^2 + x - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Longrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 1 \Longrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x+\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}}=\pm\tfrac{\sqrt{5}}{2}\Longrightarrow\begin{cases} x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$$

■

3. $2x^2+7x+6=0\Longrightarrow 2\left[x^2+\frac{7}{2}x\right]=-6\Longrightarrow x^2+\frac{7}{2}x=-3\Longrightarrow x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2-3\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\left(x+\tfrac{7}{4}\right)^2=\tfrac{1}{16}\Longrightarrow x+\tfrac{7}{4}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}}=\pm\tfrac{1}{4}\Longrightarrow\begin{cases} x=\frac{-7+1}{4}=-\frac{3}{2} \\ \text{ou} \\ x=\frac{-7-1}{4}=-2.\end{cases}$$

■

4.0.1 Dedução da Fórmula

Teorema:

Seja

$$y=ax^2+bx+c=0,\ \text{com } a,b,c\in\mathbb{R} \text{ e } a\neq 0.$$

Então, suas raízes são dadas por:

$$\begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.\end{cases}$$

Prova:

Com efeito, usando o procedimento de completamento de quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0\Longrightarrow a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=0\Longrightarrow a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=0 \\ &\Longrightarrow \left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\frac{\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}\right]=0\Longrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}.\end{aligned}$$

Agora, fazendo $\Delta=b^2-4ac$, obtemos:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\Longrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

De sorte que:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\Longrightarrow\begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.\end{cases}$$

■

4.0.2 Soma e Produto das raízes do trinômio do 2º grau:

Corolário 1:

Seja

$$y = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

e sejam x_1 e x_2 suas raízes. Então, temos:

$$(i) \quad x_1 + x_2 = -\tfrac{b}{a} \qquad\qquad (ii) \quad x_1.x_2 = \tfrac{c}{a}$$

Prova:

Basta notar que:

$$(i) \quad x_1 + x_2 = \tfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \tfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \tfrac{-2b}{2a} = -\tfrac{b}{a},$$

e procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} (ii)\ x_1.x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = -\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= -\frac{\left(\Delta - b^2\right)}{4a^2} = -\frac{\left(b^2 - 4ac - b^2\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

■

4.0.3 Forma Fatorada:

Corolário 2:

Considere

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0,$$

sejam x_1 e x_2 suas raízes, tais que: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$. Então, tem-se:

$$y = a\left(x - x_1\right).\left(x - x_2\right)$$

Prova:

Com efeito,

$$-\left(x_1 + x_2\right) = \frac{b}{a}, \ x_1.x_2 = \frac{c}{a} \text{ e } y = ax^2 + bx + c.$$

Então,

$$\begin{aligned} y &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1.x_2\right] \\ &= a\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right] = a\left[x\left(x - x_2\right) - x_1\left(x - x_2\right)\right] \\ &= a\left(x - x_2\right).\left(x - x_1\right) = a\left(x - x_1\right).\left(x - x_2\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = a\left(x - x_1\right).\left(x - x_2\right)$$

■

4.1 A Dedução da equação do 2^o grau por Viète e Um pouco de História

[2]

(i) Vamos descrever o método de Viète para a resolução de equação do 2^o grau. Seja

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0. \tag{1}$$

Fazendo $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e levando na equação (1), vem:

$$av^2 + (2au + b)\, v + au^2 + bu + c = 0. \tag{2}$$

Viète transformou essa equação (2) numa equação incompleta do 2^o grau, anulando o coeficiente de

v, isto é, escolhendo $u = \frac{-b}{2a}$. Obteve assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0, \tag{3}$$

e fazendo algumas manipulações simples em (3), obtemos:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{4}$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então, decorre de (4) que:

$$v = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{5}$$

e, portanto,

$$x = u + v = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Que é a " **fórmula de Báskara** " o que parece ser exclusiva do Brasil, para maiores detalhes veja referência [3] . ■

Problema

Determine A, B e C, de modo que:

1. $\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ 2. $\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$ 3. $\frac{x^2+x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

[2]François Viète foi um matemático francês que nasceu em Fontenay no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou e exerceu Direito e tornou-se membro do Parlamento da Bretanha. Não era, portanto, um matemático por profissão; porém o seu lazer era dedicado à Matemática, dentro da qual desempenhou um papel central na transição da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, mas sem dúvida foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viète chegou mais próximo das ideias modernas.

1.

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \tag{1}$$

Solução:

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x^2-5x+6} &= \frac{A\,(x-3)+B\,(x-2)}{(x-2)\,.\,(x-3)} = \frac{(A+B)\,x+(-3A-2B)}{(x-2)\,.\,(x-3)} \\
&\Longrightarrow 2x+1 = (A+B)\,x+(-3A-2B) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Agora, escalonando o sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{c} A+B=2 \\ -3A-2B=1 \end{array} \right. \; 3E_1+E_2 \longrightarrow E_2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A+B=2 \\ B=7 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A=-5 \\ B=7. \end{array} \right.$$

Daí, reescrevemos a decomposição (1), tem-se:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3}.$$

■

2.

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \tag{2}$$

Solução:

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^3-x^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax\,(x-1)+B\,(x-1)+Cx^2}{x^2\,(x-1)} \\
&= \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2}{x^2\,(x-1)} = \frac{(A+C)x^2+(-A+B)\,x-B}{x^2\,(x-1)} \\
&\Longrightarrow 0x^2+0x+1 = (A+C)x^2+(-A+B)\,x-B \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A+C=0 \\ -A+B=0 \\ -B=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C=1 \\ A=-1 \\ B=-1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Daí, reescrevemos a decomposição (2), obtem-se:

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \tag{2}$$

$\blacksquare$

3.

$$\frac{x^2+x+2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \tag{3}$$

Solução:

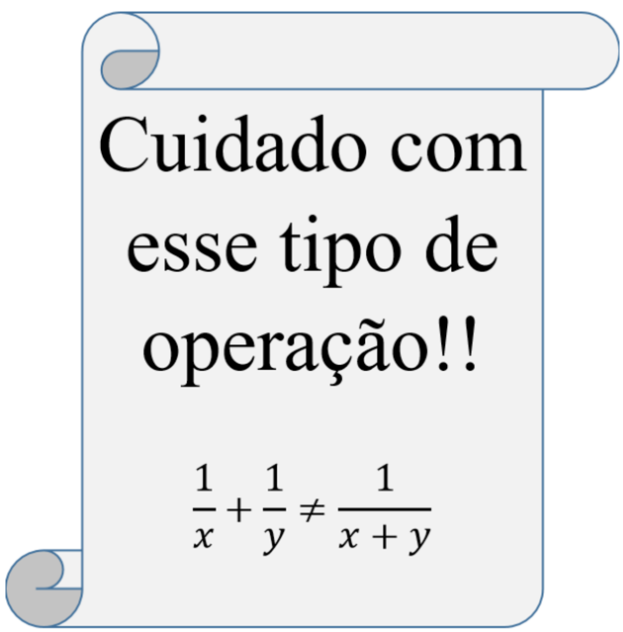
De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+2}{x\left(x^2+1\right)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,x}{x\left(x^2+1\right)}\\
&= \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)}=\\
&\Longrightarrow x^2+x+2=(A+B)x^2+Cx+A \Longrightarrow\\
&\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} A+B=1\\ C=1\\ A=2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} B=-1\\ C=1\\ A=2.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Portanto, decorre da decomposição em (3) o resultado:

$$\frac{x^2+x+2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{x}+\frac{-1x+1}{x^2+1} \tag{3}$$

$\blacksquare$

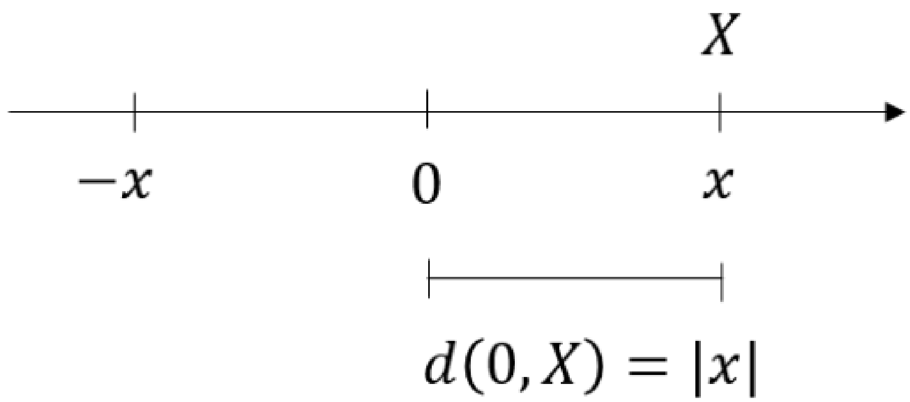


5 Módulo ou Valor Absoluto

Seja x um número real. O módulo de x, denotado por $|x| = d(0, X)$ é dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

é a distância da origem O ao ponto X na reta



Exemplos:

(i) $|5| = 5$ $\quad$ (ii) $|3 - \pi| = \pi - 3$; Sabemos que: $\pi \simeq 3,14159...$

(iii) $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), & x - 1 < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}$.

5.1 Consequências

1. (i) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. $\quad$ (ii) $\sqrt{x^2} = |x|$

Prova:

1^o Caso:

$$x \geq 0 \Longrightarrow |x|^2 = |x| \, . \, |x| = x.x = x^2.$$

2^o Caso:

$$x < 0 \Longrightarrow |x|^2 = |x| \, . \, |x| = (-x) \, . \, (-x) = x^2,$$

dos casos (1) e (2), segue-se:

$$|x|^2 = x^2.$$

$\blacksquare$

Decorre daí (ii)

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$\blacksquare$

2. (i) $|x.y| = |x|\,.\,|y|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$. (ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$. (iii) $\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|\,.$

(i) $|x.y| = |x|\,.\,|y|\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Prova:

Com efeito,

$$\begin{aligned}
|x.y|^2 &= (x.y)^2 = x^2.y^2 = |x|^2\,.\,|y|^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{|x.y|^2} = \sqrt{|x|^2\,.\,|y|^2} \\
&= \sqrt{|x|^2}.\sqrt{|y|^2} = |x|\,.\,|y|\,.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

(ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0.$

Prova:

Basta proceder de forma análoga ao caso anterior, vejamos:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x}{y}\right|^2 &= \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{|x|^2}{|y|^2} \\
&\Longrightarrow \sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|^2} = \sqrt{\frac{|x|^2}{|y|^2}} = \frac{|x|}{|y|}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

$\blacksquare$

(iii) Usando o método de indução finita (veja a referência [1])

(a) Para $n = 2$, temos:

$$\left|\prod_{j=1}^{n=2} x_j\right| = |x_1.x_2| = |x_1|\,.\,|x_2| = \prod_{j=1}^{n=2} |x_j|\,.$$

Logo,

$$|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$$

(b) Suponha válido para n (hipótese de indução finita), isto é,

$$\left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right| = |x_1.x_2 \ldots x_n| = |x_1|\,.\,|x_2| \ldots |x_n| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|\,.$$

Então, tem-se:

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} x_j\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} x_j.x_{n+1}\right| = \left|\prod_{j=1}^{n} x_j\right|.\,|x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n} |x_j|\,.\,|x_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|\,,$$

e, portanto,

$$\left|\prod_{j=1}^{n+1} x_j\right| = \prod_{j=1}^{n+1} |x_j|\,.$$

$\blacksquare$

.

3. (i) $|x| = a,\ a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$ (ii) $|x| \le a,\ a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff -a \le x \le a.$

(iii) $|x| \ge a,\ a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x \ge a \\ \text{ou} \\ x \le -a \end{cases}$ (iv) $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \le x \le |x|\,.$

Prova:

(i) (i) $|x| = a,\ a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = a \\ \text{ou} \\ x = -a \end{cases}$

De fato,

$$\begin{aligned} |x| &= a \iff |x|^2 = x^2 = a^2 \iff x^2 - a^2 = 0 \\ &\iff (x-a)\,.\,(x+a) = 0 \iff x = -a \text{ ou } x = a. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Exemplo:

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x-1| = \pi$$

Solução:

Basta notar que:

$$|x-1| = \pi \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-1=\pi \\ \text{ou} \\ x-1=-\pi \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=\pi+1 \\ \text{ou} \\ x=-\pi+1. \end{array} \right.$$

$\blacksquare$

(ii) $|x| \leq a$, $a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$

Prova:

Por definição, temos: $|x| = \left\{ \begin{array}{ll} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} \right.$

1^o Caso: $x \geq 0:$

$$|x| = x \leq a \tag{1}$$

2^o Caso: $x < 0:$

$$|x| = -x \leq a \Longleftrightarrow x \geq -a \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} x \leq a \\ \text{e} \\ x \geq -a \end{array} \right. \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

$\blacksquare$

Exemplo:

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x-1| \leq 7$$

Solução:

Com efeito,

$$|x-1| \leq 7 \Longleftrightarrow -7 \leq x-1 \leq 7 \Longleftrightarrow -6 \leq x \leq 8.$$

$\blacksquare$

(iii) $|x| \geq a$, $a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{array} \right.$

Prova:

Procedendo de forma análoga ao item anterior, tem-se:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1^o Caso: $x \geq 0:$

$$|x| = x \geq a \tag{1}$$

2^o Caso: $x < 0:$

$$|x| = -x \geq a \Longleftrightarrow x \leq -a, \tag{2}$$

Assim, dos casos (1) e (2) segue-se:

$$\begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a. \end{cases}$$

■

Outro modo de provar a mesma afirmação:
Uma forma elegante e simples de demonstrar, é descrita por:

$$\begin{aligned} |x| \quad \geq \quad & a \Longleftrightarrow |x|^2 = x^2 \geq a^2 \Longleftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x-a) \, . \, (x+a) \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{ou} \\ x \leq -a \end{cases} \end{aligned}$$

■

Exemplo:

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$|x+2| \geq 10$$

Solução:

Basta proceder de forma inteiramente análoga, para se obter:

$$|x+2| \geq 10 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 10 \\ \text{ou} \\ x+2 \leq -10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 8 \\ \text{ou} \\ x \leq -12. \end{cases}$$

■

(iv) $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x| \, .$

Prova:

À luz da definição, temos:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

1^o Caso: $x \geq 0$:

$$|x| \geq x \tag{1}$$

2^o Caso: $x < 0$:

$$|x| \geq -x \Longleftrightarrow -|x| \leq x \tag{2}$$

Portanto, decorre de (1) e (2) que:

$$\left\{ \begin{array}{c} |x| \geq x \\ \text{e} \\ -|x| \leq x. \end{array} \right. \Longleftrightarrow -|x| \leq x \leq |x|.$$

■

4. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$(i) \ \ |x+y| \leq |x| + |y| \qquad (ii) \ \ |x| - |y| \leq |x-y|$$

$$(iii) \ \ ||x| - |y|| \leq |x-y| \quad (iv) \ \ \left| \sum_{j=1}^{n} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Prova:

(i)

$$\begin{array}{rcl} |x+y|^2 & = & (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x|.|y| + y^2 \\ |x+y|^2 & \leq & |x|^2 + 2|x|.|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \\ & \Longleftrightarrow & |x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{|x+y|^2} \leq \sqrt{(|x|+|y|)^2}. \end{array}$$

Logo,

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

■

(Conhecido como desigualdade triangular, ou seja, em qualquer triângulo qualquer lado é sempre menor ou igual a soma dos outros dois).

(ii) Basta observar que: $|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y|$ e, portanto,

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

(iii) Basta observar que:

$$\left\{\begin{array}{c} |x|-|y| \le |x-y| \\ \text{e} \\ |y|-|x| \le |x-y| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} |x|-|y| \le |x-y| \\ \text{e} \\ -(|x|-|y|) \le |x-y| \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} |x|-|y| \le |x-y| \\ \text{e} \\ |x|-|y| \ge -|x-y| \end{array}\right.$$

$$\iff -|x-y| \le |x|-|y| \le |x-y| \iff ||x|-|y|| \le |x-y|$$

e, portanto,

$$||x|-|y|| \le |x-y|\,.$$

■

(iv) $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \le \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |x_j|\,.$

Prova

(Indução Finita sobre n)

Para $n = 2$, temos:

$$\left|\sum_{j=1}^{2} x_j\right| = |x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2| = \sum_{j=1}^{2} |x_j|\,.$$

Portanto

$$\left|\sum_{j=1}^{2} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{2} |x_j|\,.$$

Suponha válido para n, então falta mostrar para $n+1$.
Vejamos

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right| &= |x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}| \le |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\le |x_1 + x_2 + \ldots + x_n| + |x_{n+1}| \\ &\le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}| = \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|\,. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\left|\sum_{j=1}^{n+1} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n+1} |x_j|\,.$$

■

(Conhecido como **desigualdade triangular generalizada**)

Exercícios

(A) Prove que:
$|f(x) - f(2)| \leq 20. |x-2|$ para $0 \leq x \leq 3$;

Prova:

Observe que:

$$|f(x) - f(2)| = \left|x^3 + x - 10\right| = \left|(x-2) . \left(x^2 + 2x + 5\right)\right| .$$

Agora, $0 \leq x \leq 3 \Longrightarrow |x| \leq 3$, por conseguinte, obtemos:
$\left|(x-2) . \left(x^2 + 2x + 5\right)\right| \leq |x-2| . \left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 20|x-2|$,
Visto que:$\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 3^2 + 2.3 + 5 = 20$.
Logo,

$$|f(x) - f(2)| \leq 20. |x-2| \text{ para } 0 \leq x \leq 3.$$

■

(B) Sejam y, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,
tais que: $\xi > 0$ e $y_0 \neq 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi |y_0|^2}{2}\right\}$$

$y \neq 0$, prove que:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

Vejamos **alguma majorações** antes de fazer a demonstração:
$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y||y_0|}$ e $|y_0| - |y| \leq |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow$
$|y| - |y_0| > -\frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow |y| > \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}$.
Assim,

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| &= \frac{|y_0 - y|}{|y||y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2} |y_0 - y| < \frac{2}{|y_0|^2} \frac{\xi |y_0|^2}{2} = \xi \\ &\Longrightarrow \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi. \end{aligned}$$

Prova:

Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi |y_0|^2}{2}\right\} > 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}. \tag{1}$$

$$|y - y_0| < \frac{\xi \, |y_0|^2}{2} \Longrightarrow \frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \xi. \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\frac{1}{|y|} \frac{2\,|y - y_0|}{|y_0|^2} < \frac{2}{|y_0|}\xi.$$

De sorte que:

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \xi.$$

■

(C) Seja f uma função dada por:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Prove que:

(i) $|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) . |x - 1|$ para $x > 0$;
(ii) $|f(x) - 2| \leq 3\,|x - 1|$ para $x > \frac{1}{2}$;
(iii) $f(x) \geq 2$, para todo $x > 0$.

Prova:

(i) Com efeito,

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= \left| x + \frac{1}{x} - 2 \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \Longrightarrow \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right| \\ &= \left| \frac{(x-1)^2}{x} \right| = \left| \frac{x-1}{x} \right| . |x - 1| \leq \left(\frac{|x| + |1|}{|x|} \right) . |x - 1| \end{aligned}$$

Como $x > 0$, segue-se que:

$$|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) . |x - 1| .$$

(ii) Para $x > \frac{1}{2}$, então, $\frac{1}{x} < 2$ e, portanto, $1 + \frac{1}{x} < 3$.
Daí, e do item anterior, obtemos:

$$|f(x) - 2| \leq 3\,|x - 1| .$$

(iii) Basta revisitar a desigualdade entre as médias: geométrica e aritmética, obtendo:

$$\sqrt{x.\frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \;\; x > 0.$$

Logo,

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

$\blacksquare$

(D) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, tais que: $x_1.x_2...x_n = 1$.
Verifique se:

$$(1 + x_1) . (1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 2^n.$$

Prova:

Basta notar que:

$$\begin{cases} \sqrt{1.x_1} \leq \frac{1+x_1}{2} \\ \sqrt{1.x_2} \leq \frac{1+x_2}{2} \\ \vdots \\ \sqrt{1.x_n} \leq \frac{1+x_n}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x_1} \leq 1 + x_1 \\ 2\sqrt{x_2} \leq 1 + x_2 \\ \vdots \\ 2\sqrt{x_n} \leq 1 + x_n \end{cases}.$$

Donde, obtemos:

$$\begin{cases} \overbrace{2.2 \ldots 2}^{n \text{ vezes}} \leq (1 + x_1) . (1 + x_2) \cdots (1 + x_n), \end{cases}$$

visto que $\sqrt{x_1.x_2 \ldots x_n} = 1$.
Portanto,

$$(1 + x_1) . (1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 2^n.$$

$\blacksquare$

(Será que seria possível provar usando indução finita sobre n? Porquê?)

(E) **(Vestibular: COVEST 1999: Função e majorações)**
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \frac{x2^{-x}}{(2^{-x} + 1)^2},$$

então, verifique se: $0 < f(100) < 10^{-28}$.

Solução:

Com efeito,

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2^x}}{\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)^2} = \frac{x2^x}{(1 + 2^x)^2},$$

então,

$$f(100) = \frac{100.2^{100}}{(1 + 2^{100})^2} < \frac{100.2^{100}}{2^{200}} = \frac{100}{2^{100}}.$$

Afirmação: $2^{100} > 10^{30}$.

De fato,

$$\begin{aligned} 2^{100} &> 10^{30} \Longleftrightarrow 100.\log_{10} 2 > 30.\log_{10} 10 \\ &\Longleftrightarrow 100.0,301 > 30 \Longleftrightarrow 30,1 > 30. \end{aligned}$$

Por conseguinte, vem:

$$2^{100} > 10^{30} \Longleftrightarrow \frac{1}{2^{100}} < \frac{1}{10^{30}}.$$

Assim,

$$0 < f(100) < \frac{100}{2^{100}} < \frac{10^2}{10^{30}} = 10^{-28}.$$

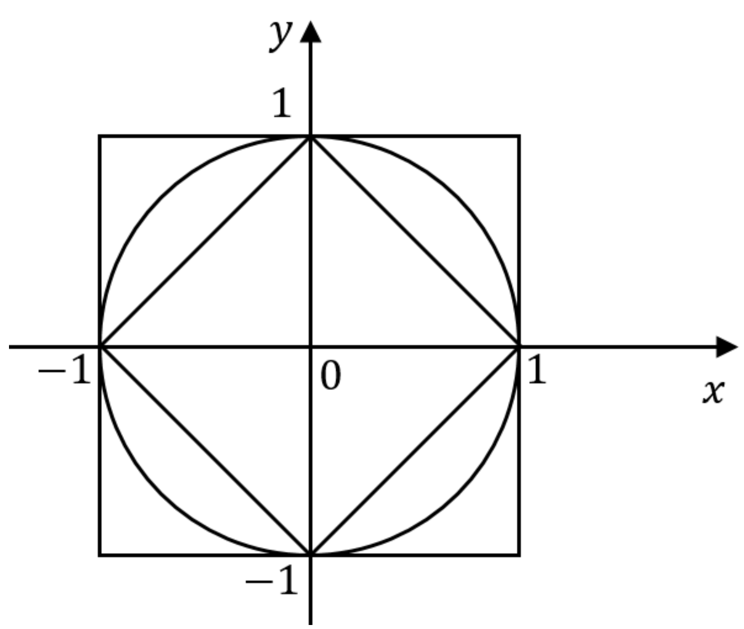
De sorte que:

$$0 < f(100) < 10^{-28}.$$

■

(F) Esboce os gráfico de $\mathbb{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\right\}, \mathbb{B} = \left\{u \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| = 1\right\}$ e $\mathbb{C} = \left\{u \in \mathbb{R}^2; \max\{|x|, |y|\} = 1\right\}$,

Solução:



(Posteriormente, em Geometria Analítica Vetorial serão definidas como normas euclidianas, norma da soma e norma do máximo)

■

(G) Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.

(i) Se um número racional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $m.d.c.(p, q) = 1$
(p e q primos entre si) é tal que: $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, prove que:
$p \diagup a_0$ e $q \diagup a_n$ (p divide a_0 e q divide a_n).

(ii) $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é racional ou irracional? justifique.

Prova:

Com efeito, $f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, então temos:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} a_n p^n &= a_{n-1} q p^{n-1} - \cdots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n & (1) \\ & \quad \text{ou} \\ a_0 q^n &= -a_n p^n - \cdots - a_1 p q^{n-1}. & (2) \end{aligned}$$

Agora, observe que:
q divide o 2^o membro de (1). Logo, q divide a_n ou q divide p. Como $m.d.c.(p, q) = 1$, segue-se que: $q \diagup a_n$. Analogamente, mostra-se que: $p \diagup a_0$.
(p divide a_0 : $p \diagup a_0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a_0 = kp$).

■

(ii) Solução:

Se $x = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, então, temos:
$x^3 = 2 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}$.
$x^3 = 4 + 3\sqrt[3]{-1\left(2-\sqrt{5}\right)} + 3\sqrt[3]{-1\left(2+\sqrt{5}\right)}$
$x^3 = -3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right) + 4$.
Donde, vem:

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Daí, as possíveis raízes racionais, se existirem, são: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.
Á luz do algoritmo de Briott-Ruffini, temos: $x = 1$ é raiz. Assim, a equação toma a forma:

$$(x-1) . \left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

Portanto, $x = 1$ é o único racional admissível.
Ou ainda,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=1.$$

■

(I) Os números reais p, q e α são, tais que: $p > 0, q > 0$ e $\alpha > 1$. Prove que:

$$\frac{p+\alpha^2 q}{p+q} > \alpha \Longrightarrow \frac{p}{q} < \alpha.$$

Prova:

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \frac{p+\alpha^2 q}{p+q} &> \alpha \Longrightarrow p+\alpha^2 q > p\alpha + q\alpha \\ &\Longrightarrow p\,(1-\alpha) > q\alpha\,(1-\alpha) \Longrightarrow \frac{p}{q} < \alpha. \end{aligned}$$

■

CAPÍTULO 3

Uma expressão popular de autoria do filósofo chinês Confúcio
(Chiu Kung) 552 a.C.- 489 a.C.
"Uma figura vale mais que mil palavras"

O cenário da educação básica está demorando para reconhecer as mudanças que a explosão de dados causou à sociedade. Não estamos preparando nossos alunos da melhor maneira para navegar com sucesso no século XXI.
(Wilkerson & Laina, 2017)

Para o matemático britânico Keith Devlin, professor da Universidade Stanford, a matemática é a "ciência dos padrões" e "torna o invisível visível", 2020.

Neste Capítulo daremos enfase a função, alguns tipos de funções, tais como: funções polinomiais do primeiro grau e casos particulares e segundo grau, função cúbica, recíproca, raiz quadrada, raiz cúbica, composições de funções, funções exponencial e logarítmica, funções inversas. Ressaltando que faremos esboços de gráficos por translações e reflexões de eixos.

1 Função

Definição:

Uma função $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ é uma correspondência em que, a cada $x \in \mathbb{A}$, está associado um único $y \in \mathbb{B}$, tal que: $y = f(x)$.

Observação:

Na definição de função, podemos destacar:

(a) $\mathbb{A}$ é chamado de domínio de f, denotamos por:

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{D}_f = \mathbb{A}.$$

(b) $\mathbb{B}$ é o contra-domínio de f, descrito por:

$$CD(f) = CD_f = \mathbb{B}.$$

(c) A função é f (é a lei que diz o que fazer) e não $f(x)$ que é o resultado da lei. A imagem de f será representada por $\mathrm{Im}(f)$ e dada a seguir:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{B} : y = f(x),\ x \in \mathbb{A}\}.$$

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pede-se:

(i) $f(0)$ $\quad$ (ii) $f(\pi)$ $\quad$ (iii) $f\left(\sqrt{2}\right)$ $\quad$ (iv) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

Solução:

Notações:

$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$ Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} =$ Conjunto dos números irracionais, ou seja, conjunto de todos os

números reais que não são racionais.

Basta observar: A leitura da função f :
Se o número do domínio for racional, a imagem de f é zero.
Se o número do domínio for irracional, a imagem de f é um.
Agora, fazendo alguns cálculos auxiliares, obtemos:

(i) $x = 0 \in \mathbb{Q}$: $f(0) = 0$ (ii) $x = \pi \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: $f(\pi) = 1$

(iii) $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$: $f\left(\sqrt{2}\right) = 1$ (iv) $x = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$: $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.
Logo,

$$(i) \quad f(0) = 0 \qquad (ii) \quad f(\pi) = 1 \qquad (iii) \quad f\left(\sqrt{2}\right) = 1 \qquad (iv) \quad f\left(\tfrac{1}{3}\right) = 0.$$

■

2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = x^2$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{xh}, \text{ com } xh \neq 0.$$

Solução:

É fundamental entender o que faz a lei f: Leva

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \square & \longmapsto & f(\square) = (\square)^2 \end{array}$$

$\square$ é o elemento do domínio e $(\square)^2$ é o resultado da lei (imagem de f).
Feito este esclarecimento, vejamos:

$$f(x-h) = (x-h)^2 \text{ e } f(x+h) = (x+h)^2.$$

Daí, vem:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) &= (x+h)^2 - (x-h)^2 \\ &= [(x+h) - (x-h)] . [(x+h) + (x-h)] \\ &= 2h.2x = 4xh. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{xh} = \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{xh} = 4.$$

■

3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = ax + b$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ h \neq 0.$$

Solução:

Consideremos dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$
1^o Caso: $a = 0 : f(\square) = b$.(note que qualquer valor do "quadrado" o resultado será sempre b).
Ilustrativamente, $f(\square) = f(x + k + n) = b$ e $f(\square) = f(x+h) = b$. Assim,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b-b}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

2^o Caso: $a \neq 0 : f(\square) = a\square + b$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[a(x+h)+b] - (ax+b)}{h} = \frac{ax + ah - ax}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

■

4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = f(x) = x^2 + x$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ h \neq 0.$$

Solução:

$f(x) = x^2 + x$, $f(\square) = (\square)^2 + (\square)$. Observe que: **o"quadrado" é apenas um símbolo representando o significado**.

$$f(k) = k^2 + k, f(\triangle) = (\triangle)^2 + (\triangle), f(x+h) = (x+h)^2 + (x+h).$$

Além disso, fazendo alguns cálculos auxiliares, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^2 + (x+h) - \left(x^2 + x\right) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + h - x^2 \\ &= 2xh + h^2 + h \\ &= h(2x + h + 1). \end{aligned}$$

Por conseguinte, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2+(x+h)-\left(x^2+x\right)}{h} = \frac{h(2x+h+1)}{h} \\ &= 2x+h+1. \end{aligned}$$

■

5. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x)=\frac{1}{x}$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ h\neq 0.$$

Solução:

$f(x)=\frac{1}{x}$, usando a mesma ideia do "quadrdo" $f(\square)=\frac{1}{\square}$.
$f(k)=\frac{1}{k}$, $f(\triangle)=\frac{1}{\triangle}$, $f(x+h)=\frac{1}{x+h}$. Daí vem:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{\frac{h}{1}} = \frac{-h}{(x+h)x}.\frac{1}{h} = \frac{-1}{(x+h)x}.$$

■

6. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x)=x^3+1$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ h\neq 0.$$

Solução:

$f(x)=x^3+1$,usando a mesma ideia do "quadrdo" $f(\square)=(\square)^3+1$.
Para ilustração, vamos simular alguns valores para o "quadrado"
$f(x+t+1)=(x+t+1)^3+1$, $f(\triangle)=(\triangle)^3+1$ e $f(x+h)=(x+h)^3+1$.
Logo,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left[(x+h)^3+1\right]-\left[x^3+1\right]}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \frac{[(x+h)-x]\left[(x+h)^2+(x+h)x+x^2\right]}{h} \\ &= \frac{h\left[(x+h)^2+(x+h)x+x^2\right]}{h} \\ &= (x+h)^2+(x+h)x+x^2 \\ &= 3x^3+3xh+h^2. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

7. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = -2x$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \ h \neq 0.$$

Solução:

$f(x) = -2x$ usando a mesma figurinha do "quadrdo" $f(\square) = -2(\square)$.
$f(\triangle) = -2\triangle$, $f(x+t+k) = -2(x+t+k)$ e $f(x+h) = -2(x+h)$.
Atenção especial no cálculo $-f(x) = -[-2x] = 2x$
$f(x+h) - f(x) = -2(x+h) - [-2x] = -2x - 2h + 2x = -2h$.
De sorte que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-2(x+h) - [-2x]}{h} = \frac{-2h}{h} = -2.$$

$\blacksquare$

8. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = x^2 + 1$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \ h \neq 0.$$

Solução:

$f(x) = x^2 + 1$, a ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si $f(\square) = (\square)^2 + 1$. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+t+1) = (x+t+1)^2 + 1 \text{ e } f(x+h) = (x+h)^2 + 1.$$

Voltando ao problema inicial, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\left[(x+h)^2 + 1\right] - \left(x^2 + 1\right)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{[(x+h) - x]\,[(x+h) + x]}{h} = \frac{h\,[2x+h]}{h} \\ &= 2x + h. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

9. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ h \neq 0.$$

Solução:

$f(x)=\sqrt{x}$, $f(\square)=\sqrt{\square}$.
A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra em si. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p)=\sqrt{x+p}, f(\triangle)=\sqrt{\triangle} \text{ e } f(x+h)=\sqrt{x+h}.$$

Voltando ao problema dado, tem-se:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Vejamos um argumento de mudanças de variáveis, façamos:

$$\left\{\begin{array}{c} t=\sqrt{x+h} \\ \text{e} \\ k=\sqrt{x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2=x+h \\ \text{e} \\ k^2=x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2-k^2=h \\ \text{e} \\ k^2=x. \end{array}\right.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{t-k}{t^2-k^2}=\frac{t-k}{(t-k)(t+k)} \\ &= \frac{1}{(t+k)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} (A-B).(A+B) &= A^2-B^2 \\ & \left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right) \\ &= \left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right) \\ &= x+h-x=h \end{aligned}$$

Óbvio, sendo $x>0$ e $h>0$ (porquê não consideramos $x \geq 0$ e $h \geq 0$?).
Agora, procedendo usando a racionalização, obtemos:

$$\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2=x+h-x=h$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)}{h}.\frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{h}{h.\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

■

10. Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função dada por: $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Calcule e simplifique:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\ h\neq 0.$$

Solução:

$f(x)=\sqrt[3]{x}.f(\square)=\sqrt[3]{\square}$.
A ideia da figurinha do quadrado é olhar o que ela significa, não a letra que usamos. Ilustrado a ideia da figurinha, temos:

$$f(x+p)=\sqrt[3]{x+p},\ f(\triangle)=\sqrt[3]{\triangle} \text{ e } f(x+h)=\sqrt[3]{x+h}.$$

Voltando ao delineado, temos:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}.$$

Poderia usar racionalização. Vejamos usando mudanças de variáveis, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} t=\sqrt[3]{x+h}\\ \text{e}\\ k=\sqrt[3]{x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^3=x+h\\ \text{e}\\ k^3=x\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^3-k^3=h\\ \text{e}\\ k^3=x.\end{array}\right.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}=\frac{t-k}{t^3-k^3}=\frac{t-k}{(t-k)\left(t^2+tk+k^2\right)}\\ &= \frac{1}{t^2+tk+k^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}.\end{aligned}$$

Observe que:

Determinando o **fator racionalizante,** tem-se:

$$\begin{aligned}(A-B).\left(A^2+AB+B^2\right) &= A^3-B^3\\ \left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right).\left[\left(\sqrt[3]{(x+h)}\right)^2+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right] &= \left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\\ &= x+h-x=h.\end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}\right)}{h}.\frac{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \\
&= \frac{h}{h.\left(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}.
\end{aligned}$$

■

Problema:

Calcule e simplifique, em cada caso, supondo $x \neq a$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

onde:

1) $f(x) = kx + b$ 2) $f(x) = x^2 + x$ 3) $f(x) = \frac{1}{x}$ 4) $f(x) = x^3 + 1$
5) $f(x) = -2x$ 6) $f(x) = x^2 + 1$ 7) $f(x) = \sqrt{x}$ 8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solução:

1. Consideremos dois casos: $k = 0$ e $a \neq 0$

1^o Caso: $a = 0 : f(\square) = b$.(note que qualquer valor do "quadrado" o resultado será sempre b).
Ilustrativamente, $f(\square) = f(x+n+1) = b$ e $f(\triangle) = b$. Desta forma, obtemos:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{b-b}{x-a} = \frac{0}{x-a} = 0.$$

2^o Caso: $k \neq 0 : f(\square) = k\square + b$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{kx+b-(ka+b)}{x-a} = \frac{k(x-a)}{x-a} = k.$$

■

2. $f(x) = x^2 + x$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{x^2+x-\left(a^2+a\right)}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)+(x-a)}{x-a} \\ &= \frac{(x-a)\left[(x+a)+1\right]}{x-a} = x+a+1.\end{aligned}$$

■

3. $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \frac{\frac{-(x-a)}{xa}}{x-a} = \frac{-(x-a)}{xa}.\frac{1}{(x-a)} \\ &= \frac{-1}{xa},\ x \neq a \neq 0.\end{aligned}$$

■

4. $f(x) = x^3 + 1$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^3-a^3}{x-a} = \frac{(x-a)\left(x^2+xa+a^2\right)}{x-a} = x^2+xa+a^2.$$

■

5. $f(x) = -2x$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{-2x-(-2a)}{x-a} = \frac{-2(x-a)}{x-a} = -2.$$

■

6. $f(x) = x^2 + 1$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2+1-\left(a^2+1\right)}{x-a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x+a.$$

■

7. $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}.$$

Agora, façamos as mudanças de variáveis, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} t=\sqrt{x} \\ \text{e} \\ k=\sqrt{a} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^2=x \\ \text{e} \\ k^2=a. \end{array}\right.$$

Assim, vem:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\frac{t-k}{t^2-k^2}=\frac{t-k}{(t-k)(t+k)} \\ &= \frac{1}{t+k}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Este processo é o mesmo; neste caso, que racionalizar. ■

8. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}. \tag{1}$$

Assim, fazendo as mudanças de variáveis necessárias, vem:

$$\left\{\begin{array}{c} t=\sqrt[3]{x} \\ \text{e} \\ k=\sqrt[3]{a} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} t^3=x \\ \text{e} \\ k^3=a. \end{array}\right. \tag{2}$$

Daí, levando (2) em (1), segue-se que:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{x-a}=\frac{t-k}{t^3-k^3}=\frac{t-k}{(t-k)(t^2+tk+k^2)} \\ &= \frac{1}{t^2+tk+k^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}. \end{aligned}$$

■

1.1 Gráfico de uma função

Definição:

Seja $f:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{B}$ uma função. O gráfico de f, denotado por G_f, é dado por:

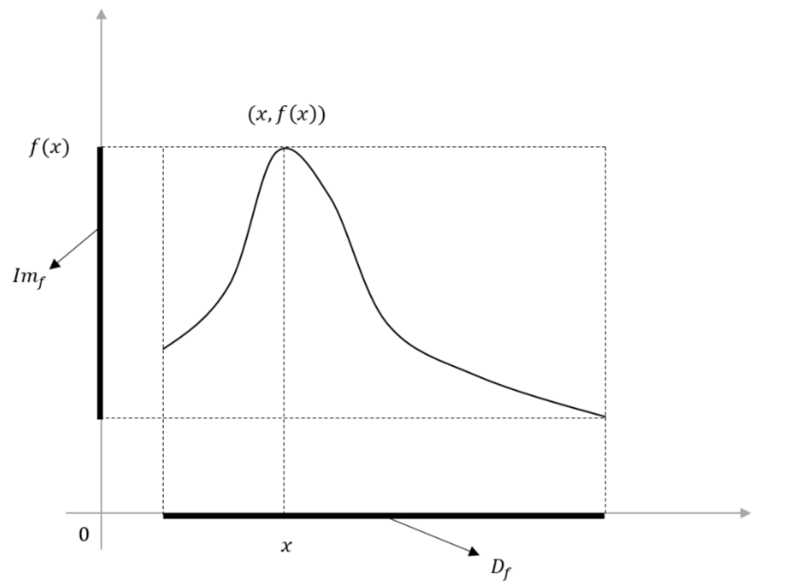
$$G_f=\{(x,f(x))\in\mathbb{A}\times\mathbb{B}:y=f(x)\}$$

Observação:

Na definição de função, podemos destacar que o gráfico de f é um sub-

conjunto do produto cartesiano de $\mathbb{A}$ por $\mathbb{B}$, Notação: $G_f \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$.
($\subseteq$ está contido ou é igual a).

Esboço do gráfico de f:



Guarde com bastante atenção estes fatos:

(i) De forma intuitiva, o $\mathbb{D}_f$ é a projeção do gráfico de f, sobre o eixo x e a $\mathrm{Im}\,(f)$ é a projeção do gráfico de f, sobre o eixo y.

(ii) Toda reta paralela ao eixo y, passando pelo $x \in \mathbb{D}_f$, corta o gráfico de f em um único ponto.

Fato bastante intrigante:

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

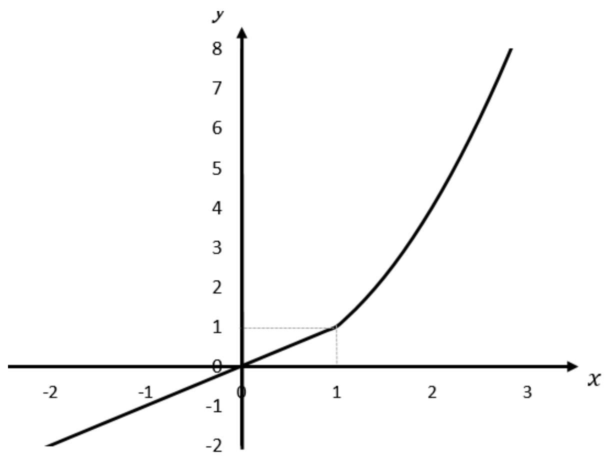
$$f\,(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Não se consegue esboçar um gráfico, nem usando recursos computacionais, porquê?

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f\,(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x & x < 1. \end{cases}$

Solução:



2. Calcule e simplifique em cada caso:

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}, \text{ com } x \neq 1,$$

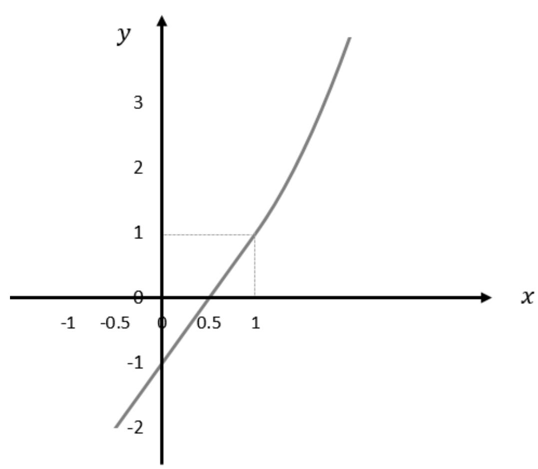
onde:

$(i) \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases} \qquad (ii) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ -x + 2, & x \leq 1. \end{cases}$

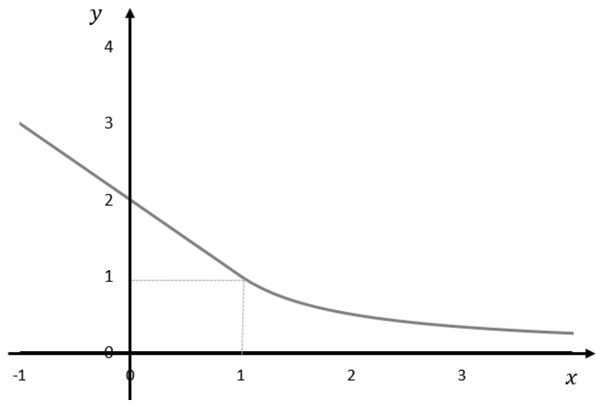
Esboçando os gráficos em cada caso, temos:

Solução:

(i)



(ii)



(i) **1^o Caso:** $x > 1 : f(1) = 1^2$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$$

2^o Caso: $x < 1 : f(1) = 1^2$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto dado $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2x - 1 - 1^2}{x - 1} = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$

■

(ii) **1^o Caso:** $x > 1 : f(1) = -1 + 2 = 1.$

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \frac{\frac{(1-x)}{x}}{x - 1} = \frac{-(x-1)}{x} . \frac{1}{(x-1)} = -\frac{1}{x}$$

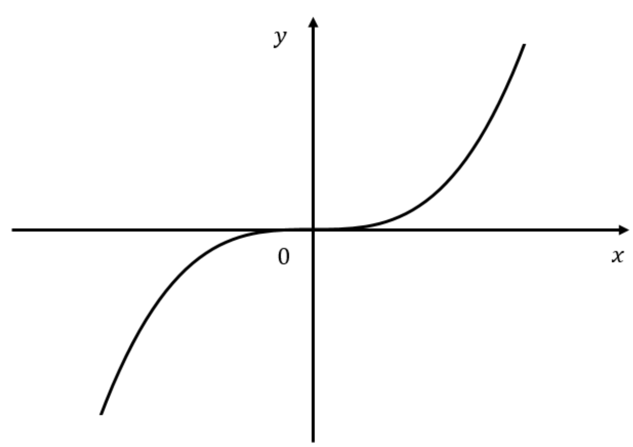
2^o Caso: $x < 1 : f(1) = -1 + 2 = 1$ (Cuidado! $f(1)$ é sempre calculado no ponto, neste caso $x = 1$.)

$$q(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-x + 2 - 1}{x - 1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

■

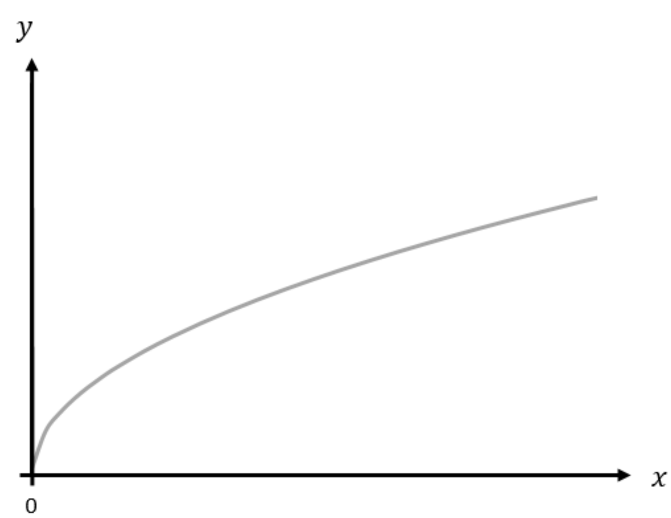
3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f(x) = x^3$.

Solução:

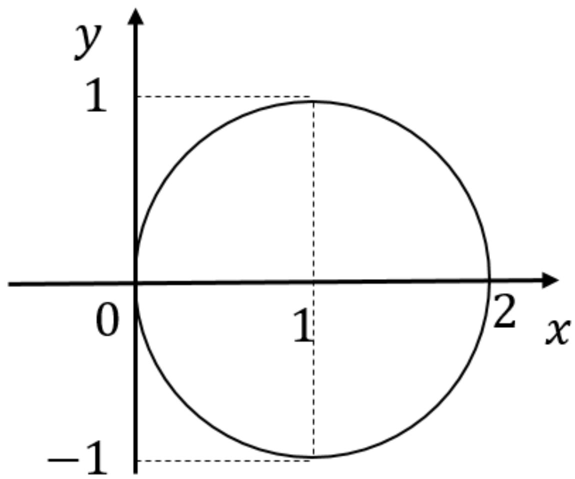


4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução:



5. Considere a equação da circunferência $(x-1)^2+y^2=1$



Neste caso não representa função, visto que: toda reta passado pelo intervalo $0 < x < 2$ corta o gráfico em dois pontos, ou seja, um mesmo elemento do domínio tem duas imagens distintas.

