Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino

PROBLEMAS A NÍVEL DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino

Problemas a Nível do Mestrado Profissional em Matemática

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586P Silva, Cícero José da
Problemas a Nível do Mestrado Profissional em Matemática
/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2022

160 f.: il
DOI: 10.37423/2022.edcl573
ISBN: 978-65-5367-161-4
Modo de acesso: World Wide Web
Incluir Bibliografia

1. matemática 2. problemas-resolvidos 3. cálculo-avançado 4. algebra-abstrara 5. aritímética I. Silva, Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Título

CDU: 510

https://doi.org/10.37423/2022.edcl573

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO
2022

Problemas a Nível do Mestrado Profissional em Matemática

10.37423/2022.edcl573

AGRADECIMENTOS

1. Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão, pelo incentivo e pela valiosa colaboração para reali zação deste.
2. Ao ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela compreensão, pelo incentivo e pela valiosa colaboração para realização deste.
3. Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmi- tido, os quais foram indispensáveis para elaboração deste.
4. A todos os colegas do Departamento Básico, pelo incentivo e amizade. Em especial, aos que contribuiram diretamente na elaboração deste.
5. À Carminha, Duda, toda a minha família, por tudo que fizeram em meu favor. Agradeço pelo apoio e incentivos recebidos e pela compreensão do motivo de tê-los privado da minha presença por vários momentos importantes de suas vidas e por me esperarem sempre, carinhosamente, de braços abertos.
6. Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Roberto Lessa, Cláudio Maciel, Juan Carlos Oliveira de Medeiros e Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
7. Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas suges- tões ao longo dos anos, generosamente permitir que incluisse algumas questões de sua autoria (Não publicadas anteriormente).
8. Ao Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho -UFCG, pela generosi- dade, humildade em tirar um tempo para responder um email, autori- zando a usar duas demonstrações literais dele (será destacada e citada no texto), do livro Um Convite à Matemática SBM, 2012.
9. À UPE, pela colaboração.
10. Não poderia deixar de agradecer a humildade e generosidade dos ami- gos de equipe na realização deste trabalho Prof. Dr. Willames de Albuquerque Soares e Prof. Dr. Sérgio Mário Lins Galdino.

DEDICATÓRIA

À Nossas Mães, Aos Nossos Pais, Filhos, Esposas,Todos os familiares e Ao grande Mestre Olavo Otávio Nunes (In Memoriam)

Resumo: Neste trabalho estudamos problemas em diversos níveis de compreensão e diversas áreas da matemática: de temas básicos como trigonometria a, números complexos e construções de subcorpos, congruências, teoremas de homomorfismo, álgebra linear, análise matemática, geometrias analítica e diferencial, em alguns casos, Cálculo Avançado, Álgebra Abstrara e Aritmética.

INTRODUÇÃO

O propósito deste pequeno texto é apresentar algumas questões a Nível do Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT (Pensando um pouco mais), frutos das experiências de décadas de conversas, a priori, informais com meu amigo, por quase quatro décadas, o grande mestre Olavo Otavio Nunes (mais conhecido como mestre lambe-lambe: ao se deliciar com um problema desafio até conseguir resolver) e com os amigos e professores da UPE-Poli Willames e Sérgio Galdino. Devemos ressaltar que: O público alvo são: Professores de matemática, alunos do PROFMAT, graduação, bacharelado em matemática e Áreas Afins.

Neste trabalho, estudamos problemas em diversos níveis de compreensão; tentando colocar um letramento de Mentalidade Matemática Crescente, Criativa e Flexível e diversas áreas da matemática: de temas básicos como trigonometria a, funções periódica sem período fundamental, funções trigonométricas cujas somas são não-periódicas, funções definidas na reta contínuas apenas num único ponto, números complexos, corpo, subcorpos, congruências, teoremas de homomorfismo, álgebra linear, autovalores e auto vetores, transformações lineares, formas bilineares, análise matemática, geometrias analítica e vetorial, geometria diferencial, número mínimo de cartas locais que cubra a esfera, em alguns casos, Cálculo Avançado, exemplo função diferenciável à Gateauxde que não é contínua, da Álgebra Abstrara e Aritmética.

PROFMAT(Pensando um pouco mais)

1: (i) Seja M uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,prove que:

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^{A}M.$$

Prova:

Com efeito,

$$e^{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

então,

$$e^{M^{-1}AM} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(M^{-1}AM\right)^j}{j!} = I + M^{-1}AM + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^n}{n!} + \ldots,$$

Daí, não esquecendo que a série converge uniformemente e

$$\left(M^{-1}AM\right)^{j} = M^{-1}A^{j}M$$

(É fácil ver por indução finita sobre n), segue-se que:

$$\begin{aligned} e^{M^{-1}AM} &= M^{-1}IM + M^{-1}AM + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^{2}}{2!} + \ldots + \frac{\left(M^{-1}AM\right)^{n}}{n!} + \ldots \\ &= M^{-1}\left(I + A + \frac{A^{2}}{2!} + \ldots + \frac{A^{n}}{n!} + \ldots\right)M \\ &= M^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^{j}}{j!}\right)M = M^{-1}e^{A}M. \end{aligned}$$

(ii)

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}, \ \forall t \Longleftrightarrow A \text{ comuta com } B,$$

Com $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Prova:

$(\Longrightarrow)$ Se $e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}$, então, derivando ambos os lados, temos:

$$(A+B)\,e^{(A+B)t} = Ae^{At}.e^{Bt} + Be^{At}.e^{Bt}.$$

Agora, derivando novamente e fazendo t = 0, obtemos:

$$(A+B)^{2}\,e^{(A+B)t} = A^{2}e^{At}.e^{Bt} + ABe^{At}.e^{Bt} + BAe^{At}.e^{Bt} + B^{2}e^{At}.e^{Bt}.$$

Logo,

$$(A+B)^{2} = A^{2} + 2AB + B^{2} \Longleftrightarrow AB = BA.$$

$(\Longleftarrow)$ Se $AB = BA$, então, é fácil ver que:

$$X(t) = e^{At}.e^{Bt}$$

satisfaz ao problema de valor inicial (p.v.i)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A+B)\, X(t) \\ X(0) = I. \end{cases}$$

(Verifique!). Então, pela unicidade da solução temos:

$$X(t) = e^{(A+B)t}.$$

De sorte que:

$$e^{(A+B)t} = e^{At}.e^{Bt}, \ \forall t$$

Observação:

Se A é nilpotente de indice k, temos: $A^k = 0 \text{ com } \ A \neq 0 \text{ e } 0 < k \leq n.$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \ldots 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0\ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \ldots 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots,$$

Todos estes fatos básicos serão de fundamental importância para a Forma Canônica de Jordan.

2: (O.B.M. -Olimpíada Brasileira de Matemática)

Prove que, para todo n natural, vale a desigualdade:

$$P_n : \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Afirmação 1 Para todo $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$,prove que:

$$\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Sugestão:

Basta fazer algumas manipulações básicas para obter:

$$\begin{aligned}(2n+1)\sqrt{3n+4} &\leq (2n+2)\sqrt{3n+1}\\ &\Longleftrightarrow (2n+1)^2(3n+4) \leq (2n+2)^2(3n+1)\\ &\Longleftrightarrow \left(4n^2+4n+1\right)(3n+4) \leq \left(4n^2+8n+4\right)(3n+1)\\ &\Longleftrightarrow \left(12n^3+28n^2+18n+4\right) \leq 12n^3+28n^2+20n+2\\ &\Longleftrightarrow 18n \leq 20n,\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.\end{aligned}$$

Agora, voltando ao problema dado usando indução finita sobre n, temos:

(i) Para $n=1$, tem-se: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3.1+1}}$.

(ii) Suponha válido para n. Isto é,

$$P_n : \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

(Hipótese da indução)

Então, tem-se que:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}.\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

À luz da afirmação 1,

$$\frac{(2n+1)}{(2n+2)}.\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+4}},$$

segue-se que:

$$P_{(n+1)} : \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}.\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \leq \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Portanto, P_n é válido via indução .nita sobre n:

3.Seja T : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}$$

Pede-se:

i) Ker(T) e dimKer (T) ;

ii) Uma base β para a Im (T) : T é sobrejetora? Justifique.