6. Seja $f : \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por: $f(x)=\frac{1}{x}$.

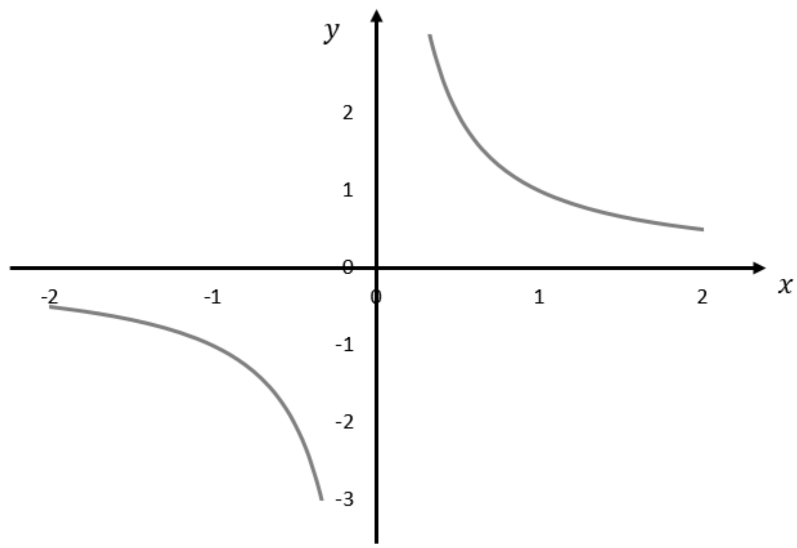
Solução:

Facilmente, se ver: $x > 0$ quando aumentamos os valores de x a fração fica bem pequena e bem próximo de zero, os valores são muito grandes, para ilustrar tome $x = 1000$ e $x = \frac{1}{1500}$.

$$\left\{\begin{array}{c} x = 1000 \\ \text{e} \\ x = \frac{1}{1500} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(1000) = \frac{1}{1000} \\ \text{e} \\ f((\frac{1}{1500}) = \frac{1}{\frac{1}{1500}} = 1500. \end{array}\right.$$

de forma análoga, para $x < 0$, vejamos:

$$\left\{\begin{array}{c} x = -1000 \\ \text{e} \\ x = -\frac{1}{1500} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(-1000) = -\frac{1}{1000} \\ \text{e} \\ f((-\frac{1}{1500}) = -\frac{1}{\frac{1}{1500}} = -1500. \end{array}\right.$$



2 Funções Polinomiais

2.1 Função Polinomial do 1^o grau

Definição: Chama-se função polinomial do 1^o grau a:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = ax + b \end{array}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

1. $f(x) = 2x + 4$

2. $f(x) = -2x + 1$

Observação:

(A) Na definição, tem-se:
a=coeficiente angular da reta
b=coeficiente linear da reta

(B) Critério para esboçar um gráfico de uma reta:
(i) Faça $x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = b$ (valor que corta o eixo y)

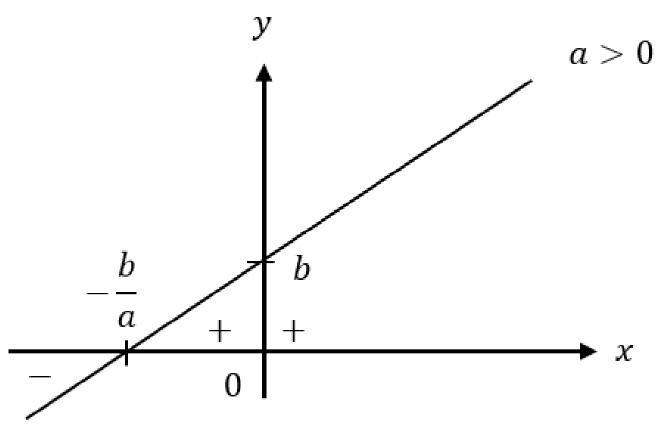
(ii) Faça $y = 0 \Longrightarrow ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$ (temos o zero da função, ou seja, o valor que corta o eixo x)

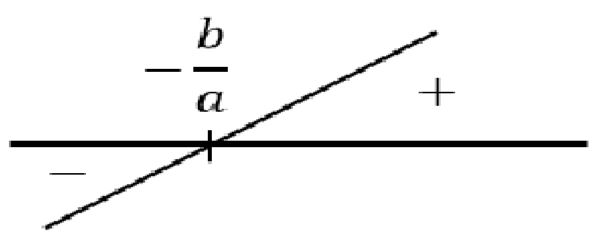
(C) Fatos:
(i) Se $a > 0$, então, f é crescente: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Logo, f é crescente. ■



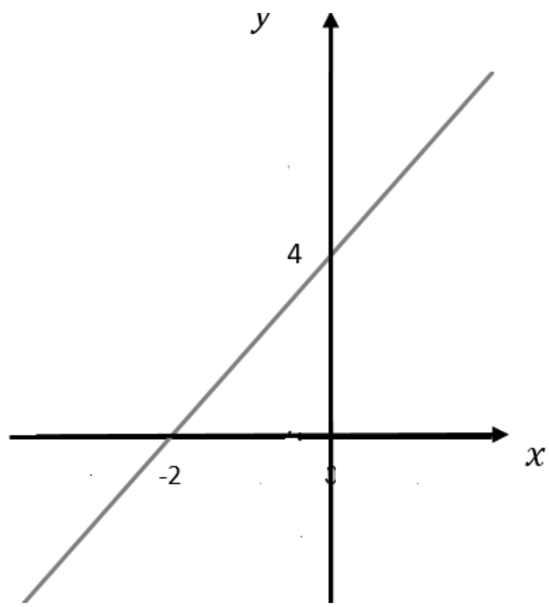


Exemplos:

1. $f(x) = 2x + 4$

Para $x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = 4$ (Valor que corta o eixo y)
Para $y = 0 \Longrightarrow 2x + 4 = 0 \Longrightarrow 2x = -4 \Longrightarrow x = -2$

(Valor que corta o eixo x ou zero da função)

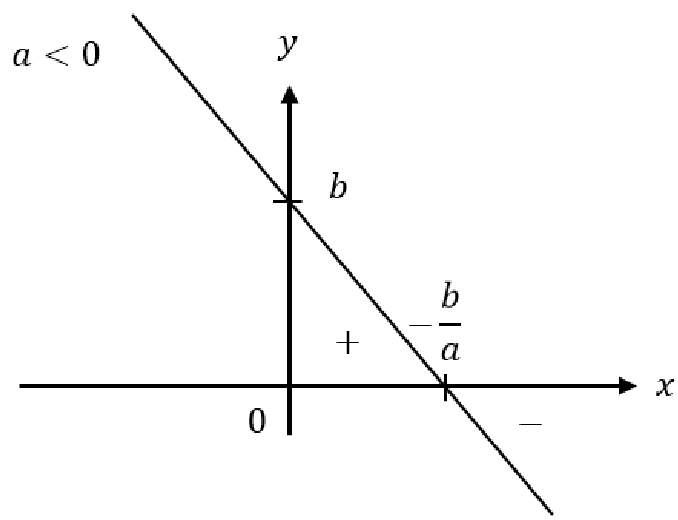


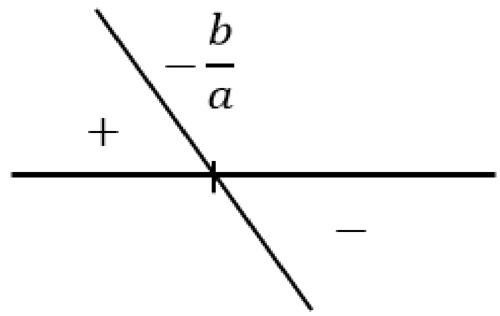
(ii) Se $a < 0$, então, f é decrescente: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \, .$$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \, .$$

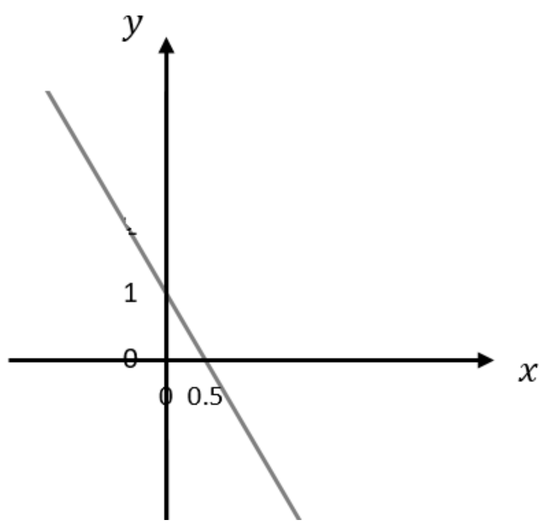
Logo, f é decrescente. ■





2. $f(x) = -2x + 1$

Para $x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = 1$ (Valor que corta o eixo y)
Para $y = 0 \Longrightarrow -2x + 1 = 0 \Longrightarrow -2x = -1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$
(Valor que corta o eixo x ou zero da função)



Problema:

Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função dada por $f(x)=ax+b$, com $a,b\in\mathbb{R}$ e $a,b\neq 0$. Prove que: f não satisfaz as condições:

(i) $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}: f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ e
(ii) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\forall x_1\in\mathbb{R}$: $f(\alpha x_1)=\alpha f(x_1)$

Prova:

(i) $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}:$

$$\begin{cases} f(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)+b=(ax_1+b)+ax_2 \\ \text{e} \\ f(x_1)+f(x_2)=(ax_1+b)+(ax_2+b)\,. \end{cases}$$

Logo,

$$f(x_1+x_2)\neq f(x_1)+f(x_2)\,.$$

(ii) $\forall\alpha\in\mathbb{R}\forall x_1\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(\alpha x_1)=a(\alpha x_1)+b=\alpha(ax)+b \\ \text{e} \\ \alpha f(x_1)=\alpha(ax_1+b)=\alpha(ax)+\alpha b. \end{cases}.$$

De sorte que:

$$f(\alpha x_1)\neq\alpha f(x_1)$$

Quando uma das condições (i) ou (ii) não são satisfeitas dizemos que:
f **não é linear.** ■

Casos particulares: da função

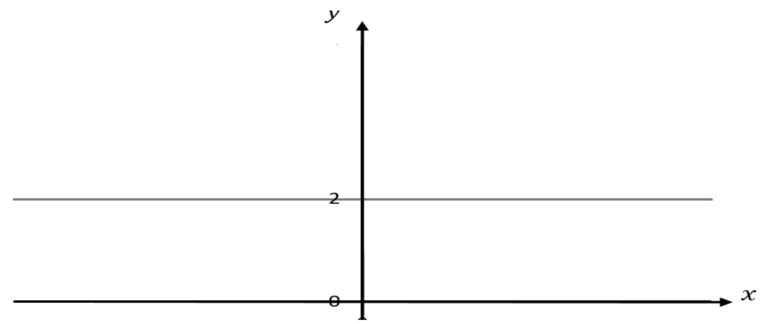
$$f(x)=ax+b,a,b\in\mathbb{R}$$

Função Constante:

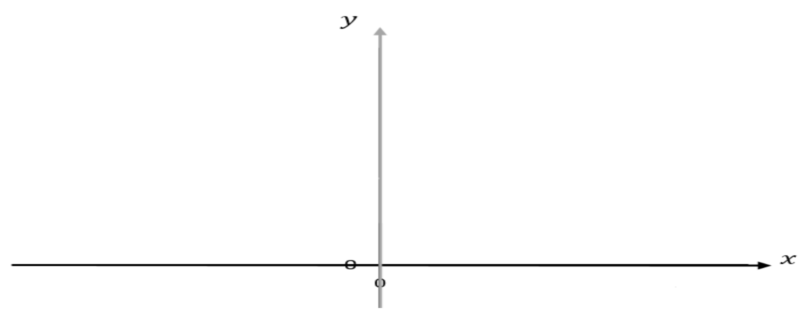
$$a=0\Longrightarrow f(x)=b$$

Exemplos:

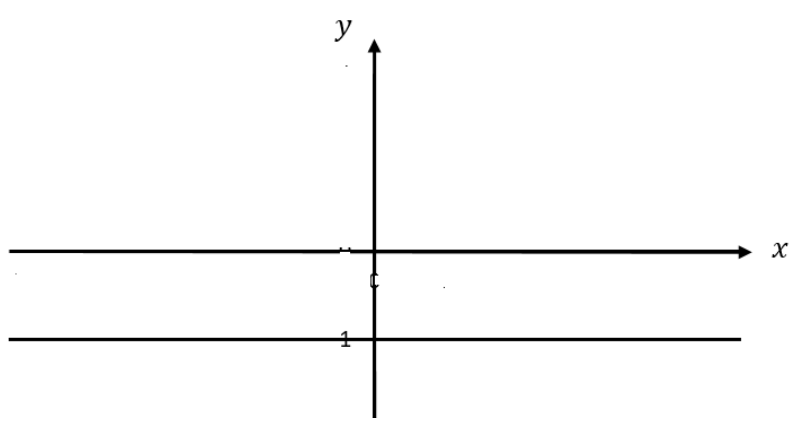
1. $f(x) = 2$



2. $f(x) = 0$



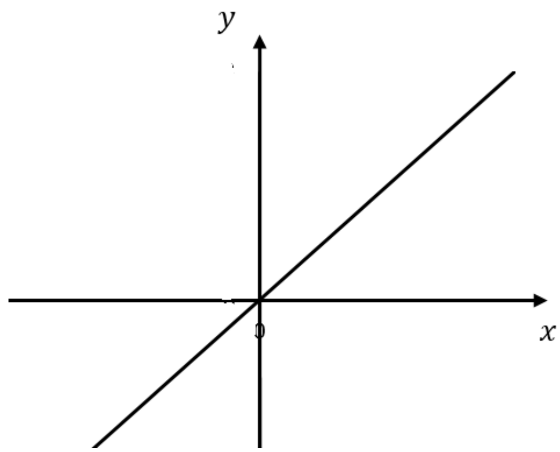
3. $f(x) = -1$



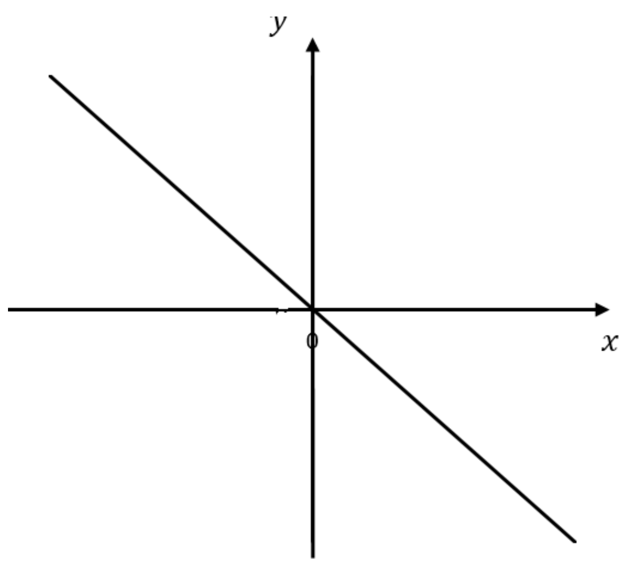
Função Identidade:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = x$.
(Como o próprio nome diz: identidade, a cada x do domínio

sua imagem $y = x$ é o mesmo valor)



Reflexão de $f(x) = x$ em torno do eixo x, obtemos: $g(x) = -x$



(B) Note que f satisfaz:

(i) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) = x_1 + x_2 = f(x_1) + f(x_2)$
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x_1 \in \mathbb{R}$: $f(\alpha x_1) = (\alpha x_1) = \alpha x_1 = \alpha f(x_1)$

$\blacksquare$

Função Linear

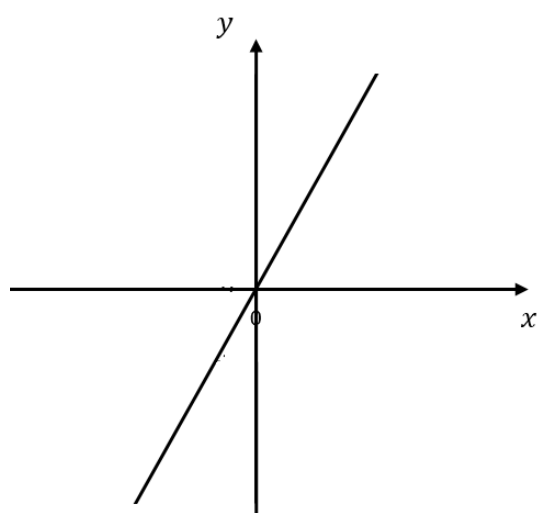
$$f(x) = ax, \text{ com } a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Note que f satisfaz:

(i) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$: $f(\alpha x_1) = a(\alpha x_1) = \alpha(ax_1) = \alpha f(x_1)$
Toda **função (transformação)** que satisfaz estas duas condições chamamos de **Linear.** ■

Exemplos:

1. $f(x) = 2x$



Observe que:
O quociente de Newton

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2x - 2a}{x - a} = \frac{2(x - a)}{x - a} = 2.$$

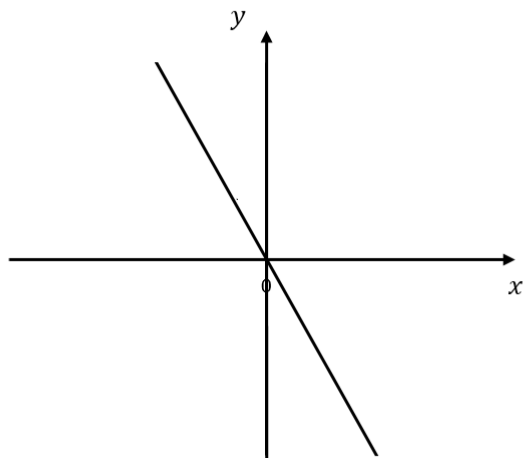
Maravilha de se ver: o coeficiente angular da reta $m = tg\theta = 2$ (f é crescente $a = 2$.)

Sinal de f :

$x > 0 \Longrightarrow f$ é positiva (gráfico está acima do eixo x) e
$x < 0 \Longrightarrow f$ é negativa (gráfico está abaixo do eixo x).

■

2. $f(x) = -2x$



Observe que:

O quociente de Newton

$$q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{-2x - (-2a)}{x - a} = \frac{-2x + 2a}{x - a} = \frac{-2(x - a)}{x - a} = -2.$$

Maravilha de se ver: o coeficiente angular da reta $m = tg\theta = -2$
(f é decrescente $a = -2$.)

Sinal de f :

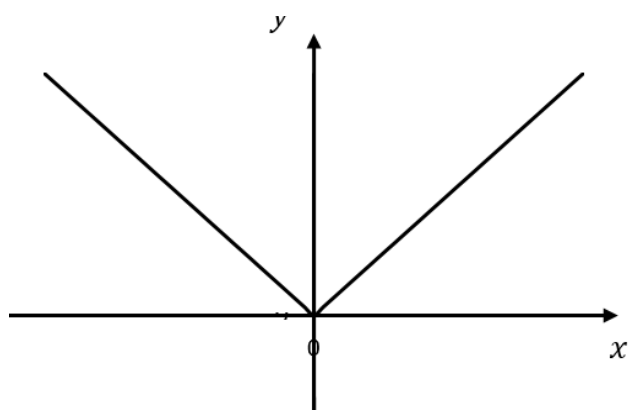
$x > 0 \Longrightarrow f$ é negativa (gráfico está abaixo do eixo x) e
$x < 0 \Longrightarrow f$ é positiva (gráfico está acima do eixo x).

■

Exercício

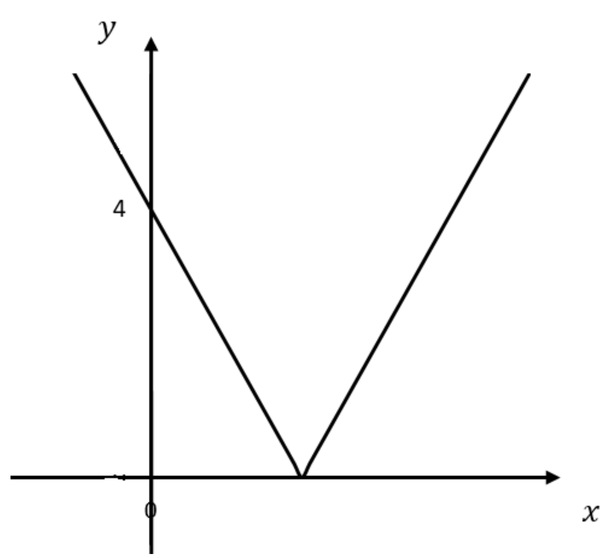
Use translação e reflexão de eixos para esboçar o gráfico de f :

1. $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$



$D(f) = \mathbb{R}$
$\operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

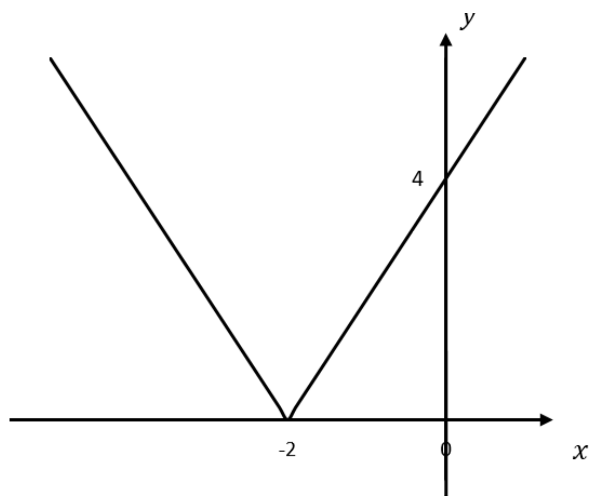
2. $f(x) = |2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -2x + 4 & x < 2 \end{cases}$



$D(f) = \mathbb{R}$

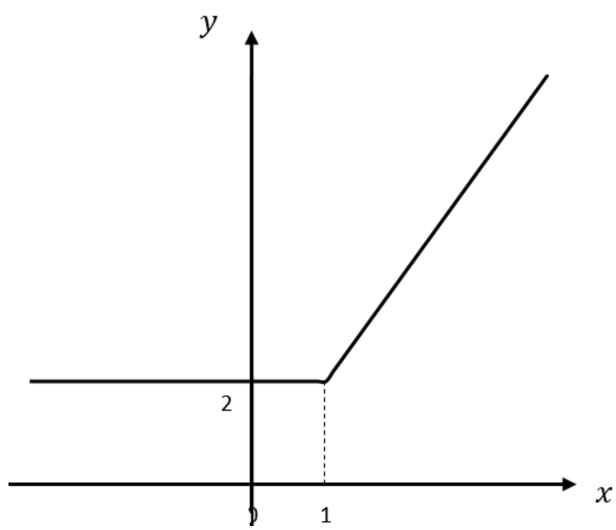
$\mathrm{Im}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

3. $f(x) = |2x+4| = \begin{cases} 2x+4, & x \geq -2 \\ -2x-4 & x < -2 \end{cases}$



$D(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

4. $g(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$



$D(f) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Im}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}.$ ■

2.2 Função Polinomial do 2^o grau

Definição: Chama-se função polinomila do 2^o grau a:

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = ax^2 + bx + c \end{array}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplos:

1. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
2. $f(x) = -x^2 + 1$
3. $f(x) = x^2 + x + 1$
4. $f(x) = x^2 - 2x$

2.2.1 Dedução da Fórmula

Teorema: (Zeros da função)

Seja

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Então, suas raízes são dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Prova:

Com efeito, usando o procedimento de completamento de quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Longrightarrow a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0 \\ &\Longrightarrow a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = 0 \\ &\Longrightarrow \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}\right] = 0 \\ &\Longrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, obtemos:

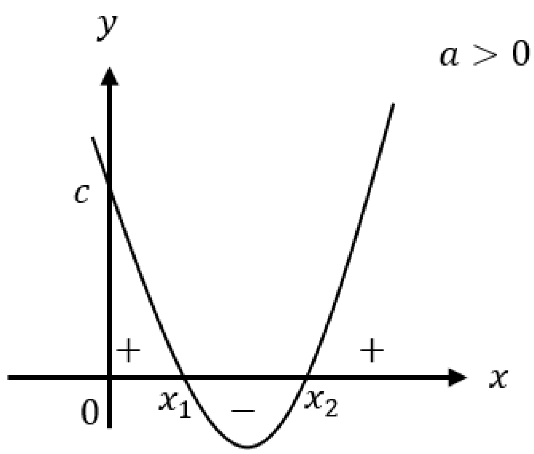
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Longrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

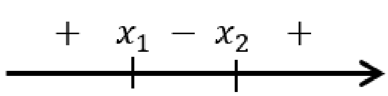
De sorte que:

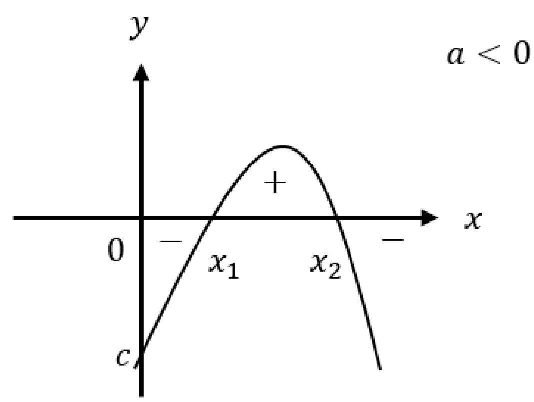
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \text{ou} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}. \end{array} \right.$$

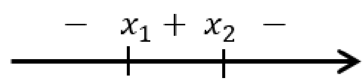
■

1^o Caso: $\Delta > 0$ existem duas raízes reais e distintas x_1 e x_2.



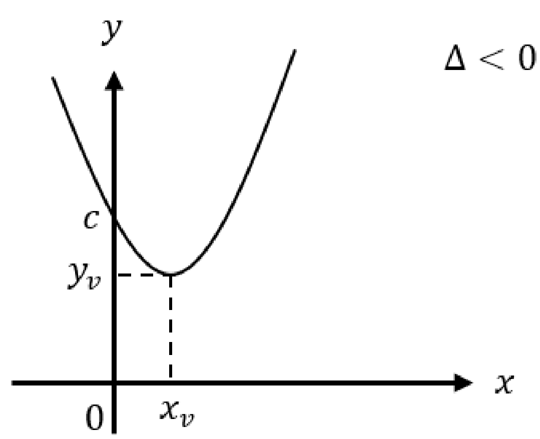


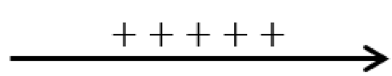




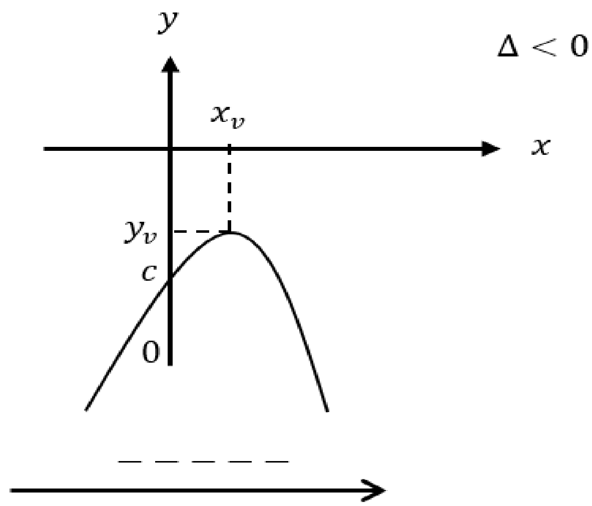
2^o Caso: $\Delta < 0$ não existem raízes reais.

$a > 0$

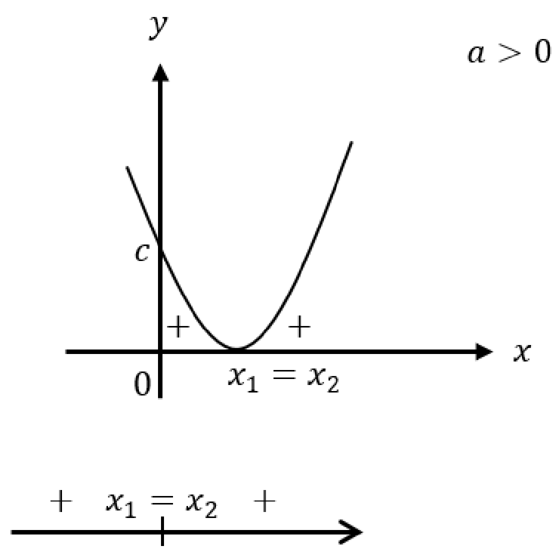


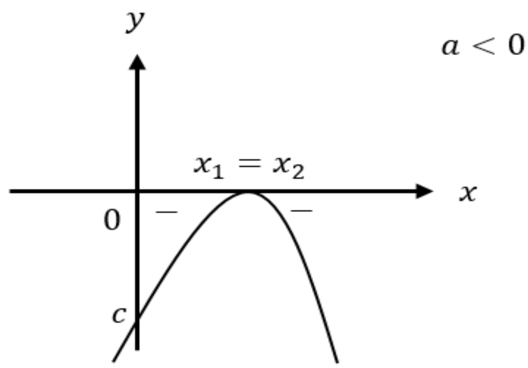


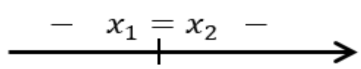
$a < 0$



3^o Caso: $\Delta = 0$ existem duas raízes reais e iguais $x_1 = x_2$.







Teorema:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Então, tem-se:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v,$$

onde (x_v, y_v) é o vértice da parábola, onde:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Prova:

Com efeito, usando o procedimento de completamento de quadrados, tem-se:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right],
\end{aligned}$$

onde:
$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$
De sorte que:
$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$
■

Observação:

2.2.2 Critério para esboçar um grafico de uma função quadrática:

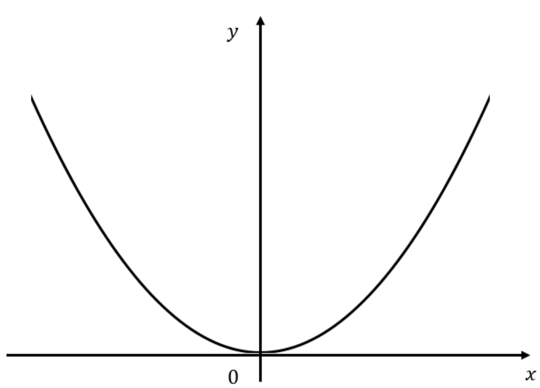
1. Uma forma é usando completamento de quadrados e obter a forma:
$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$
Em seguida, usar translações e reflexões dos eixos coordenados.

2. (i) Faça $x = 0 \Longrightarrow y = f(0) = c$ (valor que corta o eixo y)
(ii) Faça $y = 0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c = 0$, $\Delta \geq 0 \Longrightarrow$(temos o zero da função, ou seja, os valores que cortam o eixo x). Caso contrário, temos:
$\Delta < 0 \Longrightarrow$(não existe valores que corte o eixo x)
(iii) Obter o vértice $V(x_v, y_v)$, onde:
$$x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$
(iv) Esboço do gráfico de f.

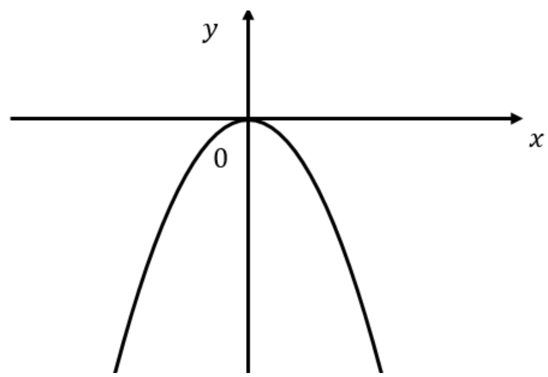
Exemplos:

Esboçar os gráficos usando translações e reflexões de eixos:

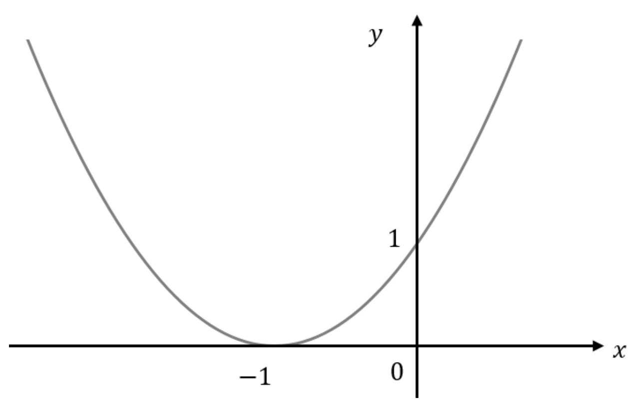
1. $y_1 = x^2$



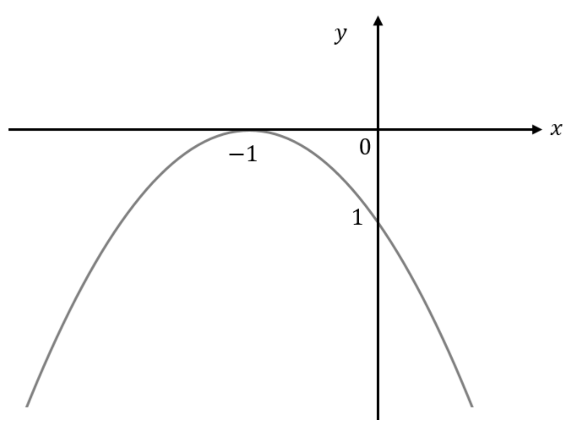
$y_2 = -x^2$



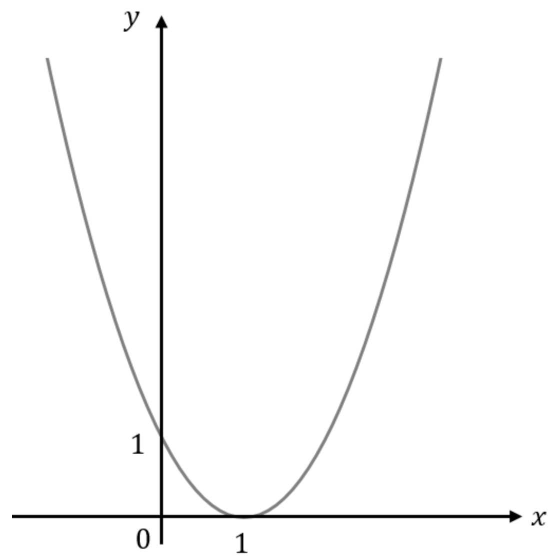
2. $y_1 = (x+1)^2$



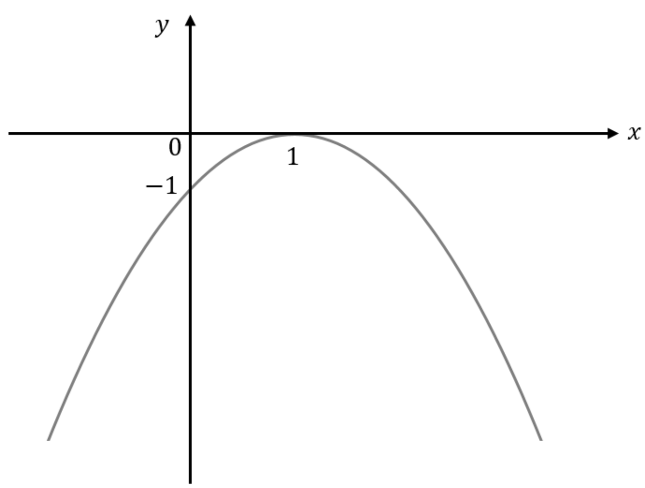
$y_2 = -(x+1)^2$



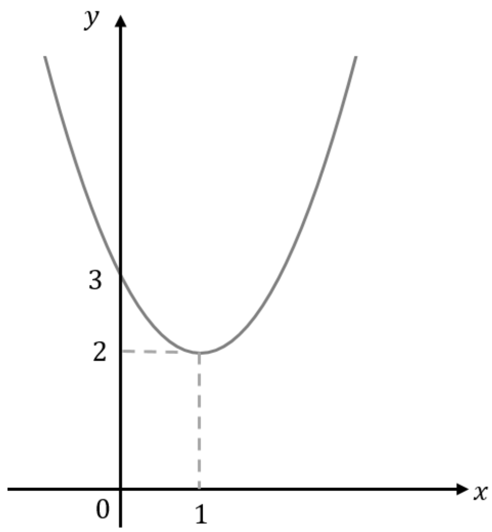
3. $y_1 = (x-1)^2$



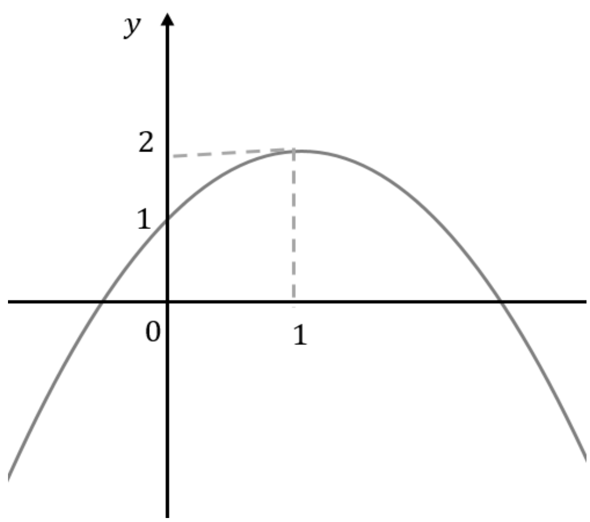
$y_2 = -(x-1)^2$



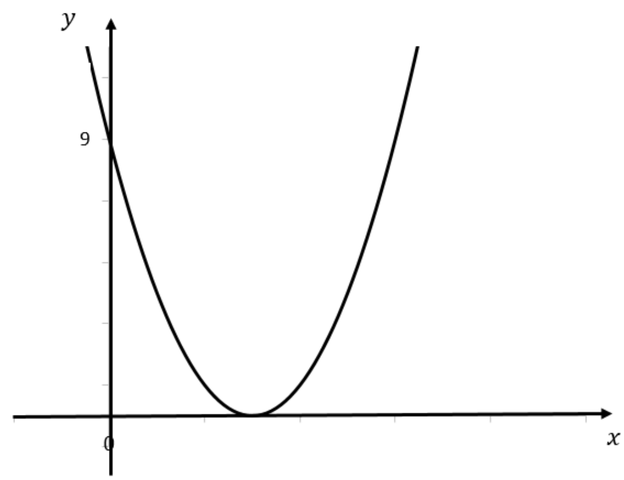
(iv) $y_1 = (x-1)^2 + 2$



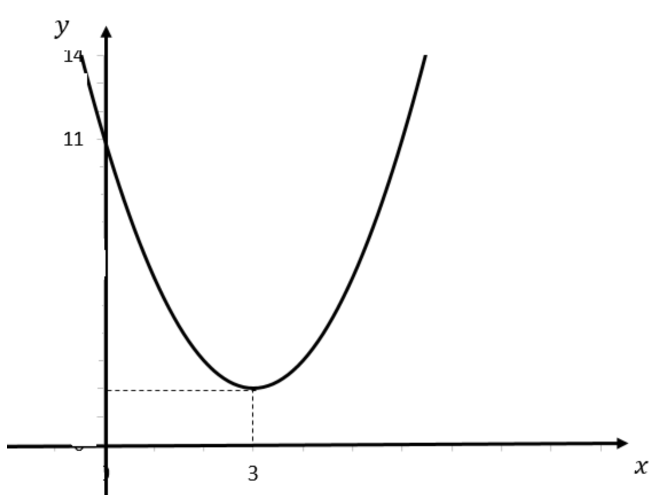
$y_2 = -(x-1)^2 + 2$



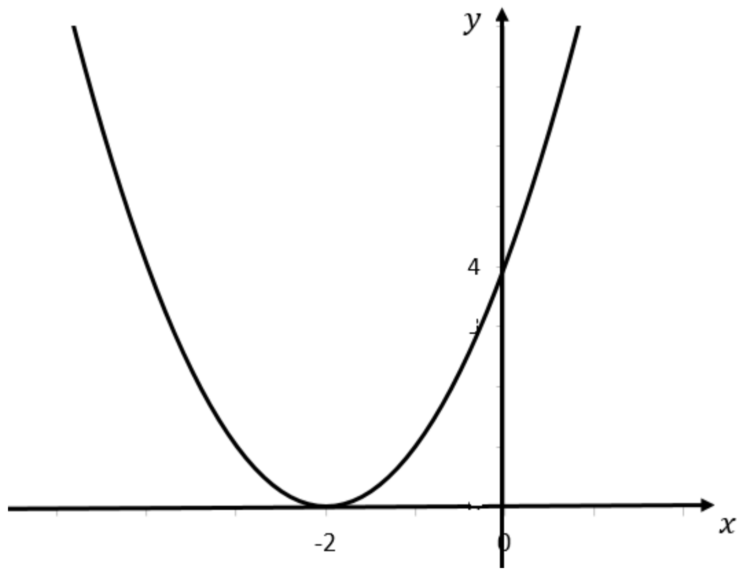
4. $y_5 = (x-3)^2$



5. $y_6 = (x-3)^2 + 2$

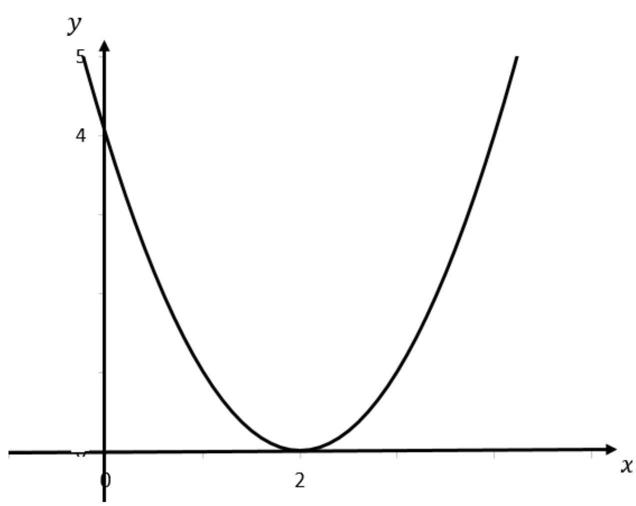


6. $y_7 = (x+2)^2$

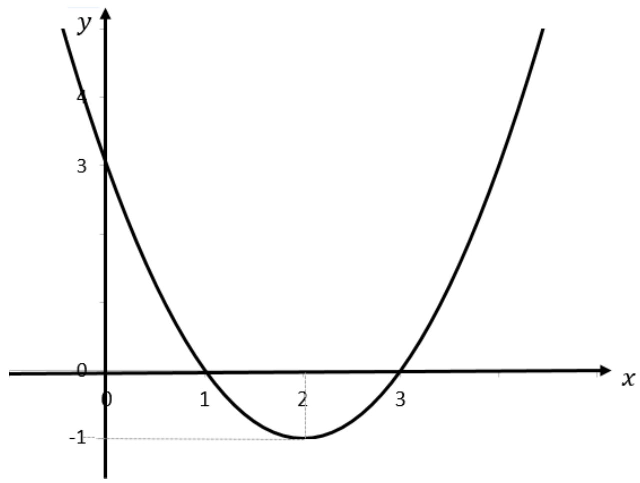


7. $y_7 = \left|(x-2)^2 - 1\right|$

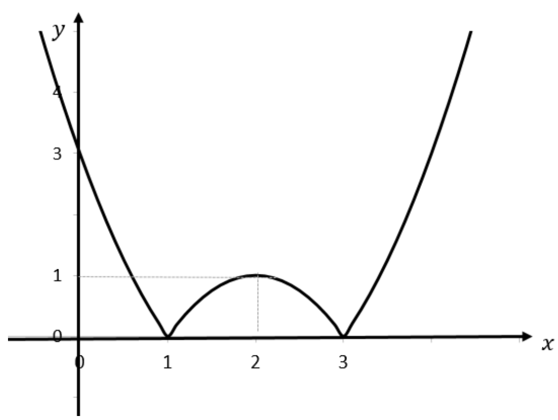
$y_1 = (x-2)^2$



$y_2 = (x-2)^2 - 1$



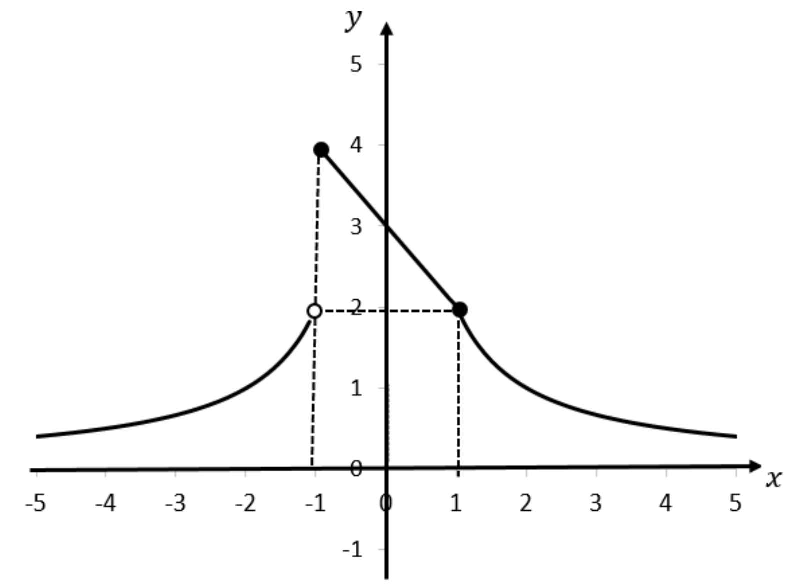
$y_3 = \left|(x-2)^2 - 1\right|$



8. $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|}, & |x| > 1 \\ 3 - x, & |x| \le 1 \end{cases}$

Lembrando

$$|x| > 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \text{ou} \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x| \le 1 \Longleftrightarrow -1 \le x \le 1.$$



Destacando:

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$
Imagem de $f : \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 4\}$

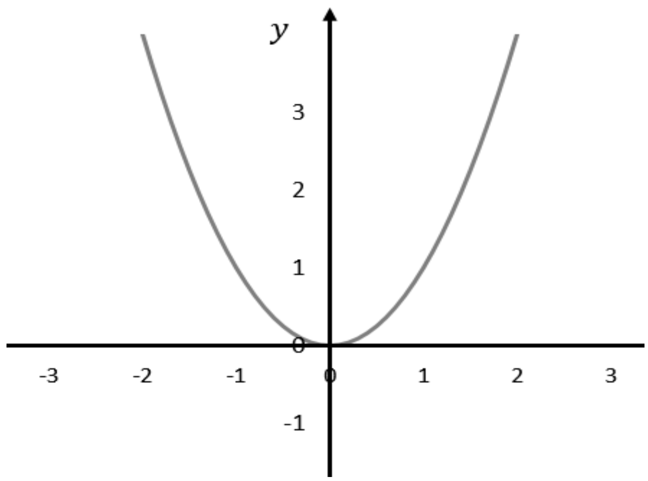
Exemplos

1. $f(x) = x^2 - 6x$

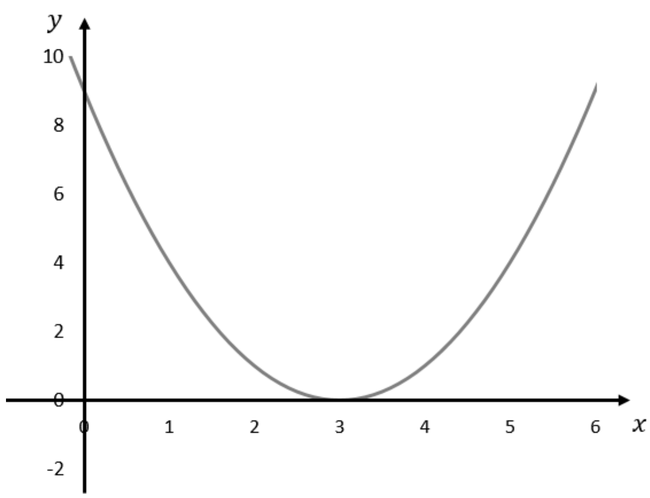
Usando completamento de quadrados, em seguida, translações de eixos, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x \Longrightarrow f(x) = x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 - \left(\frac{-6}{2}\right)^2 \\ &\Longrightarrow f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9 \Longrightarrow f(x) = (x-3)^2 - 9. \end{aligned}$$

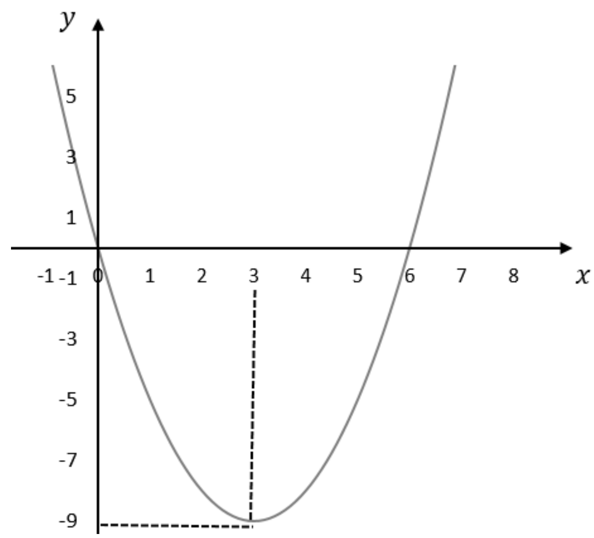
$(i)\ f(x) = x^2$



$(ii)\ f(x) = (x-3)^2$



(ii) $f(x) = (x-3)^2 - 9$



2^o modo:

$$f(x) = x^2 - 6x$$

(i) $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$

(ii) $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x(x-6) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 6 \\ \text{ou} \\ x = 0. \end{array} \right.$

■

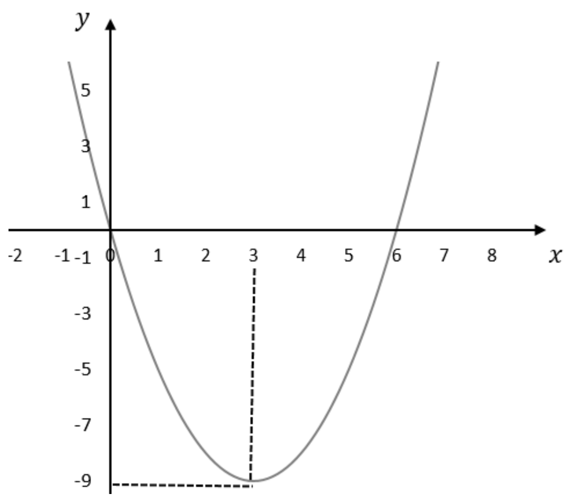
(iii) $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.1.0 = 36$

$$\left\{ \begin{array}{c} x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2.1} = 3 \\ \text{e} \\ y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4} = -9 \end{array} \right. \Longrightarrow V(3, -9).$$

Vértice da parábola.

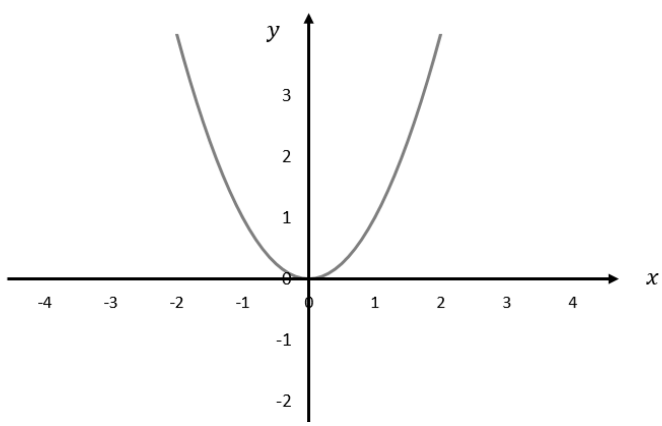
(iv) Esboço do gráfico de f

$f(x) = x^2 - 6x$

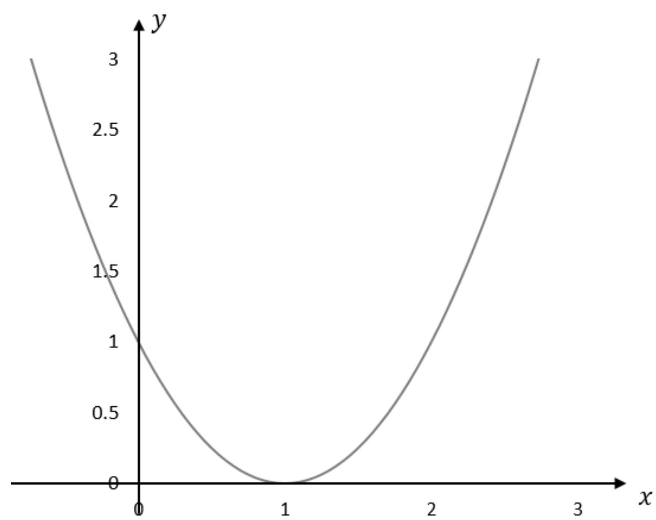


Exemplos

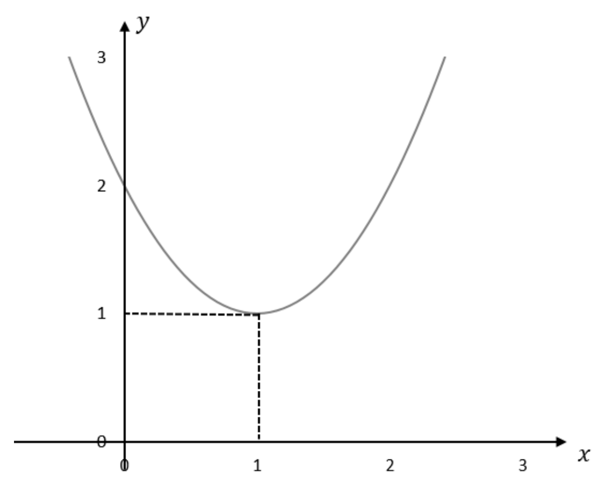
1. (i) $f(x) = x^2$



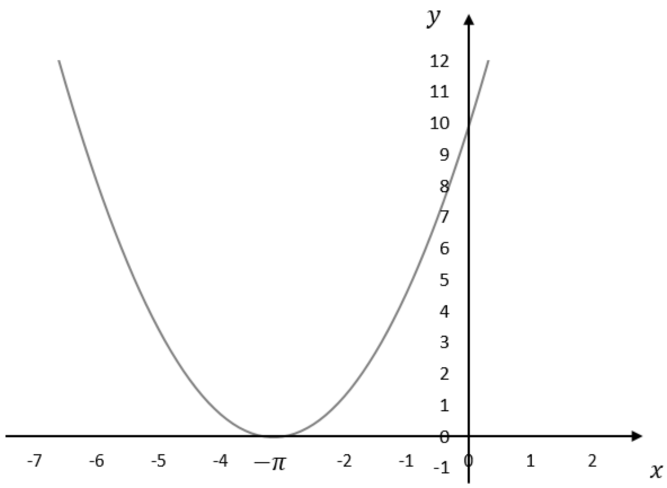
$(ii)\ f(x) = (x-1)^2$



$(iii)\ f(x) = (x-1)^2 + 1$

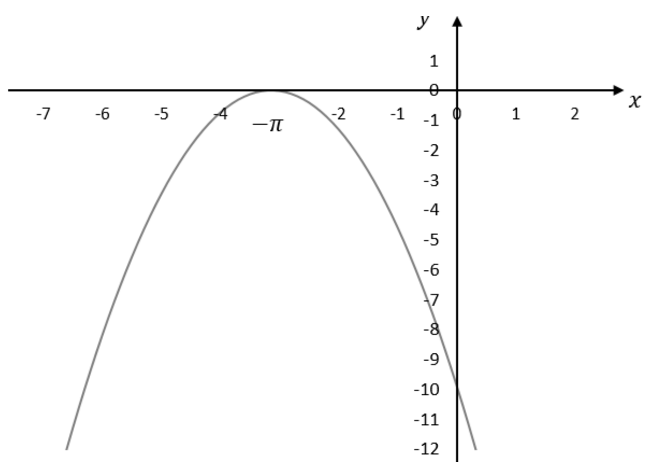


2. (i) $f(x) = (x+\pi)^2$

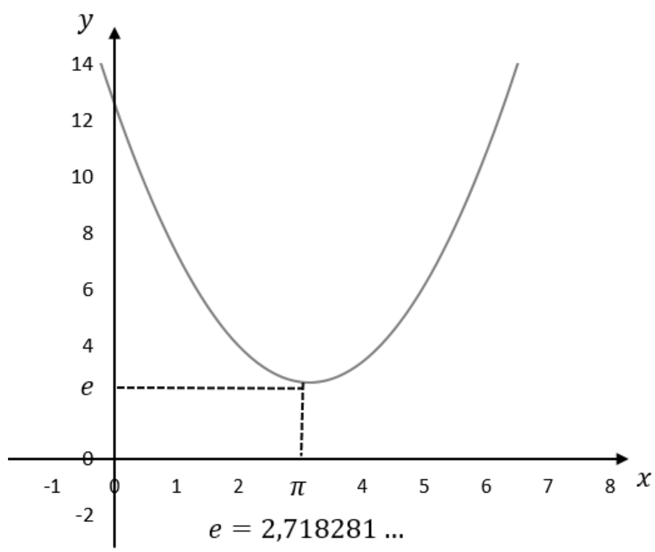


$\pi \cong 3{,}14159 \ldots$

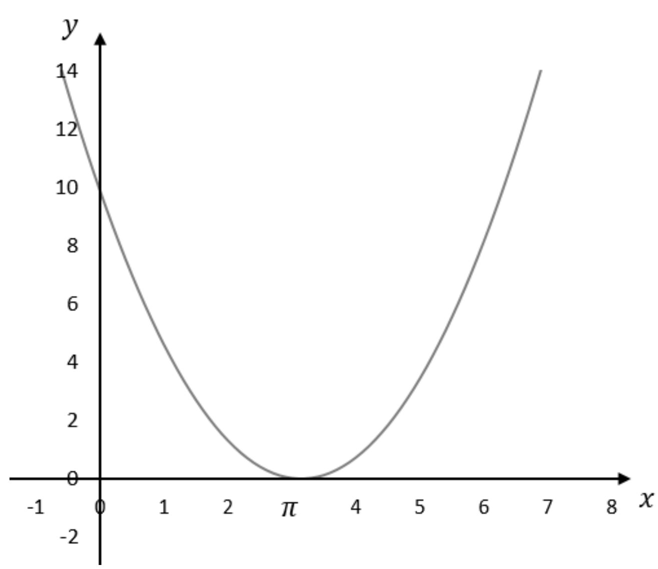
(ii) $f(x) = -(x+\pi)^2$



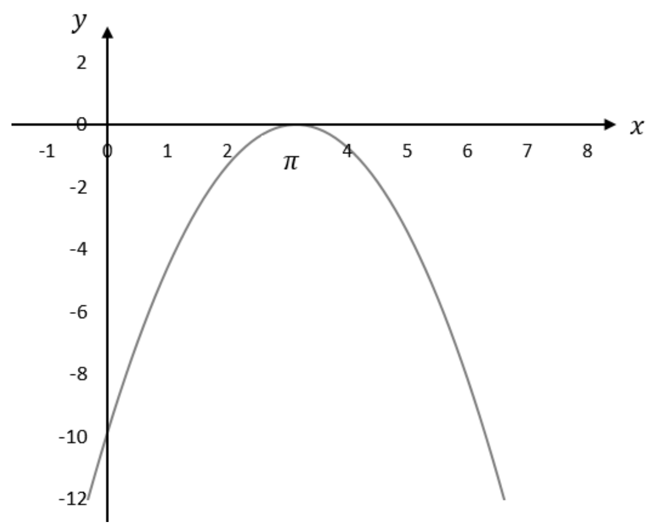
3. $f\left(x\right)=\left(x-\pi\right)^2+e$, onde: $\pi=3,14159...$ e $e=2,7$



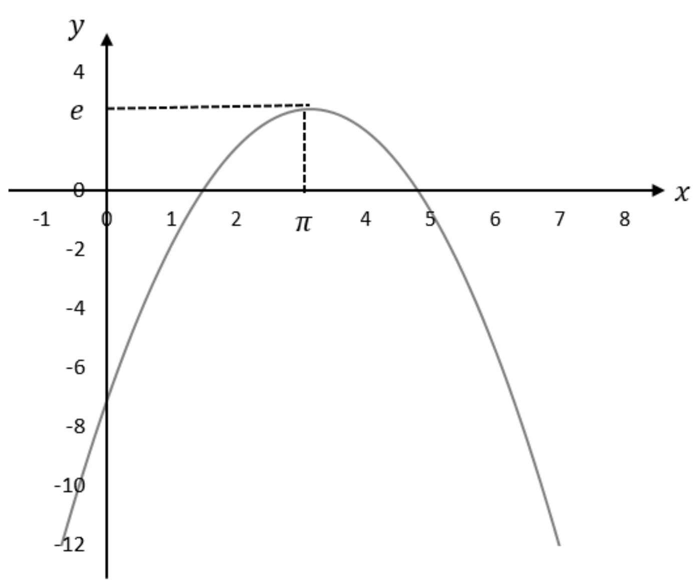
(i) $f\left(x\right)=\left(x-\pi\right)^2$



(ii) $f(x) = -(x-\pi)^2$



(ii) $f(x) = -(x-\pi)^2 + e$



Problema:

Para determinar o valor de "a" de uma grandeza foram feitas, em laboratório, n medições. Os valores encontrados foram $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Resolveu-se adotar como estimativa de "a" o valor para o qual a soma dos quadrados dos erros das medidas fosse mínimo. Que valor é esse?