Solução:

Seja T : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por:

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}.$$

i) Afirmação: T não é injetora. De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker\,(T) = \left\{(a_o, b_o, c_o) \in \mathbb{R}^3; T\,(a_o, b_o, c_o) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Com efeito, $T\,(a_o, b_o, c_o) = \begin{pmatrix} a_o - c_o & 0 \\ 0 & a_o + b_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_o - c_o = 0 \\ a_o + b_o = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_o = a_o \\ b_o = -a_o \end{array} \right. . \text{ Portanto,}$$
$$Ker\,(T) = \left\{(a_o, -a_o, a_o) \in \mathbb{R}^3; a_o \in \mathbb{R}\right\} = [(1,-1,1)]\,.$$

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, $\dim Ker\,(T) = 1.$ ■

(ii) Agora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = 1 + \dim \mathrm{Im}(T) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2,$$

$\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$ e $\dim \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R}) = 4.$ Assim, $\mathrm{Im}\,(T) \neq \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$, portanto, T é não é sobrejetora.

Vamos determinar os geradores para Im (T) :

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a-c & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daí, vem: $\mathrm{Im}\,(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$ Como

dim Im (T) = 2; segue-se que β = $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base para Im(T):

4: Considere uma transformação linear $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ se $\dim \mathbb{U} > \dim \mathbb{V}$.

Prove que existe um vetor não nulo $u_0 \in \mathbb{U}$ tal que $F(u_0) = 0$ vetor nulo de V)

Prova:

Suponha que $\text{Ker}\,(F) = \{0\}$ então, dim $\text{Ker}\,(F) = 0$.

Agora, pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos:

$$\dim \mathbb{U} = \dim \text{Ker}\,(F) + \dim \text{Im}\,(F) = \dim \text{Im}\,(F) > \dim \mathbb{V}.$$

Absurdo! Pois, supomos $\text{Ker}\,(F) = \{0\}$.

De sorte que: existe $u_0 \neq 0, u_0 \in \mathbb{U}$ tal que: $F(u_0) = 0$.

5: Seja $F : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ uma transformação linear satisfazendo a seguinte propriedade: Se $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de U, então,

$$\gamma = \{F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)\}$$

é L.I. em V. Prove que: F é injetora.(por definição).

L.I. =linearmente independente

Prova:

Queremos mostrar que: F é injetora, isto é,

$$\forall u, v \in \mathbb{U} : F(u) = F(v) \Longrightarrow u = v.$$

Com efeito, $\beta = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então, existem

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{R}, \text{ tais que: } \begin{cases} u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n \\ \text{e} \\ v = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \{u - v = (\alpha_1 - \beta_1) u_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) u_n. \qquad (1)$$

Além disso,

$$F(u) = F(v) \Longrightarrow F(u) - F(v) = 0 \Longrightarrow F(u - v) = 0 \qquad (2)$$

Daí, substituindo (1) em (2), obtemos:

$$\begin{aligned} F(u-v) &= F\left[(\alpha_1-\beta_1)u_1+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)u_n\right]=0 \\ &\Longleftrightarrow (\alpha_1-\beta_1)F(u_1)+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)F(u_n)=0. \end{aligned}$$

Como $F(u_1), F(u_2), \ldots, F(u_n)$ são linearmente independentes, segue-se que:

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\alpha_1-\beta_1)=0 \\ \vdots \\ (\alpha_n-\beta_n)=0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1=\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n=\beta_n. \end{cases} \Longrightarrow u=v.$$

Logo, F é injetora.

■

6: Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, a-d, b+c).$$

Pede-se:

(i) Ker (T) e dimKer (T) :

(ii) dim Im (T) e uma base para Im (T) :

Solução:

Seja $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por:

$$T\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a+d, a-d, b+c).$$

i) De fato, o núcleo de T é descrito por:

$$Ker(T) = \left\{\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}); T\left[\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}\right] = (0,0,0)\right\}$$

Com efeito, $T\left[\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}\right] = (a_0+d_0, a_0-d_0, b_0+c_0) = (0,0,0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_0 + d_0 = 0 \\ a_0 - d_0 = 0 \\ b_0 + c_0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_0 = d_0 = 0 \\ c_0 = -b_0 \end{cases}.$$

Portanto

$$Ker\,(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ -b_0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})\,; b_0 \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Segue-se daí que: T não e injetora. Além disso, $\dim Ker\,(T) = 1.$

(Hipótese de indução)

Então, falta mostrar para n + 1.