Solução:

Seja

$$\Phi(a) = (a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + \ldots + (a - x_n)^2,$$

então, fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtemos:

$$\Phi(a) = na^2 - 2a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

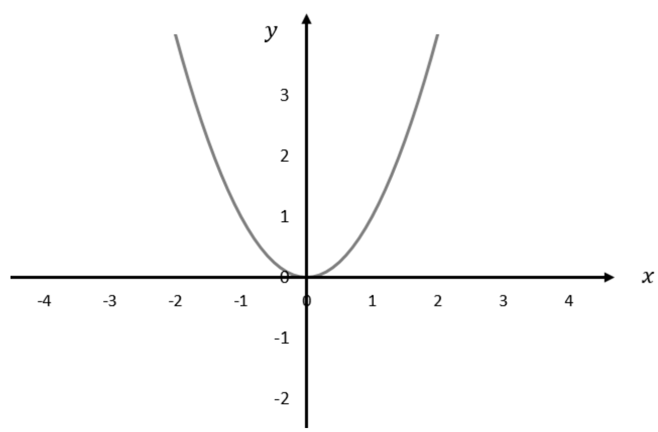
De sorte que, a abscissa do vértice produz

$$a_V = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

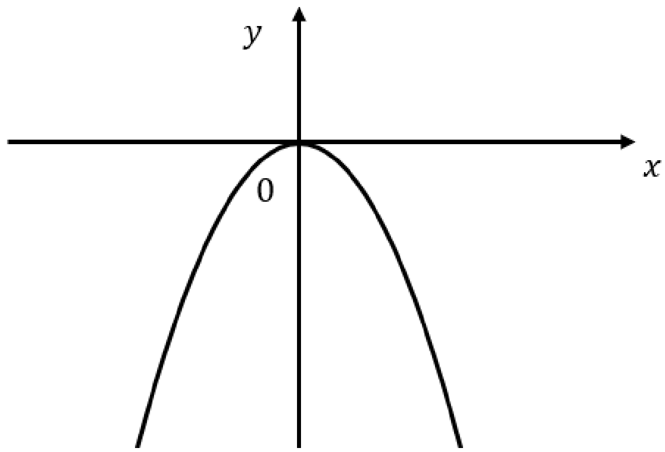
■

3 Gráficos de funções Elementares

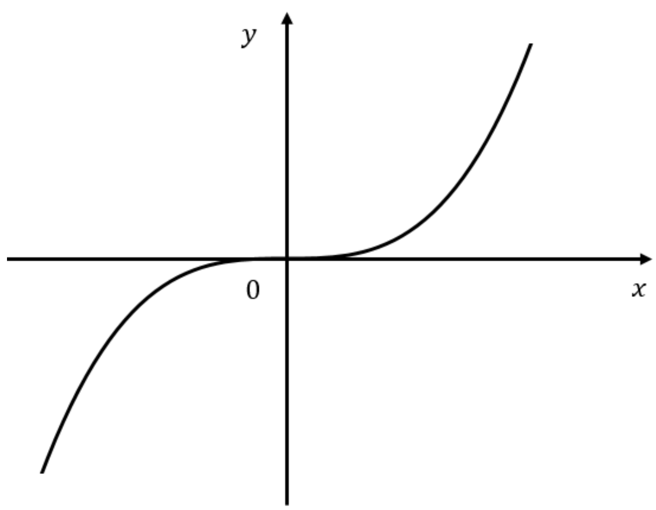
1. (i) $f(x) = x^2$



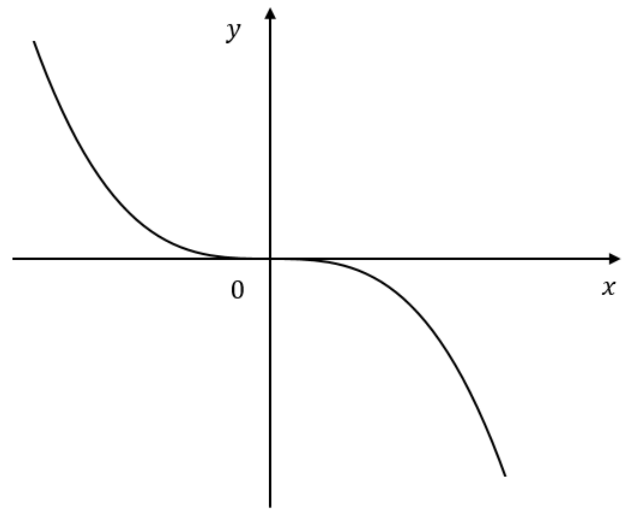
$(ii)\ f(x) = -x^2$



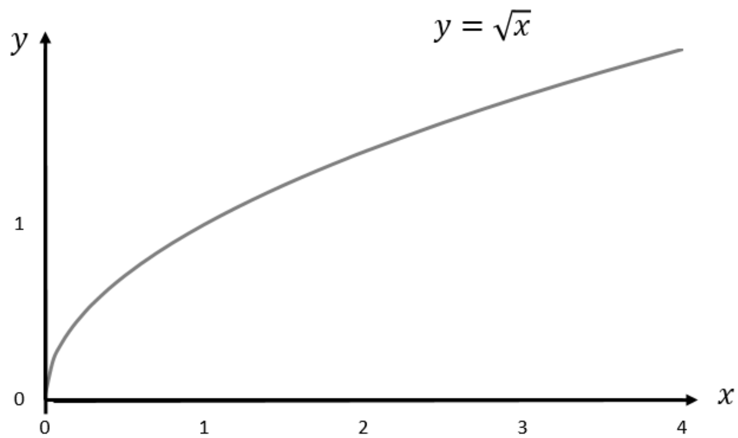
3. $(i)\ \ f(x) = x^3$



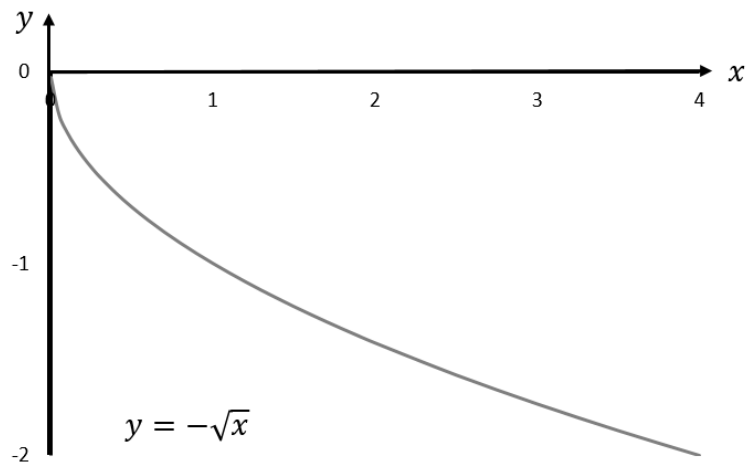
$(ii)\ f(x) = -x^3$



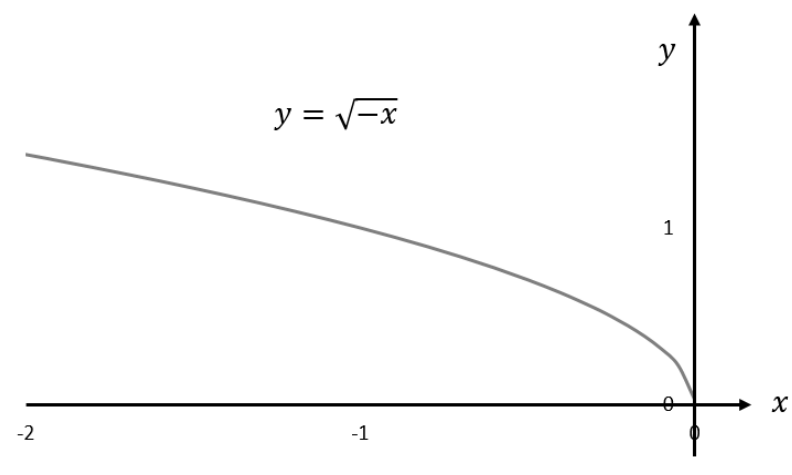
4. $(i)\ \ f(x) = \sqrt{x}$



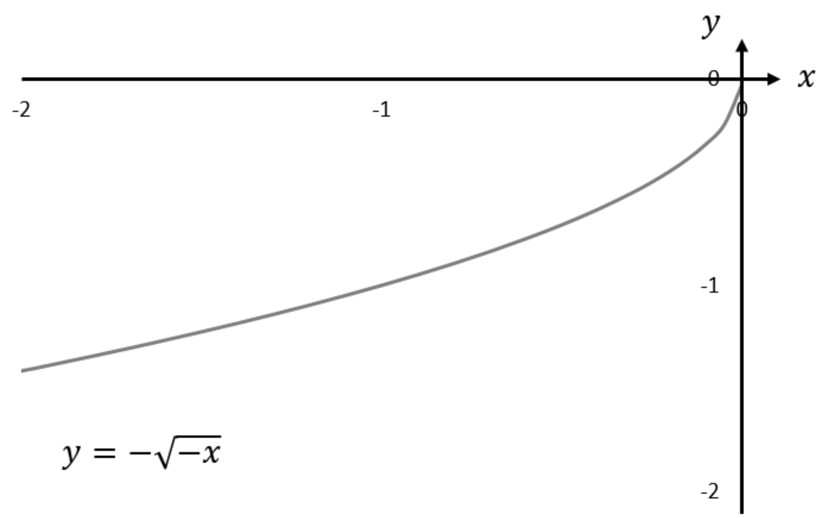
$(ii)\ f(x) = -\sqrt{x}$



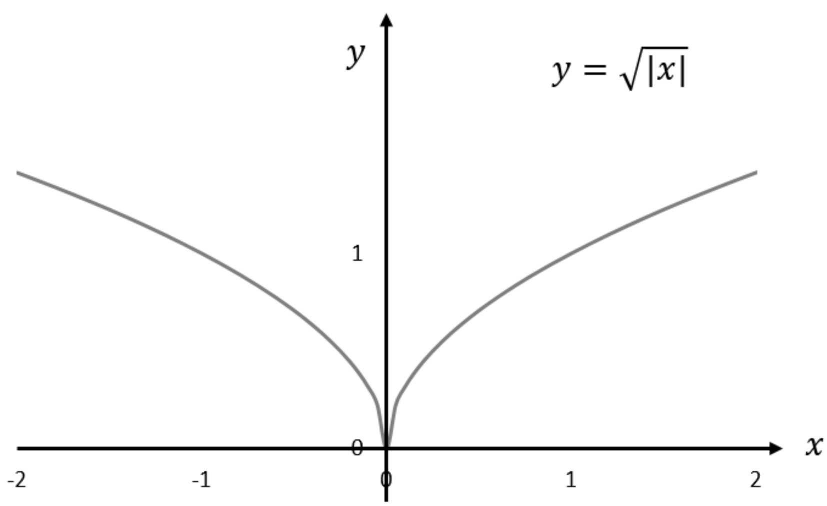
5. $(i)\ \ f(x) = \sqrt{-x}$



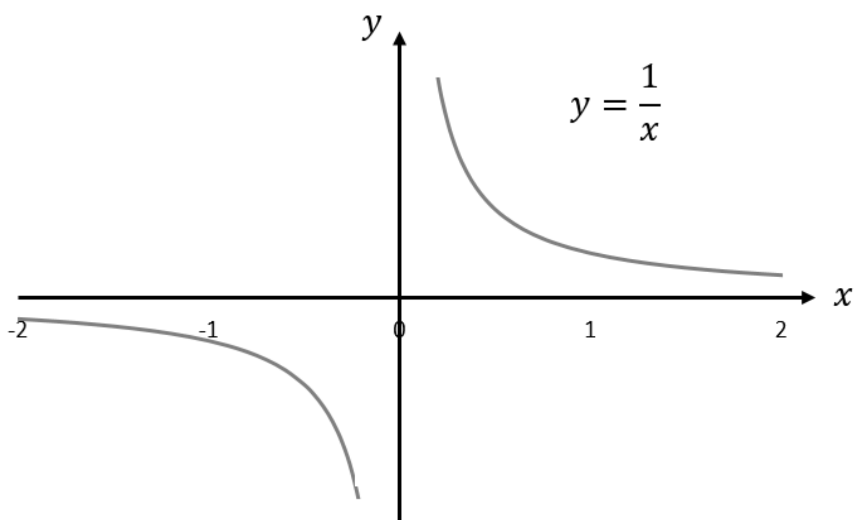
(ii) $f(x) = -\sqrt{-x}$



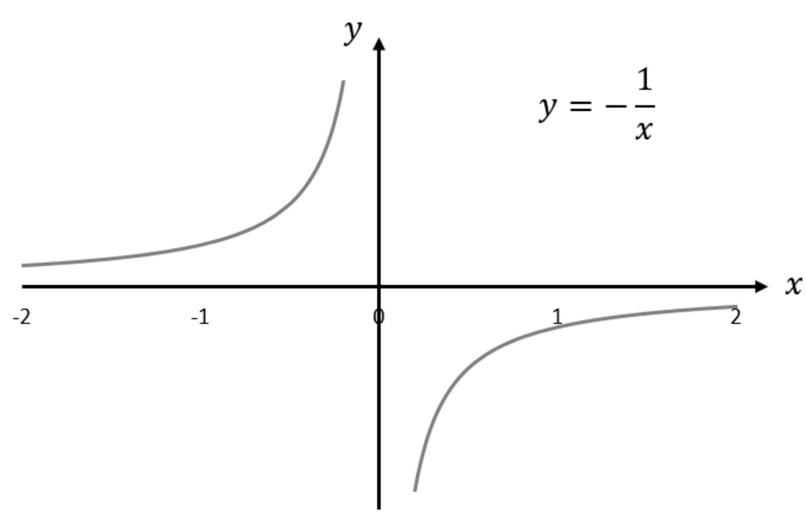
6. $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$



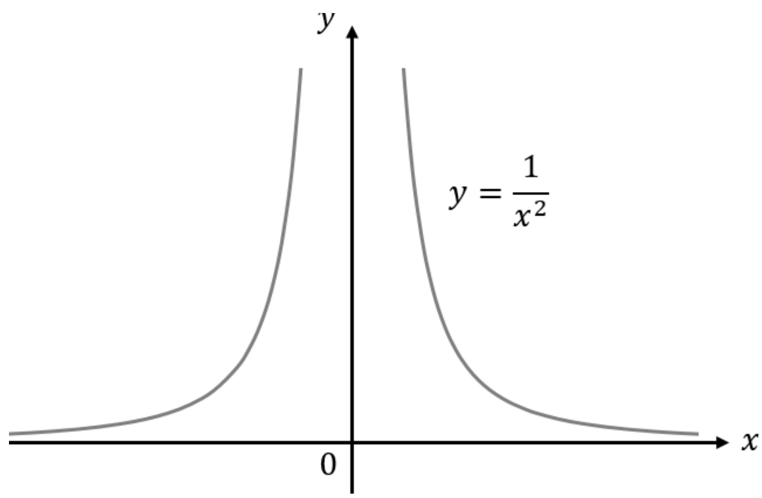
7. (i) $f(x) = \frac{1}{x}$



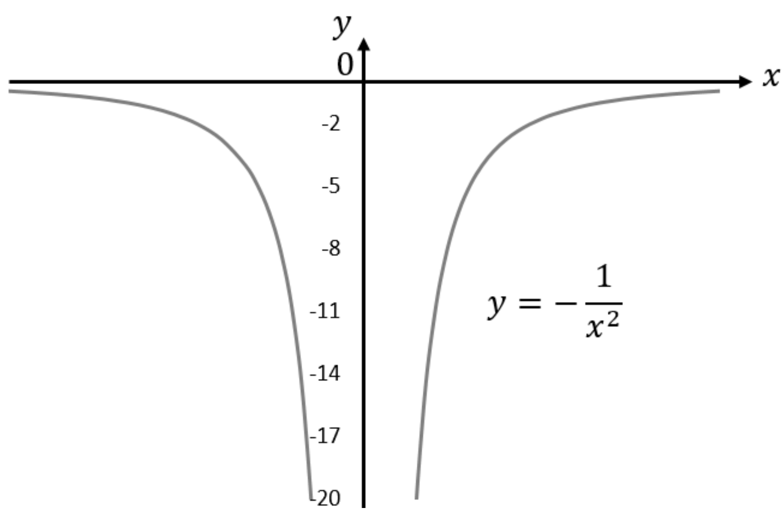
(ii) $f(x) = -\frac{1}{x}$



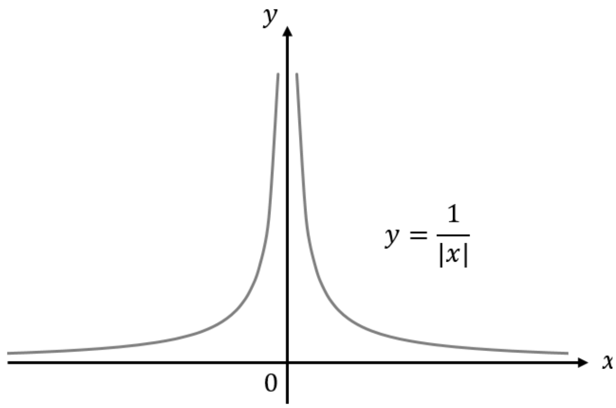
8. $(i)\ f(x) = \frac{1}{x^2}$



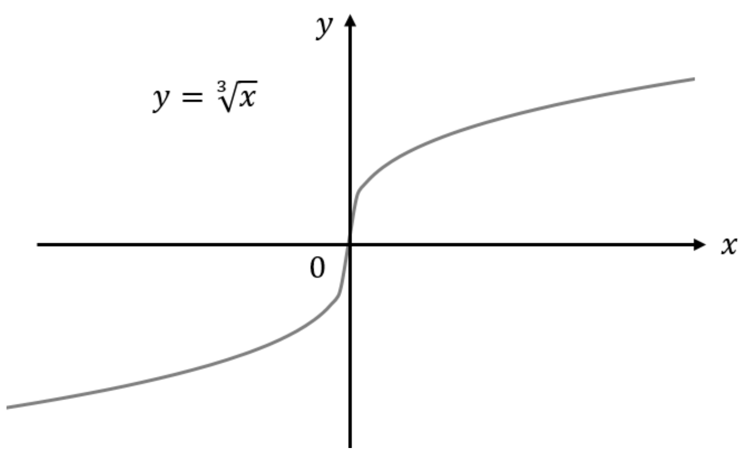
$(ii)\ f(x) = -\frac{1}{x^2}$



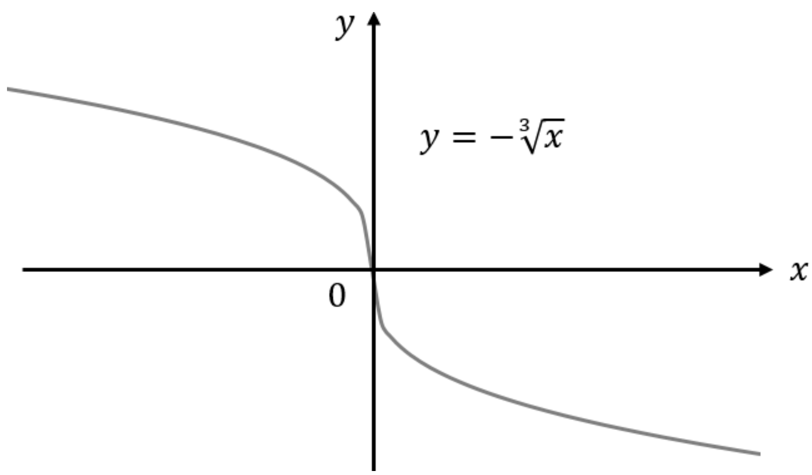
9. $f(x) = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$



10. (i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$



(ii) $f(x) = -\sqrt[3]{x}$



3.0.3 Uma pausa para comentar sobre a função exponencial de base "e"

Seja

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 2,718 = e.$$

então, fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots$, tem-se:[1]

$$\begin{aligned} a_1 &= (1+1)^2 = 2 \\ a_2 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25 \\ a_3 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \simeq 2,37 \\ &\vdots \end{aligned}$$

[1]O número "e" é uma constante matemática que é a base dos logaritmos naturais. Por vezes é chamado número de Euler (não confundir com a constante de Euler) em homenagem ao **matemático suíço Leonhard Euler**, número de Napier, em homenagem a **John Napier**, número de Neper, constante de Néper, número neperiano, número exponencial e outros. A primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de um apêndice de um trabalho sobre logaritmos de John Napier. No entanto, este não contém a constante propriamente dita, mas apenas uma simples lista de logaritmos naturais calculados a partir desta. A primeira indicação da constante foi descoberta por Jakob Bernoulli, quando tentava encontrar um valor para a seguinte expressão (muito comum no cálculo de juros compostos):

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 2,711828\ldots = e$

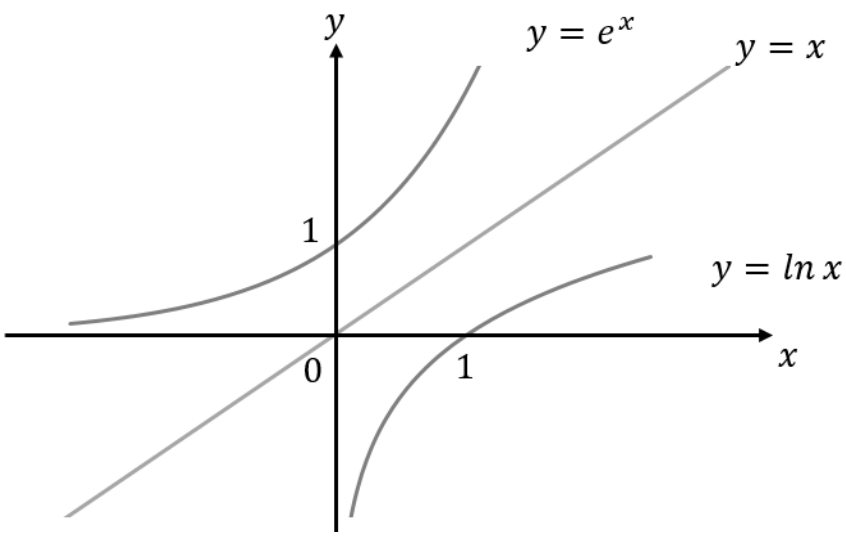
Daí, continuando com o processo, segue-se que:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow 2,718\ldots = e.$$

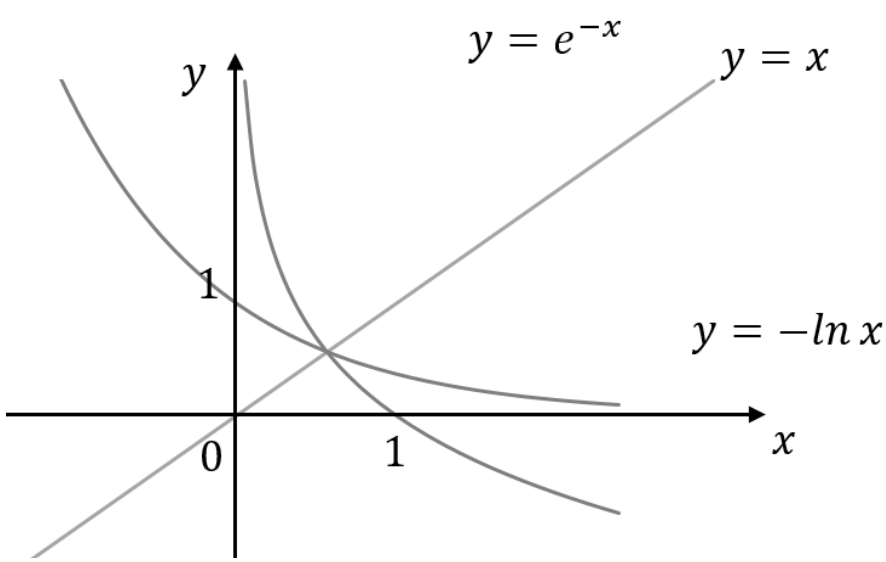
Cujo valor é aproximadamente

$$e \simeq 2,71828182845904523536028 7.$$

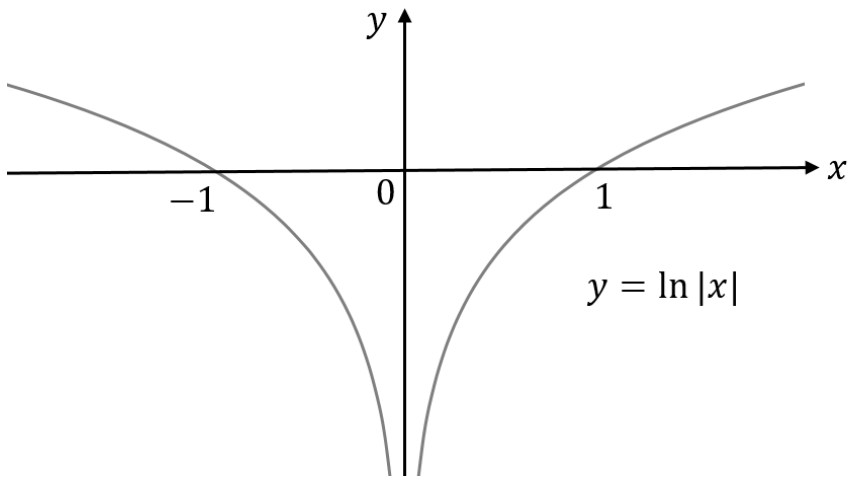
11. $(i)\ f(x) = e^x$ $(ii)\ g(x) = \ln x$



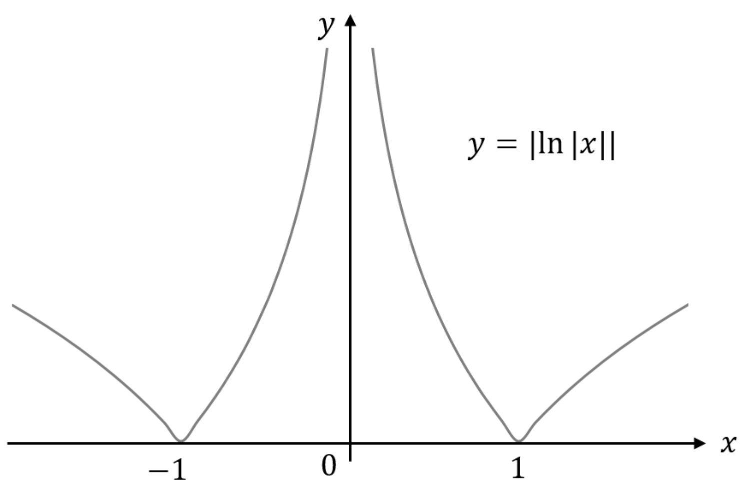
12. $(i)\ f(x) = e^{-x}$ $(ii)\ g(x) = -\ln x$



13. $(i)\ f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$

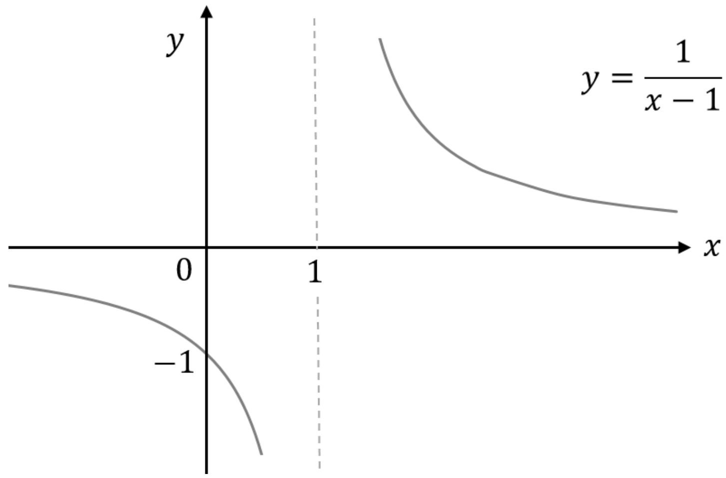


$(ii)\ f(x) = |\ln|x||$

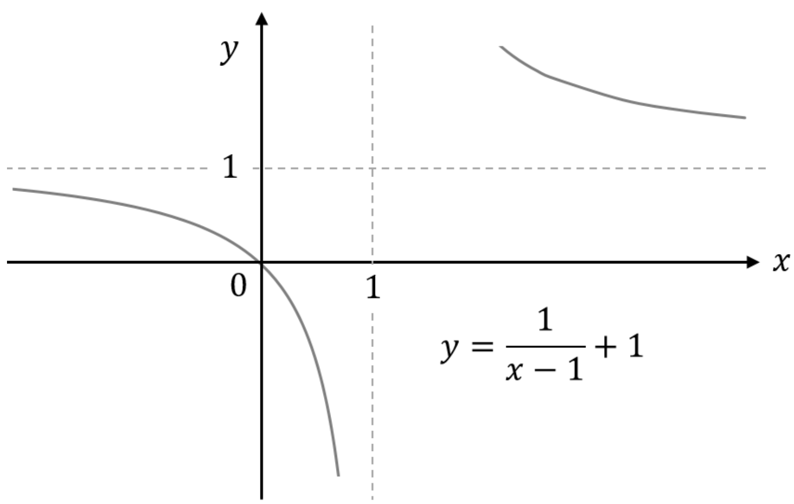


14. $f(x) = \left|\frac{1}{x-1} + 1\right|$

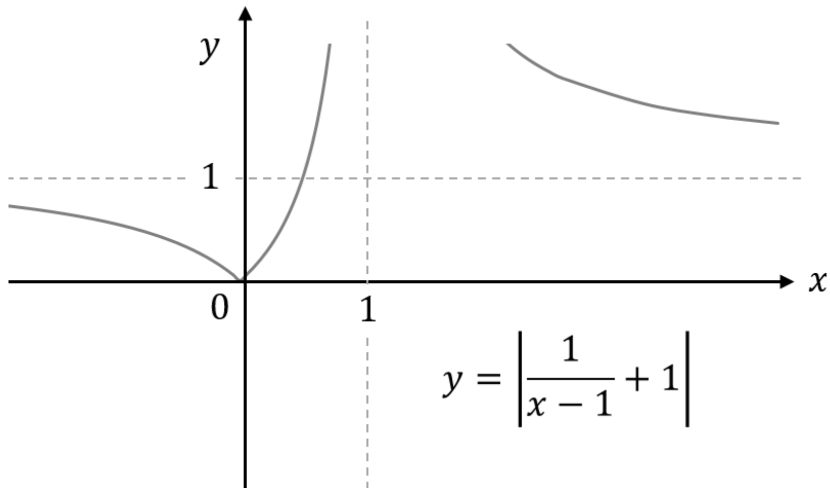
$(i)\ f(x) = \frac{1}{x-1}$



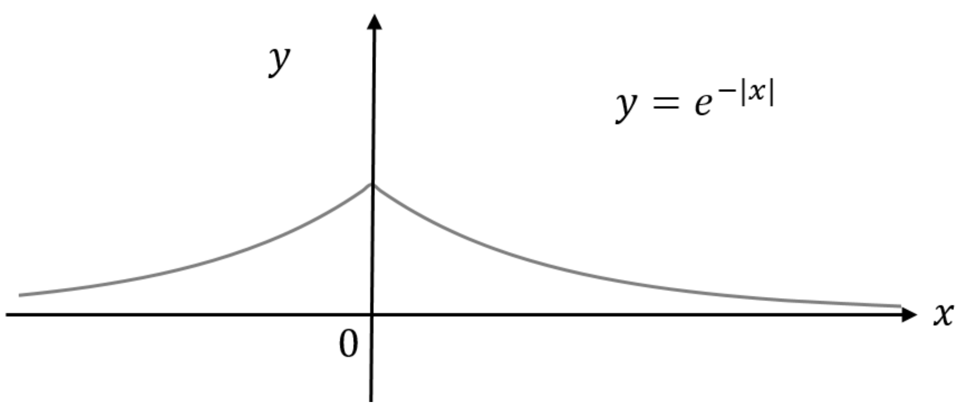
$(ii)\ f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$



(iii) $f(x) = \left| \frac{1}{x-1} + 1 \right|$

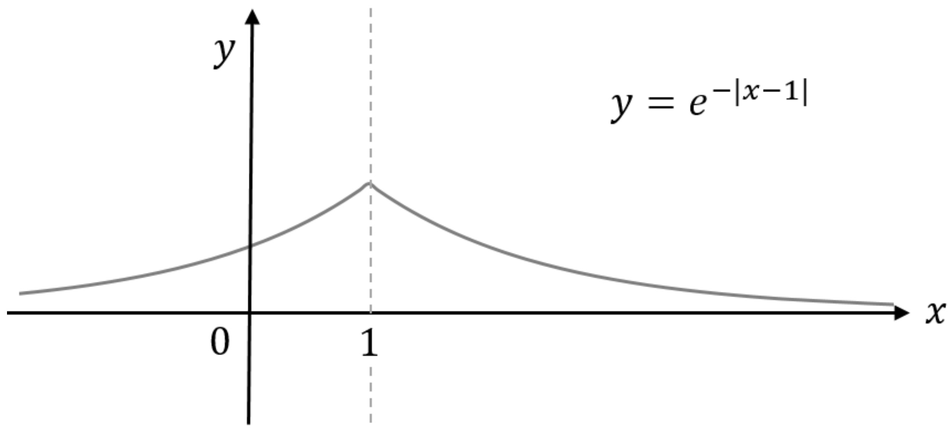


15. (i) $y_1 = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ e^{-(-x)}, & x < 0 \end{cases}$

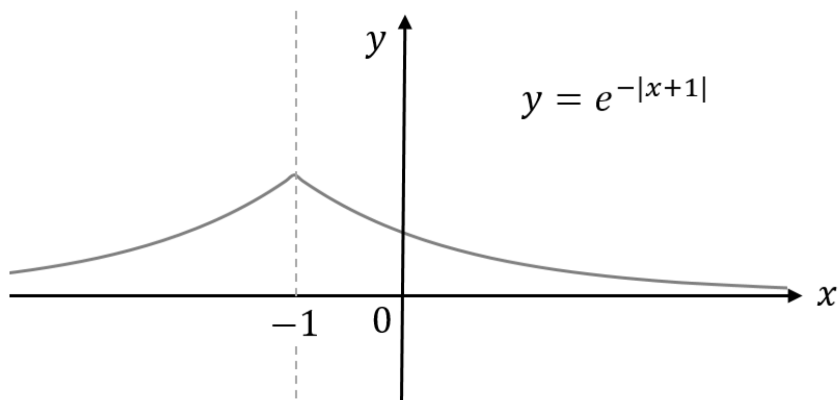


(ii) $y_2 = e^{-|x-1|}$
(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{-|x|}$ deslocando uma

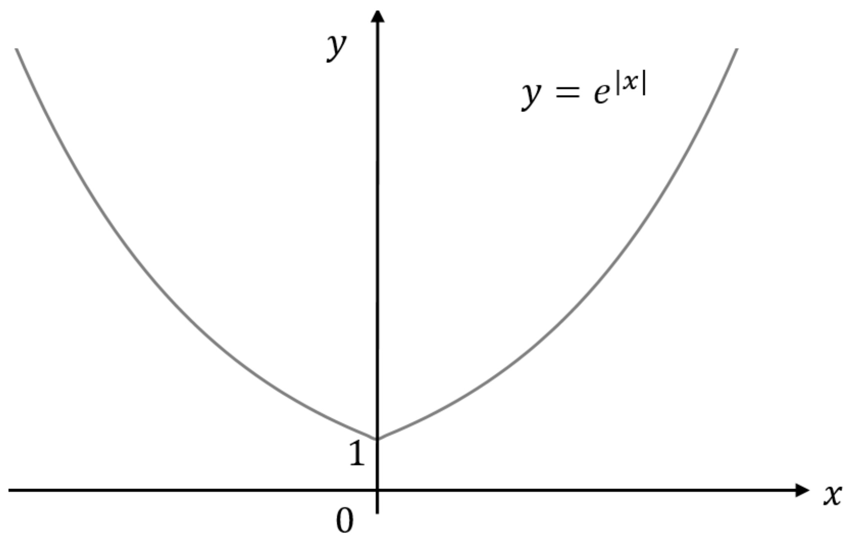
unidade à direita)



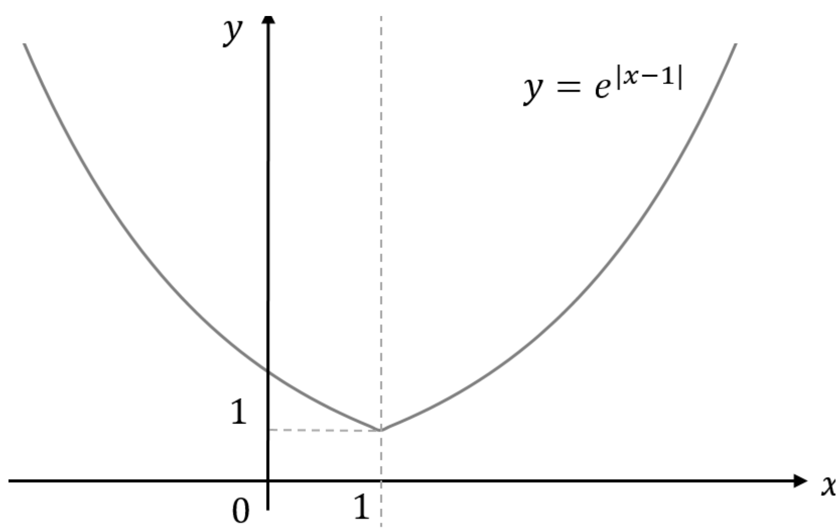
(*iii*) $y_2 = e^{-|x+1|}$
(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{-|x|}$ deslocando uma unidade à esquerda)



16. (i) $y_1 = e^{|x|}$

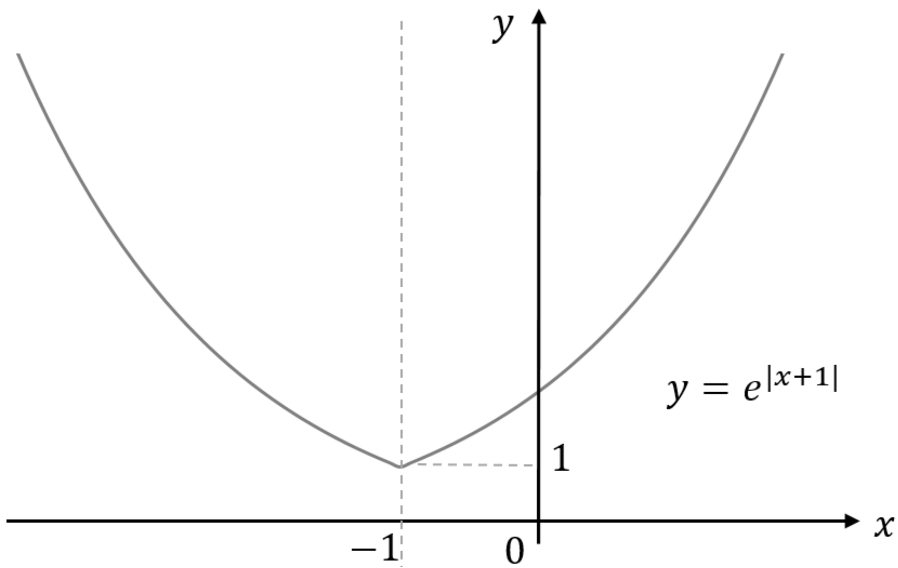


(ii) $y_2 = e^{|x-1|}$
(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{|x|}$ deslocando uma unidade à direita)

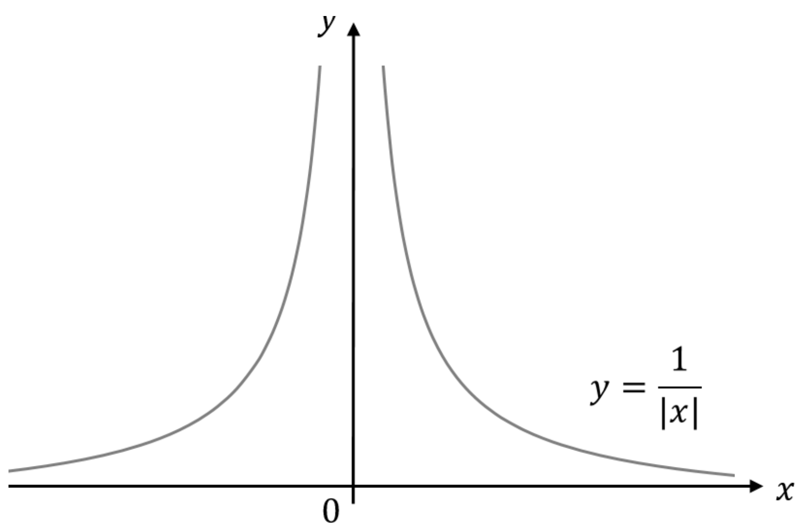


(iii) $y_2 = e^{|x+1|}$
(Observe que: este gráfico foi obtido de $y_1 = e^{|x|}$ deslocando uma

unidade à esquerda)

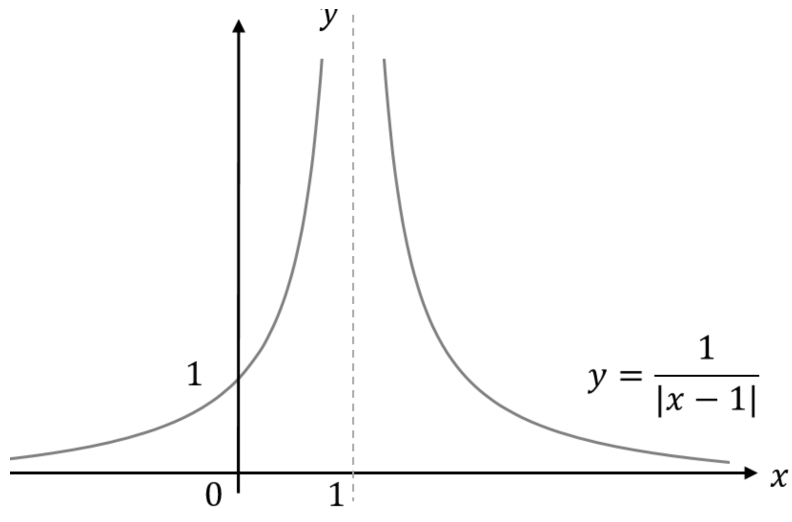


17. $y_1 = \frac{1}{|x|}$

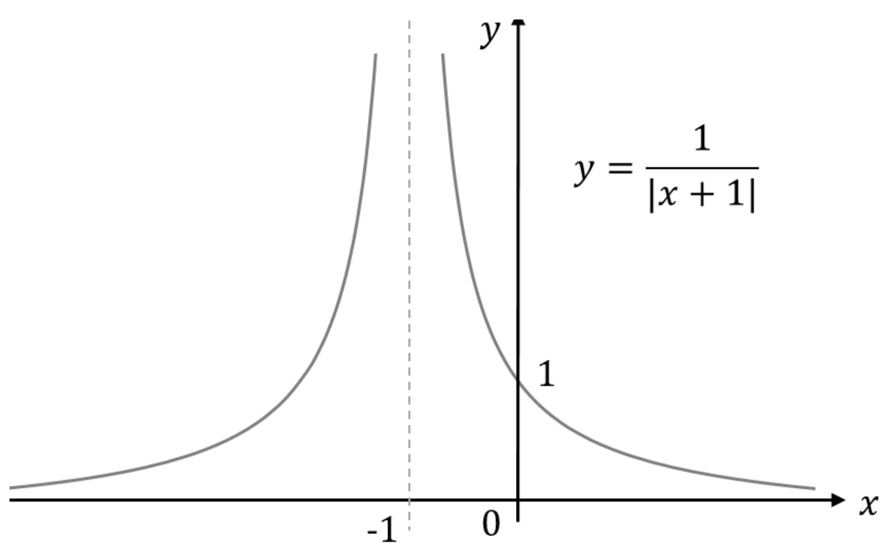


(ii) $y_2 = \frac{1}{|x-1|}$

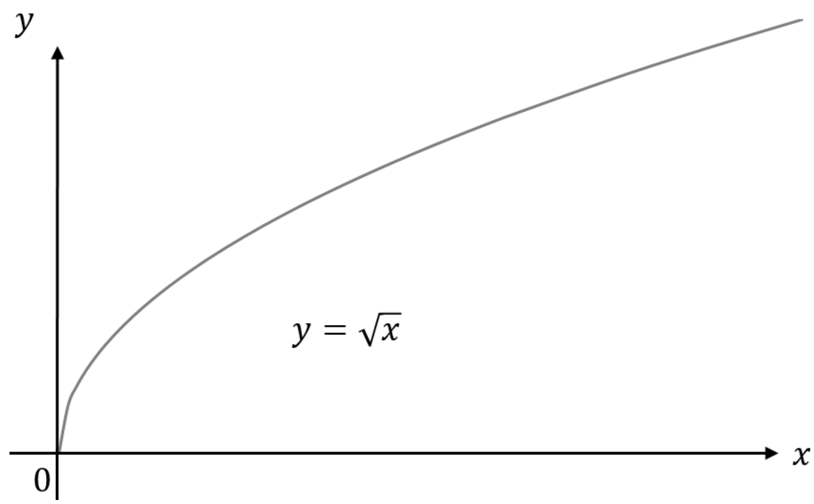
O gráfico de $y_2 = \frac{1}{|x-1|}$ é obtido de $y_1 = \frac{1}{|x|}$ deslocando 1 unidade à direita.



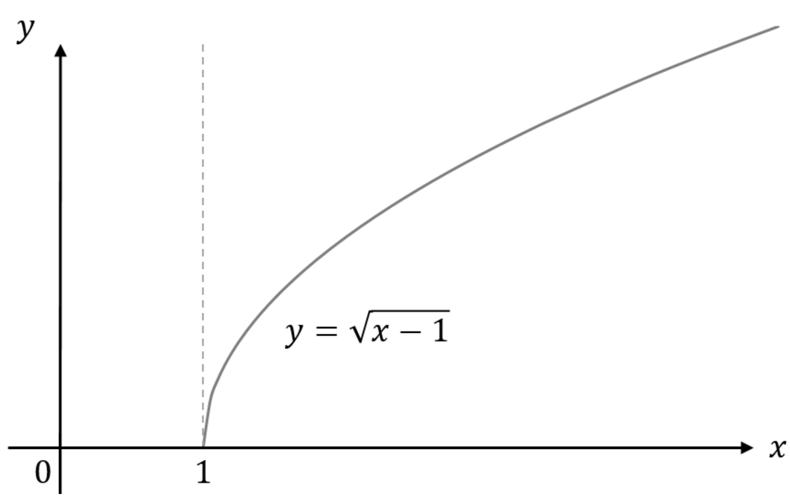
(ii) $y_3 = \frac{1}{|x+1|}$
O gráfico de $y_3 = \frac{1}{|x+1|}$ é obtido de $y_1 = \frac{1}{|x|}$ deslocando 1 uma unidade à esquerda.



18. $y = \sqrt{x}$

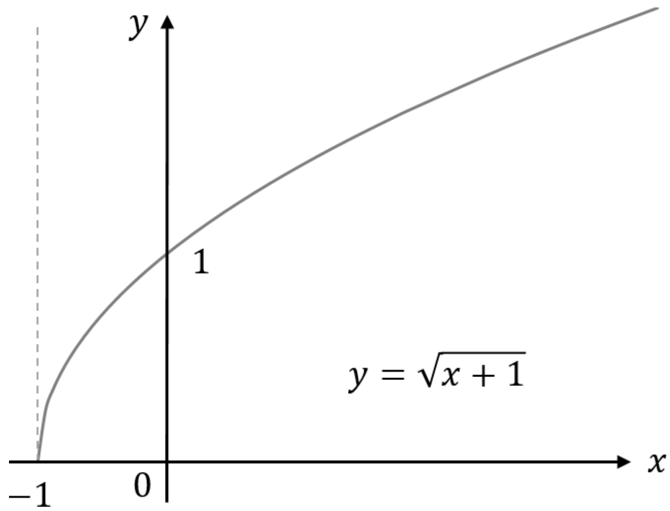


$y_1 = \sqrt{x-1}$
O gráfico de $y_1 = \sqrt{x-1}$ é obtido de $y = \sqrt{x}$ deslocando 1 unidade à direita.

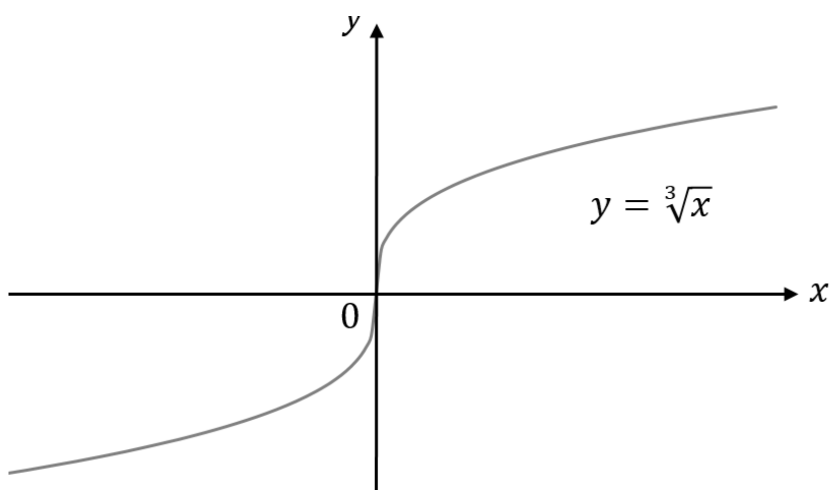


(ii) $y_2 = \sqrt{x+1}$
O gráfico de $y_2 = \sqrt{x+1}$ é obtido de $y = \sqrt{x}$ deslocando 1 unidade à

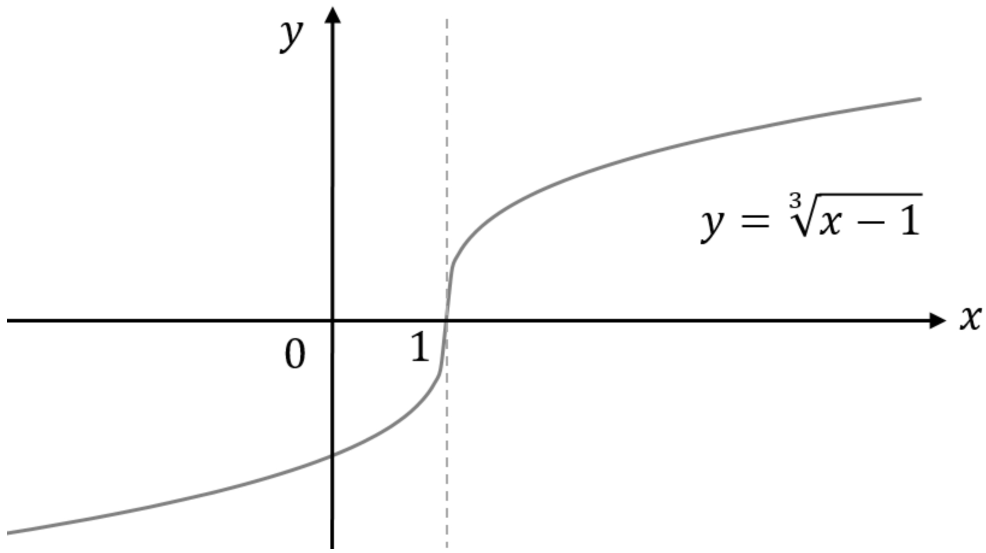
esquerda.



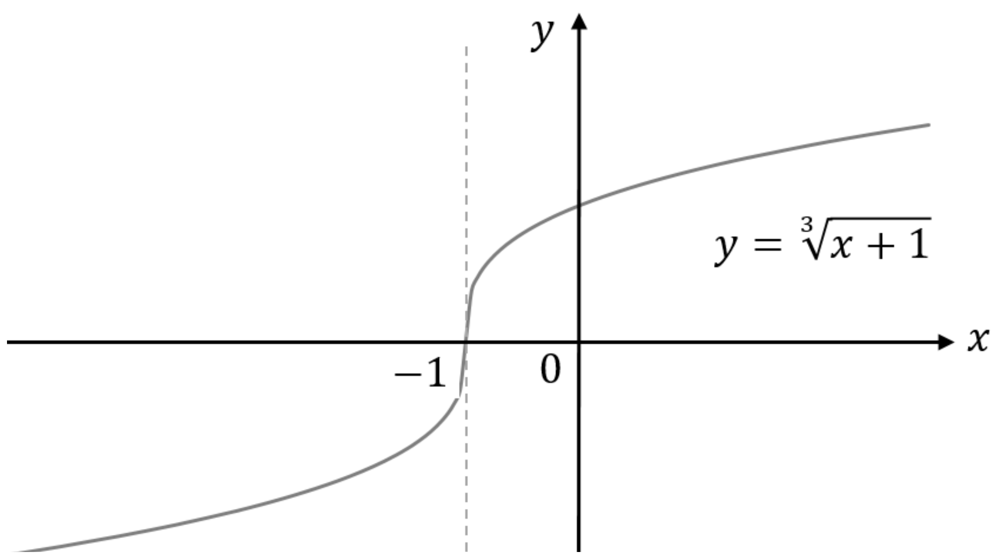
19. $y = \sqrt[3]{x}$



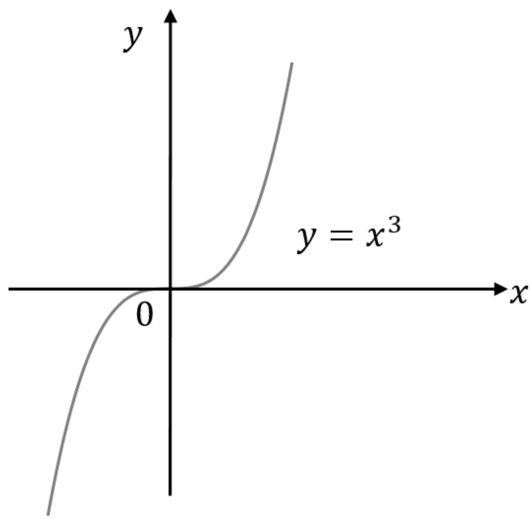
(i) $y = \sqrt[3]{x-1}$ é obtido de $y = \sqrt[3]{x}$ deslocando uma 1 unidade à direita.



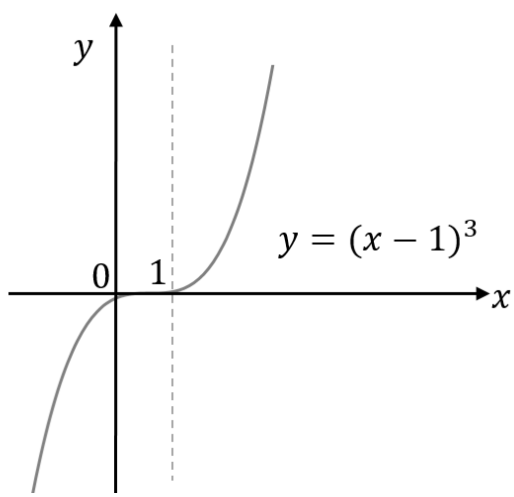
(ii) $y = \sqrt[3]{x+1}$ é obtido de $y = \sqrt[3]{x}$ deslocando uma 1 unidade à esquerda.



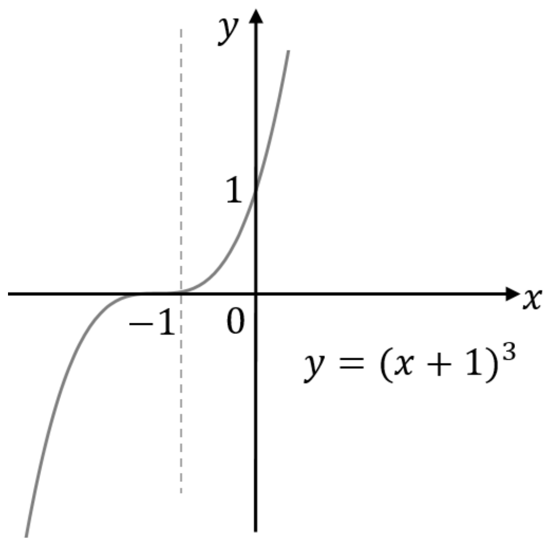
20. $y = x^3$



(i) $y_1 = (x-1)^3$ é obtido de $y = x^3$ deslocando uma 1 unidade à direita.



(ii) $y_2 = (x+1)^3$ é obtido de $y = x^3$ deslocando uma 1 unidade à esquerda.



CAPÍTULO 4

Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real.

Nikolai Lobachevsky (1792 – 1856)

A Matemática é o único material de instrução que pode ser apresentado de uma forma totalmente não dogmática.

Max Wilhelm Dehn (1878 – 1952)

Neste Capítulo, vamos abordar funções do tipo: pares e ímpares, injetoras, sobrejetoras e bijetora, composições de funções, definindo a função inversa através da composição de funções, ressaltando que: a inversa será definida usando a composição, tendo a composta da função com sua inversa o resultado a função identidade. Além disso, deduzindo que se a função é invertível, por conseguinte: a mesma será injetora e sobrejetora, óbvio que a recíproca ou contra-positiva é trivial (funções bijetoras são invertíveis). Para concluir o Capítulo, voltamos ao tema de funções exponenciais e logaritmicas (destacando a exponencial de base "e" por se tratar de uma função exponencial, onde tem diversos fenômenos naturais que as utiliza como modelagem matemática: crescimento populacional, infecções por vírus, meia-vida de elementos radioativos ou decaimento radioativos, com função logarítmica modela situações de abalos sísmicos, veremos também como consequências da injetividade, crescimento e decrescimento das funções exponenciais e logarítmicas, as equações e inequações exponenciais e logarítmicas.

1 Funções Pares e Ímpares

Definições:

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

(i) f é par, se: $f(x) = f(-x), \forall x \in X = D(f)$

(ii) f é ímpar, se: $f(x) = -f(-x), \forall x \in X = D(f)$.

Exemplos:

Verifique quais das funções são pares ou ímpares:

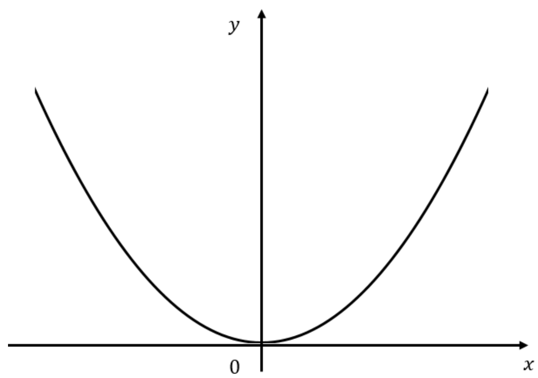
1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2$

Basta observar que:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico $f\left(x\right)=x^{2}$

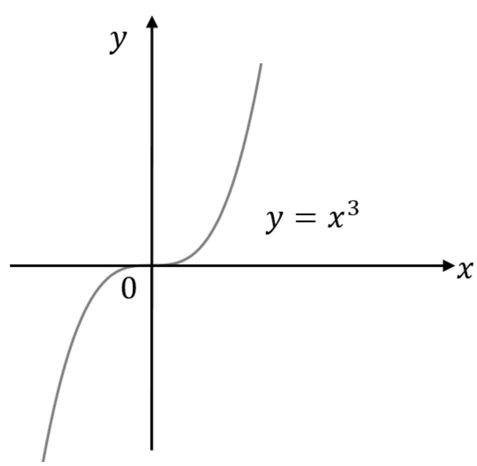


2. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por: $f\left(x\right)=x^{3}$

com efeito,

$$f\left(-x\right)=\left(-x\right)^{3}=-x^{3}=-f\left(x\right),\forall x\in D\left(f\right)=\mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.
Esboço do gráfico $f\left(x\right)=x^{3}$

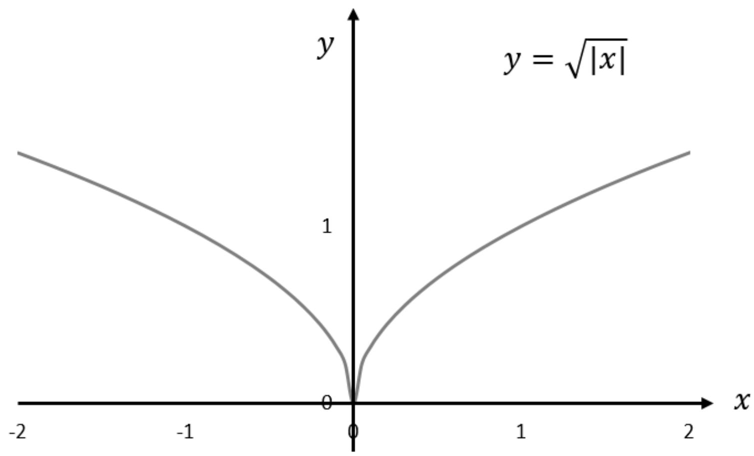


3. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por: $f\left(x\right)=\sqrt{|x|}$
Basta notar:

$$f\left(-x\right)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f\left(x\right),\forall x\in D\left(f\right)=\mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico $f(x) = \sqrt{|x|}$

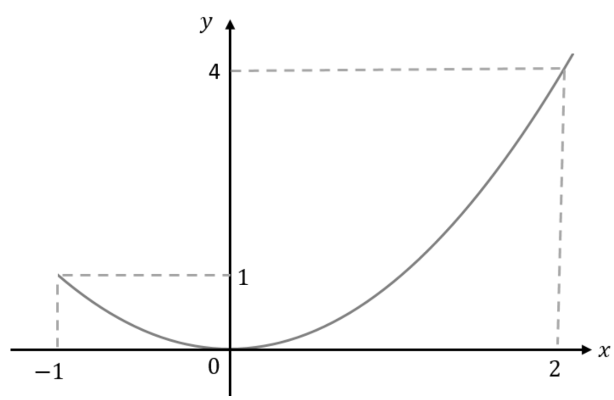


4. $f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2$.

Cuidado!

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

não vale $\forall x \in D(f) = [-1, 2]$, por exemplo, $f(2) = 2^2$ e $f(-2)$ não está definida no intervalo. Logo, f não é uma função par nem ímpar. **Assim, devemos ter o cuidado com a função e se vale a simetria para todo valor do domínio da função.**
Esboço do gráfico de $f(x) = x^2, \forall x \in [-1, 2]$



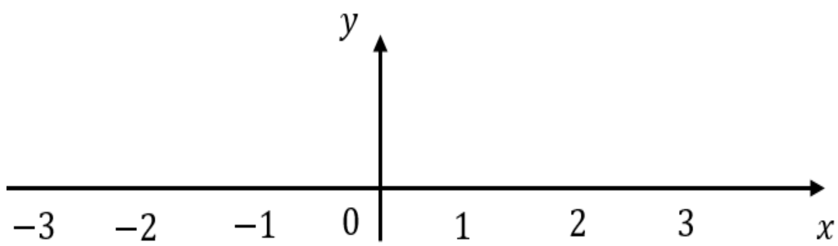
Atenção:

A única função par e ímpar ao mesmo tempo é a função

identicamente nula

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 0=f(x)\,,\ f \text{ é uma função par} \\ f(-x) &= 0=-f(x)\,,\ f \text{ é uma função ímpar.} \end{aligned}$$

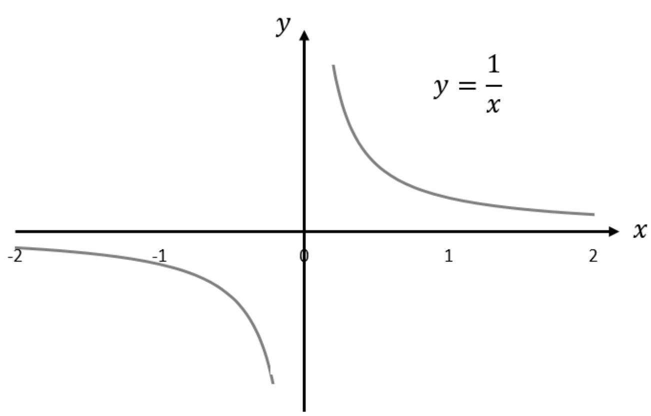


5. $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\frac{1}{x}$

com efeito,

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-f(x)\,,\forall x\in D(f)=\mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Logo, f é uma função ímpar.
Esboço do gráfico de $f(x)=\frac{1}{x}$

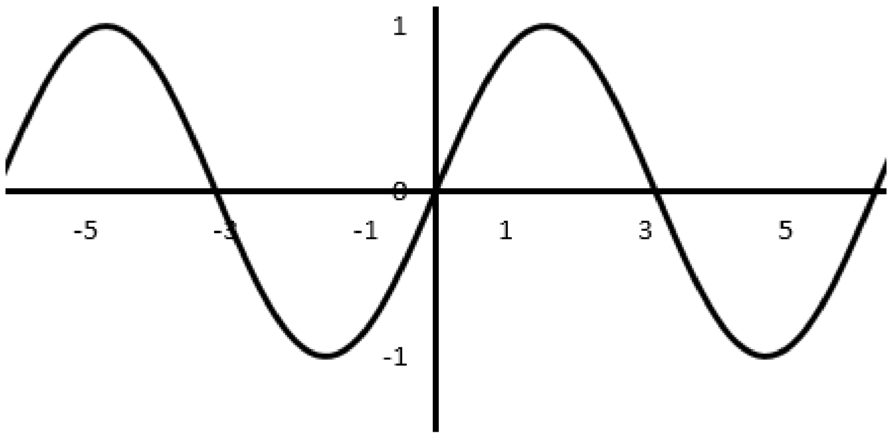


6. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\sin x$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \sin x$



Destacando:

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$.
Imagem de $f : \mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$
Período de $f : p(f) = 2\pi$

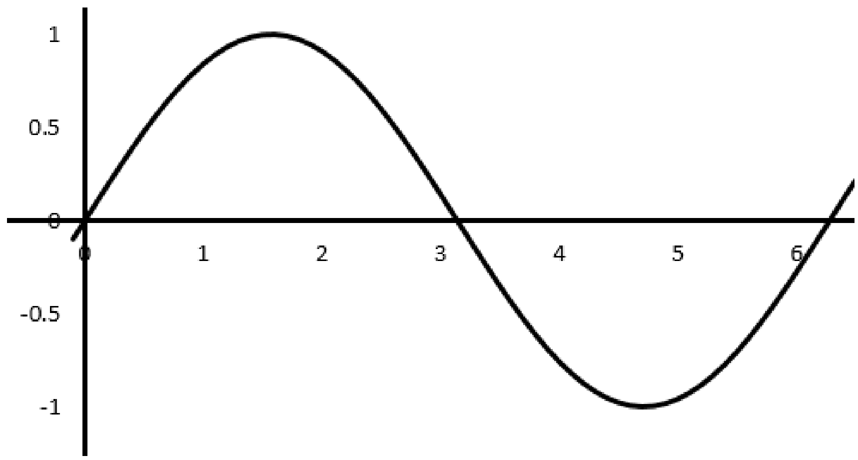
7. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \cos x$

Basta observar que:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico de $f(x) = \cos x$



Destacando:

Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$.
Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$
Período de $f : p(f) = 2\pi$

8. A função **tangente** $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

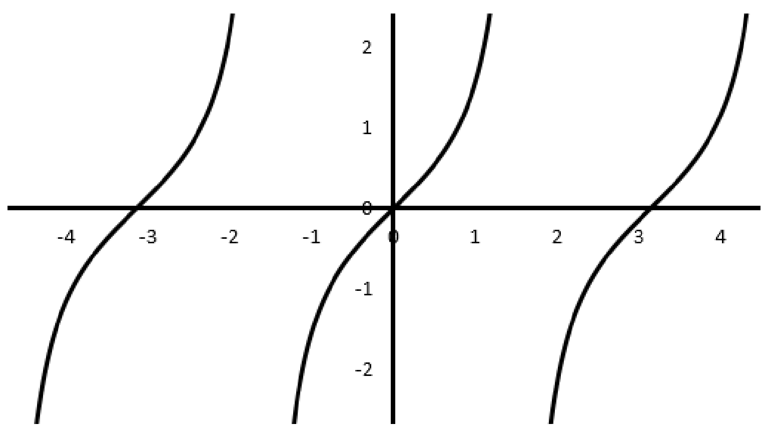
$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x) = -f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{tg} x$.



Destacando:

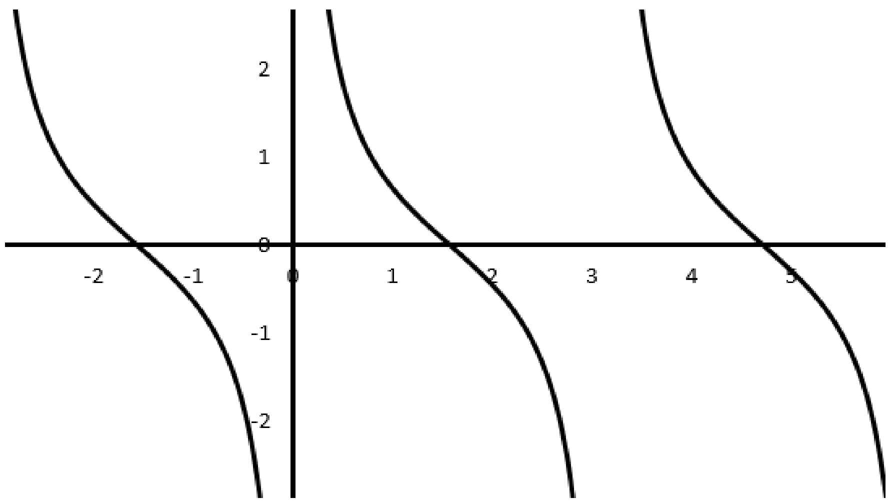
(i) Domínio de $f: D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f: \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ e
(iii) período de $f: p(f) = \pi$.

9. A função **cotangente** $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{cotg} x.$$

Basta observar que: $f(-x) = \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg}(x) = -f(x)$, $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}$. Logo, f é uma função ímpar.

Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{cotg} x$.



Destacando

(i) Domínio de $f: D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de $f: \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$ e
(iii) período de $f: p(f) = \pi$.

10. A função **secante** $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

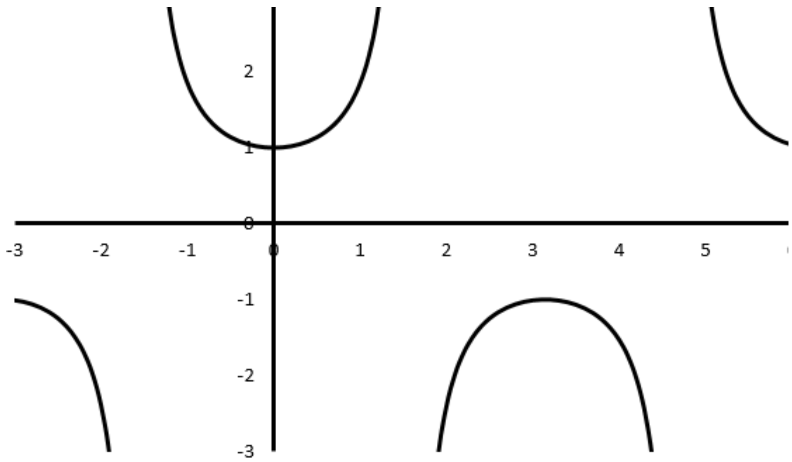
$$f(x) = \sec x.$$

Basta observar que:

$$f(-x) = \sec(-x) = \sec(x) = f(x), \forall x \in D(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função par.

Esboço do gráfico de $f\,(x) = \sec x$.



Destacando

(i) Domínio de $f : D\,(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f : \mathrm{Im}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } \ y \geq 1\}$ e
(iii) período de $f : p\,(f) = 2\pi$.

11. A função **cossecante** $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

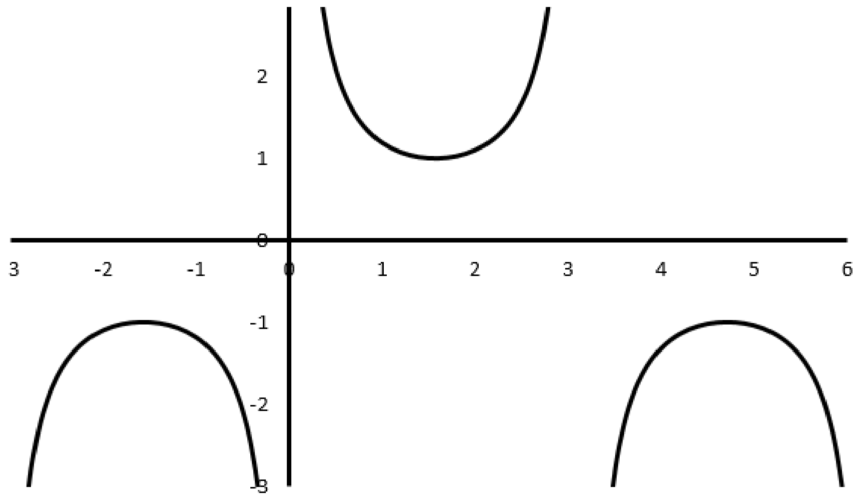
$$f\,(x) = \operatorname{cossec} x.$$

Basta observar que:

$$f\,(-x) = \operatorname{cossec}\,(-x) = -\operatorname{cossec}\,(x) = -f\,(x)\,, \forall x \in D\,(f) = \mathbb{R}.$$

Logo, f é uma função ímpar.

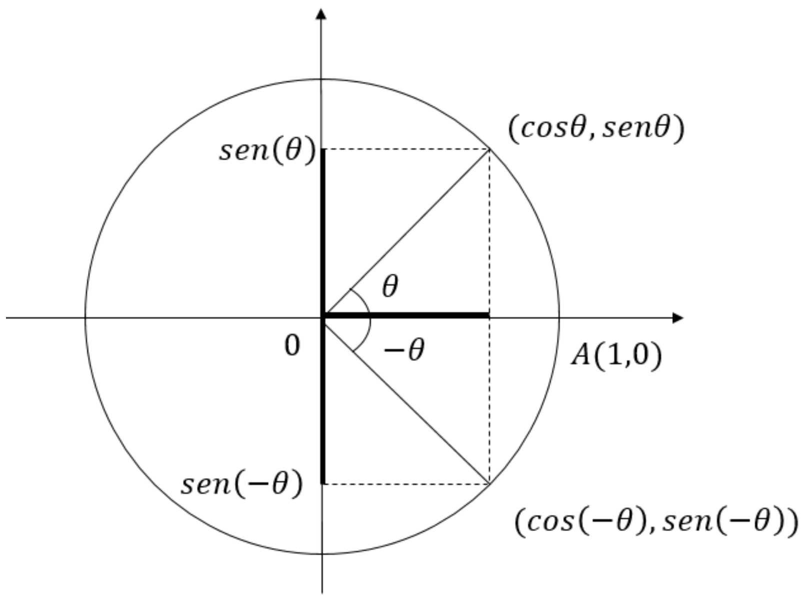
Esboço do gráfico de $f(x) = \operatorname{cossec} x$.



Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de $f : \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } \; y \geq 1\}$ e
(iii) período de $f : p(f) = 2\pi$.

1.1 Funções trigonométricas pares e ímpares:



$$(i)\ \ \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad (ii)\ \ \sin(-\theta) = -\sin\theta.$$

Consequências:

$$\begin{array}{llll} (i) & \sec(-\theta) = \sec\theta & (ii) & \operatorname{cossec}(-\theta) = -\operatorname{cossec}\theta \\ (iii) & \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta & (iv) & \operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg}\theta. \end{array}$$

2 Composições de Funções

Definição:

Sejam

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & \mathbb{R} \end{array}$$

Onde:

(i) $\operatorname{Im}(g)$: Imagem da função g

(ii) $\operatorname{Im}(g) \subseteq B$: A imagem da função g está contida ou é igual ao domínio da função f.

(iii) $f = g \Longrightarrow f^2 = f \circ f,\ f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f$ e $f^0 = \mathbb{I}$ (função Identidade).

Observação:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ vezes}}, \quad f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f \quad \text{e} \quad f^0 = \mathbb{I}.$$

Exemplos:

1. Considere as funções f e g, definidas por: $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
Pede-se, caso existam:
(i) $D(f \circ g)$ e $f \circ g$ $\qquad$ (ii) $D(g \circ f)$ e $g \circ f$

Solução:

É fundamental obter primeiro os domínios das funções, alguns textos do Ensino Médio, induz que se pode fazer o contrário, ou seja, determinar a composta, para só em seguida, obter o domínio. Estes exemplos esclarecem que, se fizermos o contrário, daria errado. Vejamos

$$\begin{aligned} D(f \circ g) &= \{x \in \mathbb{R};\ x \in D(g) \wedge \operatorname{Im}(g) \in D(f)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R};\ (x \geq 0) \wedge \left(\sqrt{x}\right) \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Agora,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

Note que: se por um momento de fraqueza, fizessemos $f \circ g$ antes de obter o $D(f \circ g)$ existiria

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f\left(\sqrt{-1}\right) = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

Absurdo! visto que $\sqrt{-1} \notin D(g)$.
Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R};\ x \in D(f) \wedge \operatorname{Im}(f) \in D(g)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R};\ (x \in \mathbb{R}) \wedge x^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Consequentemente, em geral se tem: $f \circ g \neq g \circ f$, ou ainda, composições de funções não é comutativa.

Guarde bem e nunca esqueça!

Obter a composta de duas funções $f \circ g$ e $g \circ f$, antes é necessário, obter o domínio de existência, caso sejam possíveis.

$\blacksquare$

2. Considere as funções f e g, definidas por: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$.
Pede-se, caso existam:
(i) $D(f \circ g)$ e $f \circ g$ (ii) $D(g \circ f)$ e $g \circ f$

Solução:

(i) $D(f \circ g)$ e $f \circ g$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \in D(g) \text{ e } g(x) \in D(f)\}.$$

Vejamos

$$x - 3 > 0 \Longrightarrow x > 3 \Longrightarrow D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$$

e

$$x^2 - 1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq \pm 1 \Longrightarrow D(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}.$$

Assim,

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \in x \neq \pm 1 \text{ e } g(x) > 3\}.$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} &> 3 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2-1} - 3 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1 - 3x^2 + 3}{x^2 - 1} > 0 \Longleftrightarrow \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1} > 0 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \text{ e } \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1} > 0\right\}.$$

Cuidado!

$$2 > \sqrt{3} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2 > \sqrt{3} \Longleftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 \\ \text{e} \\ -2 < -\sqrt{3} \Longleftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{3}} < -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1}$$

Portanto,

$$D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \text{ e } \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 1} > 0\right\}.$$

Dito de outro modo, temos:

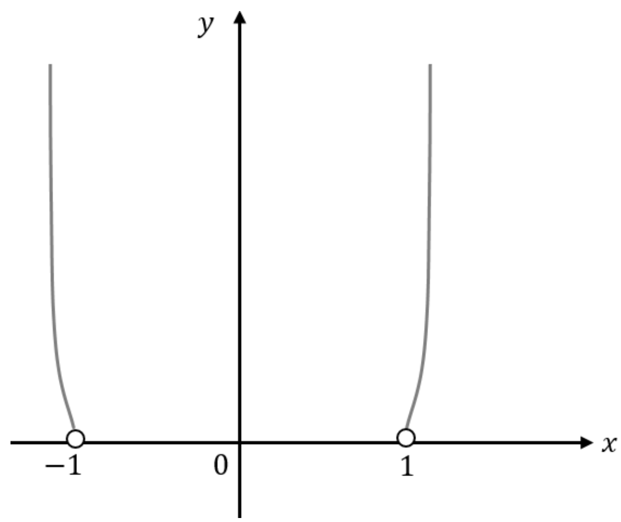
$$D(f\circ g)=\left\{x\in\mathbb{R}:(x\neq\pm1)\ \text{ e }\ \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}<x<-1 \text{ ou } 1<x<\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Portanto,

$$D(f\circ g)=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{-2}{\sqrt{3}}<x<-1 \text{ ou } 1<x<\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Agora, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ e $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2-1}-3}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4-3x^2}{x^2-1}}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{4-3x^2}{x^2-1}}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{4-3x^2}}.$$



(ii) $D(g\circ f)$ e $g\circ f$: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ e $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

$$D(g\circ f)=\{x\in\mathbb{R}:x\in D(f)\ \text{ e } f(x)\in D(g)\}.$$

$$\begin{aligned} D(g\circ f) &= \{x\in\mathbb{R}:x>3 \text{ e } f(x)\neq\pm1\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}:x>3 \text{ e } \frac{1}{\sqrt{x-3}}\neq\pm1\right\} \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x-3}} &\neq \pm 1 \Longleftrightarrow \sqrt{x-3} \neq 1 \text{ ou } \sqrt{x-3} \neq -1 \\
\left(\sqrt{x-3}\right)^2 &\neq 1^2 \text{ ou } \sqrt{x-3} \neq -1, \forall x \in \mathbb{R},\, x > 3 \\
|x-3| &\neq 1 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R},\, x > 3 \\
x-3 &\neq 1 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R},\, x > 3 \\
x &\neq 4 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R},\, x > 3
\end{aligned}
$$

Daí, vem:

$$D\,(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ e } \ (x \neq 4 \text{ ou } \forall x \in \mathbb{R},\, x > 3)\}\,.$$

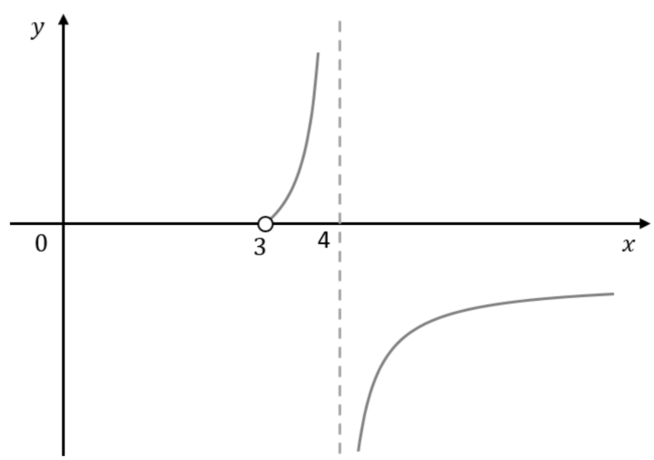
De sorte que:

$$D\,(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 3 \text{ e } x \neq 4\ \}\,.$$

$$
\begin{aligned}
g\,(f\,(x)) &= \frac{1}{[f\,(x)]^2 - 1} = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{x-3}}\right]^2 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{|x-3|} - 1} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{x-3} - 1} = \frac{1}{\frac{4-x}{x-3}} = \frac{x-3}{4-x}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$g\,(f\,(x)) = \frac{x-3}{4-x}.$$



Uma pausa para alguns comentários:

Se imaginassemos que poderia achar a composição

$$g\left(f\left(x\right)\right)=\frac{x-3}{4-x}.$$

para em seguida; obter o domínio $D\left(g\circ f\right)$, cometeríamos o erro de achar que o domínio da composta seria

$$D\left(g\circ f\right)=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq 4\right\}.$$

Para ilustrar o erro existente, vejamos:
Quem seria $\left(g\circ f\right)\left(-2\right)=?$

$$f\left(-2\right)=\frac{1}{\sqrt{-2-3}}=\frac{1}{\sqrt{-5}}\notin\mathbb{R},$$

e, portanto, $\nexists\left(g\circ f\right)\left(-2\right)$
$\nexists$ =não existe

3 Tipos Especiais de Funções: Injetora, Sobrejetora e Bijetora

4

Definições:

Seja X um subconjunto dos reais não-vazio e seja
$f:X\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função.

(i) Dizemos que: f é **injetora**, quando:

$$\forall x_1,x_2\in X:f(x_1)=f\left(x_2\right)\Longrightarrow x_1=x_2.$$

Ou usando a **equivalência tautológica (** $p\Longrightarrow q\Longleftrightarrow\sim q\Longrightarrow\sim p$), temos:

$$\forall x_1,x_2\in X:x_1\neq x_2\Longrightarrow f(x_1)\neq f\left(x_2\right).$$

(ii) Dizemos que f é **sobrejetora**, quando:
quando:

$$\forall y\in CD\left(f\right):\exists x\in D\left(f\right):y=f\left(x\right).$$

(Dito de outro modo: f é sobrejetora se não sobra elementos no contra-domínio de f)

(iii) Dizemos que f é **bijetora** se, e somente se, f é **injetora e sobrejeto-**

ra

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = 2x + 1.$$

Afirmação 1: f é injetora.

De fato, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Longrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmação 2: f é sobrejetora.

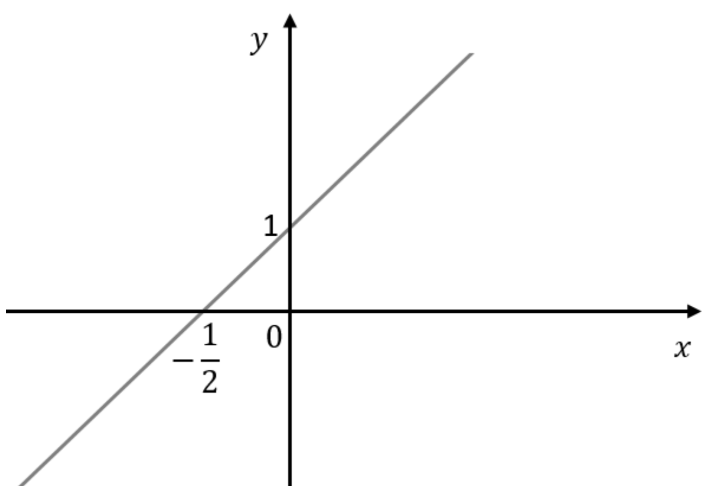
Note que:

$$y = 2x + 1 \Longrightarrow 2x = y - 1 \Longrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

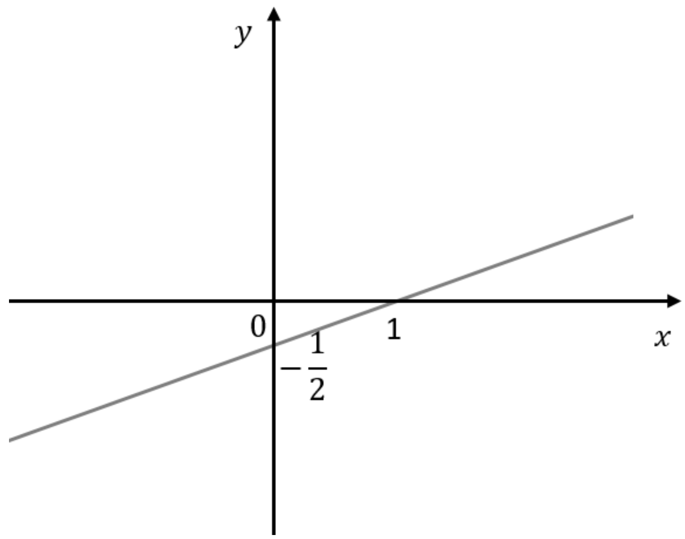
Com efeito,

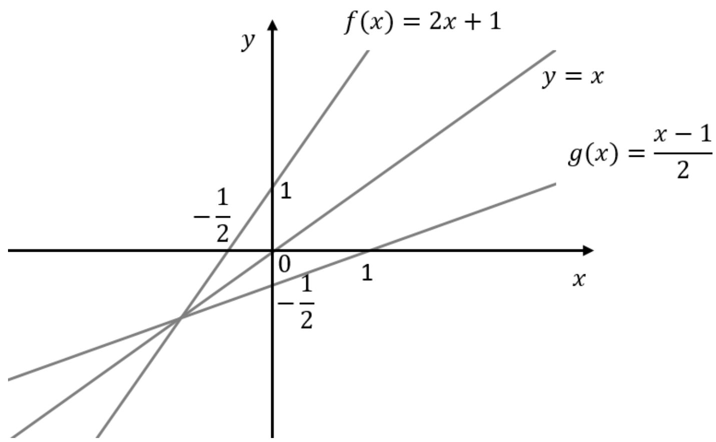
$$\begin{aligned} \forall y &\in \mathbb{R} = CD(f) : \exists \left(x = \frac{y-1}{2} \right) \in D(f) : \\ f(x) &= f\left(\frac{y-1}{2} \right) = 2.\left(\frac{y-1}{2} \right) + 1 = y. \end{aligned}$$

De sorte que: f é sobrejetora. Por conseguinte, vem: f é bijetora. ■
$f(x) = 2x + 1$



$g(x) = \frac{x-1}{2}$





2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^3$.

Afirmação 1: f é injetora.

De fato,

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \quad &\in \quad \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^3 = x_2^3 \\ &\Longrightarrow \quad x_1^3 - x_2^3 = 0 \Longrightarrow (x_1 - x_2) . \left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_2 \\ \text{ou} \\ x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Pois,

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1x_2 \Longleftrightarrow x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 > 0$$

desde que $x_1 \neq x_2$.
Logo, f é injetora. ■

Afirmação 2: f é sobrejetora.

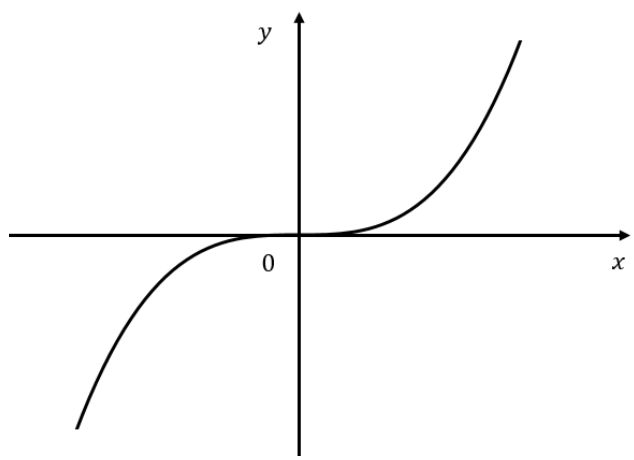
Note que:

$$y = x^3 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

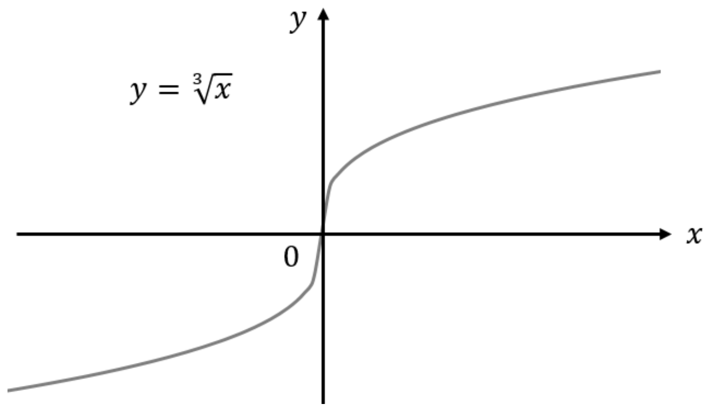
Com efeito,

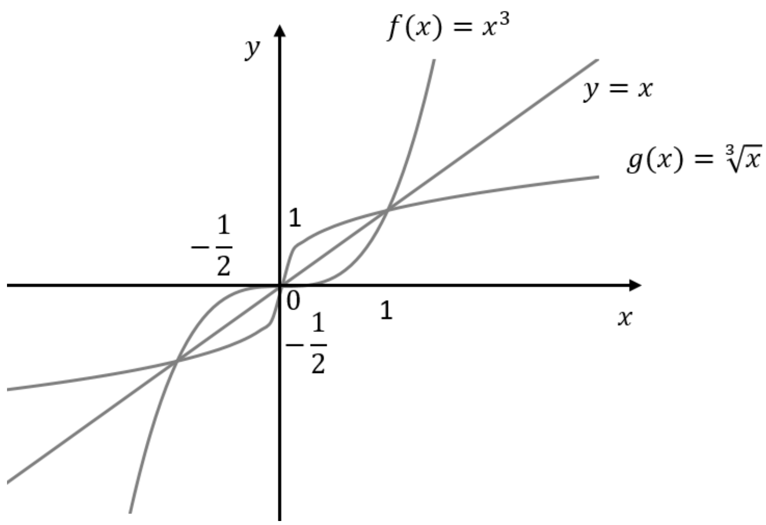
$$\begin{aligned} \forall y &\in \mathbb{R} = CD(f) : \exists x = \sqrt[3]{y} \in D(f) = \mathbb{R} : \\ f(x) &= f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y. \end{aligned}$$

Portanto,: f é sobrejetora. Por conseguinte, vem: f é bijetora. ■
$f(x) = x^3$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

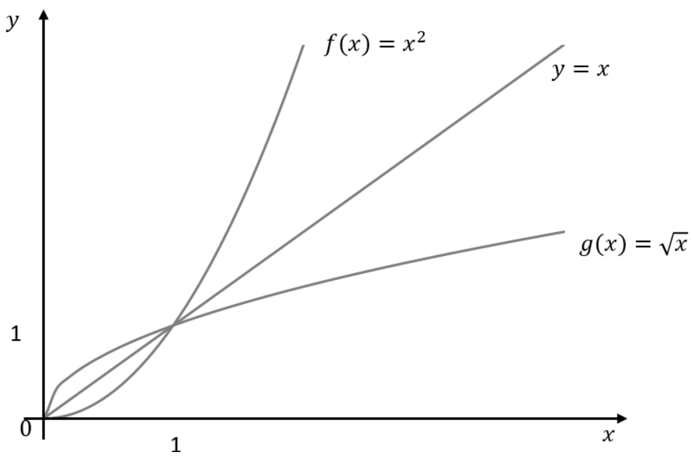




3. Seja $g : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função,definida por:

$$g\,(x) = \sqrt{x},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.



Afirmação 1: g é injetora.

De fato, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
g(x_1) &= g(x_2) \Longrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \\
&\Longrightarrow (\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 \Longrightarrow |x_1| = |x_2| \\
&\Longrightarrow x_1 = x_2, \text{ visto que } x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Logo, g é injetora. ∎

Afirmação 2: g é sobrejetora.

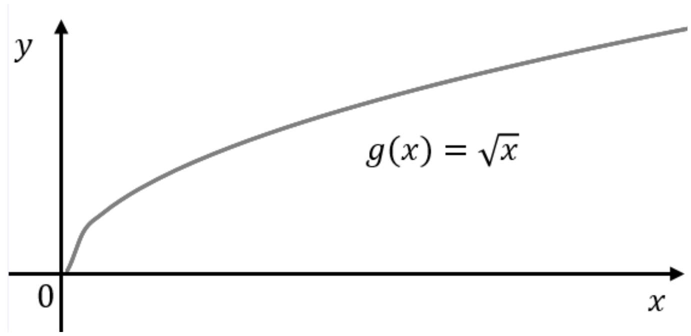
Note que:

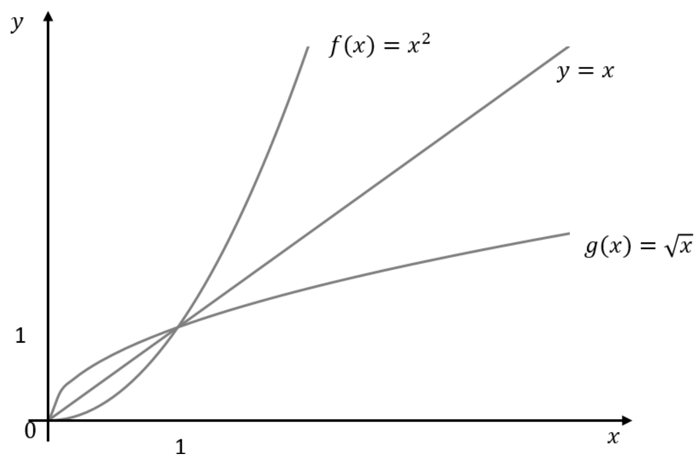
$$g(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow x = y^2.$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\forall y &\in CD(f) : \exists x = y^2 \in D(f) = \mathbb{R} : \\
g(x) &= g(y^2) = \sqrt{y^2} = |y| = y, \text{ com } y \geq 0
\end{aligned}
$$

Portanto,: g é sobrejetora. Por conseguinte, vem: g é bijetora. $\blacksquare$





4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função, definida por:

$$f(x, y) = (x + y, x - y)$$

Prove por definição que: f é bijetora.

Prova:

Afirmação 1: f é injetora.

De fato, $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{aligned}
u_1 &= (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 : f(u_1) = f(u_2) \Longrightarrow f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \\
&\Longrightarrow (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_2 \\ \text{e} \\ 2y_1 = 2y_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ \text{e} \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Longrightarrow u_1 = u_2.
\end{aligned}$$

De sorte que: f é injetora. $\blacksquare$

Afirmação 2: f é sobrejetora.

antes de provar vejamos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y, x-y) = (a,b) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=a \\ x-y=b \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x=a+b \\ \text{e} \\ 2y=a-b \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=\frac{a+b}{2} \\ \text{e} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (a,b) &\in \mathbb{R}^2 = CD(f) : \exists (x,y) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) \in \mathbb{R}^2 = D(f) : \\ f(x,y) &= f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) \\ &= (a,b). \end{aligned}$$

Dito de outra forma, f é sobrejetora e, portanto: bijetora. $\blacksquare$

5. Seja $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função, dada por:

$$f(p(x)) = (p(0), p(1))$$

Prove por definição que: f é bijetora.

Antes de provar; vamos olhar de pertinho, como são os elementos do domínio desta função f.

$$[p(x) = ax+b] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} p(0)=b \\ p(1)=a+b. \end{array} \right.$$

Assim, a função $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ pode ser escrita por:

$$f(ax+b) = (b, a+b)$$

Prova:

Afirmação 1: f é injetora.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\forall p_1(x) &= a_1x+b_1, p_2(x) = a_2x+b_2 \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) : f(p_1(x)) = f(p_2(x)) \\
&\Longrightarrow f(a_1x+b_1) = f(a_2x+b_2) \Longrightarrow (b_1, a_1+b_1) = (b_2, a_2+b_2) \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b_1 = b_2 \\ a_1+b_1 = a_2+b_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b_1 = b_2 \\ a_1 = a_2 \end{array} \right. \Longrightarrow p_1(x) = p_2(x).
\end{aligned}
$$

De sorte que: f é injetora. ■

Afirmação 2: f é sobrejetora.

antes de provar vejamos

$$
\begin{aligned}
f(p_0(x)) &= f(a_0x+b_0) = (b_0, a_0+b_0) = (k_1, k_2) \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b_0 = k_1 \\ a_0+b_0 = k_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b_0 = k_1 \\ \text{e} \\ a_0 = k_2-k_1 \end{array} \right. .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall (k_1, k_2) &\in \mathbb{R}^2 = CD(f) : \exists p_0(x) = a_0x+b_0 = (k_2-k_1)x+k_1 \in D(f) : \\
f(p_0(x)) &= f[(k_2-k_1)x+k_1] = (k_1, (k_2-k_1)+k_1) = (k_1, k_2).
\end{aligned}
$$

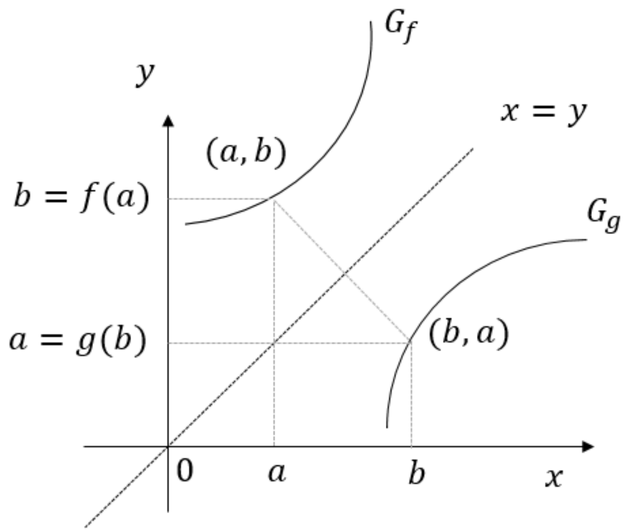
Portanto, f é sobrejetora, por conseguinte: bijetora. ■

Observação:

Posteriormente, funções dadas nos exemplos 4 e 5, serão vistas no curso de Álgebra Linear em detalhes.

Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função injetora:



Fatos:

1.

$$(a, b) \in G(f) \Longleftrightarrow (b, a) \in G(g).$$

Dito de outro modo, temos:

$$\begin{aligned}(a, b) \in G(f) &\Longleftrightarrow b = f(a) \\ &\Longleftrightarrow g(b) = g[f(a)] = a \\ &\Longleftrightarrow g(b) = a \\ &\Longleftrightarrow (b, a) \in G(g) = G\left(f^{-1}\right).\end{aligned}$$

2. Toda função injetora estritamente crescente (ou decrescente) no seu domínio, admite inversas.

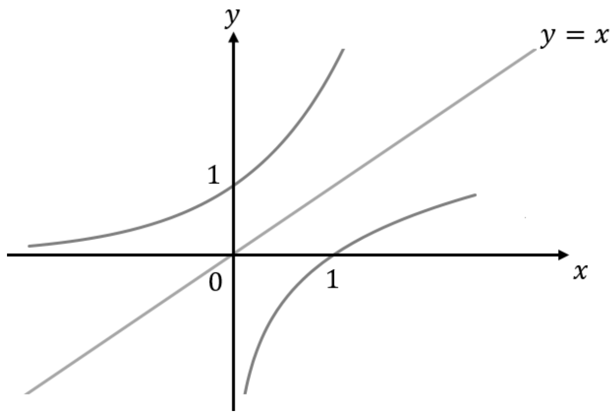
Definição:

Seja $g : Y \longrightarrow X$ uma função. Dizemos que: g é a inversa de $f : X \longrightarrow Y$, se:

$$(i) \quad (g \circ f)(x) = x, \forall x \in D(f) \qquad (ii) \quad (f \circ g)(y) = y, \forall y \in D(g)$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & g \circ f & X \end{array}$$



Observação:

(i)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f \circ g & Y \end{array}$$

(ii) **Cuidado!**

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

(iii) **Notação:** g é a função inversa de f

$$g = f^{-1}.$$

(iv) $g : Y \longrightarrow X$ é a função inversa de $f : X \longrightarrow Y$

Afirmação 1: $f : X \longrightarrow Y$ é injetora.

De fato,

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmação 2: f é sobrejetora.

com efeito,

$$\forall y \in Y : \exists x \in X : x = g(y) \Longrightarrow f(x) = f(g(y)) = y.$$

De sorte que: f é sobrejetora. ■
Consequentemente, vem: f é bijetora.

Conclusão:

$$f : X \longrightarrow Y \text{ invertível} \Longleftrightarrow f \text{ é bijetora.}$$

Observação:

Alguns textos do Ensino Médio **chama invertível de inversível.**

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função dada por:

$$f(x) = -2x + 1.$$

Determine $g = f^{-1}$

Solução:

Com efeito,

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = -2g(x) + 1 = x.$$

Logo,

$$-2g(x)+1 = x \Longrightarrow -2g(x) = x-1 \Longrightarrow 2g(x) = -x+1 \Longrightarrow g(x) = f^{-1}(x) = \frac{-x+1}{2}.$$

Observe que:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{-f(x)+1}{2} = \frac{-[-2x+1]+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

e

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = -2f^{-1}(x)+1 = -2\left[\frac{-x+1}{2}\right]+1 = \frac{2x-2+2}{2} = x$$

2. Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função,definida por:

$$f(x) = \sqrt{x},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Determine $g = f^{-1}$.