Basta notar que:

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}^T_{(n+1)}.\overbrace{\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n\right)^T}^{\text{hipótese de indução}} = \mathbb{A}^T_{(n+1)}.\overbrace{\mathbb{A}^T_n \ldots \mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1}^{\text{hipótese de indução}}.$$

Logo,

$$\left(\mathbb{A}_1.\mathbb{A}_2 \ldots \mathbb{A}_n.\mathbb{A}_{(n+1)}\right)^T = \mathbb{A}^T_{(n+1)}.\mathbb{A}^T_n \ldots \mathbb{A}^T_2.\mathbb{A}^T_1.$$

■

14:Mostre que se x qualquer vetor-coluna não-nulo de $\mathbb{R}^n$ então a matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n\,(\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathbb{A} = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T$$

é ortogonal e também simétrica.

Definição: Dizemos que uma matriz $\mathbb{A} \in \mathbb{M}_n\,(\mathbb{R})$ é ortogonal, quando: $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T.$

Queremos provar que:

(i) A é uma matriz simétrica, isto é, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$;

(ii) A é uma matriz ortogonal, isto é, $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T \Longleftrightarrow \mathbb{A}.\mathbb{A}^T = \mathbb{I}_n.$

Prova:

(i) Com efeito,

$$x^T.x = (x_1 \dots x_n) . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \|x\|^2$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^T &= \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T\right)^T = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} \left(x x^T\right)^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} \left(x^T\right)^T x^T = \mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Logo, A é uma matriz simétrica.

(ii) A priori, como $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}.\mathbb{A}^T &= \mathbb{A}.\mathbb{A} = \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T\right) . \left(\mathbb{I}_n - \frac{2}{\|x\|^2} x x^T\right) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} \left(x x^T\right) . \left(x x^T\right) \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} x \left(x^T . x\right) x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^4} x \left(x^T . x\right) x^T \\ &= \mathbb{I}_n - \frac{4}{\|x\|^2} x x^T + \frac{4}{\|x\|^2} x x^T = \mathbb{I}_n. \end{aligned}$$

De sorte que: A é uma matriz ortogonal

$\blacksquare$

15: (a) Sejam a_1, a_2 e a_3 números reais positivos. Prove que:

$$(a_1 + a_2 + a_3) . \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

Generalize.

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo); com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \dots, n.$

Mostre que:

$$(a_1 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Prova:

Não faremos o caso particular (Fica como exercício!)

1º modo:

(b) Sejam $a_j \in \mathbb{R}$, com $a_j > 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, façamos por simplicidade

$$u = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n}) \text{ e } v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

Além disso, veja que resultados lindos e elegantes, usando a norma euclidiana e o produto interno usual, temos:

$$\|u\| = \sqrt{a_1 + \ldots + a_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \|v\| = \sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}}$$

e

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{a_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_j}}\right) = \sqrt{a_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots + \sqrt{a_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n}} = n.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos o belíssimo resultado:

$$n = \left|\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_j}}\right| \leq \sqrt{a_1 + \ldots + a_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

e, portanto, elevando-se ao quadrado, ambos os membos da desigualdade, vem:

$$n^2 \leq (a_1 + \ldots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

■

2º modo:

À luz dadas desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n} \leq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{n}. \qquad (1)$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)}{n}. \qquad (2)$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_j} \cdot \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}} = \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}. \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}} = 1,$$

obtemos:

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

■

16: (i) calcule $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que: $p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$, onde:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Use o resultado do item anterior, para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)X = 0.$$

Solução:

(i) Com efeito, temos:

$$\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

Daí, vem:

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3) = (1-\lambda).(3-\lambda).(-2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \text{ ou} \\ \lambda = 3 \text{ ou} \\ \lambda = -2. \end{cases}$$

(Posteriormente, estes λ serão chamados de autovalores ou valores característicos que estarão associados aos seus respectivos autovetores ou vetores característicos que são as soluções não-nulas dos sistemas homogêneos).