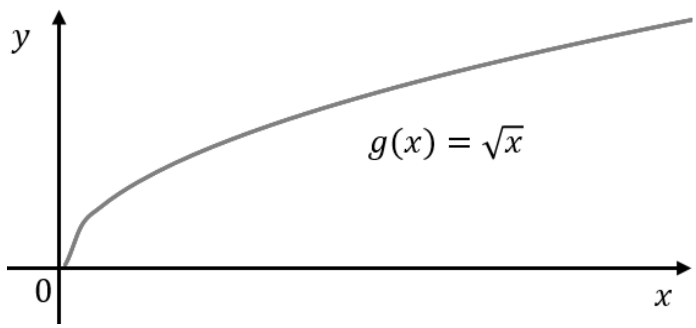
Solução:

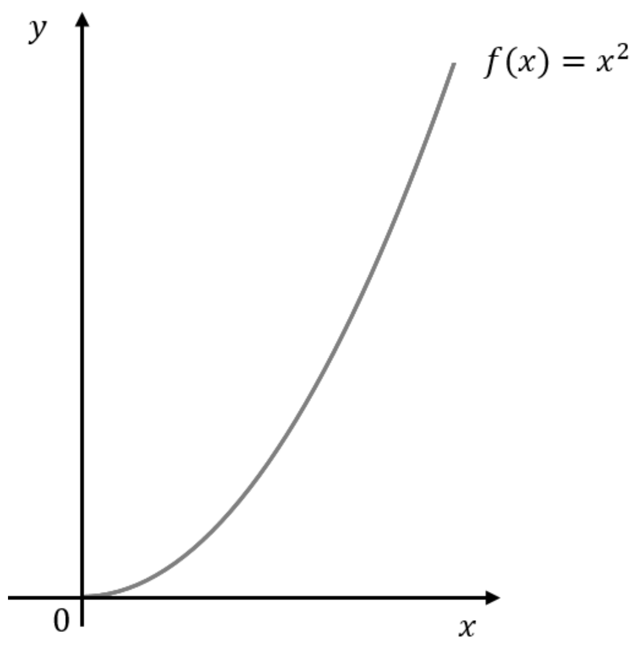
De fato, $g = f^{-1} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = x \Longrightarrow \left(\sqrt{g(x)}\right)^2 = x^2 \Longrightarrow |g(x)| = x^2 \geq 0.$$

Portanto,

$$g(x) = f^{-1}(x) = x^2.$$





Vale ressaltar que:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{f^{-1}(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

e

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = [f(x)]^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = |x| = x.$$

3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^3.$$

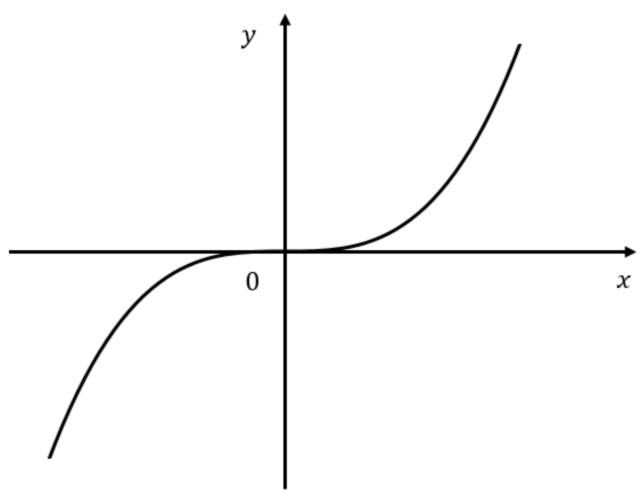
Solução:

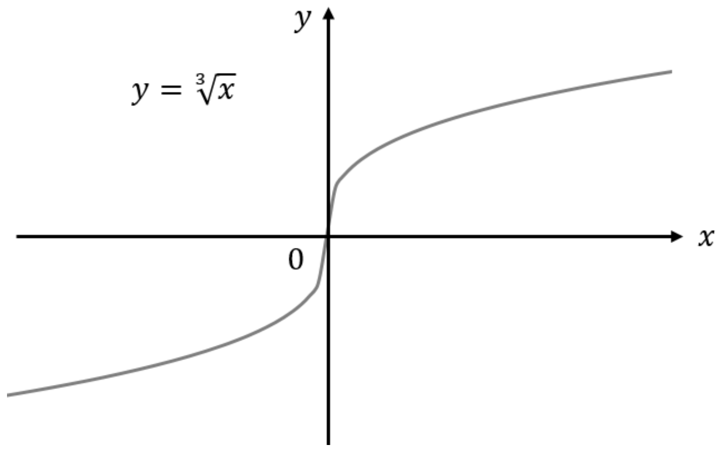
De fato,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 = x \Longrightarrow g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

De sorte que:

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$





Vale salientar que:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = \left[f^{-1}(x)\right]^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x.$$

e

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

3. Seja $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \ln x.$$

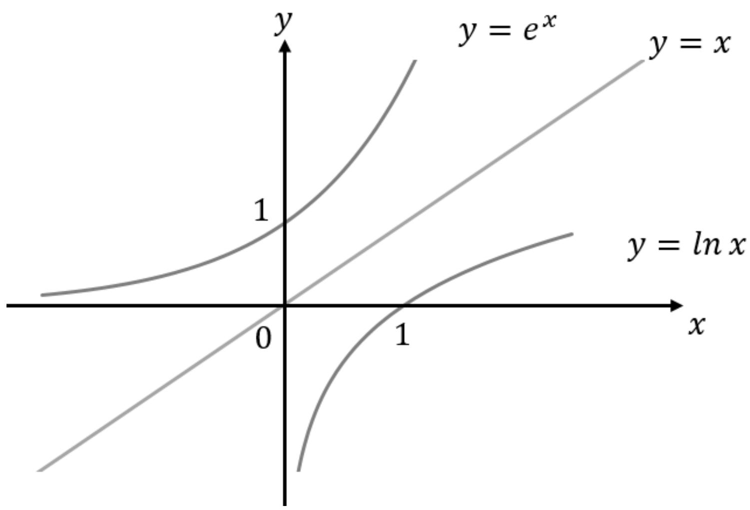
Solução:

De fato, $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g = f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R} : y > 0\}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln[g(x)] = x \Longrightarrow g(x) = e^x.$$

De sorte que:

$$g(x) = f^{-1}(x) = e^x.$$



Note que:

$$\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=\ln\left[f^{-1}(x)\right]=\ln\left(e^{x}\right)=x\ln e=x.$$

$\ln e=1$
e

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=e^{f(x)}=e^{\ln x}=x.$$

4. Seja $f:\{x\in\mathbb{R}:x\neq 2\}\longrightarrow\{y\in\mathbb{R}:y\neq 1\}$, definida por:

$$f(x)=\frac{x}{x-2}.$$

Pede-se:
(i) $g=f^{-1}$ $\qquad$ (ii) Esboço dos gráficos de f e f^{-1}.

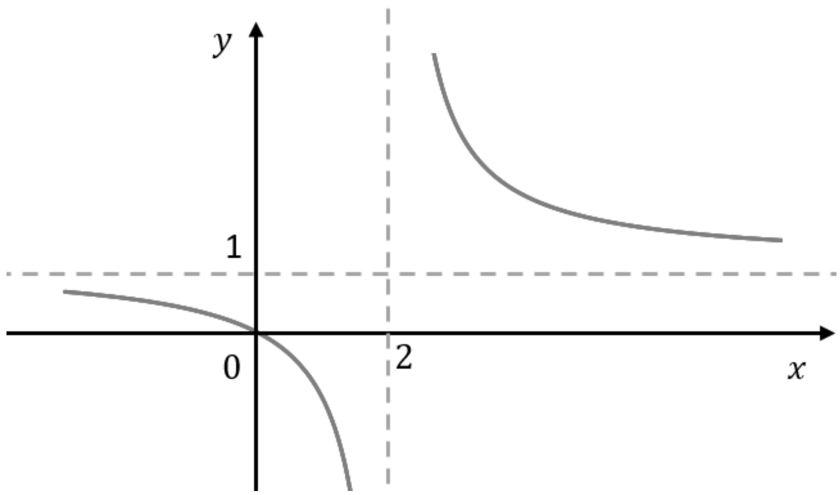
Solução:

(i) Por definição, temos:

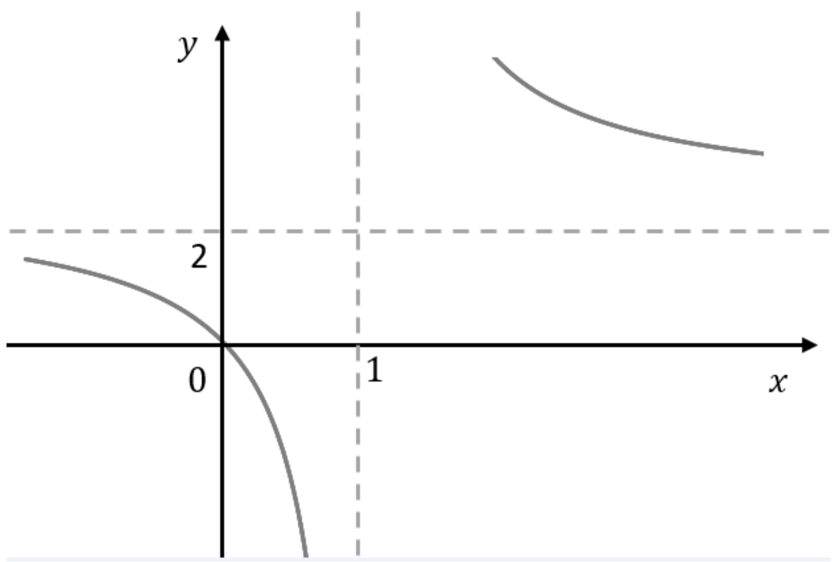
$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{g(x)}{g(x)-2}=x\Longrightarrow g(x)=xg(x)-2x\\ &\Longrightarrow g(x)-xg(x)=-2x\Longrightarrow g(x)[1-x]=-2x\\ &\Longrightarrow g(x)=f^{-1}(x)=\frac{2x}{x-1}. \end{aligned}$$

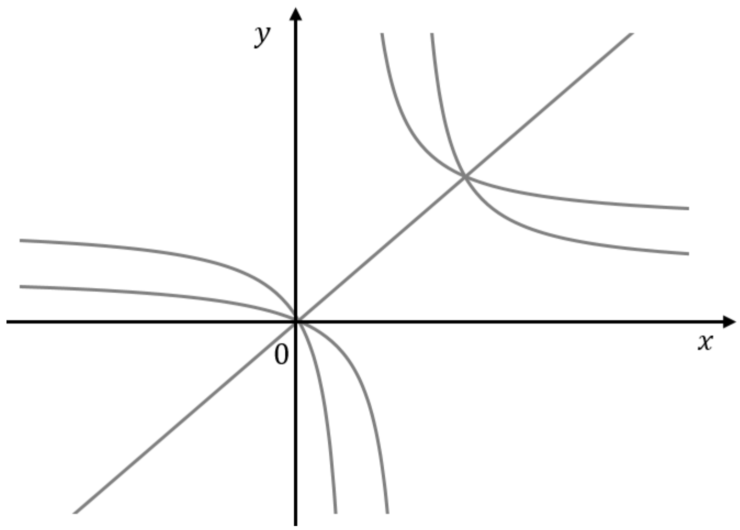
(ii) Esboço dos gráficos de f e $g=f^{-1}$.

$f(x) = \frac{x}{x-2}$



$f^{-1}(x) = g(x) = \frac{2x}{x-1}$





5. Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função, definida por:

$$f(x) = \sqrt{x-1},$$

onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ e $\mathbb{B} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$.

Afirmação 1: f é injetora.

De fato,

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 &\in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow \sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1} \\ &\Longrightarrow \left(\sqrt{x_1 - 1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2 - 1}\right)^2 \Longrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \\ &\Longrightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2, \text{ visto que } x_1, x_2 \geq 1. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

Afirmação 2: f é sobrejetora.

Note que:

$$y = \sqrt{x-1} \Longrightarrow x - 1 = y^2 \Longrightarrow x = 1 + y^2.$$

Com efeito,

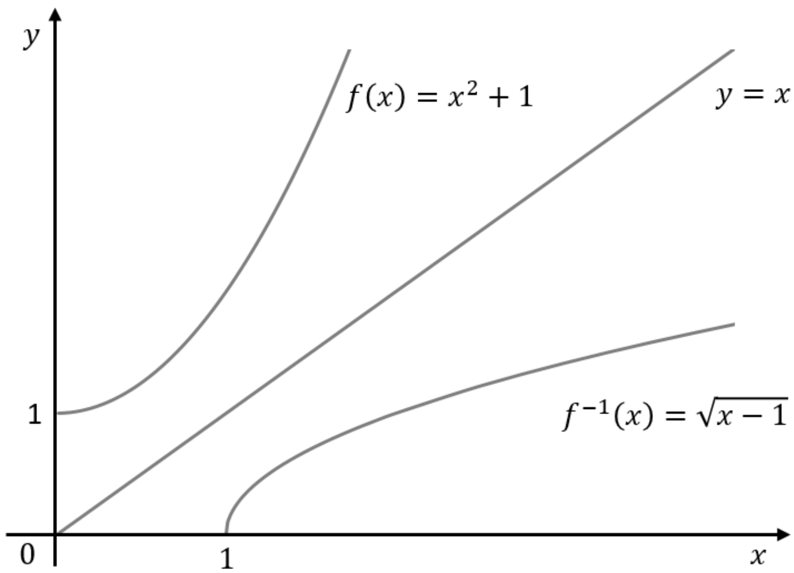
$$\begin{aligned} \forall y &\in CD(f) = \mathbb{B} : \exists x = 1 + y^2 \in D(f) = \mathbb{A} : \\ f(x) &= f\left(1 + y^2\right) = \sqrt{1 + y^2 - 1} = |y| = y. \end{aligned}$$

Portanto,: f é sobrejetora. Por conseguinte, vem: f é bijetora. ■

Agora, a função inversa da função f, será dada por:

$$g = f^{-1} : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}.$$

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = x \Longrightarrow |g(x) - 1| = x^2 \Longrightarrow g(x) = x^2 + 1$$



Uma pausa para alguns comentários:

Em alguns textos do Ensino Médio, achar a inversa de uma função usa-se "trocar x por y e expressa y como função de x". ́Parece mágica da forma que se procede. A título ilustrativo, escolha:

$$f(x) = x^2.$$

Vejamos $y = x^2$, trocando x por y, vem:

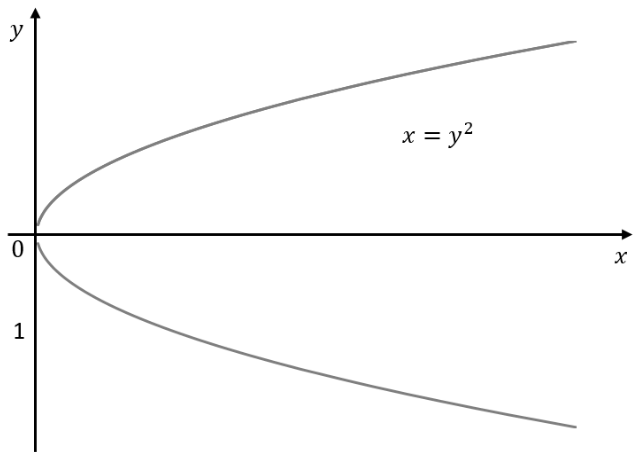
$$y = x^2 \Longrightarrow x = y^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{x}.$$

e agora, expressando y como função de x, quem é a função inversa?:

$$\left\{ \begin{array}{c} g(x) = \sqrt{x} \\ \text{ou} \\ g(x) = -\sqrt{x} \end{array} \right. .$$

Vale ressaltar que: a equação dada não é uma função

$$x = y^2.$$



Neste caso, **o esboço gráfico nem função representa**. (Um elemento do domínio $x > 0$ tem duas imagens)

5 Função Exponencial

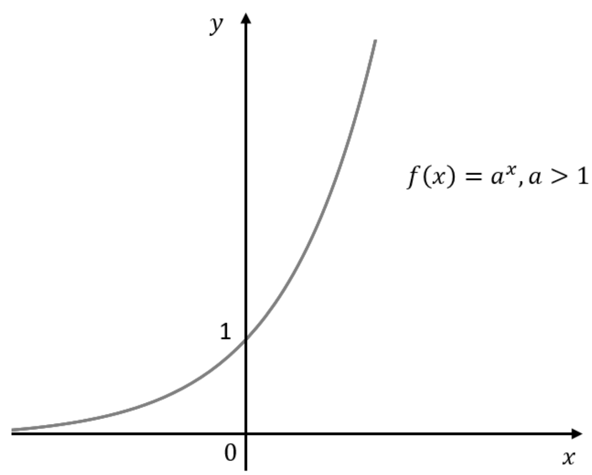
Definição:

Seja a um número real, tal que: $0 < a \neq 1$ e seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ uma função.
Dizemos que f é exponencial de base a se:

$$f(x) = a^{x}$$

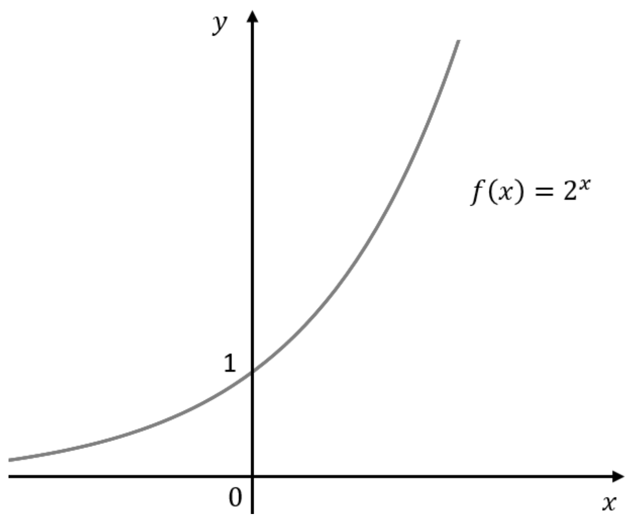
e satisfaz as seguinte condições:
1) $a^{x+y} = a^{x}.a^{y}$
2) $a^{1} = a$
3) $a > 1$: f é crescente: $x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0 \Longrightarrow a^{x_2 - x_1} > 1 \\ &\Longrightarrow \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

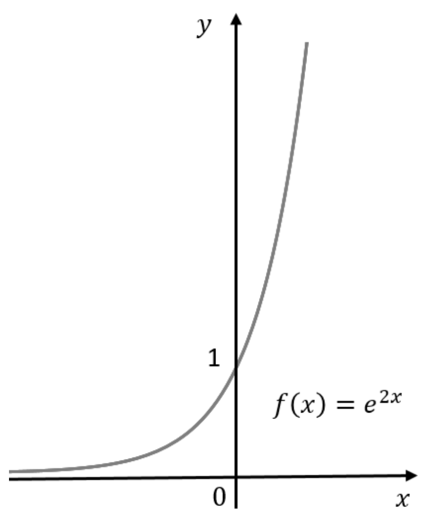


Exemplos:

(A) $f(x) = 2^x$

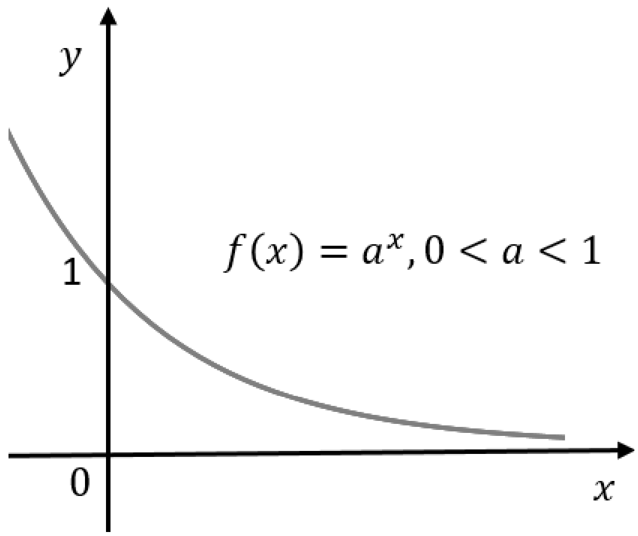


(B) $f(x) = e^{2x}$



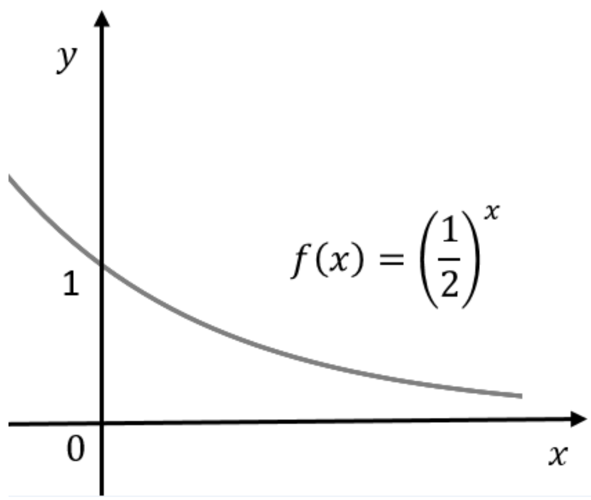
4) $0 < a < 1 : f$ é decrescente: $x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$$\begin{aligned} 0 &< a < 1 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 1 \text{ e } x_1 < x_2 \Longrightarrow x_2 - x_1 > 0 \\ &\Longrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2 - x_1} > 1 \Longrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \Longrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \\ &\Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2). \end{aligned}$$

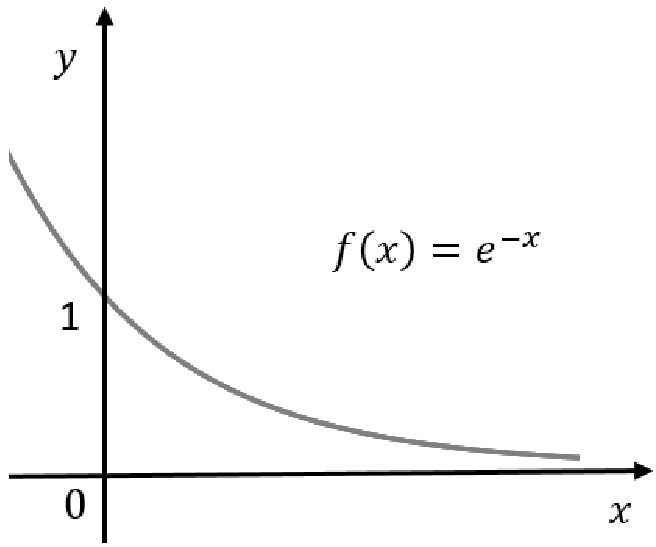


Exemplos:

$(A)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$(B)\ f(x) = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$



Uma pausa para alguns questionamentos e comentários:

1. O porquê das restrições a base a?

Uma resposta comum de alguns: queremos que a função exponencial admita inversa. Ora, estamos definindo uma função, as retrições devem bastar em si mesma. Vejamos de fato uma explicação plausível. A saber:

(A). Na definição o que aconteceria se $a = 1$? A função é constante.

(B). Se $a < 0$, ilustrativamente, escolha $a = -2$, então,

$$f(x) = (-2)^x .$$

Observe que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \\ &\text{e} \\ f\left(\frac{2}{4}\right) &= (-2)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^2} \\ &= \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que: f não define uma função.

2. f é injetora:

Prova:

Basta notar que:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Longrightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Longrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = 1 \\ &\Longrightarrow a^{x_1 - x_2} = 1, \text{ com } a > 0 \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Logo, f é injetora. ■

3. f é sobrejetora: $y \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R} : y = a^x$, isto é, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+$. De sorte que: f é bijetora.(f admite inversa)

4. Vale a pena ressaltar que: se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tem a propriedade

$$a^{x+y} = a^x.a^y,$$

então, não pode assumir o valor 0, salvo no caso de $f(x) \equiv 0$.

Prova:

De fato,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

Se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que: $f(x_0) = 0$, então, segue-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f[(x - x_0) + x_0] \\ &= f(x - x_0) \cdot f(x_0) \\ &= f(x - x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. ■

5. Se a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é identicamente nula e satisfaz

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \Longleftrightarrow a^{x+y} = a^x.a^y,$$

então, f é necessariamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Com efeito,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Ou ainda,

$$f\left(x\right)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Dito de outro modo, à luz dessa propriedade

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(y\right),$$

tanto faz dizer que o contra-domínio de f é $\mathbb{R}$:

$$CD\left(f\right)=\mathbb{R}\text{ como }CD\left(f\right)=\mathbb{R}^{+}.$$

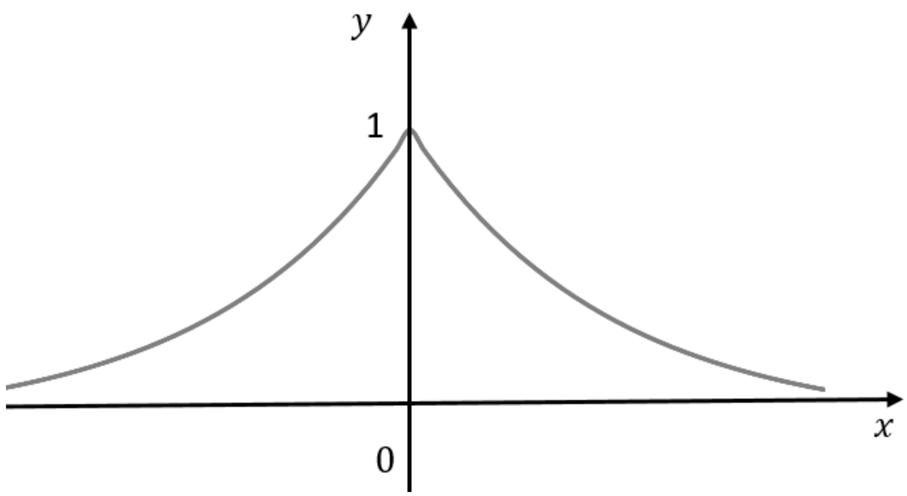
A vantagem de tomar o contra-domínio de f como $\mathbb{R}^{+}$ reside na sobrejetividade de f. ■

Exemplos:

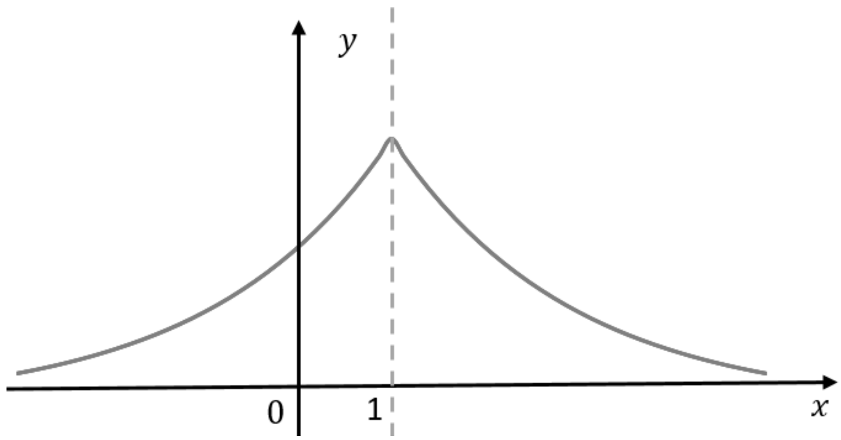
1. (i) $f\left(x\right)=2^{-|x-1|}$ (ii) $f\left(x\right)=2^{-|x+1|}$

(i)

$$y_1=2^{-|x|}=\begin{cases}2^{-x}, & x\geq 0\\ 2^{-(-x)} & x<0\end{cases}\iff y_1=\begin{cases}2^{-x}, & x\geq 0\\ 2^{x} & x<0\end{cases}$$



$y_2=2^{-|x-1|}$ este gráfico é o mesmo do gráfico anterior, destacando a translação de uma unidade à direita

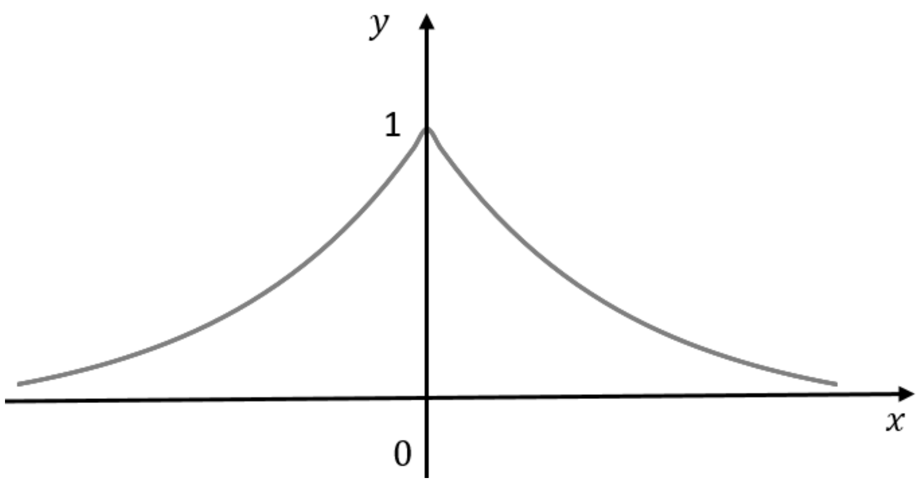


Destacando:

$$\left\{\begin{array}{c} D\left(f\right)=\mathbb{R} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}\left(f\right)=\left\{y\in\mathbb{R}:0<y\leq 1\right\} \end{array}\right.$$

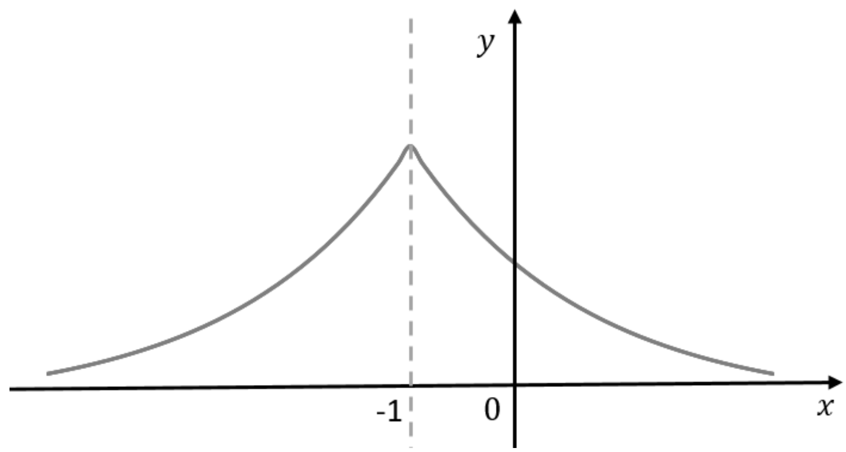
(ii) $f\left(x\right)=2^{-|x+1|}$

$$y_1=2^{-|x|}=\left\{\begin{array}{cc} 2^{-x}, & x\geq 0 \\ 2^{-(-x)} & x<0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow y_1=\left\{\begin{array}{cc} 2^{-x}, & x\geq 0 \\ 2^{x} & x<0 \end{array}\right.$$



$$y_2=f\left(x\right)=2^{-|x+1|}$$

$y_2=2^{-|x+1|}$ este gráfico foi obtido de $y_1=2^{-|x|}$, sendo transladado uma unidade à esquerda.



Destacando:

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y \leq 1\} \end{cases}$$

6 Função Logarítmica

Definição:

Seja a um número real, tal que: $0 < a \neq 1$ e seja $g = f^{-1} : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é logaritmo de x na base a se:

$$g(x) = \log_a x$$

e satisfaz as seguinte condições:

A função inversa da exponencial $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ descrita por

$$f(x) = a^x$$

de base a é a função $f : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Consequências da definição:

$$g\left[f\left(x\right)\right] = \log_a\left[a^x\right] = x \Longleftrightarrow \log_a\left[a^x\right] = x$$

e

$$f\left[g\left(x\right)\right] = a^{g(x)} = a^{\log_a x} = x \Longleftrightarrow a^{\log_a x} = x.$$

Afirmação:

$$0 < a \neq 1,\ \ \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0 : \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

Prova:

Sejam $w = \log_a x^\alpha$ e $y = \log_a x$, então, queremos mostrar que:

$$w = \alpha y.$$

Vejamos,

$$\left\{ \begin{array}{c} w = \log_a x^\alpha \\ \text{e} \\ y = \log_a x \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^w = x^\alpha \\ \text{e} \\ a^y = x \end{array} \right. \Longleftrightarrow a^w = \left(a^y\right)^\alpha.$$

Daí, segue-se que:

$$a^w = \left(a^y\right)^\alpha = a^{\alpha y} \Longleftrightarrow w = \alpha y.$$

Portanto,

$$w = \alpha y \Longleftrightarrow \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

■

1)

$$(i)\ \ y = a^x \Longleftrightarrow \log_a\left(y\right) = \log_a\left(a^x\right) = x$$
$$(ii)\ \ \log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x \Longleftrightarrow a^{\log_a x} = x.$$

■

2)

$$\begin{array}{rcl} \log_a 1 & = & 0 \Longleftrightarrow a^0 = 1. \\ & & \text{e} \\ \log_a a & = & y \Longleftrightarrow a^y = a^1 \Longleftrightarrow y = 1. \end{array}$$

■

3)
$$f\left(x.y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^{+}.$$
Ou ainda,
$$\log_a\left(xy\right)=\log_a x+\log_a y.$$

4) f é uma função injetora:
$$\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^{+}:f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\Longrightarrow x_1=x_2$$

5) f é uma função sobrejetora:
$$\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x=a^y\in\mathbb{R}^{+}:f\left(a^y\right)=\log_a\left(a^y\right)=y$$

6) Mudança de base para logaritmos: $\forall a,b,x\in\mathbb{R}^{+}$ e $a,b\neq 1$
$$\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Sejam $w=\log_b x\ \ y=\log_a x$ e $k=\log_a b$, então, queremos mostrar que:
$$w=\frac{y}{k}\Longleftrightarrow y=wk.$$

Prova:

1^o Modo:

Se $w=\log_b x\ \ y=\log_a x$ e $k=\log_a b$, então, tem-se: $\left\{\begin{array}{c} x=b^w\\ x=a^y\\ \text{e}\\ b=a^k\end{array}\right. \Longrightarrow$

$\left\{\begin{array}{c} a^y=b^w\\ \text{e}\\ b=a^k\end{array}\right.$.

Daí, obtemos:
$$a^y=\left(a^k\right)^w=a^{kw}.$$
Por conseguinte, vem:
$$y=kw\Longleftrightarrow w=\frac{y}{k}.$$

Logo,

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

$\blacksquare$

2^o Modo:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Seja $\log_b x = y$, então temos: $x = b^y$. Assim,

$$\log_a x = \log_a (b^y) = y.\log_a b \Longleftrightarrow y = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

De sorte que:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

$\blacksquare$

7) Sejam $x_1, x_2, a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, então tem-se:

$$\begin{array}{cl} (i) & \log_a (x_1 x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2) \\ (ii) & \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a (x_1) - \log_a (x_2). \end{array}$$

Prova:

(i) Sejam $\log_a (x_1 x_2) = w$, $\log_a (x_1) = y_1$ e $\log_a (x_2) = y_2$, então, queremos mostrar que:

$$w = y_1 + y_2.$$

Vejamos,

$$\left\{\begin{array}{c} \log_a (x_1 x_2) = w \\ \log_a (x_1) = y_1 \\ \text{e} \\ \log_a (x_2) = y_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 x_2 = a^w \\ x_1 = a^{y_1} \\ \text{e} \\ x_2 = a^{y_2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1 x_2 = a^w \\ \text{e} \\ x_1 x_2 = a^{y_1} a^{y_2} \end{array}\right.$$

Decorre daí que:

$$a^w = a^{y_1 + y_2}$$

Portanto,

$$w = y_1 + y_2.$$

Ou ainda,

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a (x_1) + \log_a (x_2).$$

$\blacksquare$

(ii) 1^o Modo:

Sejam $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = w$, $\log_a(x_1) = y_1$ e $\log_a(x_2) = y_2$, então, queremos mostrar que:

$$w = y_1 - y_2.$$

De fato,

$$\left\{\begin{array}{c} \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = w \\ \log_a(x_1) = y_1 \\ \text{e} \\ \log_a(x_2) = y_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x_1}{x_2} = a^w \\ x_1 = a^{y_1} \\ \text{e} \\ x_2 = a^{y_2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{x_1}{x_2} = a^w \\ \text{e} \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{a^{y_1}}{a^{y_2}} = a^{y_1 - y_2}, \end{array}\right.$$

e, por conseguinte, vem:

$$a^w = a^{y_1 - y_2} \Longleftrightarrow w = y_1 - y_2.$$

2^o Modo:

Bastaria notar que:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\left(x_1 x_2^{-1}\right) = \log_a(x_1) + \log_a\left(x_2^{-1}\right).$$

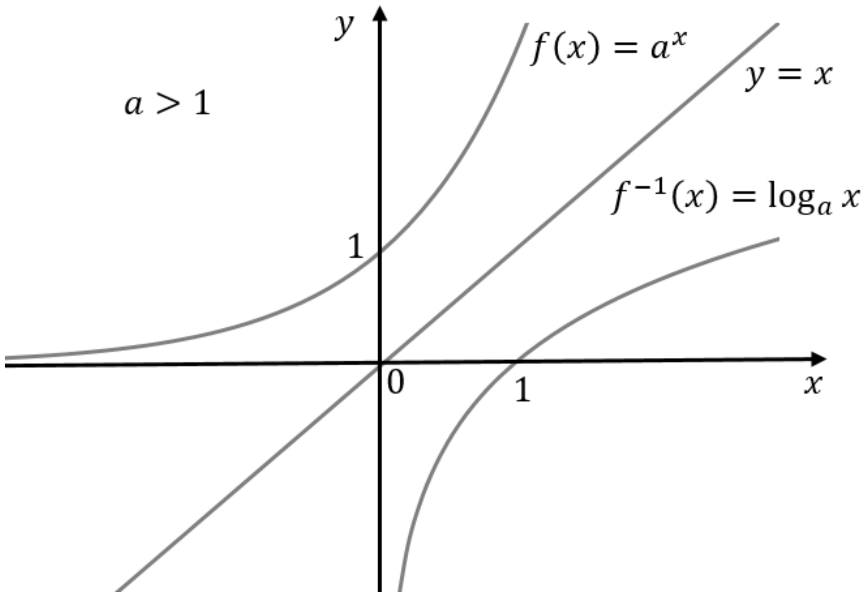
Agora, como $\log_a\left(x_2^{-1}\right) = -\log_a(x_2)$, segue-se:

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\left(x_1 x_2^{-1}\right) = \log_a(x_1) - \log_a(x_2).$$

$\blacksquare$

8) 1^o Caso: $a > 1 : f$ é crescente:

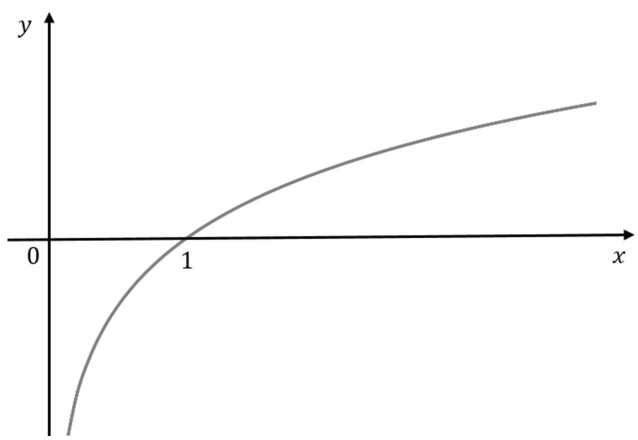
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2.$$



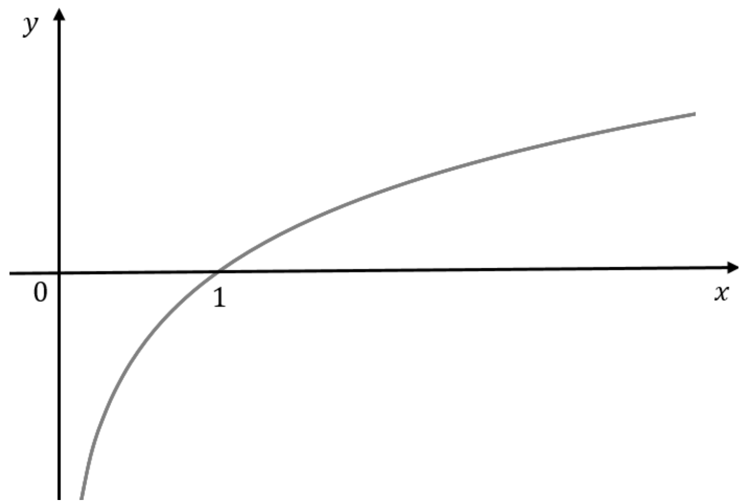
$f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$

Exemplos:

(A) $f(x) = \log_2 x$

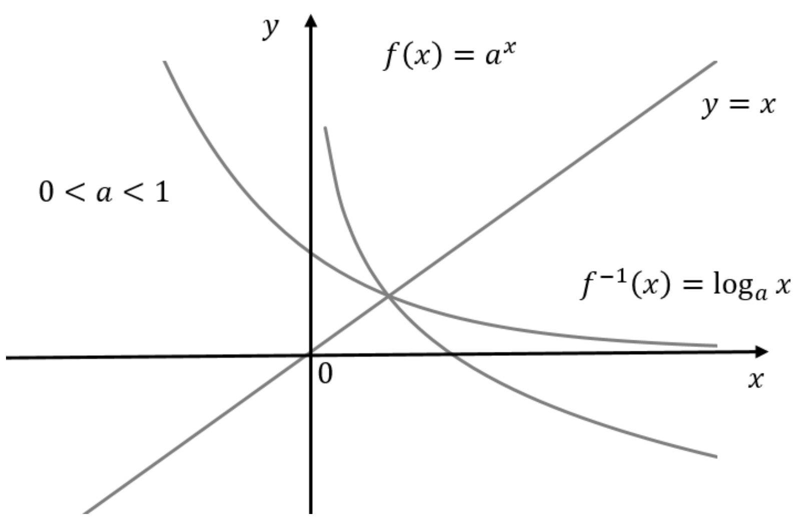


(B) $f(x) = \ln x = \log_e x$



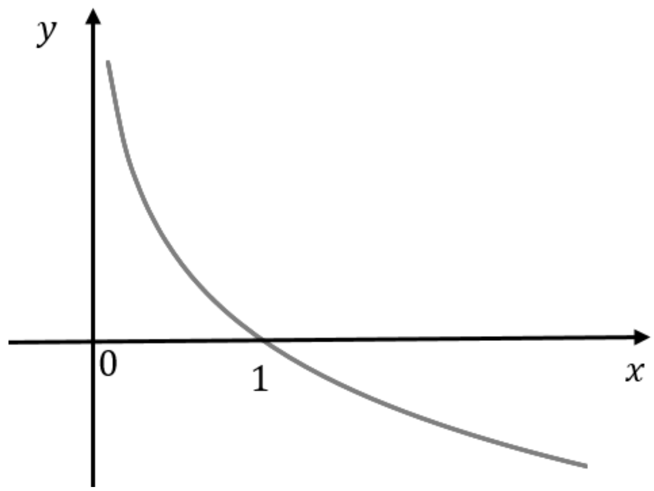
2^o Caso: $0 < a < 1 : f$ é decrescente:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

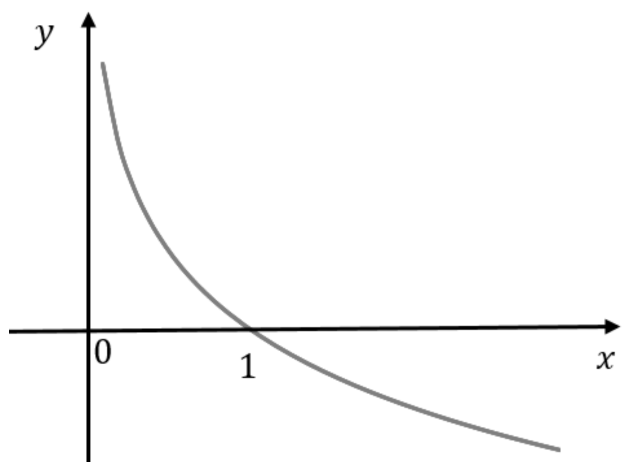


Exemplos:

$(A)\ f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



$(B)\ f(x) = -\ln x$

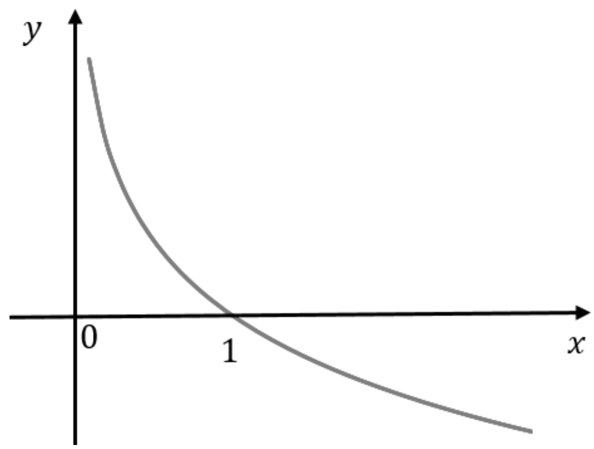


Observe que:
Usando a mudança para base a do logaritmo dado.
Sejam $x, a > 0$, $a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, então, temos:

$$\log_{a^{\alpha}} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k}.\frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k}.\log_a x,\ \text{pois,}\ \log_a a = 1.$$

A título ilustrativo, tome como exemplo:

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log_e x}{\log_e\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\ln x}{\ln\left(e^{-1}\right)} = \frac{\ln x}{-\ln e} = -\ln x\ \text{pois,}\ \ln e = 1.$$



Problema:

Determine $x \in \mathbb{R}$, de modo que:

(i) $e^{2x} - 2.e^{x} + 1 = 0$ $\quad$ (ii) $\ln\left(x^2 - 1\right) = 1$ $\quad$ (iii) $2^{|x-4|} = 32$.

Solução:

(i) Façamos $t = e^x$, então a equação toma a forma:

$$\begin{aligned}
(e^x)^2 - 2.e^x + 1 &= 0 \Longleftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \\
&\Longrightarrow t = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.1}}{2} \\
&\Longrightarrow t = \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Agora, voltando e substituindo o valor de $t = 1$, obtemos:

$$t = e^x = 1 \Longrightarrow e^x = e^0 \Longrightarrow x = 0.$$

■

(ii)

$$\begin{aligned}
\ln\left(x^2 - 1\right) &= 1 \Longleftrightarrow x^2 - 1 = e^1 \Longleftrightarrow x^2 = e + 1 \\
&\Longrightarrow x = \pm\sqrt{e+1}.
\end{aligned}$$

■

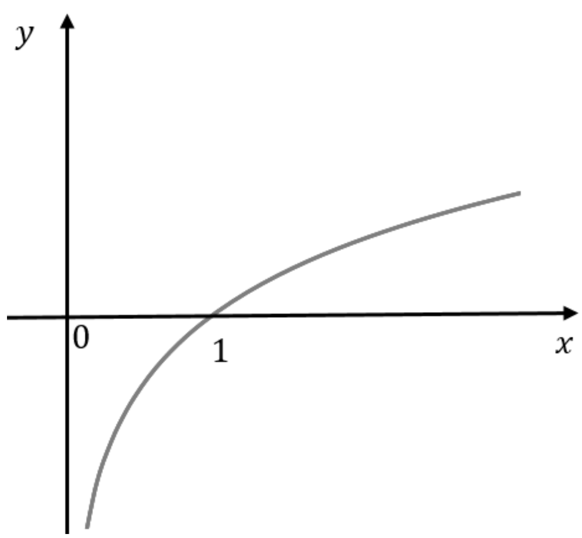
(iii)

$$
\begin{aligned}
2^{|x-4|} &= 32 \Longleftrightarrow 2^{|x-4|} = 2^5 \\
&\Longrightarrow |x-4| = 5 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-4=5 \\ \text{ou} \\ x-4=-5 \end{array} \right. \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=5+4 \\ \text{ou} \\ x=-5+4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=9 \\ \text{ou} \\ x=-1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

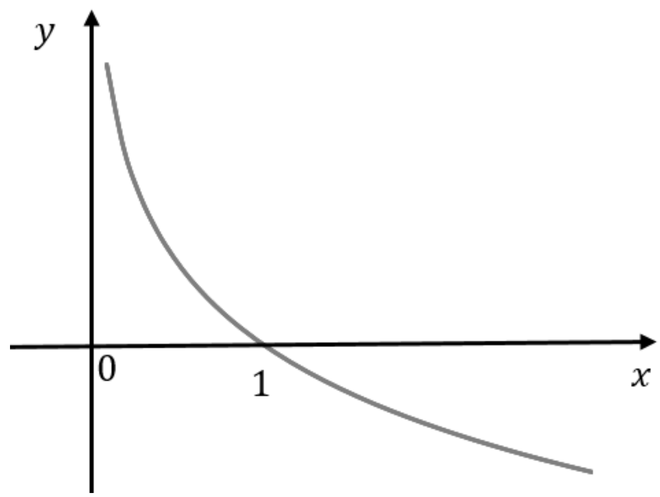
■

Exemplos:

1. (i) $f(x) = \ln x$



(ii) $f(x) = -\ln x$



Observe que:

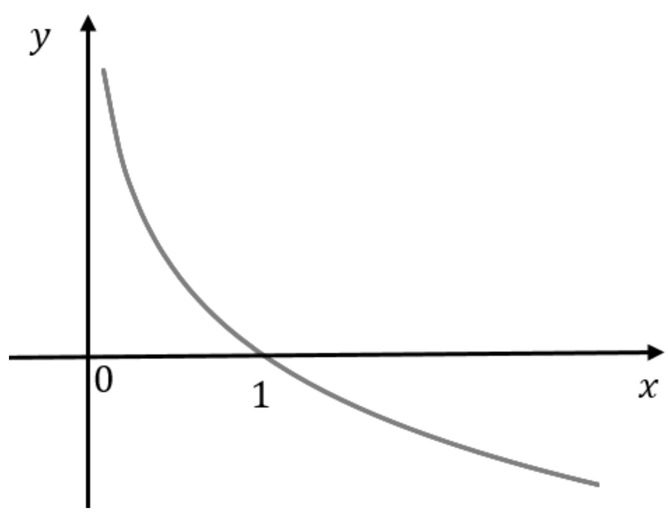
Usando a mudança para base a do logaritmo dado, temos:

$$\log_{a^k} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\log_a x}{\log_a a} = \frac{1}{k} \cdot \log_a x, \text{ pois, } \log_a a = 1,$$

com $x, a > 0$ e $k \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.