Observação:

(A) Notação:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

Produtório de a_{ii}, variando de $i = 1$ até $i = n$

(B) Se $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que: $a_{ij} = 0,\ i > j$ é chamada matriz triangular superior. Neste caso,

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}.a_{22}\ldots a_{nn},$$

dito de outra forma, o determinante da matriz triangular superior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

(ii) Para obter as soluções não-nulas do sistema homogêneo

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}_3)X = 0,$$

que corresponde aos autovetores associados aos autovalores obtidos no item anterior, teremos três casos a considerar, a saber:

1º Caso: $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} & 5z & = & 0 \\ 2y & +z & = & 0 \\ & -3z & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{e} \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo, $v_1 = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)$ com $x \neq 0$ um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$, isto é, o espaço solução $\mathbb{S}_1$ é dada por:

$$\mathbb{S}_1 = \left\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0\right\} = [(1, 0, 0)],$$

isto é, (1; 0; 0) gera $\mathbb{S}_1$ Significa que qualquer solução não-nula é múltiplo escalar do vetor (1; 0; 0) :

2º Caso: $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x+ & + & 5z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & - & 5z & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{e} \\ z = 0 \end{array} \right. .$$

Logo, $v_1 = (0, y, 0) = y(0, 1, 0)$, com $y \neq 0$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_2 = \left\{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3; y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\right\} = [(0, 1, 0)],$$

ou seja, (0; 1; 0) gera $\mathbb{S}_2$.

3º Caso: $\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} 3x & & +5z & = 0 \\ & 5y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{-5}{3}z \\ \text{e} \\ z = \frac{-1}{5}z \end{array} \right.$$

Logo, $v_1 = \left(\frac{-5}{3}z, \frac{-1}{5}, z\right) = z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$, com $z \neq 0$ é um autovetor, ou ainda, a solução é dada por:

$$\mathbb{S}_3 = \left\{z\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R} \text{ e } z \neq 0\right\} = \left[\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)\right],$$

ou seja, $\left(\frac{-5}{3}, \frac{-1}{5}, 1\right)$ gera $\mathbb{S}_3$. ■

17: Sejam $T \in L(\mathbb{U}; \mathbb{V})$ e $G \in L(\mathbb{V}; \mathbb{W})$, prove que:

$G \circ T : \mathbb{U} \to \mathbb{W}$ é linear.

Observação:

$L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é o espaço de todas as transformações lineares de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$.

Prova:

Sejam G e T transformações lineares, então, queremos mostrar que:

$$G \circ T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$$

é linear.

(i) $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{U}$, tem-se:

$$\begin{aligned}(G \circ T).(u_1 + u_2) &= G[T(u_1 + u_2)] = G[T(u_1) + T(u_2)] \\ &= G[T(u_1)] + G[T(u_2)] \\ &= (G \circ T)(u_1) + (G \circ T)(u_2).\end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u_1 \in \mathbb{U}$, obtem-se:

$$\begin{aligned}(G \circ T).(\lambda u_1) &= G[T(\lambda u_1)] = G[\lambda T u_1)] = \lambda G[T(u_1)] \\ &= \lambda (G \circ T)(u_1).\end{aligned}$$

Logo, $G \circ T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ é linear.

18: Seja $T \in L(\mathbb{U})$,tal que: dim $\mathbb{U} = n$. Então, prove que:

$$\dim \operatorname{Ker}(T).\dim \operatorname{Im}(T) \leq \frac{n^2}{4}.$$

Prova:

Basta notar que: $a.b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,onde $a = \dim \operatorname{Ker}(T)$ e $b = \dim \operatorname{Im}(T)$.

Assim, usando o teoremado Núcleo e da Imagem, obtemos:

$$\dim \operatorname{Ker}(T).\dim \operatorname{Im}(T) \leq \left(\frac{\dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)}{2}\right)^2 \leq \frac{n^2}{4}.$$

Portanto,

$$\dim \operatorname{Ker}(T) \,.\, \dim \operatorname{Im}(T) \leq \frac{n^2}{4}.$$

■

19: Sejam $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $S : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineares, definidas por:

$$(i) \quad T(A) = A^t \qquad \text{e} \qquad (ii) \quad S(A) = tr(A).$$

Pede-se:

(i) $S \circ T$ e $\operatorname{Ker}(S \circ T)$ (ii) $\dim \operatorname{Im}(S \circ T)$. $S \circ T$ é sobretejora?

(ii) Qual é a $\dim \operatorname{Ker}(S \circ T)$?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{T} & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ S \circ T & \searrow & \downarrow S \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

Prova:

(i) $(S \circ T)(A) = S(T(A)) = S(A^t) = tr(A^t) = tr(A)$, onde:

$$tr(A) = \sum_{j-1}^{n} a_{jj} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

É o traço da matriz A:

■

Núcleo de $S \circ T$ é:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(S \circ T) &= \{A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) ; (S \circ T)(A_0) = 0\} \\ &= \{A_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) ; (S \circ T)(A_0) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0\}. \end{aligned}$$

(ii) Com efeito,

$$S \circ T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

$$S \circ T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

então, tem-se: dim Im $(S \circ T) = \begin{cases} 1 \\ \text{ou} \\ 0 \text{ (não convém)} \end{cases}$

$$\Longrightarrow \dim \operatorname{Im}(S \circ T) = 1 \text{ e } \operatorname{Im}(S \circ T) \subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{Im}(S \circ T) = \mathbb{R}.$$

De sorte que: $S \circ T$ é sobrejetora. ■

(iii) Decorre do Teorema do Núcleo e da Imagem que:

20: Seja $\mathbb{V} = \mathbb{P}(\mathbb{R})$ espaço de todos os polinômios e sejam $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ transformações lineares, definidas por:

$$(i) \quad S[p(x)] = p'(x) \qquad \text{e} \qquad (ii) \quad T(p(x)) = xp(x).$$

Então, verifique se:

$$(i)\ S \circ T - T \circ S = I \qquad (ii)\ S \circ T^m - T^m \circ S = mT^{m-1},\ m \geq 2.$$

Com efeito,

$$(S \circ T)(p(x)) = S[T(p(x))] = S[xp(x)] = [xp(x)]' = p(x) + xp'(x) \qquad (1)$$

Procedendo de forma análoga, temos:

$$(T \circ S)(p(x)) = T[S(p(x))] = T[p'(x)] = xp'(x). \qquad (2)$$

Agora, de (1) e (2), obtemos:

$$(S \circ T)(p(x)) - (T \circ S)(p(x)) = p(x) = I[p(x)].$$

De sorte que:

$$S \circ T - T \circ S = I.$$

■

(ii) Consideremos, a priori,

$$\begin{aligned} T^2(p(x)) &= (T \circ T)(p(x)) = T[T(p(x))] \\ &= T[xp(x)] = x[xp(x)] = x^2 p(x). \end{aligned}$$

Agora, continuando com o processo, vem:

$$T^m (p(x)) = x^m p(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(S \circ T^m)(p(x)) &= S[T^m(p(x))] = S[(x^m p(x))] \\ &= [(x^m p(x))]' = m x^{m-1} p(x) + x^m p'(x) \qquad (3)\end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$(T^m \circ S)(p(x)) = T^m [S(p(x))] = T^m [p'(x)] = x^m p'(x). \qquad (4)$$

Consequentemente, de (3) e(4) ; obtemos::

$$\begin{aligned}(S \circ T^m)(p(x)) - (T^m \circ S)(p(x)) &= m x^{m-1} p(x) = m T^{(m-1)} (p(x)) \\ (S \circ T^m - T^m \circ S)(p(x)) &= \left(m T^{(m-1)}\right)(p(x)),\ n \geq 2.\end{aligned}$$

De sorte que:

$$S \circ T^m - T^m \circ S = m T^{(m-1)}.$$

Observação:

$\mathbb{P}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão infinita, ou seja, dim $\mathbb{P}(\mathbb{R}) = \infty$. Vale ressaltar que em dimensão finita, não vale.

Conjectura:

Este resultado continua válido em espaço de dimensão finita? A resposta é não, o que seja delineado no problema a seguir.