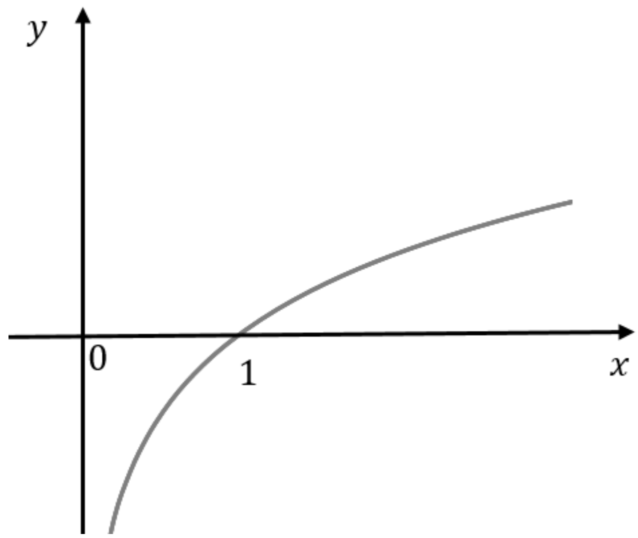
A título ilustrativo, tome como exemplo:

$$\log_{\frac{1}{e}} x = \frac{\log_e x}{\log_e \left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{\ln x}{\ln\left(e^{-1}\right)} = \frac{\ln x}{-\ln e} = -\ln x \text{ pois, } \ln e = 1.$$

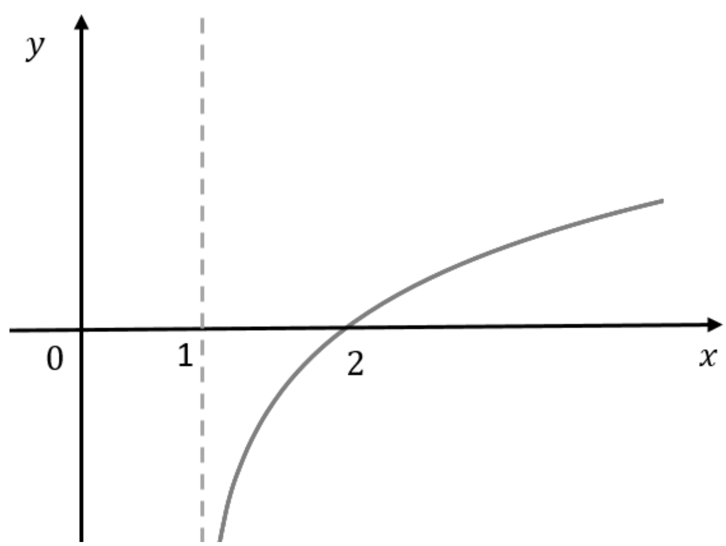


2. $f(x) = |\log_{10}(x-1)|$

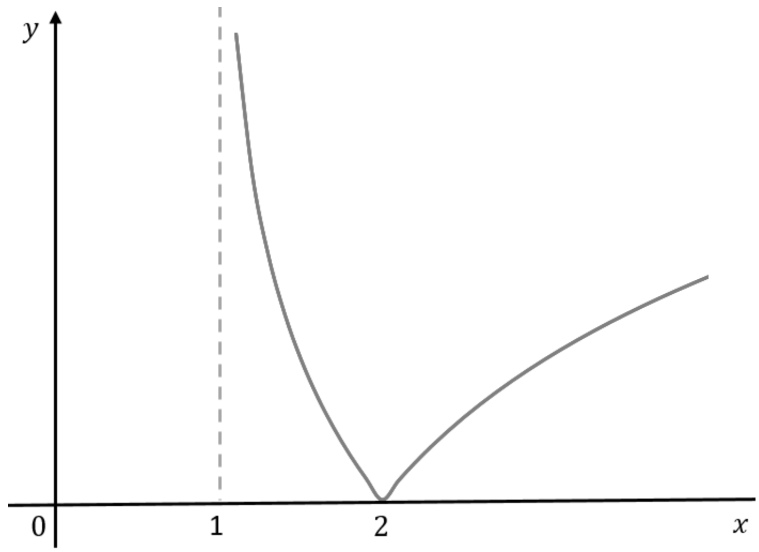
$y_1 = \log_{10}(x)$



(ii) $y_2 = \log_{10}(x-1)$



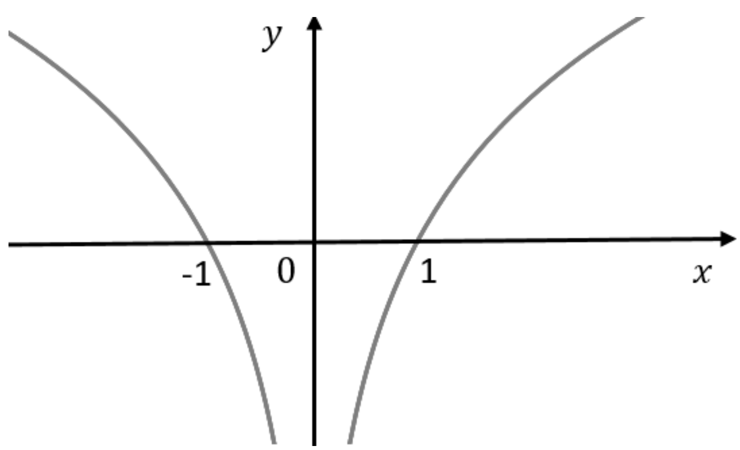
(iii) $y_3 = |\log_{10}(x-1)|$



Destacando:

Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$
Imagem de $f : \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$. ■

3. $f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



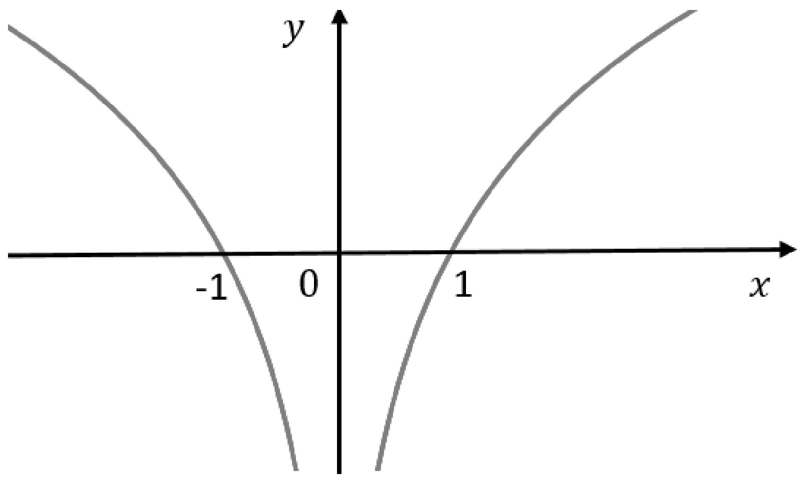
Cálculos auxiliares:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln|x| = 0 \Longleftrightarrow \ln_e|x| = 0 \Longleftrightarrow |x| = e^0 = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{array} \right.$$

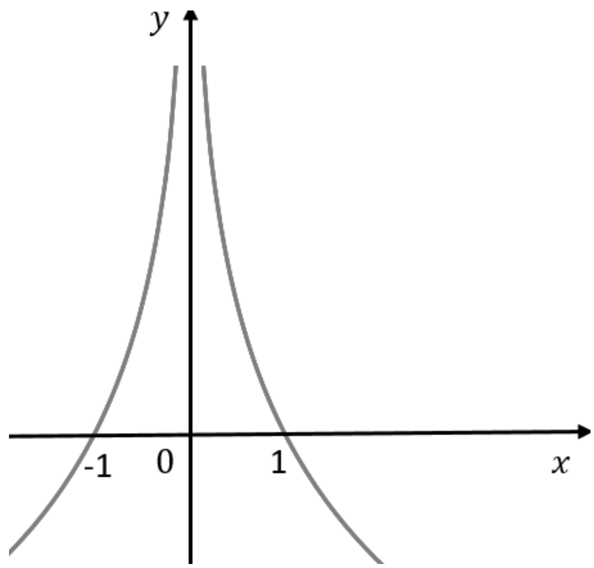
São os valores que cortam o eixo x (ou zero da função f) ■

4. $f(x) = |2 - \ln|x||$

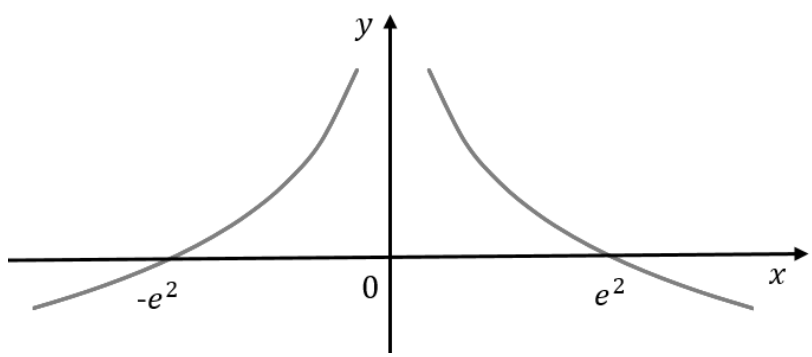
$$y_1 = \ln|x| = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{array} \right.$$



$y_2 = -\ln|x|$, este gráfico, foi obtido de $y_1 = \ln|x|$ fazendo uma **reflexão** em torno do eixo x, ou seja, a parte positiva ficou negativa e a parte negativa ficou positiva, graficamente, temos:



$y_3 = 2 - \ln|x|$, este gráfico, foi obtido do gráfico anterior $y_1 = -\ln|x|$ transladando duas unidades para cima, graficamente, temos:

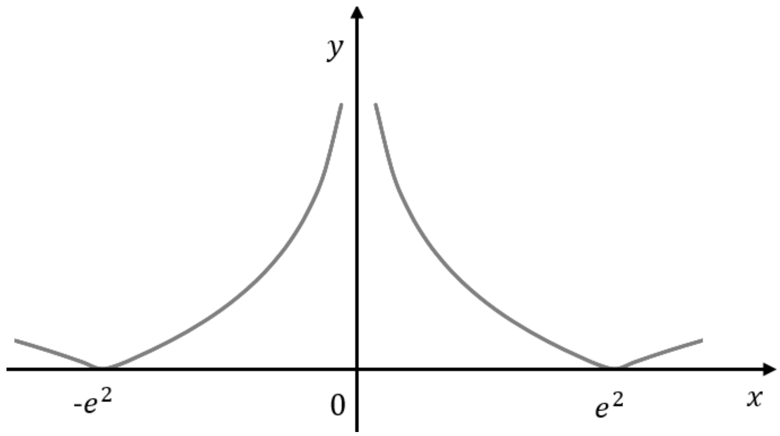


Cálculos auxiliares:

Determinando os valores que cortam o eixo x

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Longleftrightarrow 2 - \ln|x| = 0 \Longleftrightarrow \ln|x| = 2 \Longleftrightarrow \ln_e|x| = 2 \Longleftrightarrow \\ |x| &= e^2 \Longrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ \text{ou} \\ x = -e^2. \end{cases} \end{aligned}$$

São os valorer que cortam o eixo x (ou zero da função f).
E, finalmente, obtendo o gráfico de $f(x) = |2 - \ln|x||$, vale destacar que: este gráfico foi obtido do anterior, refletindo a parte negativa em torno do eixo x, ou ainda, a parte positiva ou nula permanece a mesma e a parte negativa girou em torno do eixo x e ficou positiva.

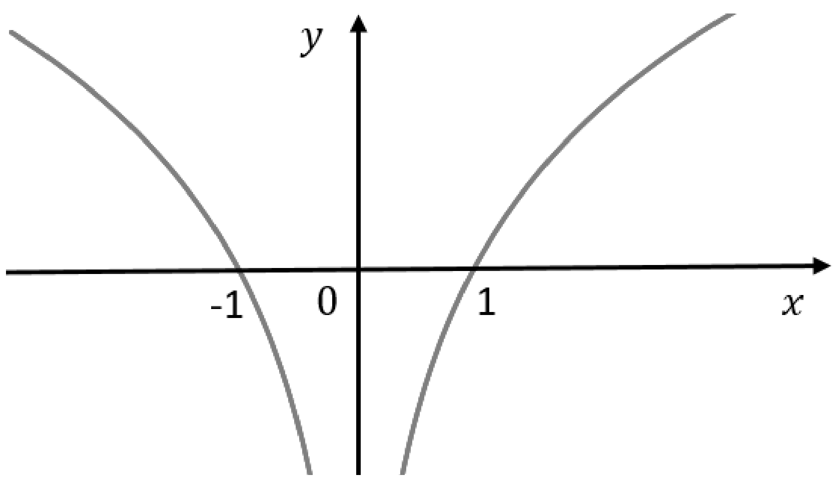


Destacando:

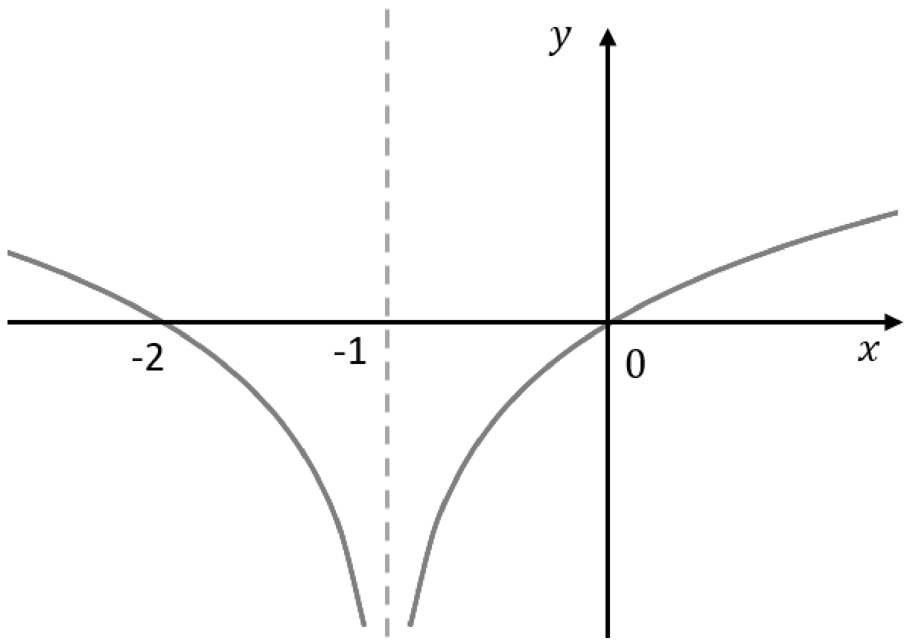
$$\begin{cases} D(f) = \{y \in \mathbb{R} : x \neq 0\} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

5. $f(x) = \ln|x+1|$

(i) $y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



(ii) $y_2 = \ln|x+1|$, este gráfico é obtido de $y_1 = \ln|x|$ anterior deslocando ou transladando uma unidade à esquerda

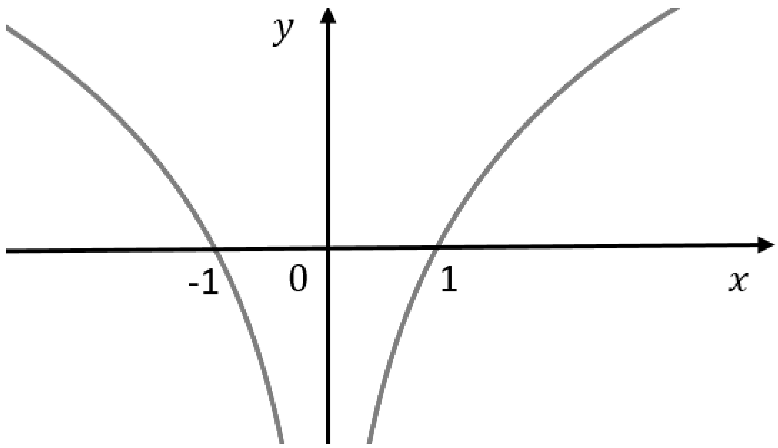


Destacando:

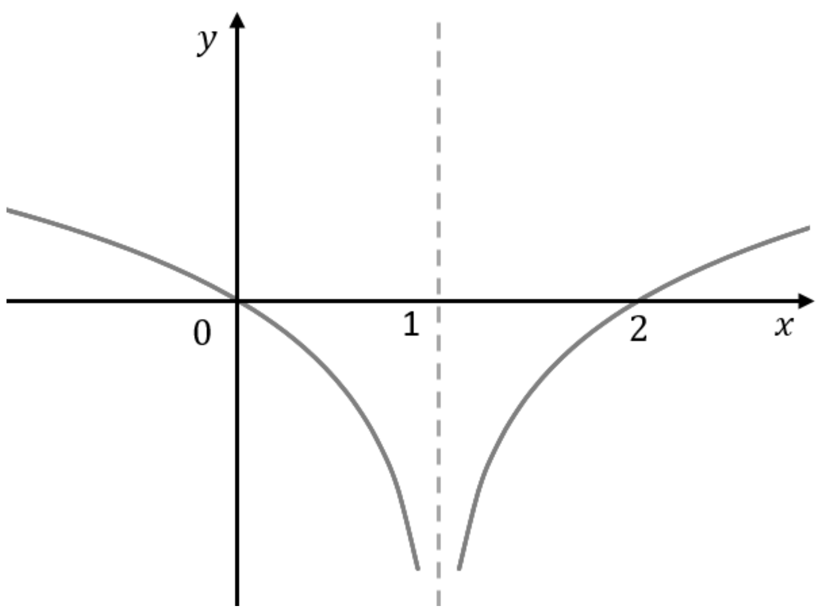
$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

6 $f(x) = \ln|x-1|$

(i) $y_1 = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases}$



$y_2 = \ln|x-1|$, este gráfico é obtido de $y_1 = \ln|x|$ deslocando ou transladando uma unidade à direita



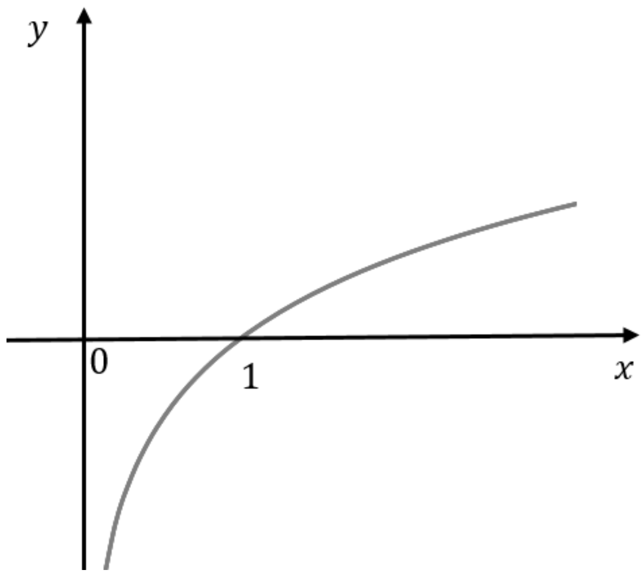
Destacando:

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} - \{1\} \\ \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}. \end{cases}$$

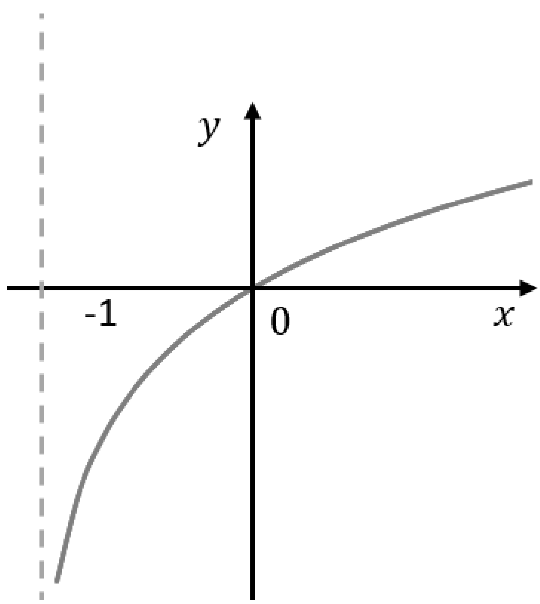
■

7. $f(x) = |\ln(x+1)|$

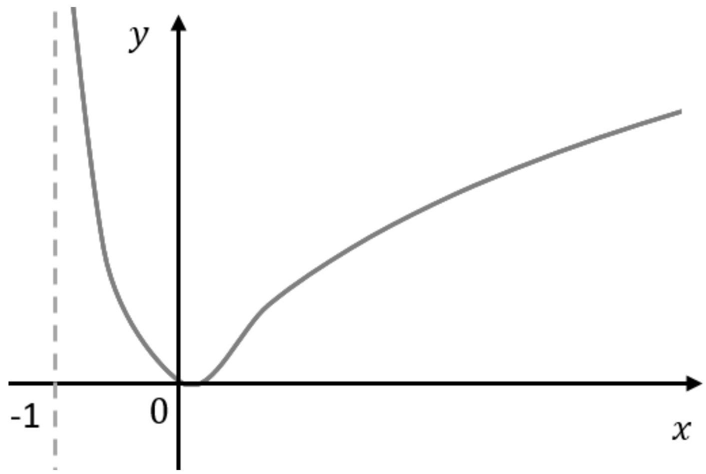
$y_1 = \ln x$



$y_2 = \ln(x+1)$, este gráfico é obtido do gráfico anterior transladando uma unidade à esquerda.



$y_3 = |\ln(x+1)|$, este gráfico é obtido do gráfico anterior, fazendo a reflexão em torno do eixo x a parte positiva ou nula, permanece a mesma, a parte negativa refletida em torno do eixo x fica positiva.

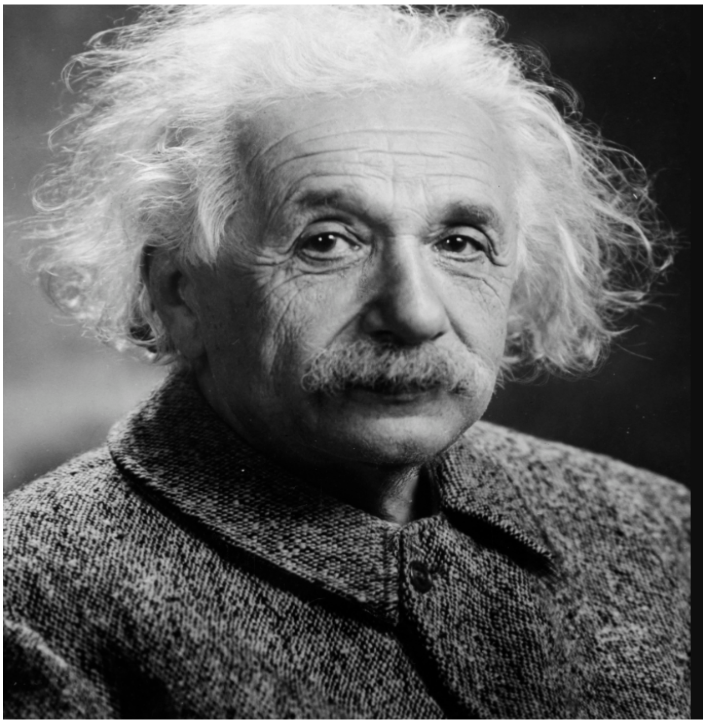


Destacando:

$$\begin{cases} D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} \\ \qquad\qquad \text{e} \\ \operatorname{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}. \end{cases}$$ ■

CAPÍTULO 5

"O princípio criativo reside na matemática."



Albert Einstein (1879 – 1955)

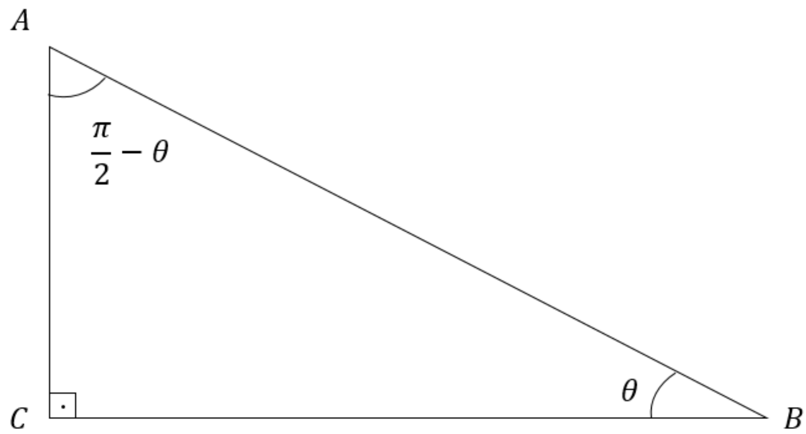
"Defender que a tecnologia desvirtua a Matemática (ou o seu ensino), é como defender que o uso de pincéis desvirtua a Pintura."

Neste Capítulo, vamos abordar trigonometria no triângulo retângulo, funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, esboços gráficos das funções um período fundamental; outros gráficos trigonométricos: usando translações e reflexões de eixos. Finalmente, as funções trigonométricas inverssas: arcoseno, arcocosseno, arctangente. arcocotangente, arcsecante e arccossecante e seus respectivos gráficos, calculando alguns arcos particulares como exercícios.

1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

1.1 Tabela dos Ângulo Básicos (Notáveis):

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
	30^o	45^o	60^o
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Fatos:

F_1) É fácil ver:

(i) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\sin\theta$ $\qquad$ (ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}=\cos\theta$

(iii) $tg\theta=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$ $\qquad$ (iv) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}{\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$

Logo,

$$\begin{cases} (i) & \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta \\ (ii) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \\ (iii) & \operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

(Os nomes cosseno $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ é o complementar do seno de θ e seno $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ é o complementar do cosseno de θ)

F_2) No triângulo ΔACB, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{CB}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2.$$

Por conseguinte, vem:

$$1 = \frac{\left(\overline{AB}\right)^2}{\left(\overline{AB}\right)^2} = \left(\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right)^2.$$

Como $\cos\theta = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$ e $\sin\theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, daí obtem-se:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

■

Definições:

(A) Secante do ângulo θ :

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},\ \cos\theta \neq 0$$

(B) Cossecante do ângulo θ :

$$\operatorname{cossc}\theta = \frac{1}{\sin\theta},\quad \sin\theta \neq 0$$

(C) tangente do ângulo θ :

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cos\theta \neq 0$$

(D) Cotangente do ângulo θ :

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\quad \sin\theta \neq 0$$

Proposição: Para todo $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se:

(i) $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta,\ \cos\theta \neq 0$ $\qquad$ (ii) $\operatorname{cossc}^2\theta = 1 + \operatorname{cotg}^2\theta,\ \sin\theta \neq 0$

Prova:

(i) $\sec^2\theta = 1 + \operatorname{tg}^2\theta$

De fato, dividindo a identidade fundamental $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ por $\cos^2\theta \neq 0$, obtemos:

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Logo,

$$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta.$$

■

(ii) $\text{cossc}^2\,\theta = 1 + \text{cotg}^2\,\theta$

Procedendo de forma análoga, dividindo a identidade $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ por $\sin^2\theta \neq 0$, vem:

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

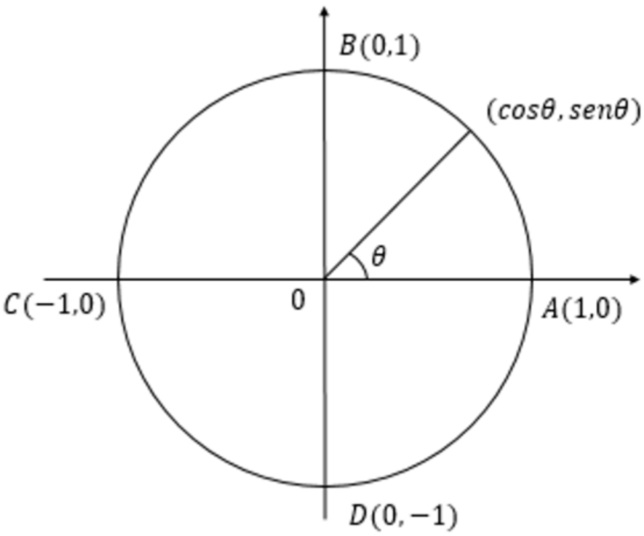
De sorte que:

$$\text{cossc}^2\,\theta = 1 + \text{cotg}^2\,\theta.$$

■

1.2 Circunferência Unitária:

$$S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}, \text{ onde: } \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}.$$



Casos Particulares:

1. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

2. $\begin{cases} \cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos(\pi) = -1 \\ \sin(\pi) = 0 \end{cases}$

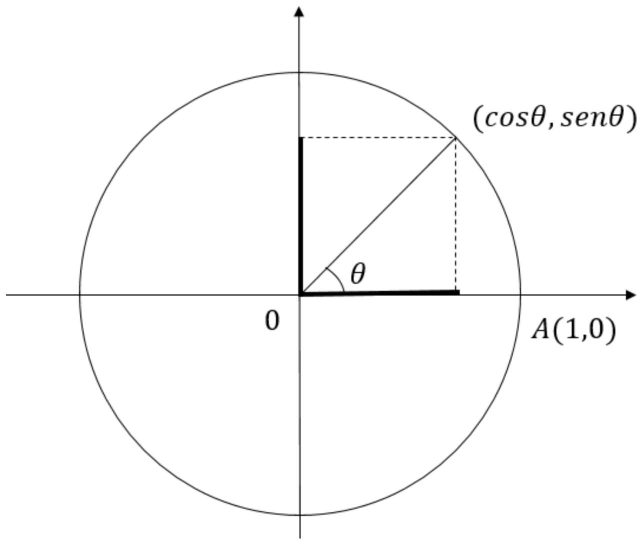
5. $\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos(2\pi) = 1 \\ \sin(2\pi) = 0 \end{cases}$

1.3 Sinais do Cosseno e Seno na Circunferência Unitária:

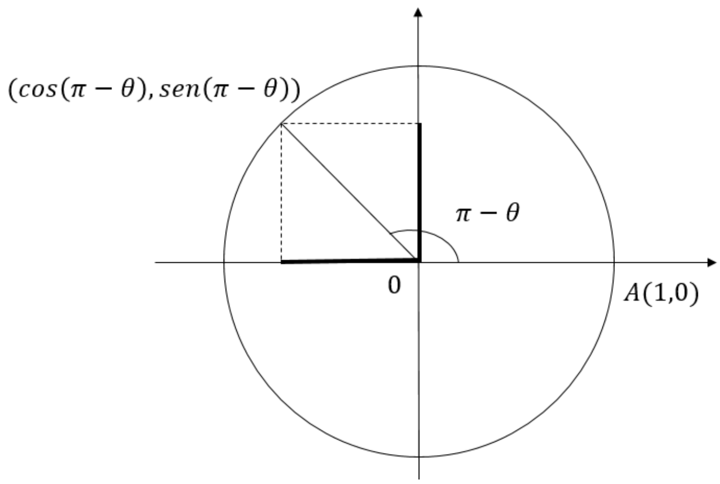
1^o caso:

A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ
e sobre y a medida do seno de θ. Assim, obtemos: $\begin{cases} x = \cos\theta > 0 \\ y = \sin\theta > 0 \end{cases}$



2^o caso:

A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ e sobre y
a medida do seno de θ. Assim, obtemos: $\begin{cases} x = \cos\theta < 0 \\ y = \sin\theta > 0 \end{cases}$

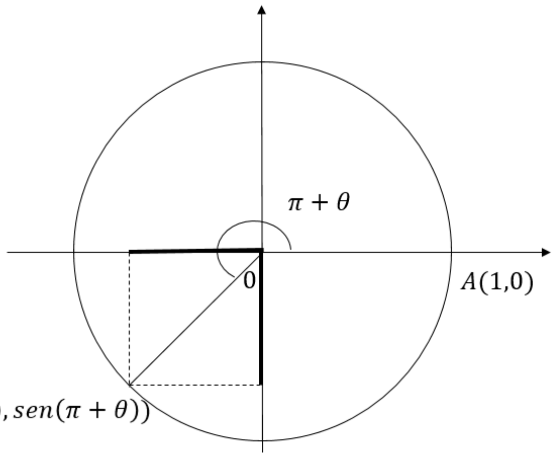


Vale ressaltar:

$$(i) \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad (ii) \quad \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

3^o caso:

Procedendo de forma análoga, temos:
A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ e sobre y a medida do seno de θ. Assim, obtemos: $\begin{cases} x = \cos\theta < 0 \\ y = \sin\theta < 0 \end{cases}$

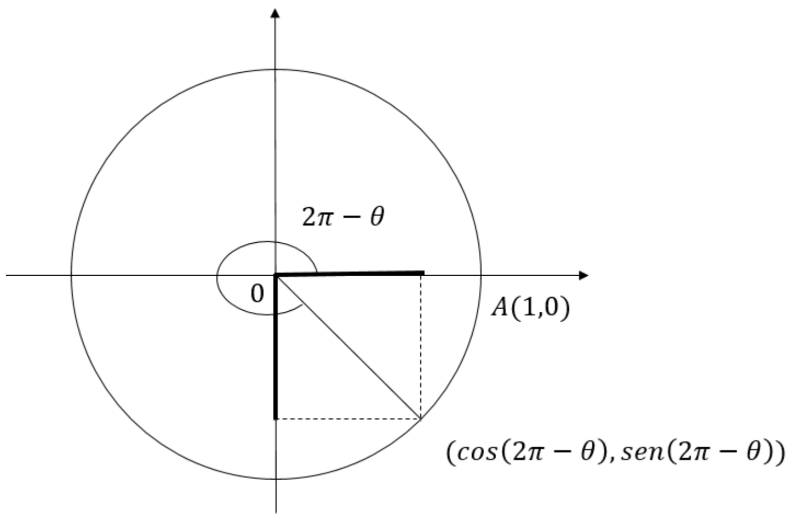


Destacando que:

$$(i) \ \ \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \qquad (ii) \ \ \sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

4^o caso:

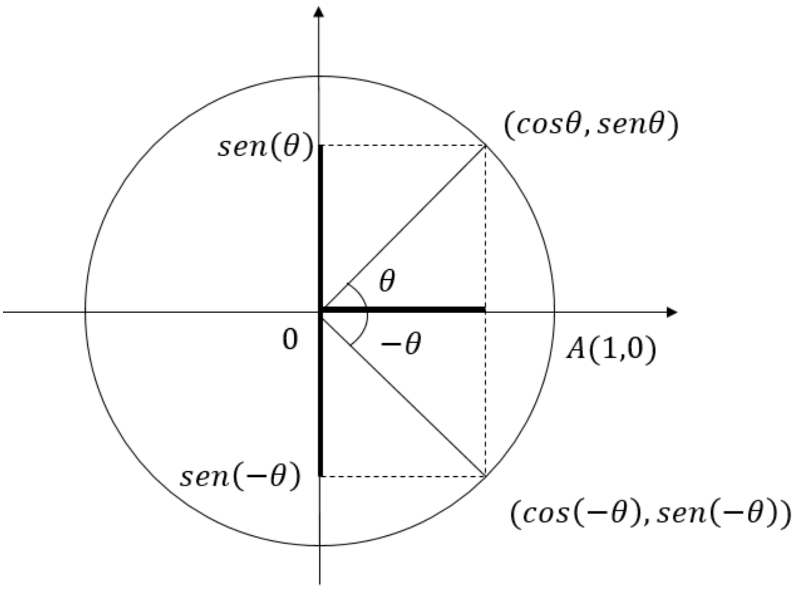
Procedendo de forma análoga, temos:
A projeção sobre o eixo x temos o cosseno do ângulo θ e sobre y a medida do seno de θ. Assim, obtemos: $\begin{cases} x = \cos\theta > 0 \\ y = \sin\theta < 0 \end{cases}$



Destacando que:

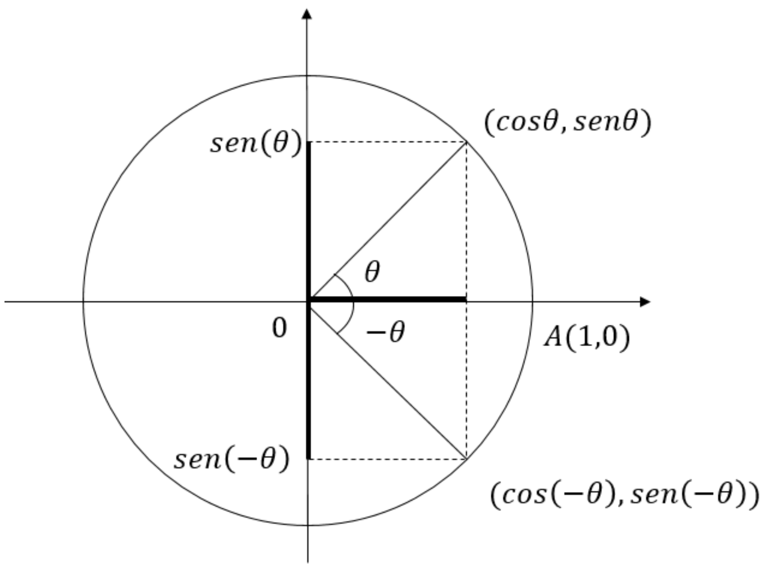
$$(i)\ \ \cos(2\pi-\theta)=\cos\theta \qquad (ii)\ \ \sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$$

5. Não esqueça!



$$(i)\ \ \cos(-\theta)=\cos\theta \qquad (ii)\ \ \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

6. Consequências:

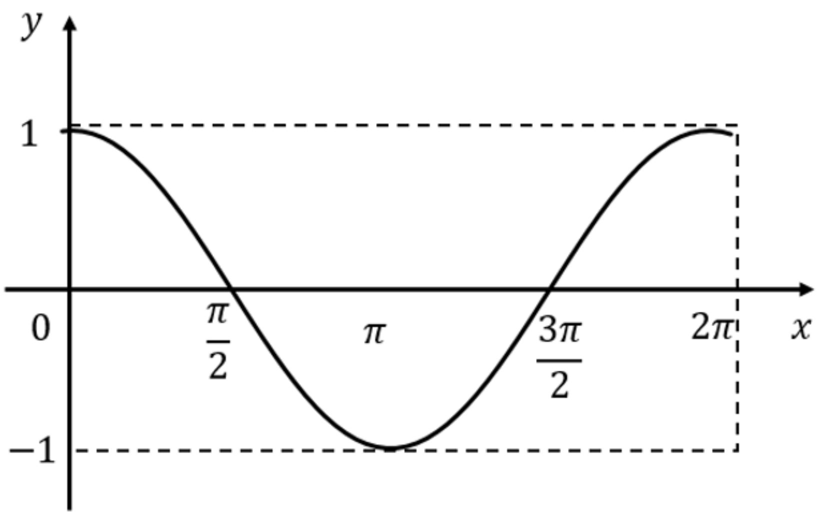


$$
\begin{array}{llll}
(i) & \sec(-\theta) = \sec\theta & (ii) & \operatorname{cossec}(-\theta) = -\operatorname{cossec}\theta \\
(iii) & \operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta & (iv) & \operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg}\theta
\end{array}
$$

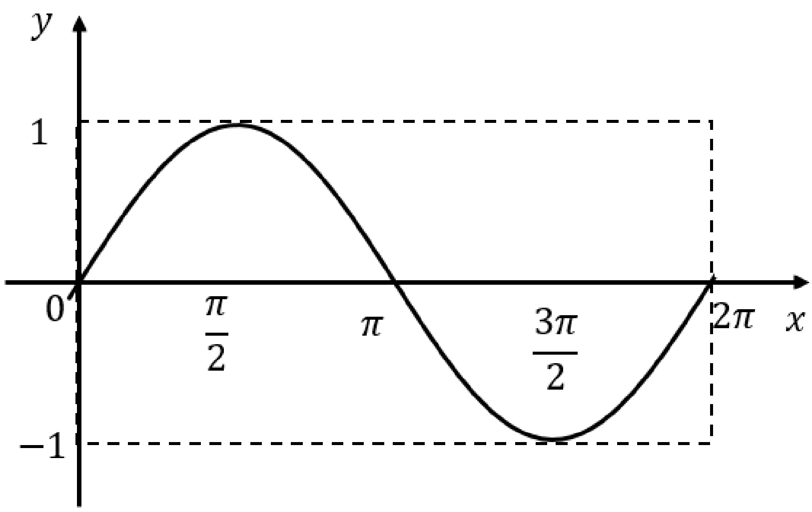
1.4 Esboço dos gráficos das funções trigonométricas seno e cosseno um perído fundamental 2π

$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ e $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

1. A função **cosseno** $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \cos x$



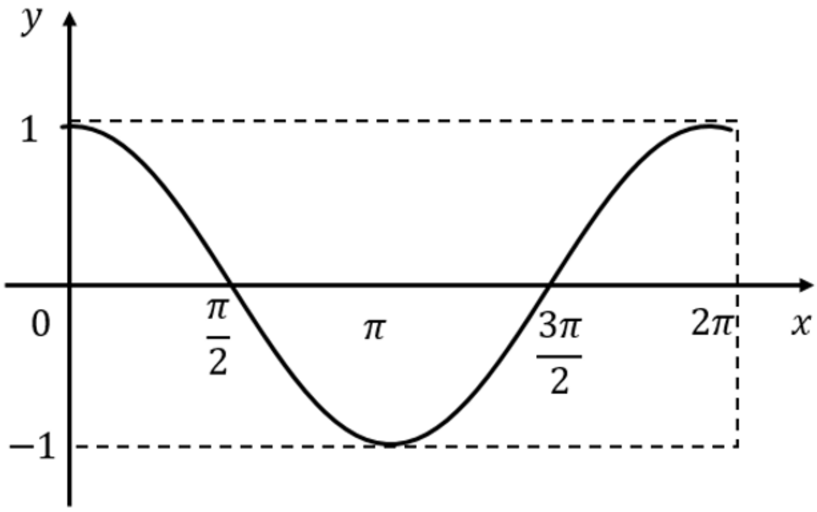
2. A função **seno** $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = \sin x$



1.5 Esboço dos gráficos das funções trigonométricas

1. A função **cosseno** $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\cos x$$

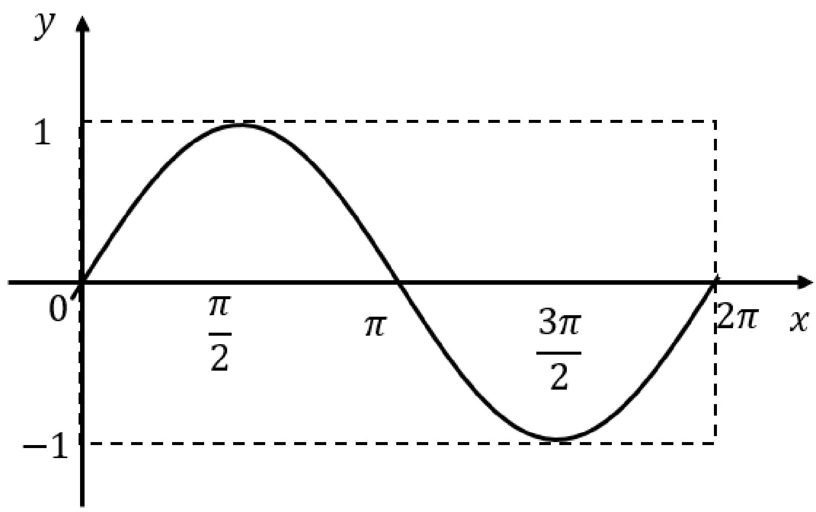


Destacamos:

(i) Domínio de $f: D(f)=\mathbb{R}$,
(ii) Imagem de $f: -1\leq \cos x\leq 1 \Longrightarrow \mathrm{Im}(f)=[-1,1]$ e
(iii) Período de $f: p(f)=2\pi$.

2. A função **seno** $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\sin x$$



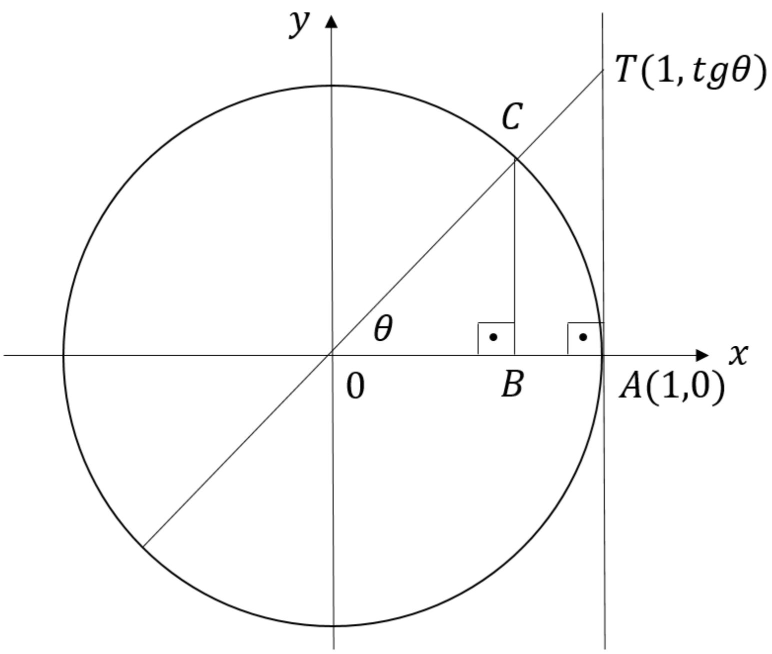
Destacamos:

(i) Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$,
(ii) Imagem de $f : -1 \leq \sin x \leq 1 \Longrightarrow \operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$ e
(iii) Período de $f : p(f) = 2\pi$.

A seguir, consideremos os triãngulos $\triangle OBC$ e $\triangle OAT$
são semelhantes pelo caso $L.A.L.$ (lado, ângulo e lado)
Daí, obtemos:

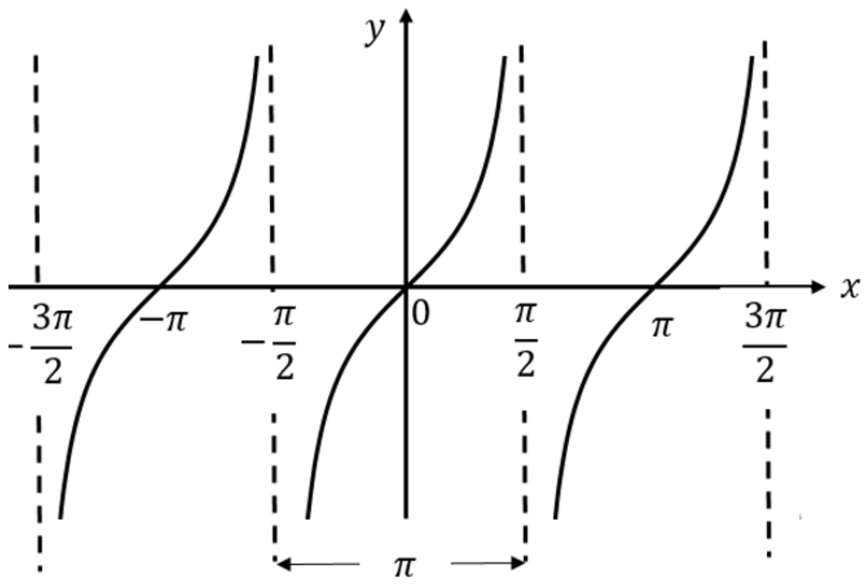
$$\triangle OBC \quad \sim \quad \triangle OAT \Longrightarrow \frac{\overline{AT}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AT}}{\sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\Longleftrightarrow \quad AT = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = tg\theta.$$

Veja figura a seguir:



3. A função **tangente** $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$,
definida por:

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

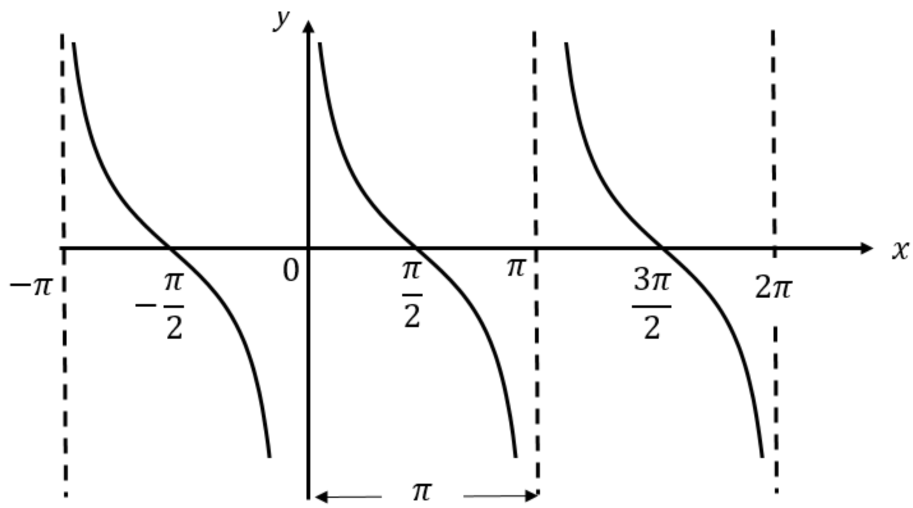


Destacando:

(i) Domínio de $f : D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f : \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e
(iii) período de $f : p(f) = \pi$.

4. A função **cotangente** $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \operatorname{cotg} x.$$



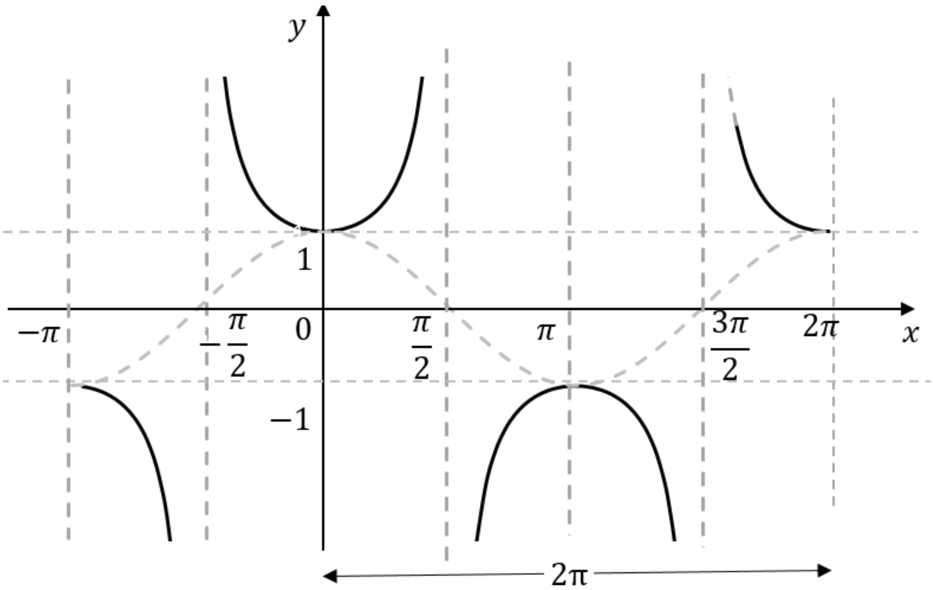
Destacando

(i) Domínio de $f : D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de $f : \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ e

(iii) período de $f : p\,(f) = \pi$.

5. A função **secante** $f : \mathbb{A} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f\,(x) = \sec x.$$

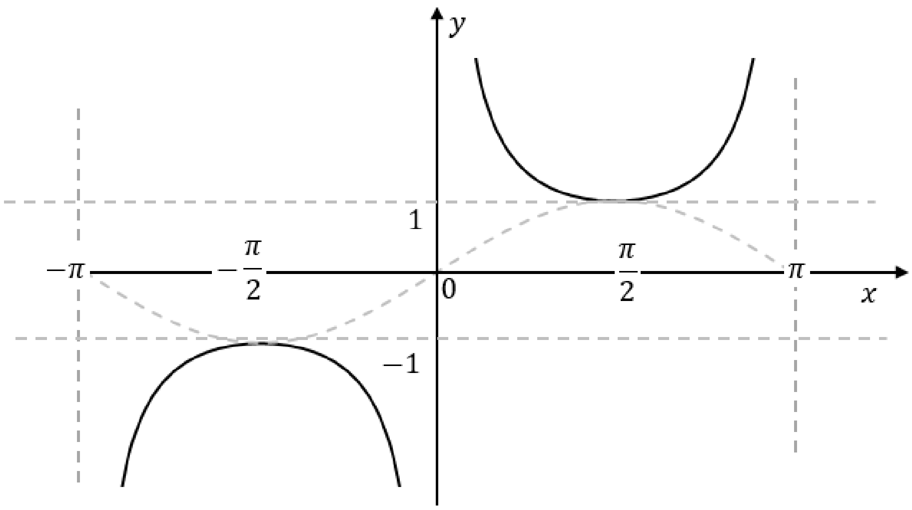


Destacando

(i) Domínio de $f : D\,(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$,
(ii) Imagem de $f : \mathrm{Im}\,(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } \; y \geq 1\}$ e
(iii) período de $f : p\,(f) = 2\pi$.

6. A função **cossecante** $f : \mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f\,(x) = \operatorname{cossec} x.$$



Destacando

(i) Domínio de $f: D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
(ii) Imagem de $f: \mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } \ y \geq 1\}$ e
(iii) período de $f: p(f) = 2\pi$.

1.6 Período de cada Função Trigonométrica dada:

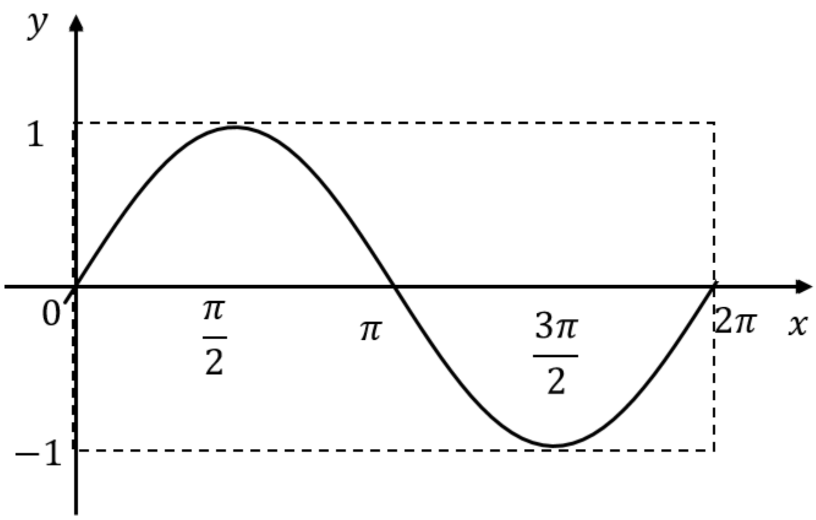
1.

$$f(x) = \sin(kx + b), k > 0 : p(f) = \frac{2\pi}{k}$$

Exemplos:

A. $f(x) = \sin(2x)$
(i)

$$y_1 = \sin x, \ p(y_1) = 2\pi$$



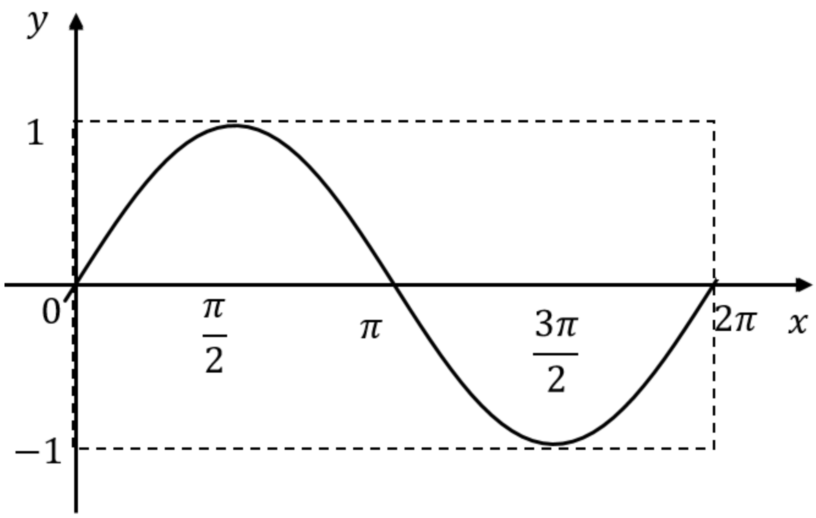
Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \mathrm{Im}(f) = [-1, 1] \end{cases}$$

(ii)

$$y_2 = \sin(2x), \ p(y_2) = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

O esboço do gráfico foi obtido do anterior, com cada ponto do gráfico de $y_1 = \sin x$ foi dividido por 2.

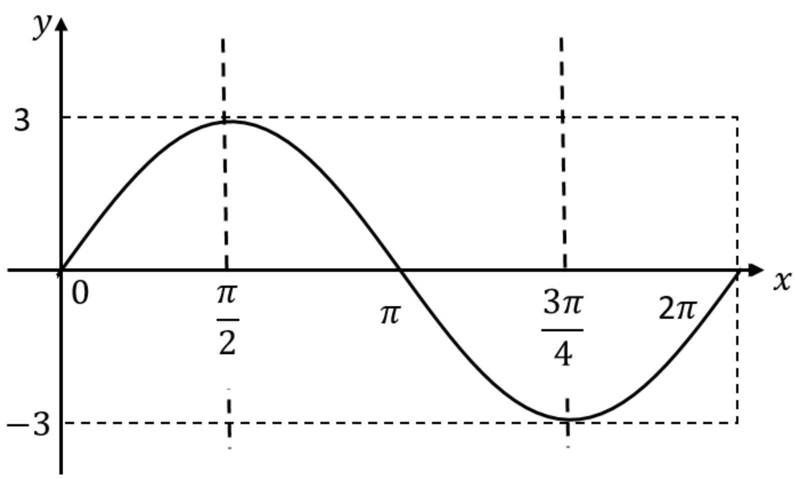


Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = \pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-1, 1] \end{cases}$$

B. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
(i)

$$y_1 = 3\sin x,\ p(y_1) = 2\pi$$



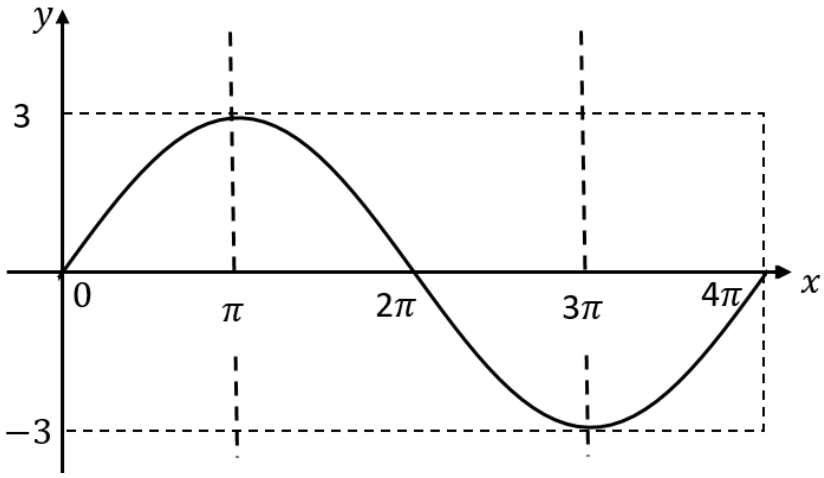
Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

(ii)

$$y_2 = 3\sin\left(\frac{1}{2}x\right),\ p(y_1) = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

O esboço deste gráfico, foi obtido, onde: cada ponto do gráfico de $y_1 = 3\sin x$ foi multiplicado por 2.



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 4\pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

2.

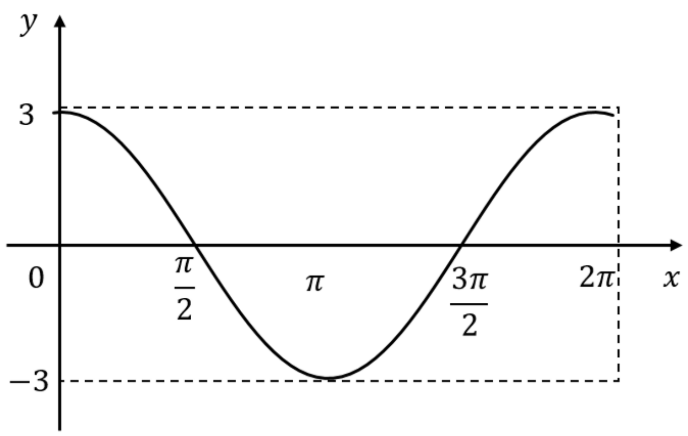
$$f(x) = \cos(kx + b), k > 0 : p(f) = \frac{2\pi}{k}$$

Exemplos:

A. $f(x) = 3\cos(4x)$

(i)

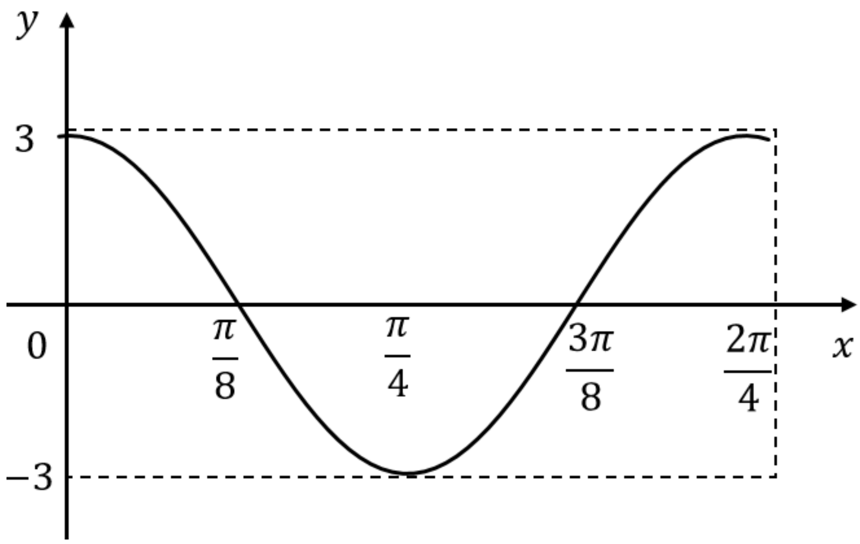
$$y_1 = 3\cos x,\ p(y_1) = 2\pi.$$



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = 2\pi \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

$$y_2 = 3\cos(4x)\,,\ p(y_2) = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



Destacando

$$\begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ p(y_2) = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im}(f) = [-3, 3] \end{cases}$$

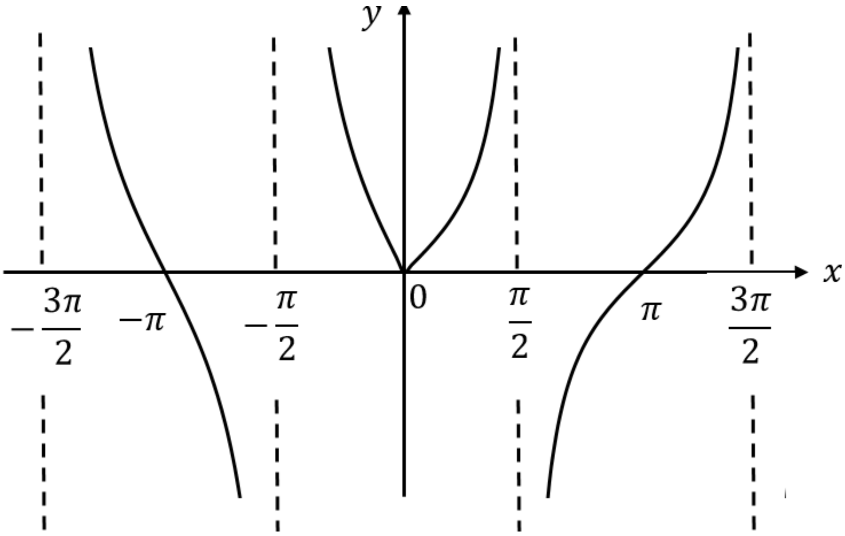
Problema:

Use translações e reflexões para esboçar o gráfico da função f, definida por:

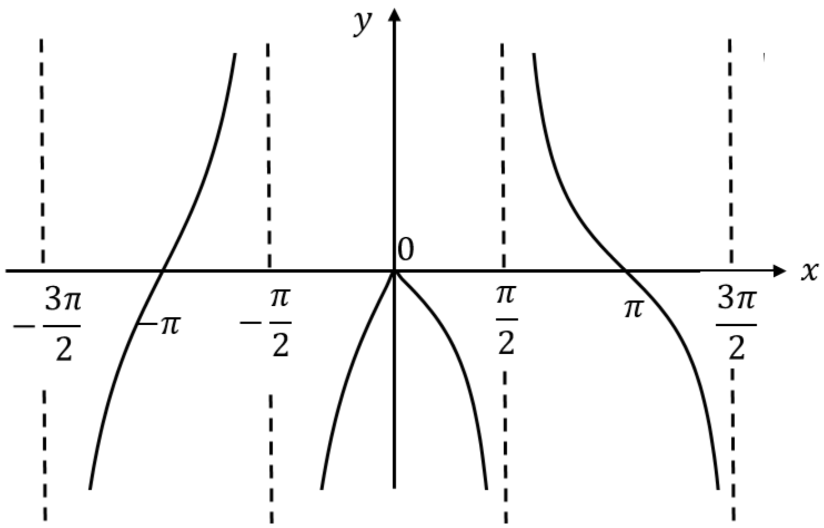
$$f(x) = |1 - 2\operatorname{tg}|x||$$

A priori, usando a definição de módulo, tem-se:

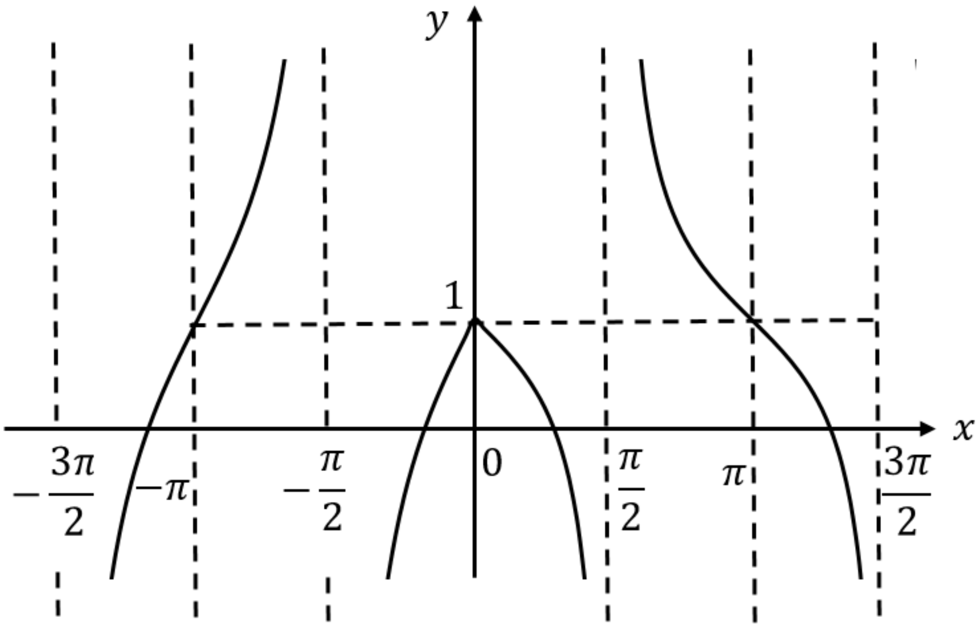
$$y_1 = 2\operatorname{tg}|x| = \begin{cases} 2\operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ 2\operatorname{tg}(-x)\,, & x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y_1 = \begin{cases} 2\operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ -2\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$



$$y_2 = -2\,\mathrm{tg}\,|x| = \begin{cases} -2\,\mathrm{tg}\,x, & x \geq 0 \\ -2\,\mathrm{tg}\,(-x), & x < 0 \end{cases} \Longleftrightarrow y_1 = \begin{cases} -2\,\mathrm{tg}\,x, & x \geq 0 \\ 2\,\mathrm{tg}\,x, & x < 0 \end{cases}$$

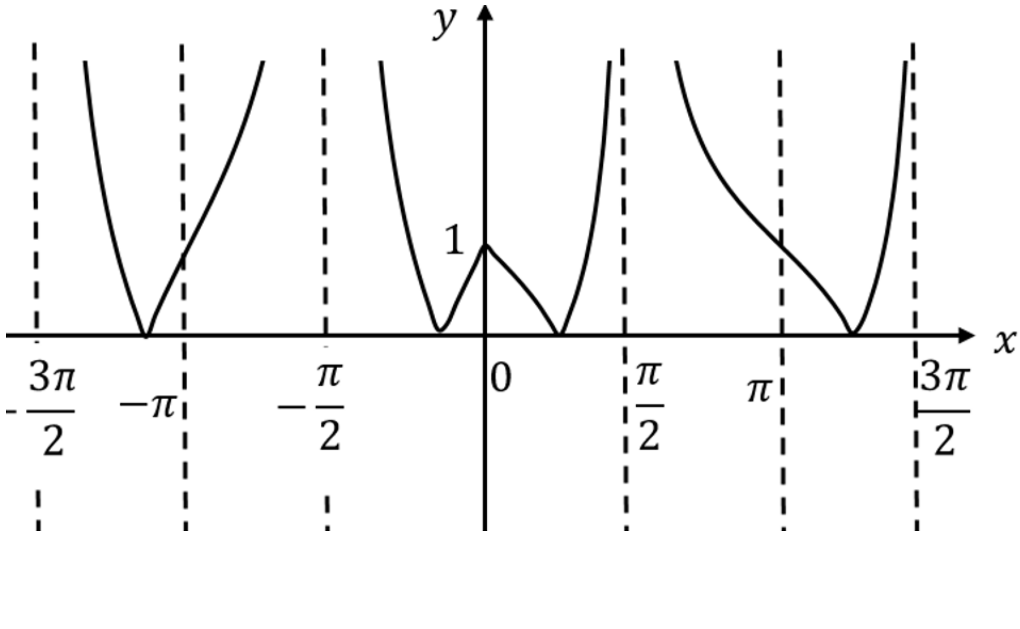


$$y_3 = 1 - 2\,\mathrm{tg}\,|x| = \begin{cases} 1 - 2\,\mathrm{tg}\,x, & x \geq 0 \\ 1 + 2\,\mathrm{tg}\,x, & x < 0 \end{cases}$$



Agora, obtemos um esboço do gráfico de f :

$$f(x) = |1 - 2\,\mathrm{tg}\,|x||$$



2 Apêndice A

2.1 A distância de um ponto à uma reta

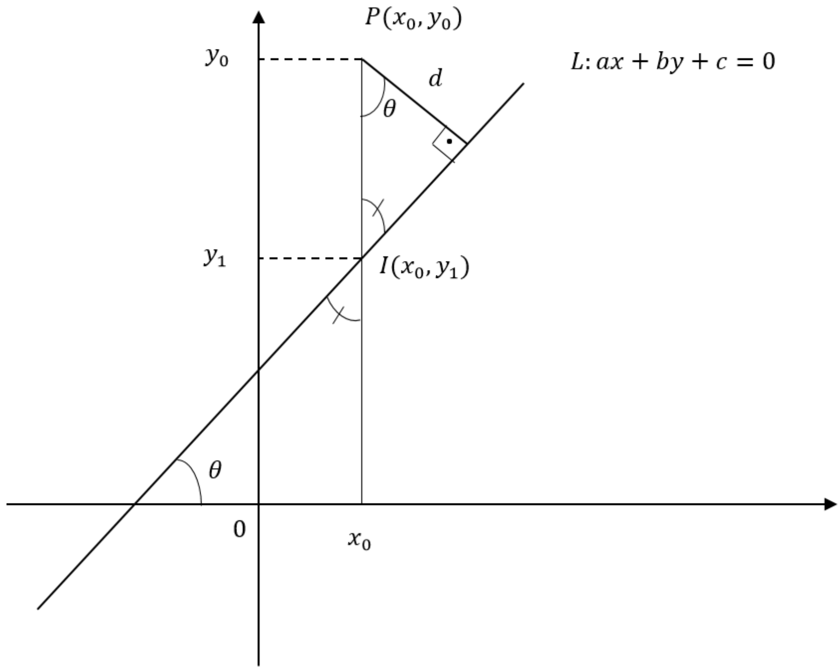
Teorema 1:

Seja $L : ax + by + c = 0$ a equação de uma reta não-vertical e seja $P_0\,(x_0, y_0) \in L$. Então, temos:

$$d\,(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Prova:

De acordo com a figura, tem-se:



$$\cos\theta = \frac{d\,(P_0, L)}{|P_0 I|} \Longrightarrow d\,(P_0, L) = |P_0 I|\,.\cos\theta \Longrightarrow d\,(P_0, L) = |y_0 - y_1|\,.\cos\theta. \tag{1}$$

Agora,

$$I\,(x_0, y_1) \in L \Longleftrightarrow ax_0 + by_0 + c = 0 \Longleftrightarrow y_0 = -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}. \tag{2}$$

Observe que:

$$tg\theta = -\frac{a}{b} \Longrightarrow 1 + tg^2\theta = \sec^2\theta = 1 + \left(-\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2},$$

ou ainda,

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|b|} \Longrightarrow \cos\theta = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

Além disso, substituindo (2) e (3) em (1), obtemos:

$$d\left(P_0, L\right) = \left|y_0 - \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right)\right| . \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c| \, . \, |b|}{|b| \, . \sqrt{a^2+b^2}}.$$

De sorte que:

$$d\left(P_0, L\right) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

■

2.2 Áreas das regiões limitadas pelos triângulos

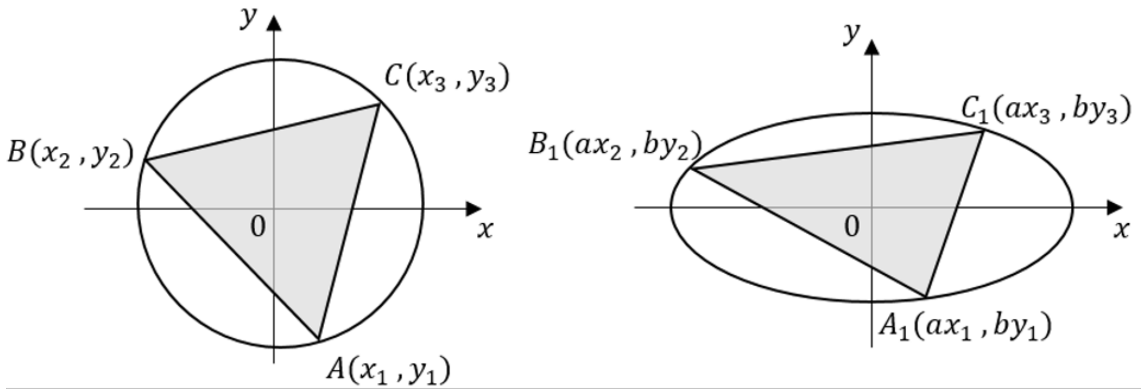
Teorema 2:

Considere $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $T\left(x, y\right) = \left(ax, ay\right)$ e seja $\mathbb{A}_1$ a área da região limitada pelo triângulo ΔABC, onde: $A\left(x_1, y_1\right)$, $B\left(x_2, y_2\right)$ e $C\left(x_3, y_3\right)$ descrita por:

$\mathbb{A}_1 = \frac{1}{2}\left|\mathbb{D}\right|$, sendo $\mathbb{D} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Então, a imagem do triângulo ΔABC por T tem área $\mathbb{A}_2$ a área da região limitada pelo triângulo $\Delta A_1B_1C_1$, onde: $A_1\left(ax_1, by_1\right)$, $B_1\left(ax_2, by_2\right)$ e $C_1\left(ax_3, by_3\right)$ dada por: $\mathbb{A}_2 = \frac{ab}{2}\left|\mathbb{D}\right|$

e

$$\frac{\text{Área}\left(\Delta A_1B_1C_1\right)}{\text{Área}\left(\Delta ABC\right)} = ab \Longleftrightarrow \text{Área}\left(\Delta A_1B_1C_1\right) = ab.\text{Área}\left(\Delta ABC\right).$$



Prova:

Basta notar que:

$$\text{Área}\left(\Delta A_1B_1C_1\right)=\frac{1}{2}.\left\|\begin{matrix} ax_1 & by_1 & 1\\ ax_2 & by_2 & 1\\ ax_3 & by_3 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}ab.\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}ab.\left|\mathbb{D}\right|$$

e

$$\text{Área}\left(\Delta ABC\right)=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\mathbb{D}\right|.$$

Daí obtemos:

$$\frac{\text{Área}\left(\Delta A_1B_1C_1\right)}{\text{Área}\left(\Delta ABC\right)}=ab.$$

Portanto,

$$\text{Área}\left(\Delta A_1B_1C_1\right)=ab.\text{Área}\left(\Delta ABC\right).$$

■

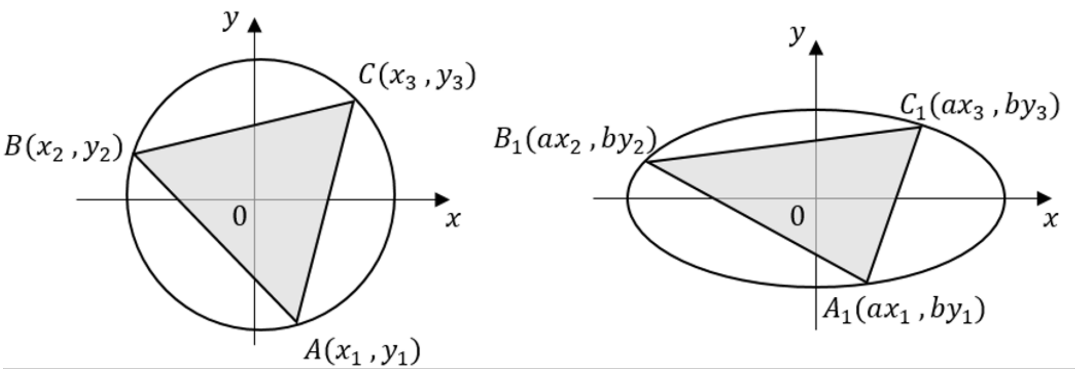
2.3 Áreas das regiões limitadas pelos triângulos inscritos na elipse e circunferência

Teorema 3:

Considere $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por: $T\left(x,y\right)=\left(ax,ay\right)$ e seja $\mathbb{A}_1$ a área da região limitada pelo triângulo ΔABC, onde: $A\left(x_1,y_1\right)$, $B\left(x_2,y_2\right)$ e $C\left(x_3,y_3\right)$ descrita por:

$\mathbb{A}_1=\frac{1}{2}\left|\mathbb{D}\right|$, sendo $\mathbb{D}=\left|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right|$. Então, a imagem do triângulo ΔABC por T tem área $\mathbb{A}_2$ da região limitada pelo triângulo $\Delta A_1B_1C_1$, onde: $A_1\left(ax_1,by_1\right)$, $B_1\left(ax_2,by_2\right)$ e $C_1\left(ax_3,by_3\right)$ dada por: $\mathbb{A}_2=\frac{ab}{2}\left|\mathbb{D}\right|$ e

$$\frac{\text{Área}\left(\Delta A_1B_1C_1\right)}{\text{Área}\left(\Delta ABC\right)}=ab\Longleftrightarrow\text{Área}\left(\Delta A_1B_1C_1\right)=ab.\text{Área}\left(\Delta ABC\right).$$



Prova:

Com efeito,

$$\text{Área}\,(\Delta ABC) = \frac{1}{2}.\left\| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\,|\mathbb{D}|\,,$$

e procedendo de forma análoga, vem:

$$\text{Área}\,(\Delta A_1B_1C_1) = \frac{1}{2}.\left\| \begin{array}{ccc} ax_1 & by_1 & 1 \\ ax_2 & by_2 & 1 \\ ax_3 & by_3 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}ab.\left\| \begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}ab.\,|\mathbb{D}|\,.$$

$$\frac{\text{Área}\,(\Delta A_1B_1C_1)}{\text{Área}\,(\Delta ABC)} = ab \Longleftrightarrow \text{Área}\,(\Delta A_1B_1C_1) = ab.\text{Área}\,(\Delta ABC)\,.$$

■

2.4 Áreas das regiões limitadas pela elipse e circunferência

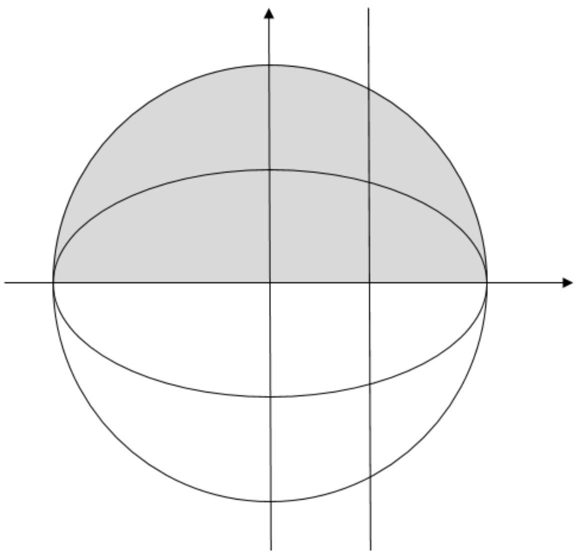
Teorema 4:

Considerando as regiões limitadas pela elipse e a circunferência, respectivamente

$$\xi : \ \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{e} \qquad \xi_1 : \ x^2 + y^2 = a^2,$$

então, tem-se:

$$\frac{\text{Área}\,(\xi)}{\text{Área}\,(\xi_1)} = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow \frac{\text{Área}\,(\xi)}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow \text{Área}\,(\xi) = \pi ab.$$



Então, tem-se que:

$$\text{Área }\ (\xi) = \pi.ab \text{ u.a.(unidade de área).}$$

Prova:

As funções que descrevem as semi-elipse e semi-circunferência, com $y \geq 0$ são dadas respectivamente por:

$$y\,(x) = \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y_1\,(x) = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Daí, a razão entre duas ordenadas correspondentes quaisquer da elipse e da circunferência é apresentada por:

$$\frac{y\,(x)}{y_1\,(x)} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Dito de outro modo, a razão entre duas cordas correspondentes quaisquer da elipse e da circunferência é dada por:

$$\frac{y\,(x)}{y_1\,(x)} = \frac{b}{a}.$$

e sabemos que a área limitada pela circunferência, é dada por:

$$\mathbb{A}_1\,(\xi_1) = \pi a^2 \text{ u.a. (unidade de área).} \tag{1}$$

Além disso, à luz do **Princípio de Cavalieri** para cálculo de área de figuras planas, obtemos

$$\frac{\text{Área}\,(\xi)}{\text{Área}\,(\xi_1)} = \frac{y\,(x)}{y_1\,(x)} = \frac{b}{a}. \tag{2}$$

Agora, substituindo (1) em (2) segue-se

$$\frac{\text{Área}\,(\xi)}{\text{Área}\,(\xi_1)} = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow \frac{\text{Área}\,(\xi)}{\pi a^2} = \frac{b}{a} \Longleftrightarrow \text{Área}\,(\xi) = \pi ab. \text{ u.a.(unidade de área)}$$

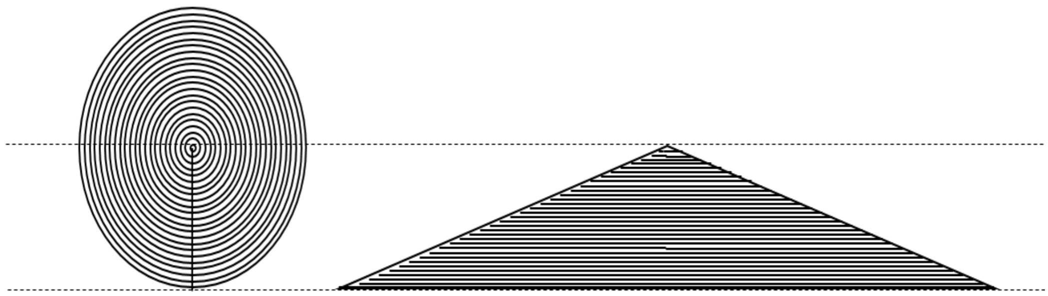
De sorte que:

$$\text{Área}\,(\xi) = \pi ab \text{ u.a.(unidade de área).}$$

■

Observação:

Usando o **Princípio de Cavalieri** para cálcular as áreas do círculo e da região limitada pelo triângulo, temos:



Note que: A base do triângulo corresponde ao comprimento da circunferência de raio "a" dada por: $B = 2\pi a$ e altura $H = a$.

Logo,

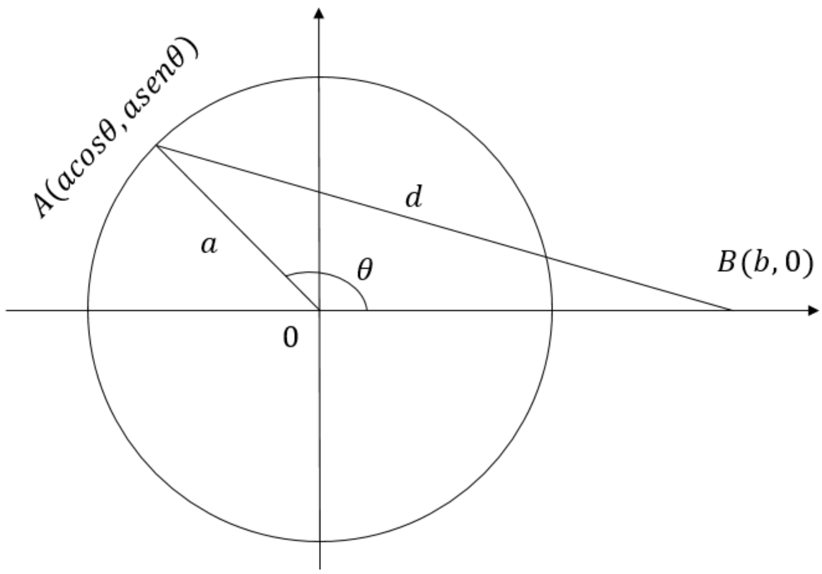
$$\mathbb{A}_1(\xi_1) = \frac{B.H}{2} = \frac{2\pi a.a}{2} = \pi a^2 \text{ u.a. (unidade de área).}$$

3 Apêndice B

3.1 Lei dos cossenos usando à distância entre dois pontos

Teorema: Seja $\theta \in \mathbb{R}$ o ângulo $A\hat{O}B$ e sejam $A\left(a\cos\theta, a\sin\theta\right)$, $B\left(b,0\right)$ em $x^2+y^2=a^2$, com $b>a$, então, temos:

$$d^2(A,B)=a^2+b^2-2a.b\cos\left(\theta\right)$$



Prova:

Basta calcular a distância entre A e B, vejamos:

$$\begin{aligned} d^2(A,B) &= \left(a\cos\theta-b\right)^2+\left(a\sin\theta-0\right)^2 \\ &= a^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)-2a.b\cos\left(\theta\right). \end{aligned}$$

Agora, como $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ segue-se que:

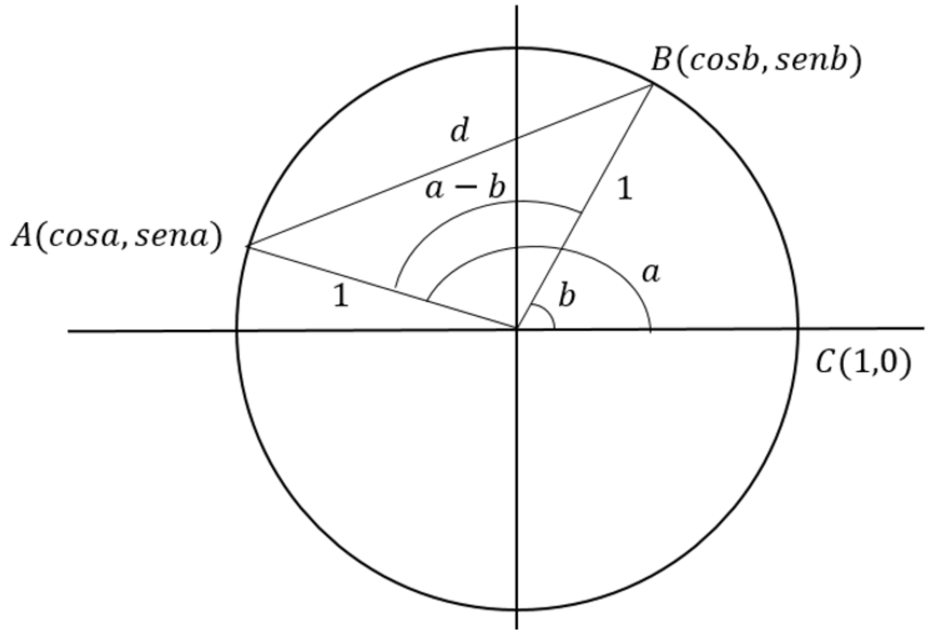
$$d^2(A,B)=a^2+b^2-2a.b\cos\left(\theta\right)$$

■

3.2 Uma prova simples do cos(a-b) usando à distância entre dois pontos e a lei dos cossenos

Teorema: Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e sejam $A(\cos a, \sin a)$, $B(\cos b, \operatorname{sen} b)$ e $C(1,0)$ em $x^2 + y^2 = 1$, então, temos:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \sin b$$



Prova:

A priori, a distância de A até B, será descrita por:

$$\begin{aligned}[d(A,B)]^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 \\ &= \left(\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a\right) + \left(\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b\right) - 2\left[\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\right] \\ &= 2 - 2\left[\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\right] \qquad (1)\end{aligned}$$

Por outro lado, a lei dos cossenos para o triângulo ΔAOB, nos dá:

$$[d(A,B)]^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos(a-b). \qquad (2)$$

Agora, comparando (1) e (2), obtem-se:

$$2 - 2\cos(a-b) = 2 - 2\left[\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\right].$$

Portanto,

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

■

Consequências:

$C_1)$ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Prova:

Com efeito,

$$\cos[a-(-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b).$$

Como $\cos(-b) = \cos b$ e $\sin(-b) = -\sin b$ segue-se que:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos(b) - \sin a \sin b.$$

■

Notação: $\sin x = \operatorname{sen} x$ (seno do ângulo x)

Consequência:

Fazendo $a = b$ em $\cos(a+b) = \cos a \cos(b) - \sin a \sin b$, obtemos:

$$a = b \Longrightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$C_2)$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Prova:

De fato,

$$\begin{aligned} \sin(a-b) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a-b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b \\ &= \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

■

$C_3)$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Prova:

De fato,

$$\sin[a-(-b)] = \sin a \cos(-b) - \sin(-b)\cos a.$$

Agora, sabendo-se que $\cos(-b) = \cos b$ e $\sin(-b) = -\sin b$, obtemos:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$\blacksquare$

Consequência:

Fazendo $a = b$ em $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, vem:

$$a = b \Longrightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos b.$$

$\blacksquare$

C_4) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b \neq \frac{\pi}{2}$, então, temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Prova:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Agora, dividindo numerador e denominador por $\cos a \cos b \neq 0$, vem:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos(b)}{\cos a \cos(b)} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\
&= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} \\
&= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

$\blacksquare$

Consequência:

Fazendo $a = b$ em $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$, obtemos:

$$a = b \Longrightarrow \operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

$\blacksquare$

C_5) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a, b \neq \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

Prova:

Basta notar que: $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg}(b)$

$$\operatorname{tg}[a + (-b)] = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

$\blacksquare$

C_6) Para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(i) \quad \cos^2 a = \tfrac{1+\cos(2a)}{2} \qquad (ii) \quad \sin^2 a = \tfrac{1-\cos(2a)}{2}$$

Prova:

Com efeito,

$$\begin{aligned} (i)\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \text{ e } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \\ &\Longrightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \left(1 - \cos^2 a\right) \\ &\Longrightarrow 2\cos^2 a = 1 + \cos(2a) \\ &\Longrightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}.$$

$\blacksquare$

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} (ii)\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \text{ e } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a \\ &\Longrightarrow \cos(2a) = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a \\ &\Longrightarrow \cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a \\ &\Longrightarrow 2\sin^2 a = 1 - \cos(2a) \\ &\Longrightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}.$$

$\blacksquare$

3.3 Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$)

(Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$)

Escreva as esquações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N(0,1)$ e $Q(u,0)$ no plano. Mostre que, além do ponto N, essa reta corta a circunferência $C: x^2 + y^2 = 1$ no ponto (x,y), onde $x = \frac{2u}{u^2+1}$ e $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$. Em seguida, escreva as equações paramétricas da reta que passa por $N(0,1)$ e pelo ponto $P(x,y)$ da circunferência $C: x^2+y^2=1$. Prove que esta reta corta o eixo das abcissas no ponto $\xi(P)=(u,0)$, onde $u=\frac{x}{1-y}$. A função $\xi: C\setminus\{N\}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por

$$\xi(P)=\xi(x,y)=u=\frac{x}{1-y},$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre $C\setminus\{N\}$ e $\mathbb{R}$, cuja inversa

$$\begin{array}{rcl} \xi^{-1} & : & \mathbb{R}\longrightarrow C\setminus\{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}(u)=(x,y), \end{array}$$

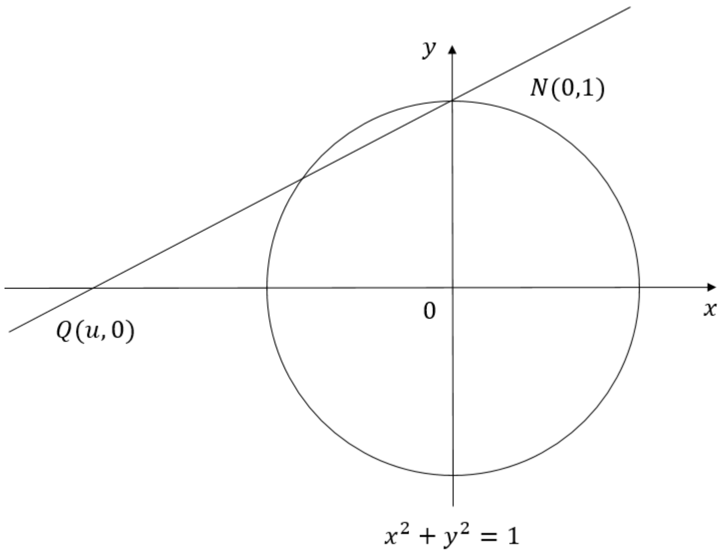
tal que:

$$\left\{\begin{array}{l} x(u)=\frac{2u}{u^2+1} \\ y(u)=\frac{u^2-1}{u^2+1} \end{array}\right. .$$

A função ξ chama-se a **projeção estereográfica** de $C\setminus\{N\}$ sobre $\mathbb{R}$, e sua inversa fornece uma outra parametrização da circunferência (exceto o "polo norte" N) por meio de funções racionais.

Prova:

Projeção Estereográfica ξ e sua inversa ξ^{-1} em $\mathbb{R}^2$.
A equação da circunferência dada por $C: x^2+y^2=1$



(i) A equação da reta L que passa por $N(0,1)$ e $Q(u,0)$, é dada por:

$$X(t)=(x(t),y(t)),\ \text{onde:}\left\{\begin{array}{l} x(t)=0+at \\ yt)=1+bt, \end{array}\right.$$

sendo $v=(a,b)=\overrightarrow{NQ}=(u,-1)$ a direção de L.
Logo, $X(t)=(x(t),y(t))=(ut,1-t)$, onde:

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=ut \\ y=1-t \end{array}\right. \tag{I}$$

.

Afirmação: $L \cap C = \{P\}$, onde:

$$P\left(x,y\right).$$

Com efeito, $u^2t^2 + \left(1-t\right)^2 = 1$, então, temos: $\left(u^2+1\right)t^2 - 2t = 0$.
Portanto,

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{u^2+1} \tag{II}$$

Agora, levando (II) em (I), obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+1} \\ y = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}$$

De sorte que: $P\left(x,y\right) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$.
(ii) A equação da reta que passa por N$(0,1)$ e $P\left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$ cujo vetor diretor é $v_0 = \overrightarrow{NP}$ é descrita por:

$$L : \begin{cases} x_0 = 0 + \frac{2u}{u^2+1}t \\ y_0 = 1 - \frac{2}{u^2+1}t \end{cases}.$$

Agora, L corta o eixo xx em $Q\left(x_0, 0\right)$.
Portanto, $\xi\left(P\right) = \xi\left(x,y\right) = \left(u,0\right)$,
onde $L : \begin{cases} x\left(t\right) = ut \\ y = 1-t \end{cases} \Longrightarrow y = 1 - \frac{x}{u} \Longrightarrow x = \left(1-y\right)u \Longrightarrow u = \frac{x}{1-y},\ y \neq 1.$
Consequentemente, vem:
A Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$, ou seja, $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$ é um isomorfismo ($C \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R}$), sendo:

$$\begin{array}{ccc} \xi & : & C \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(x,y\right) & \longmapsto & \xi\left(x,y\right) = u = \dfrac{x}{1-y}. \end{array}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{array}{ccc} \xi^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}\left(u\right) = \left(x,y\right), \end{array}$$

onde:

$$L : \begin{cases} x\left(u\right) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y\left(u\right) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}.$$

$\blacksquare$

4 Apêndice C:

Um pouco da História do Matemático Karl Friedrich Gauss

(**Capturado em 05 de setembro de 2022 às 14h 20min**)
(**https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Gauss-KF**)

Matemático, astrônomo e físico alemão, criador da geometria diferencial, conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos", a ele se devem importantíssimos estudos de matemática, física, geometria e astronomia. Entre outras coisas, desenhou o heptadecágono, inventou o telégrafo e definiu o conceito de números complexos.

Karl Friedrich Gauss nasceu a 30 de Abril de 1777 em Brunswick, Alemanha. Filho de uma família humilde, desde muito cedo foi visto como uma criança prodígio. Aprendeu a ler e a somar sozinho. Aos três anos corrigiu um erro do pai quando este calculava os salários dos operários.

Quando estudava na escola primária, o professor pediu aos alunos que tentassem resolver a soma de todos os números compreendidos entre 1 e 100. O professor pensou que assim iria manter os alunos ocupados durante um bom tempo mas, para seu espanto, em poucos minutos Gauss resolveu o problema.

Gauss conseguiu chegar ao resultado correto porque reparou que somando todos os pares $1 + 100; 2 + 99; 3 + 98; \ldots 50 + 51$ somavam sempre 101 então, a soma de todos os pares seria $50x101 = 5050$. Desta forma encontrou, sem saber, a propriedade da simetria das progressões aritméticas.

A fama de Gauss chegou aos ouvidos do Duque de Brunswick, o qual lhe facilitou recursos econômicos para que Gauss continuasse os seus estudos, pois era um desperdício este jovem rapaz não continuar a estudar. Em 1795 frequentou a Universidade de Göttingen. Em 1796 descobriu o método de desenhar com régua e compasso o heptadecágono, polígono com 17 lados, que desde o tempo dos gregos os geometras tentavam desenhar. Publicou Disquisitiones Arithmeticae em 1801, que é um dos livros de matemática mais importante da história da matemática, no qual reúne as ideias que desenvolveu desde os 17 anos de idade. Entre elas está a demonstração matemática de que é possível desenhar alguns polígonos regulares utilizando apenas esquadros e compasso, mas não qualquer polígono. Ainda nesta obra Gauss apresenta a lei de reciprocidade quadrática, classificada por ele, como a "jóia da aritmética" e demonstrado o teorema segundo o qual todo inteiro positivo pode ser representado de uma só maneira como produto de primos.

No começo do século XIX abandonou a aritmética para se dedicar á astronomia, criando um método para acompanhar a órbita dos satélites, usado até hoje.

Obteve o doutoramento na Universidade de Helmstädt, tendo começado em 1807 a leccionou como professor de astronomia (apesar de detestar dar aulas) e director do Observatório de Göttingen, durante 40 anos.

Desenvolveu o método dos mínimos quadrados em 1812 que, aplicado na resolução das distribuições de probabilidade nos campos da mecânica, estatística e economia, e na abordagem da forma das superfícies curvas mediante expressões matemáticas, permitiu-lhe determinar pela primeira vez o tamanho e forma aproximados da Terra. Em 1833 com a ajuda de Weber construiu o primeiro telégrafo o qual só foi usado entre a sua casa e o observatório de Göttingen.

No campo da Estatística, Gauss é famoso pela descoberta da distribuição normal, também conhecida pela distribuição Gaussiana, que trata da distribuição de certos valores ao longo de uma curva em forma de sino (contribuição extremamente valiosa no campo da estatística).

Gauss foi nomeado membro da Royal Society em 1804 e recebeu Medalha de Copley em 1838. Publicou várias obras entre as quais Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium em 1809; Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi em 1816; Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae em 1823.

Casou aos 23 anos, com Johanna Osthoff, que faleceu ao dar à luz o seu terceiro filho. Casou novamente em 1810, tendo tido mais três filhos, um rapaz e duas raparigas. A sua segunda esposa faleceu em 1831.

A 23 de Fevereiro de 1855, aos 78 anos de idade, Gauss morre durante o sono, vítima de uma doença prolongada. Deixou-nos como recordação o seu trabalho imenso que viverá para sempre na matemática, fruto do mais extraordinário espírito matemático de todos os tempos.

.

5 lNúmeros Complexos

Nos textos do Ensino Médio, em geral, são apresentados os números complexos a forma $z = (a, b)$ ou algébrica $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, onde: $i^2 = -1$ e $i = (0, 1)$, **é necessário fé, para aceita a identificação**

$$z = (a, b) \simeq a + bi$$

Problema:

A equação $x^2 + a = 0$, $a > 0$ não é solúvel em $\mathbb{R}$. Construir um corpo $\mathbb{C}$ que contenha um subcorpo $\varnothing \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, onde $\mathbb{S}$ seja isomorfo a $\mathbb{R}$ e a equação $x^2 + a = 0$, $a > 0$ seja solúvel.

Lema 1:

Seja $\varnothing \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, onde:

$$\mathbb{S} = \left\{ (a_o, 0) \in \mathbb{R}^2 : a_o \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}$ onde : $\mathbb{S}$ é isomorfo **"a grosso modo bijetora"** a $\mathbb{R}$.

De fato, $\langle \mathbb{S}, +, \cdot \rangle$ é fechado
$+ : (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in \mathbb{S}$.
$\cdot : (a, 0) . (b, 0,) = (a.b - 0.0, a.0 + 0.b) = (ab, 0) \in \mathbb{S}$.
De sorte que: $\mathbb{S}$ é fechado.

$\blacksquare$

Consideremos $\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi\,(x, 0) = x.$$

Afirmação 1: Φ é um homomorfismo

Basta notar que:

$$\begin{aligned}(i)\ \Phi((a,0)+(b,0)) &= \Phi(a+b,0)=a+b=\Phi(a,0)+\Phi(b,0)\\ (ii)\ \Phi((a,0).(b,0)) &= \Phi(a.b,0)=a.b=\Phi(a,0).\Phi(b,0).\end{aligned}$$

Portanto, Φ é um homomorfismo.

$\blacksquare$

Afirmação 2: Φ é injetora.

De fato,

$$\Phi(a_o,0)=\Phi(b_o,0)\Rightarrow a_o=b_o\Rightarrow(a_o,0)=(b_o,0)$$

Usando uma equivalência tautológica, temos:

$$a_o\neq b_o\Rightarrow(a_o,0)\neq(b_o,0)\Rightarrow\Phi(a_o,0)\neq\Phi(b_o,0).$$

Logo, Φ é injetora.

Afirmação 3: Φ é sobrejetora.

Com efeito, note que:

$$\forall m_o\in\mathbb{R},\ \exists(m_o,0)\in\mathbb{S}:\Phi(m_o,0)=m_o.$$

ou ainda, Φ é sobrejetora.
Por conseguinte, vem : Φ é bijetora.

$\blacksquare$

Note que:
(A) $(a,0)\simeq a$
(B) $(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi$
(C) $i^2=(0,1).(0,1)=(0.0-1.1,0.1+1.0)=(-1,0)\simeq-1.$
De sorte que: $z=(a,b)\simeq a+bi$, onde $\mathrm{Re}(z)=a$ e $\mathrm{Im}(z)=b$.

6 $P_1(\mathbb{R})-$ Subespaço dos polinômios de grau menor do que ou igual a 1, com entradas reais.

$$\mathbb{W}_1=\{p(x)=ax+b\in\mathbb{P}_1(\mathbb{R})\ \ a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Desta forma, temos:

$$p(x)=ax^1+bx^0\in\mathbb{P}_1(\mathbb{R}).$$

Dito de outro modo, no subespaço $\mathbb{W}_1$, temos todos os casos particulares de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, a saber:

(i) $0\,(x) = 0x + 0 \in \mathbb{P}_1\,(\mathbb{R})$ (polinômio identicamente nulo).
(ii) $p\,(x) = bx^0 = b$ (polinômio constante ou de grau zero) $\in \mathbb{P}_0\,(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
(neste caso)
(iii) $p\,(x) = ax$ polinômio
(a rigor seria função polinomial na indeterminada x) passando pela origem, também chamado de função linear no sentido da álgebra linear; não por ser reta, $p\,(x) \in \mathbb{P}_1\,(\mathbb{R})$, dito de outro modo, temos:

$$\mathbb{W}_0 = \{p\,(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1\,(\mathbb{R})\,;\ b = 0\}\,,$$

onde: $\mathbb{W}_0$ é um subespaço de $\mathbb{P}_1\,(\mathbb{R})$ e finalmente o subespaço

$$\mathbb{W}_1 = \{p\,(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1\,(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}\,,$$

englobando todos os casos anteriores e mesmo sendo uma reta,

$$p\,(x) = ax + b = f\,(x)$$

conhecida no ensino médio como como fução afim, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
O matemático, Elon Lages Lima, aborda

$$p\,(x) = ax + b = f\,(x)\,,\ \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Olhando como um subespaço $\mathbb{W}_1$ de polinômios de grau no máximo 1.
(**Terão oportunidade de estudar detalhadamente num curso de Álgebra Linear**)

Em geral quando falamos de função afim ou função polinomial do 1^o grau (**Alguns textos do ensino Médio chama de função do 1^o grau, sabemos que: função não tem grau**) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

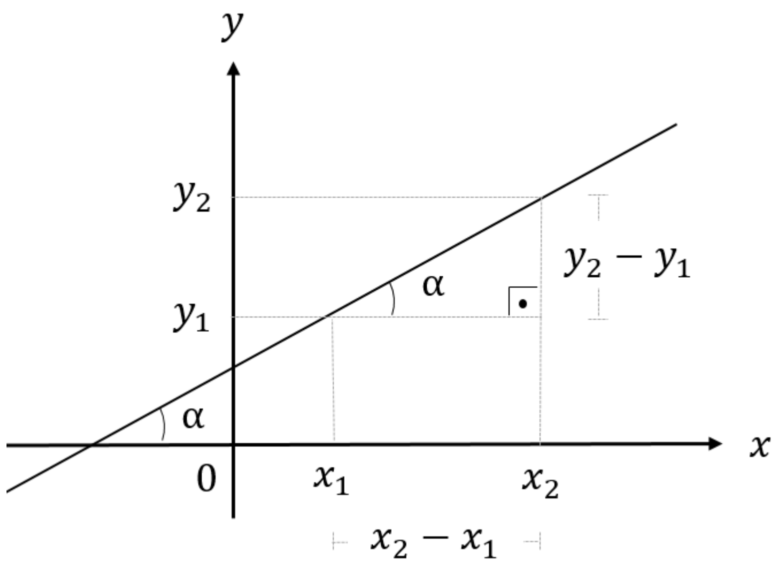
$$f\,(x) = ax + b$$

seria melhor dizer taxa de variação.

$$q\,(x) = \frac{f\,(x) - f\,(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \frac{a\,(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

deixar o termo coeficiente angular da reta para

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$


y
y_2
$y_2 - y_1$
α
y_1
α
x
0
x_1
x_2
$x_2 - x_1$

7 Apêndice D: Nem tudo são flores

Como diz o matemático Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais:
em seu livro, Manual de Redação Matemática: Sociedade Brasileira de Matemática: SBM, 2018.

"Cuidado para definir realmente aquilo que se deseja: Não compre nem venda gato por lebre"

No Ensino Médio, é comum os textos afirmarem: toda função trigonométrica periódica é periódica, podemos ter $f_1(x) = \sin x$ e $f_2(x) = \sin(\alpha x)$, com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (irraciona).

" Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são períodicas."

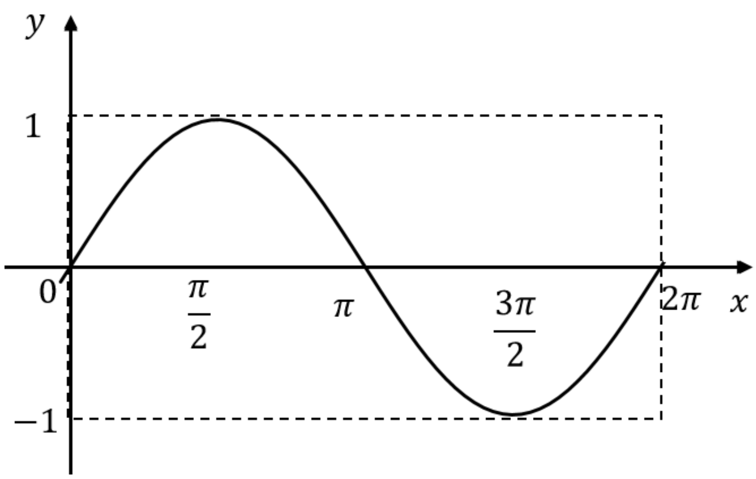
Refletindo um pouco sobre o tema, se encontra um contra-exemplo, basta escolher, de forma mais geral, escolhendo $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional), podemos caracterizar infinitos contra-exemplos, para tanto, basta mudar o valor do α

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional). Mostre que: f não é uma função periódica.

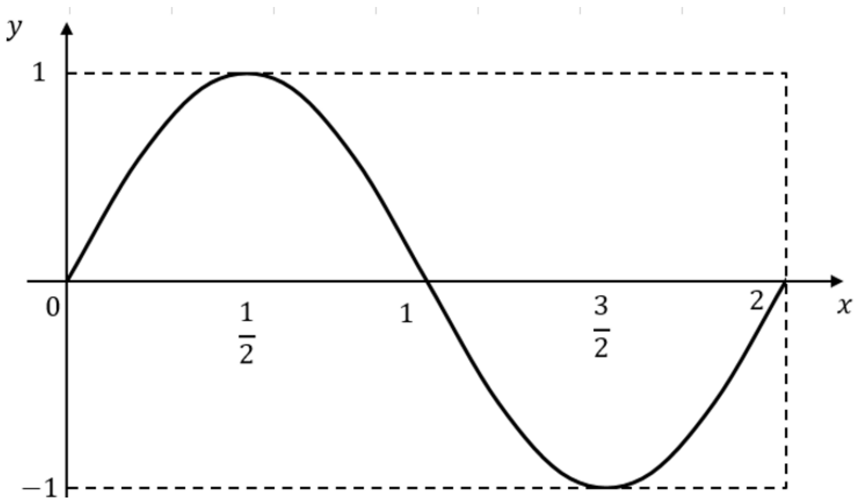
A priori, considere duas funções periódicas, por exemplos:

(i) $f(x) = \sin x$,com período fundamental $p(f) = 2\pi$



e seja $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional), em particular, escolha $\alpha = \pi$ e a função g dada por:

(ii) $g(x) = \sin(\pi x)$, com período fundamental é $p(f) = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.



Generalizando g com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}($ irracional $)$, temos:

$$g(x) = \sin(\alpha x), \ \alpha > 0$$

Afirmação:

Seja g com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}($ irracional $)$, a função definida por:

$$g(x) = \sin(\alpha x), \ \alpha > 0.$$

Então, g é periódica e tem período fundamental:

$$p(g) = \frac{2\pi}{\alpha}$$

Prova:

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \Longleftrightarrow f(x+p) - f(x) = 0 \\ \sin(\alpha x + \alpha p) &= \sin(\alpha x) \Longleftrightarrow [\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] = 0. \end{aligned}$$

Note que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{array} \right. \Longrightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a.$$

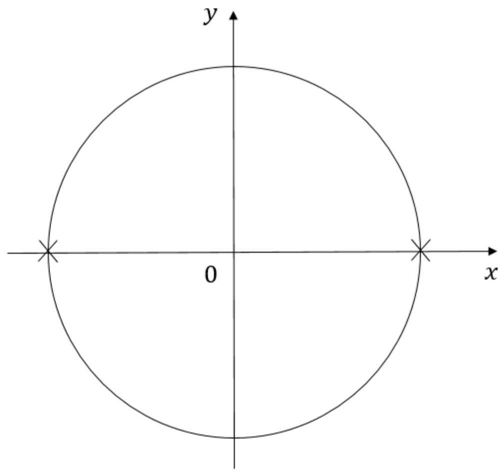
Agora, fazendo $\left\{ \begin{array}{l} a+b=u \\ a-b=v \end{array} \right.$, obtemos: $\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{u-v}{2} \end{array} \right.$. Assim.

$$\sin(u) - \sin(v) = 2 \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \cos\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

$$
\begin{aligned}
[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] &= 0 \\
2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) &= 0 \\
\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Se $\alpha x = \frac{\pi}{2}$, então,

$$
\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0
$$



$x^2 + y^2 = 1$

$$
\Longrightarrow \frac{\alpha p}{2} = k_1\pi \Longrightarrow \alpha p = 2k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}, \Longrightarrow p = \frac{2k_1\pi}{\alpha}, k_1 \in \mathbb{Z},
$$

De sorte que f é periódica. Além disso, o menor valor positivo de p é quando $k_1 = 1$.
Logo, o período fundamental da função g é:

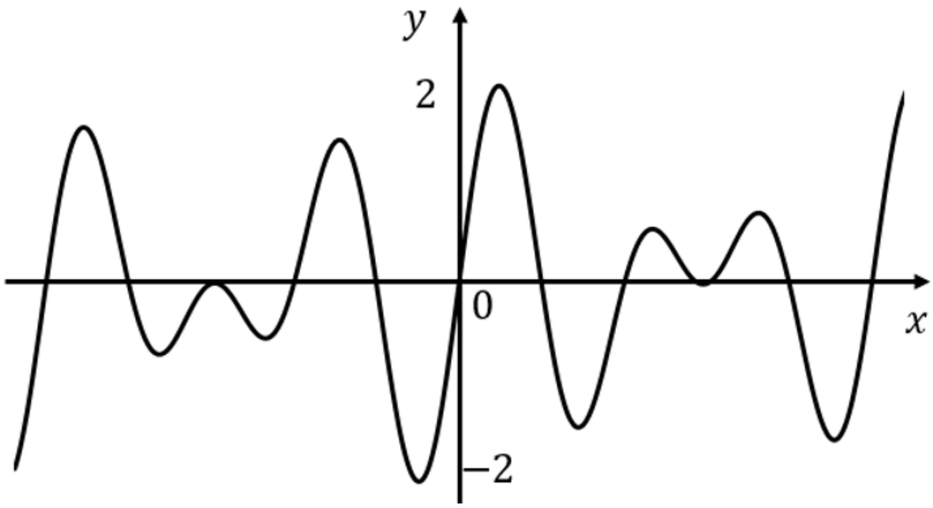
$$
p = \frac{2\pi}{\alpha}.
$$

■

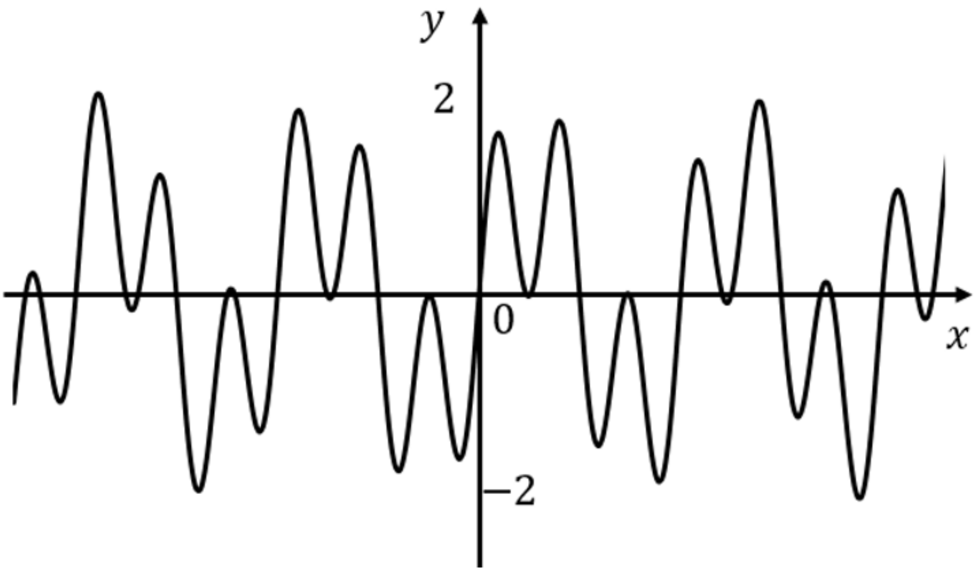
Algumas simulações com valores de $\alpha \in R \backslash Q$, onde:

$$
f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),
$$

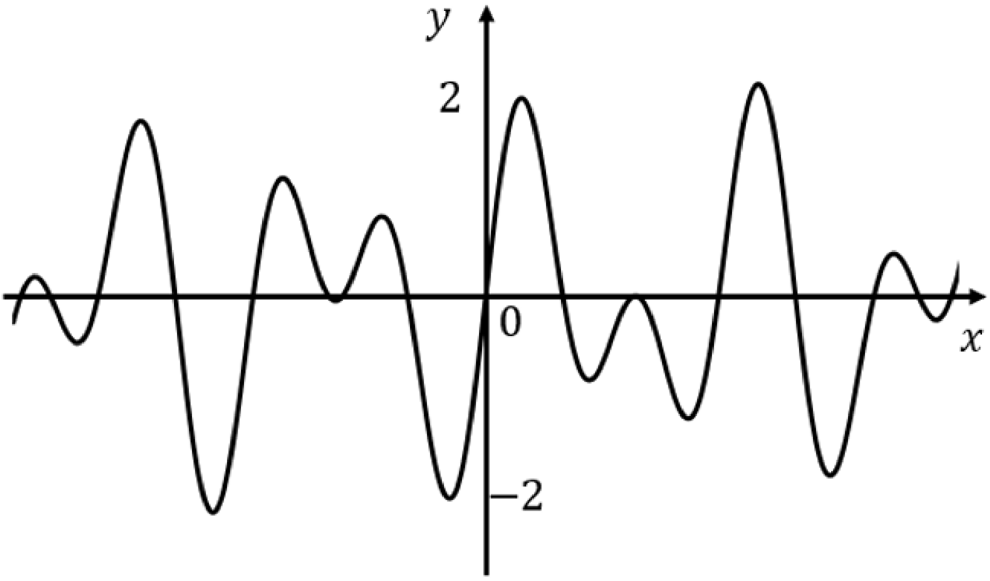
1. $f(x) = \sin x + \sin\left(\sqrt{2}x\right)$, $\alpha = \sqrt{2}$.



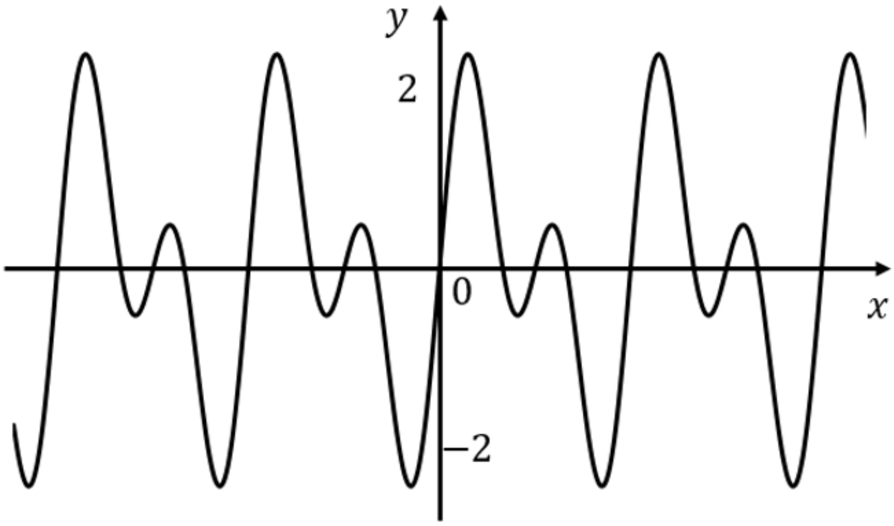
2. $f(x) = \sin x + \sin(\pi x)$, $\alpha = \pi$.



3. $f(x) = \sin x + \sin\left(\sqrt{3}x\right)$, $\alpha = \sqrt{3}$.



4. $f(x) = \sin x + \sin(2x)$ esta função é periódica.



Depois de algumas simulações, vamos arriscar um palpite ou inferir que seja provável (conjecturar). Será que a função f , definida por:

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$(irracional) é não periódica?

Conjectura:

Seja f uma função definida por:

$$f(x) = \sin x + \sin(\alpha x),$$

com $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}($ irracional $)$. f não é uma função periódica.

Prova:

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \\ \sin(x+p) + \sin(\alpha x + \alpha p) &= \sin x + \sin(\alpha x) \Longleftrightarrow \\ \sin(x+p) - \sin x &= -[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)]. \qquad (I) \end{aligned}$$

Vale a pena observar que:

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a. \end{cases} \Longrightarrow \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b \cos a.$$

Agora, fazendo $\begin{cases} a+b=u \\ a-b=v \end{cases}$, obtemos:$\begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{u-v}{2} \end{cases}$. Assim.

$$\sin(u) - \sin(v) = 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sin(u) - \sin(v) &= 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right). \\ \sin(x+p) - \sin x &= 2\sin\left(\frac{x+p-x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+p}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{p}{2}\right)\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

e de forma análoga, temos:

$$\begin{aligned} \sin(u) - \sin(v) &= 2\sin\left(\frac{u-v}{2}\right)\cos\left(\frac{u+v}{2}\right). \\ -[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] &= -2\left[\sin\left(\frac{(\alpha x + \alpha p) - \alpha x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha x + \alpha p + \alpha x}{2}\right)\right] \\ &= 2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right)\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right). \qquad (2) \end{aligned}$$

Agora, levando

$$\begin{aligned} \sin(x+p) - \sin x &= -[\sin(\alpha x + \alpha p) - \sin(\alpha x)] \\ 2\sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) &= -2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x + \frac{\alpha p}{2}\right). \\ \sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos(x) &= -\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos(\alpha x). \end{aligned}$$

Se $x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\alpha p}{2} = k_1\pi \Longrightarrow \alpha p = 2k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$,
por outro lado, temos:
Se $\alpha x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{p}{2} = k_2\pi \Longrightarrow p = 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$.
Daí, vem: $\alpha 2k_2\pi = 2k_1\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{k_1}{k_2}$, com $k_2 \neq 0$. Absurdo! Visto que: α é irracional.
De sorte que f não é periódica.

■

7.1 Algumas proposições sobre funções periódicas:

Proposição 1 *:*

Seja f uma função periódica de período $p > 0$ e seja $g(x) = f(ax)$, com $a > 0$, então, g é periódica de período $\frac{p}{a}$.

Prova:

Com efeito, f uma função periódica de período $p > 0$, então, tem-se:

$$f(ax + p) = f(ax),$$

para todo $x \in D(f)$ (domínio de f).
Agora,

$$g\left(x + \frac{p}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{p}{a}\right)\right] = f(ax + p) = f(ax) = g(x).$$

De sorte que: g é periódica de período $\frac{p}{a}$. ■

Proposição 2 *:*

Seja f uma função periódica de período $p > 0$ e seja $g(x) = f(ax + b)$, com $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$, então, g é periódica de período $\frac{p}{a}$.

Prova:

Com efeito, f uma função periódica de período $p > 0$, então, tem-se:

$$f((ax + b) + p) = f(ax + b),$$

para todo $x \in D(f)$ (domínio de f).
Agora,

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{p}{a}\right) &= f\left[a\left(x + \frac{p}{a}\right) + b\right] = f((ax + p) + b) \\ &= f((ax + b) + p) = f(ax + b) = g(x). \end{aligned}$$

Portanto, g é periódica de período $\frac{p}{a}$. ■

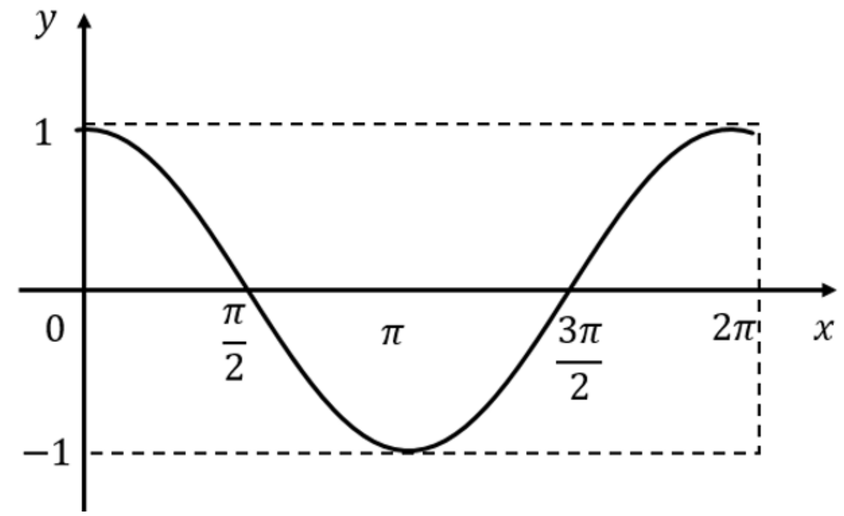
Exemplos:

1. $f(x) = \cos(2x)$, período de f :

$$p(f) = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

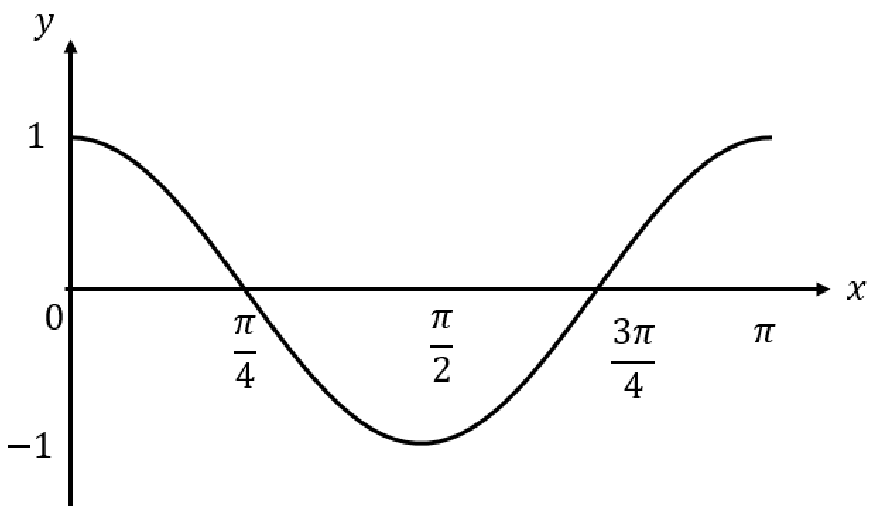
Façamos os esboços gráficos de $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \cos(2x)$. Salientando que: y_2 é obtido de y_1 dividindo cada ponto do gráfico deste por 2. Vejamos

(i) $y_1 = \cos x$



(ii) $y_2 = \cos(2x)$
Observe que p período de y_2 é:

$$p(y_2) = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



Destacando:

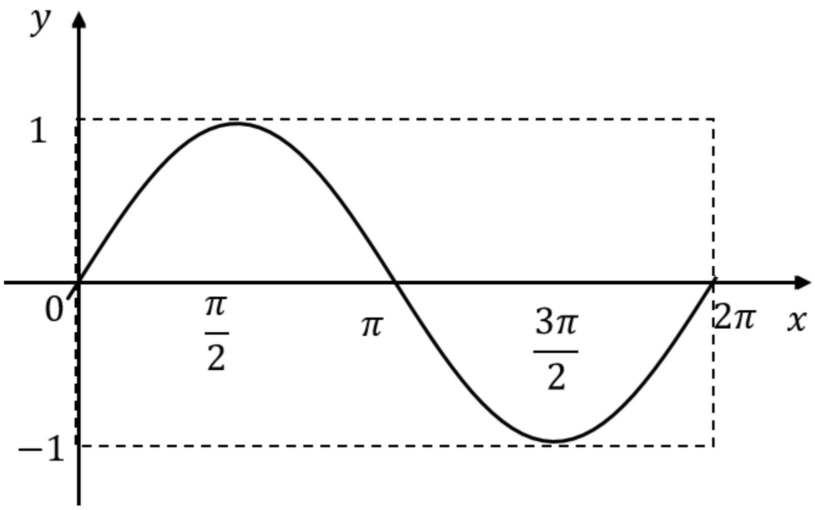
Domínio de $f : D(f) = \mathbb{R}$
Imagem de $f : \text{Im}(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$.
Período de $f : p(f) = \pi$. ■

2. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, período de f :

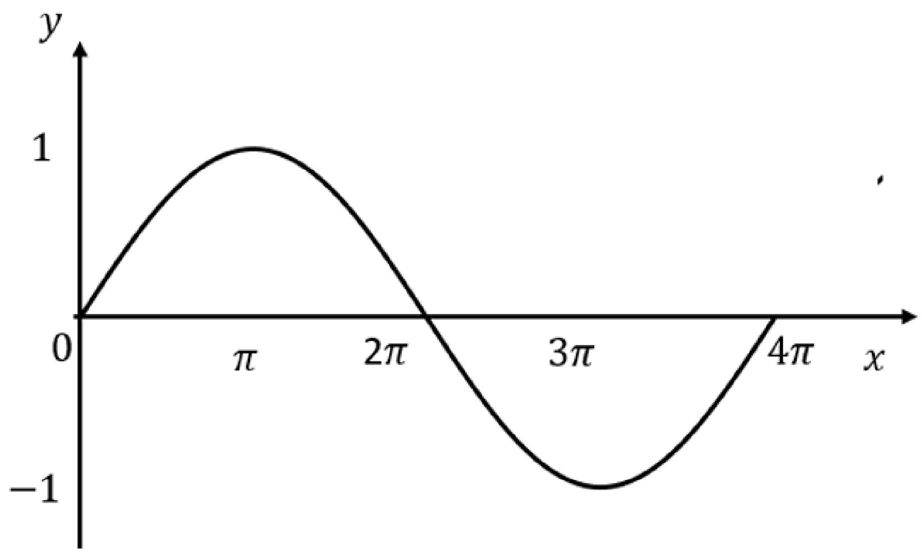
$$p(f) = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi.$$

Façamos os esboços gráficos $y_2 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ obtido de $y_1 = \sin x$ onde cada ponto do gráfico de y_2 é obtido de y_1 multiplicado por 2. Vejamos

(i) $y_1 = \sin x$, período de $y_1 : p(y_1) = 2\pi$



(ii) $y_2 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, período de $y_2 : p\,(y_2) = 4\pi$



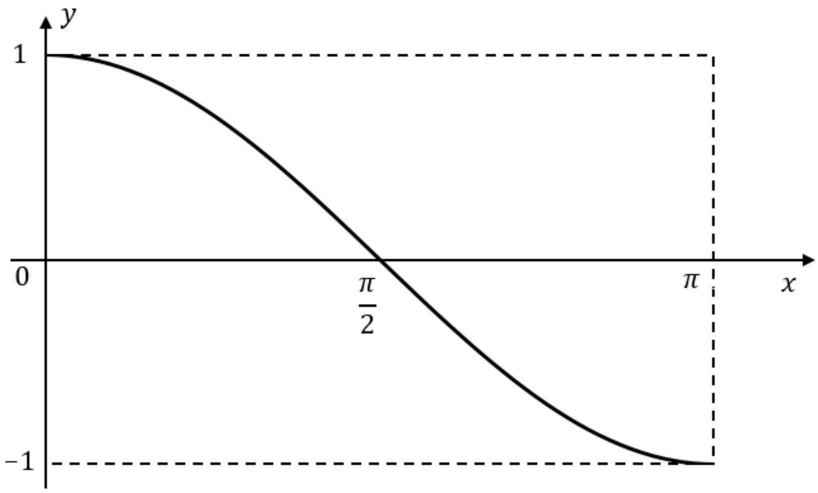
Destacando:

Domínio de $f : D\,(f) = \mathbb{R}$
Imagem de $f : \mathrm{Im}\,(f) = [-1, 1] = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$.
Período de $f : p\,(f) = 4\pi$. $\blacksquare$

8 Apêndice E: Funções Trigonométicas Inversas

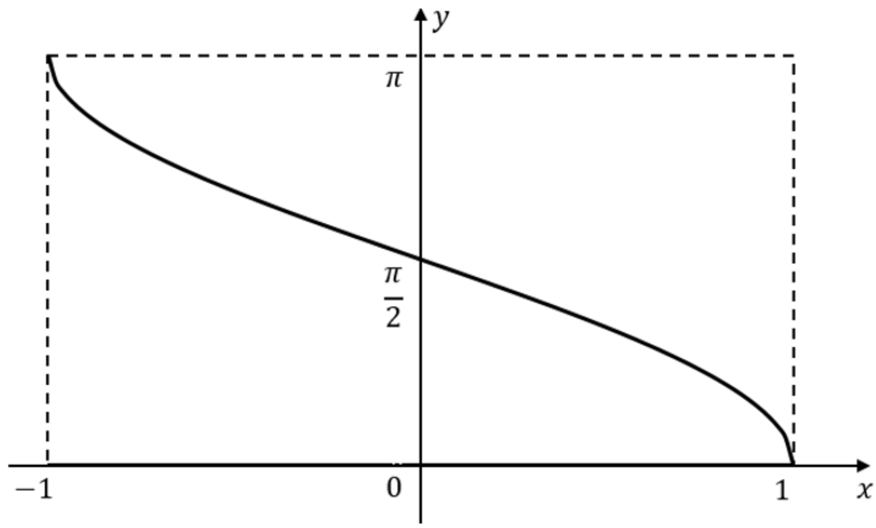
1. (i) $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

$$f(x) = \cos x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\mathrm{Im}\,(f) = [-1, 1] \Longleftrightarrow f$ é bijetora.
A função inversa de f, $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, é dada por:

$$f^{-1}(x) = \arccos x$$



Exemplos:

Calcule:

$$(i) \quad \sin\left[2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \qquad (ii) \quad tg\left(\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)$$

3

Solução:

(i)

$$\sin\left[2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \sin(2u) = 2\sin u\cos u$$

Seja $u = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, então, temos:

$$\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}, \forall u \in [0,\pi].$$

Agora,

$$\begin{aligned}\sin^2 u &= 1-\cos^2 u\\ &= 1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\\ &= 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sin u = \pm\frac{1}{2}, \forall u \in [0,\pi]$$

Assim,

$$\sin u = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sin\left[2\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] &= \sin(2u) = 2\sin u\cos u\\ &= 2\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

■

(ii)

$$tg\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) = tgu = \frac{\sin u}{\cos u}$$

Solução:

Seja $u = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$, então, $\cos u = \frac{1}{3}$, $\forall u \in [0,\pi]$.

Assim,

$$\begin{aligned}\sin^2 u &= 1-\cos^2 u\\ &= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &= 1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sin u = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Como $\sin u \geq 0$, $\forall u \in [0,\pi]$, segue-se que:

$$\sin u = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} tgu &= \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}.\frac{3}{1} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

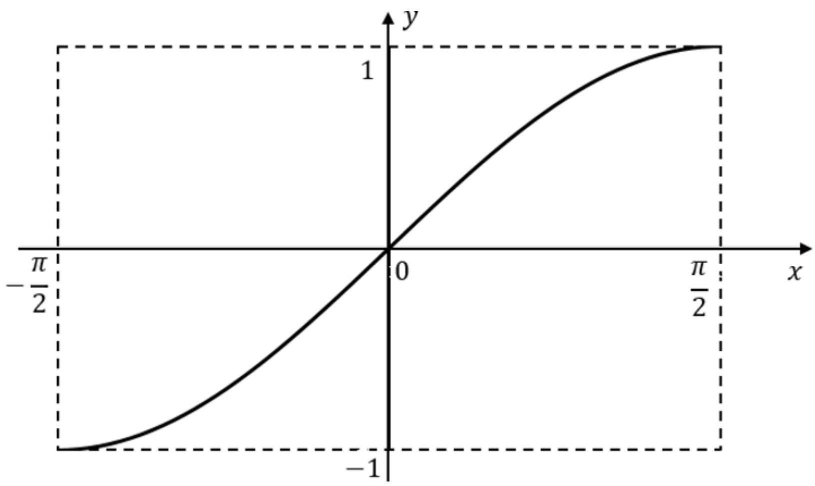
Portanto,

$$tg\left(\operatorname{arccos}\left(\frac{1}{3}\right)\right) = tgu = 2\sqrt{2}$$

■

2. (i) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$

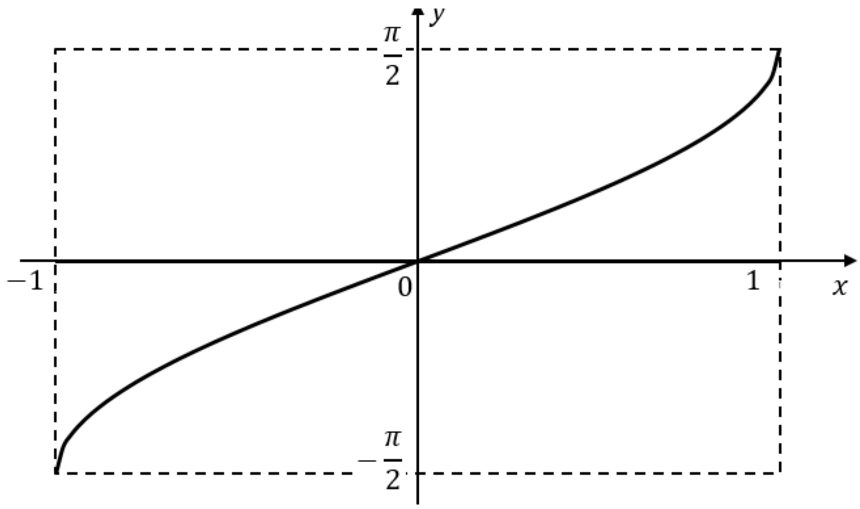
$$f(x) = \sin x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\operatorname{Im}(f) = [-1,1] \Longleftrightarrow f$ é bijetora.

A função inversa de f, $f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é dada por:

$$f^{-1}(x) = \arcsin x$$



Exemplos:

Calcule:

$$(i) \quad \cos\left[2 \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] \qquad (ii) \quad tg\left[2 \arcsin\left(\tfrac{1}{4}\right)\right]$$

Solução:

(i)

$$\cos\left[2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u$$

Com efeito, $u = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ se, e somente se, $\sin u = \frac{1}{2}$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Agora,

$$\begin{aligned}\cos^2 u &= 1 - \sin^2 u \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como $\cos u \geq 0$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, segue-se que:

$$\cos u = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\cos\left[2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] &= \cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u\\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\cos\left[2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

■

(*ii*)

$$tg\left[2\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right] = tg\,[2u] = \frac{2tgu}{1+tg^2u}$$

Solução:

Seja $u = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right)$, então, $\sin u = \frac{1}{4}$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Assim,

$$\begin{aligned}\cos^2 u &= 1 - \sin^2 u\\ &= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\\ &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.\end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Como $\cos u \geq 0$, $\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, segue-se que:

$$\cos u = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}tgu &= \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\\ &= \frac{1}{4}.\frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.\end{aligned}$$

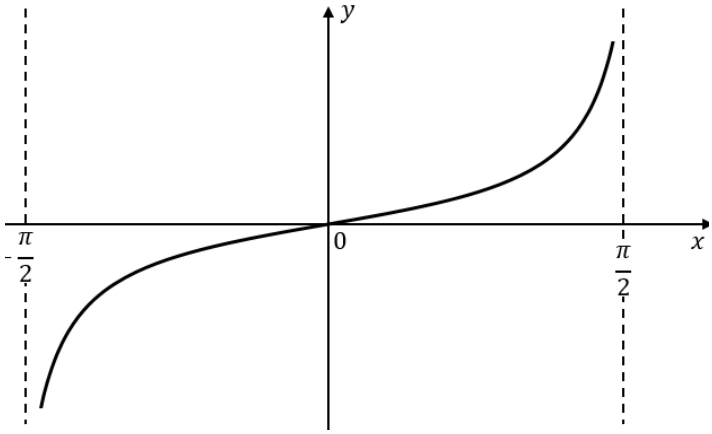
Portanto,

$$\begin{aligned}tg\left[2\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)\right] &= tg\,[2u] = \frac{2tgu}{1+tg^2u}\\ &= \frac{2\frac{1}{\sqrt{15}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{15}}}{1+\frac{1}{15}}\\ &= \frac{\frac{2\sqrt{15}}{15}}{\frac{16}{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{15}.\frac{15}{16} = \frac{\sqrt{15}}{8}.\end{aligned}$$

■

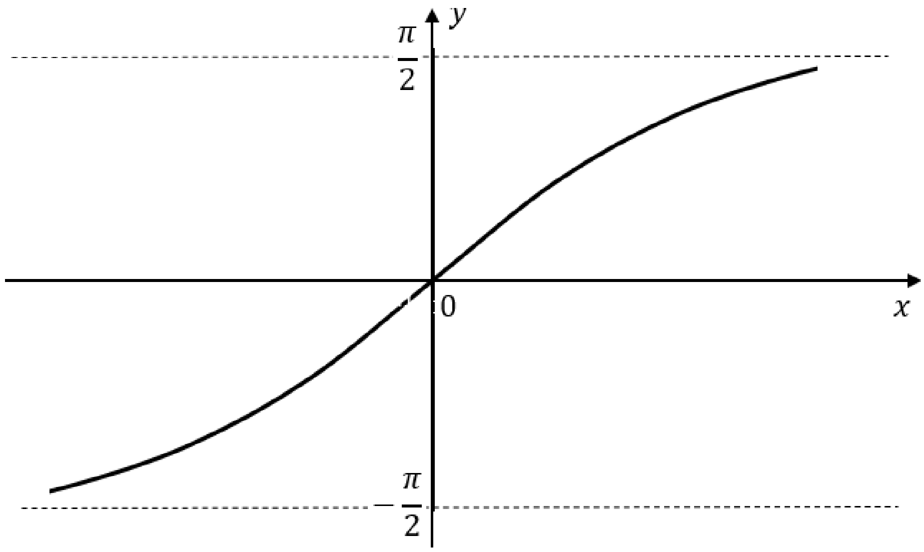
3. (i) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$



(ii) f é injetora, sobrejetora $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \Longleftrightarrow f$ é bijetora.
A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é dada por:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$



Exemplos:

Mostre que:

(i) $\sec[\operatorname{arctg}(-3)] = \sqrt{10}$ $\qquad$ (ii) $\sec[\operatorname{arctg} x] = \sqrt{1+x^2}$.

Solução:

(i)

$$\sec\left[\operatorname{arctg}(-3)\right] = \sqrt{10}$$

Seja $u = \operatorname{arctg}(-3)$, então, $\operatorname{tg} u = -3$, $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Assim,

$$\begin{aligned} \sec^2 u &= 1 + \operatorname{tg}^2 u \\ &= 1 + (-3)^2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sec u = \pm\sqrt{10}.$$

Como $\sec u > 0$, $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, segue-se que:

$$\sec u = \sqrt{10}.$$

Portanto,

$$\sec\left[\operatorname{arctg}(-3)\right] = \sqrt{10}$$

■

(ii)

$$\sec\left[\operatorname{arctg} x\right] = \sec u$$

Solução:

Seja $u = \operatorname{arctg} x$, então, $\operatorname{tg} u = x$, $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Assim,

$$\begin{aligned} \sec^2 u &= 1 + \operatorname{tg}^2 u \\ &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\sec u = \pm\sqrt{1 + x^2}.$$

Como $\sec u > 0$, $\forall u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, segue-se que:

$$\sec u = \sqrt{1 + x^2}.$$

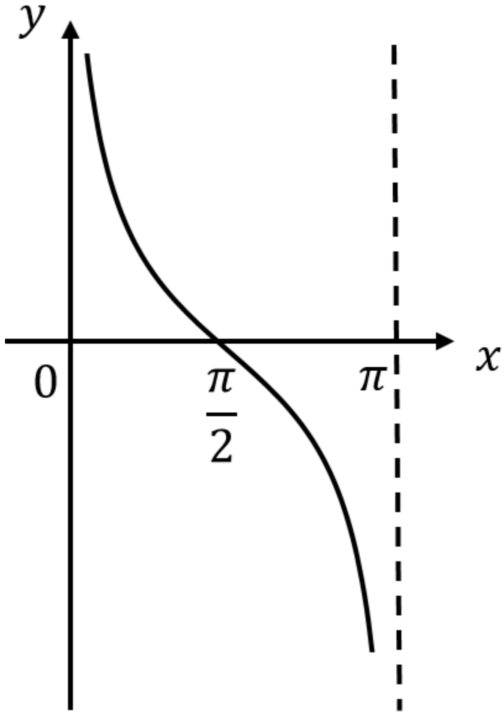
Portanto,

$$\sec\left[\operatorname{arctg} x\right] = \sec u = \sqrt{1 + x^2}$$

■

4. (i) $f : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$

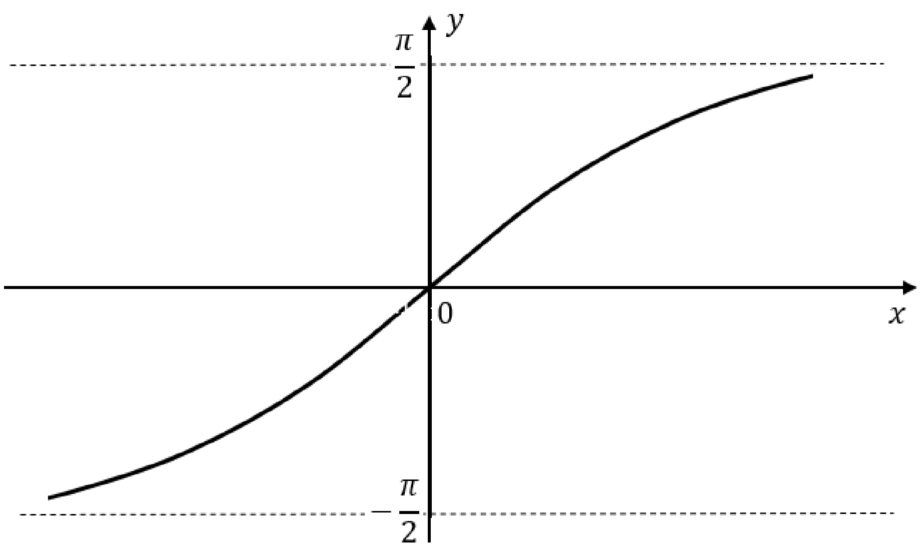
$$f(x) = \operatorname{cotg} x$$



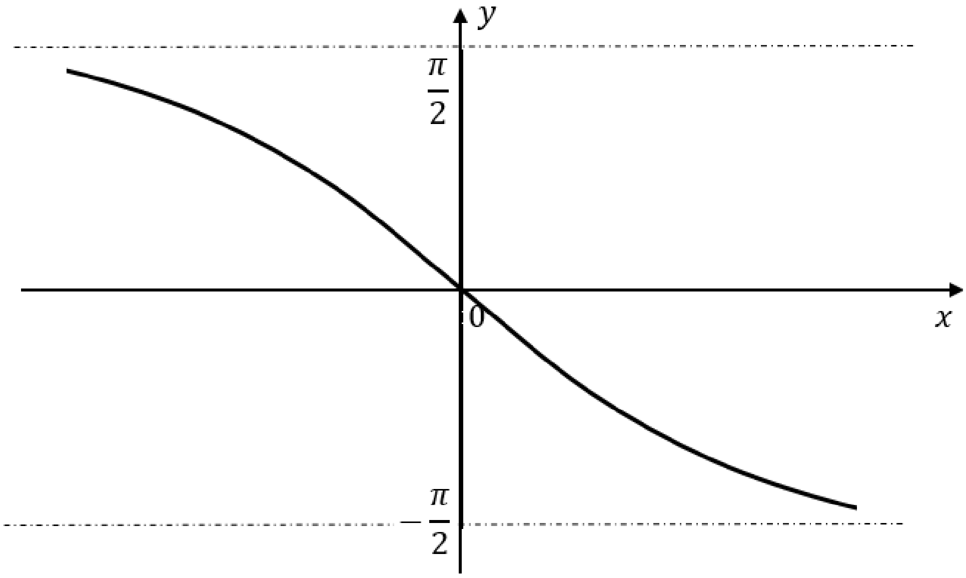
(ii) f é injetora, sobrejetora $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \Longleftrightarrow f$ é bijetora.
A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{Arccotg} x$$

$y_1 = \operatorname{Arctg} x$



$y_2 = -\operatorname{Arctg} x$

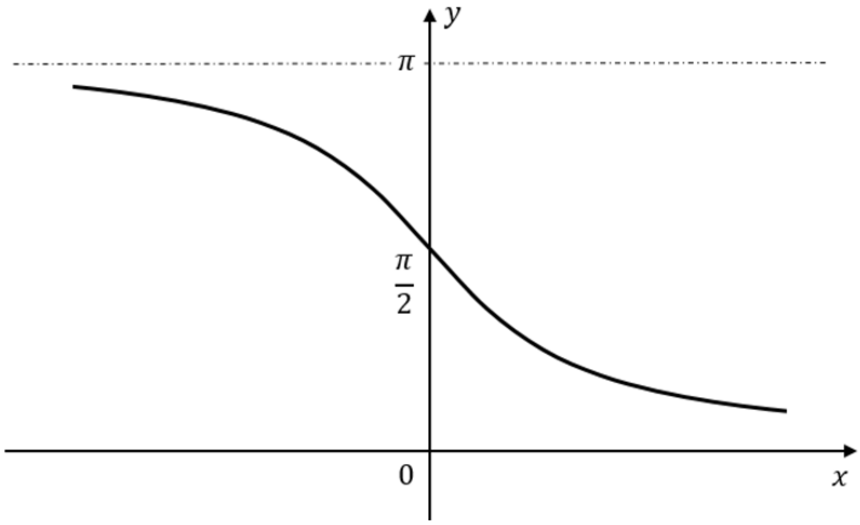


Observe que:

$$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x$$

(Será provado no exemplo a seguir)
A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$ é dada por:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x$$



Exemplos:

1. Mostre que:

(i) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x,\ \forall y \in (0, \pi)$ $\qquad (ii)$ $\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)\right].$

Solução:

(i)

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x,\ \forall y \in (0, \pi)$$

De fato,

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccotg} x, \Longleftrightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - y \Longleftrightarrow \\ x &= tg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \frac{\cos y}{\sin y} = \operatorname{cotg} y \\ &\Longleftrightarrow x = \operatorname{cotg} y \Longleftrightarrow y = \operatorname{arccotg} x,\ \forall y \in (0, \pi) \end{aligned}$$

(ii)

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)\right] = \sin u$$

Solução:

Seja $u = \operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)$, então, $\operatorname{cotg} u = \sqrt{3}$, $\forall u \in \forall y \in (0, \pi)$.
Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{cossec}^2 u &= 1 + \operatorname{cotg}^2 u \\ &= 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\operatorname{cossec} u = \pm 2.$$

Como $\operatorname{cossec} u > 0$, $\forall u \in (0, \pi)$, segue-se que:

$$\operatorname{cossec} u = 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sin u} = 2 \Longleftrightarrow \sin u = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(\sqrt{3}\right)\right] = \sin u = \frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

2. Calcule:

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

Solução:

Seja $u = \operatorname{arccotg}\left(\frac{-1}{2}\right)$, então, $\operatorname{cotg} u = \frac{-1}{2}$, $\forall u \in (0, \pi)$

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} u &= \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{-1}{2} \\ \sin u &= -2\cos u \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \cos^2 u + \sin^2 u &= 1 \\ \cos^2 u + (-2\cos u)^2 &= 1 \\ 5\cos^2 u &= 1. \end{aligned}$$

Daí, vem:

$$\cos u = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right. \Longrightarrow \sin u = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \text{ou} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right. \Longrightarrow \sin u = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \forall u \in (0, \pi)\,.$$

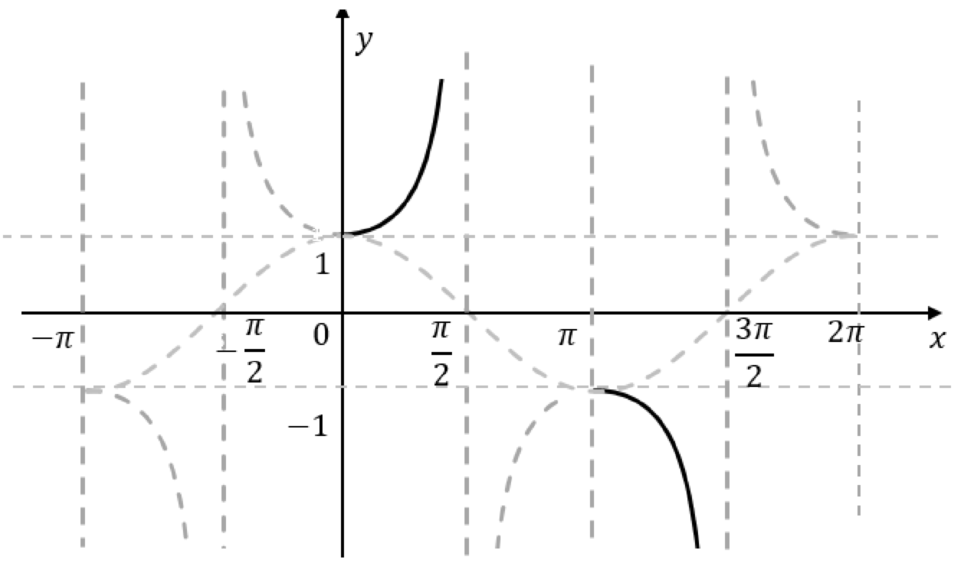
Logo,

$$\sin\left[\operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \sin u = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

■

5. (i) $f : [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{A}$, dada por: $f(x) = \sec x$
onde: $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$$f(x) = \sec x$$



A função inversa de f, $f^{-1} : \mathbb{A} \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3\pi}{2})$
onde: $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$ é dada por:

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Fato:
Prove que:

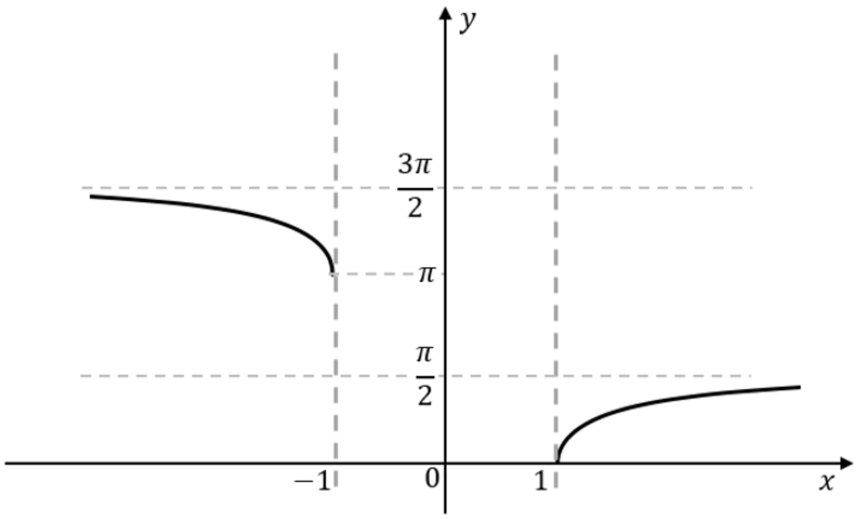
$$y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arcsec} x, |x| \geq 1.$$

De fato,

$$y = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \Longleftrightarrow \cos y = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\cos y} = \sec y \Longleftrightarrow y = \operatorname{arcsec} x.$$

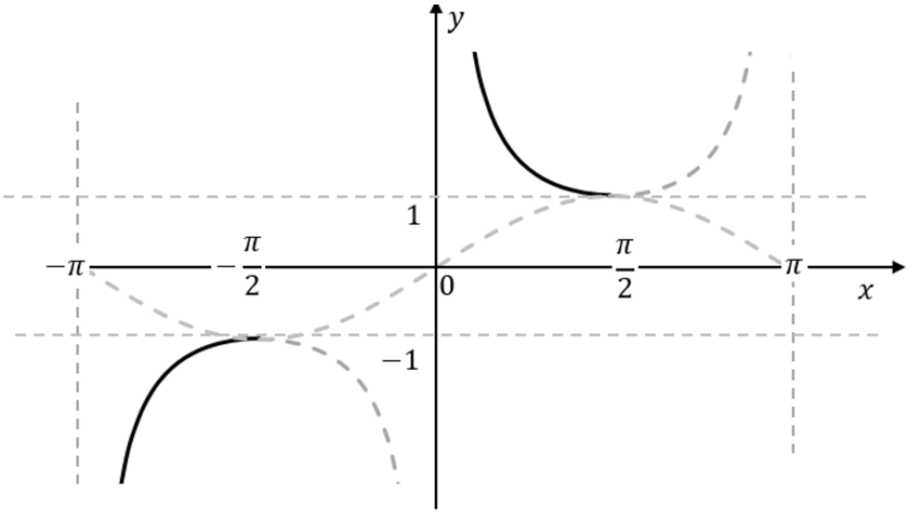
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

■



6. (i) $f : (-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup (0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{A}$, dada por: $f(x) = \operatorname{cossec} x$
onde: $\mathbb{A} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$

$$f(x) = \operatorname{cossec} x$$



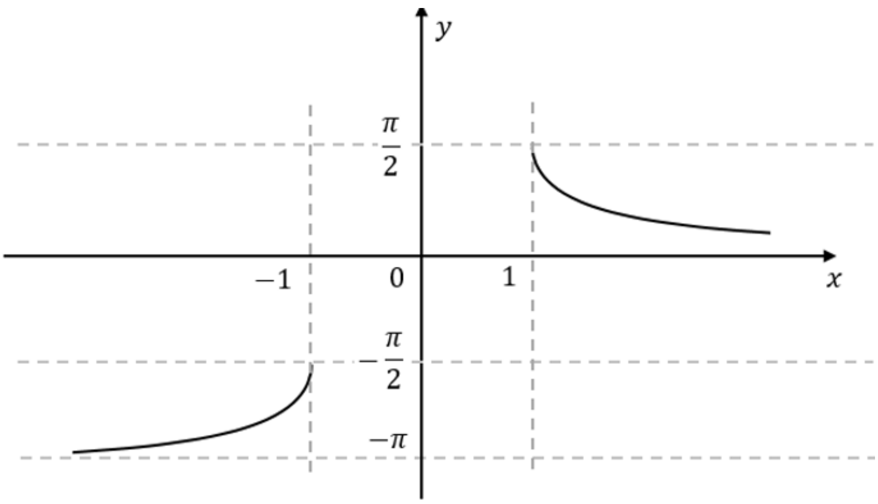
Problema:

$$y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x = \operatorname{arccossec} x, \forall x : |x| \geq 1$$

Solução:

Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x \Longleftrightarrow \operatorname{arcsec} x = \frac{\pi}{2} - y \Longleftrightarrow \\ x &= \sec\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \frac{1}{\sin y} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow x = \text{cossecy} \Longleftrightarrow y = \operatorname{arccossec} x. \end{aligned}$$



Bibliografia:

[1] De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ,3^a Edição, SBM 2016
[2] Bartle, Robert G - Introduction to Real Analysis. New York, J. Wiley, 2019.
[3] Guidorizzi, Hamilton Luiz,. Um Curso de Cálculo.vol.1, 6^a edição, RJ: LTC, 2018
[4] Lima, Elon Lages, Matemática e Ensino-Coleção do Professor de Matemática, 4^a, RJ, 2017.
[5] De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Manual de Redação Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2^a Edição, SBM 2018.
[6] Lima, Elon Lages, Curso de Análise, vol. 1- Projeto Euclides, SBM, 21^a, IMPA, 2019.
[7] Aragona, Jorge, Números Reais, Texto Universitário do IME-USP, 2010.
[8] Eves, Howard-Introdução à história da matemática; tradução: Hygino H. Domingues-Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004
[9] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm, em 17. de agos_ to às 12h e 25min, 2022
[10] Figueiredo, D. G. Análise I . Livros Técnicos Científicos, 2016
[11] Carneiro, J. P. Q., Gomes, M. L. M., & Carvalho., P. C. P. Exames de Textos. Análise de livros de Matemática para Ensino Médio. VITAE, IMPA & SBM, 2001
[12] Lima, Elon Lages: Eduardo Wagner, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado, A Matemática do Ensino Médio, vol 1, Editora SBM, 2016
[13] https://www.youcubed.org/pt-br/resources/the-nature-of-21st-century mathematics/, 2022
[14] Muniz Neto, Antonio Caminha, Tópicos Elementares: Polinômios, SBM, Coleção do Professor de Matemática, volume 6, RJ, 2016
[15] Carmo, Manfredo Perdigão, Eduardo Wagner, Augusto Cezar de Oliveira Morgado Trigonometria e Números Complexos Capa, SBM, 2005
[16] Bardi, Jason Socrates, A Guerra do Cálculo, 3^a edição, RJ Record, 2016.
[17] Lima, Elon Lages: Eduardo Wagner, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado, Temas e Problemas, SBM, Coleção do Professor de Matemática, volume 6, RJ, 2001
[18] Coelho, Flávio Ulhoa; Mary Lilian Lourenço, Um Curso de Álgebra Linear Editora Universidade de São Paulo-Edusp, 2001.
[19] Leithold, Louis. O cálculo com Geometria Analítica. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994. volumes.1, 2.
[20] Swokowisk, E. Willian. Cálculo com Geometria Analítica. 2 ed. São Paulo: Makron, 1995. volumes.1, 2.
[21] Wikipédia, a enciclopédia livre. (consultado em 18 de outubro de 2022 às 11h 45min)