21: Não existem matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$,tais que:

$$AB - BA = I.$$

Suponha válido, então, usando o traço da matriz identidade, vem: $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I) = n.$

Por outro lado, tem-se:

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} A_{i\alpha}B_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{\alpha i}A_{i\alpha} = \operatorname{tr}(\mathbb{BA}).$$

Assim,

$$\operatorname{tr}(\mathbb{AB}) - \operatorname{tr}(\mathbb{BA}) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(\mathbb{AB} - \mathbb{BA}) = tr(I) = 0.$$

Absurdo! Visto que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Portanto, tais matrizes não existem satisfazendo

$$AB - BA = I.$$

■

22: Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear, definida por:

$$T(x, y, z) = (x + y, x + y + z).$$

Mostre que:

$$\|T(x, y, z)\|_{\mathbb{R}^2} \leq \left(2\sqrt{2} + 1\right).\|(x, y, z)\|_{\mathbb{R}^3}.$$

Conclua daí que: T é contínua em $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ Generalize.

23: Seja $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, prove que::

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M}\|X\|_{\mathbb{R}^m}.$$

Conclua daí que: T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

Prova:

Seja $X \in \mathbb{R}^m$, então, tem-se: $X = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ e $e_j = (0, \ldots, 0, 1)$. desta forma, vem:

$$X = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_m.$$

Assim,

$$T(X) = T\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j) = x_1 T(e_1) + \ldots + x_n T(e_m),$$

por conseguinte, obtemos:

$$\|T(X)\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} x_j T(e_j)\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |x_j| \, \|T(e_j)\| \leq \|X\| \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\| = \mathbb{M}\,\|X\|.$$

Onde $\mathbb{M} = \sum_{j=1}^{m} \|T(e_j)\|$ de modo que:

$$\|T(X)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \mathbb{M}\,\|X\|_{\mathbb{R}^m}, \ \forall X \in \mathbb{R}^m.$$

■

Como T é linear, temos:

$T(X - X_0) = T(X) - T(X_0)$ para todo $X_0 \in \mathbb{R}^m$,segue-se daí que

$$\|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M}\,\|X - X_0\|.$$

(T é Lipschitziana).

Agora, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{\mathbb{M}} > 0$, tal que:

$$\|X - X_0\| < \delta \Longrightarrow \mathbb{M}\,\|X - X_0\| < \varepsilon \Longrightarrow \|T(X) - T(X_0)\| \leq \mathbb{M}\,\|X - X_0\| < \varepsilon.$$

Portanto, T é contínua em $X_0 \in \mathbb{R}^m$.

24: Prove que: O espaço das transformações lineares de U em V, tais que: $\dim \mathbb{U} = n$ e $\dim \mathbb{V} = m$

isomorfo ao espaço das matrizes de ordem m X n com entradas reais, ou seja, $L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e, denotamos por:

$$L(\mathbb{U};\mathbb{V}) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

A fixação das bases $\beta \subset \mathbb{U}$ e $\beta' \subset \mathbb{V}$ determina portanto uma transformação

$$\begin{array}{llll} \Phi : & L(\mathbb{U};\mathbb{V}) & \longrightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ & f \longmapsto & & \Phi(f) = [A]_{\beta'}^{\beta} = \mathbb{M}(f) \end{array}$$

Prova:

Afirmação 1: Φ é linear

$$(i)\ \Phi(f_1+f_2) = [A_1+A_2]_{\beta'}^{\beta} = [A_1]_{\beta'}^{\beta} + [A_2]_{\beta'}^{\beta} = \Phi(f_1)+\Phi(f_2)$$
$$(ii)\ \Phi(\lambda f_1) = [\lambda A_1]_{\beta'}^{\beta} = \lambda [A_1]_{\beta'}^{\beta} = \lambda\Phi(f_1).$$

Portanto, Φ é linear.

■

Afirmação 2: Φ é injetora
De fato, $\text{Ker}(\Phi) = \{f \in L(\mathbb{U};\mathbb{V}) : \Phi(f) = 0\}$.
Vejamos $\Phi(f) = [A]_{\beta'}^{\beta} = \mathbb{M}(f) = 0$,
como $[f(u)]_{\beta'} = [A]_{\beta'}^{\beta}[u]_{\beta} = 0$, segue-se que:
$f(u) = 0$, $\forall u \in \mathbb{U}$. Consequentemente, vem: $f \equiv 0$.
Logo, $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$, ou ainda, Φ é injetora.

■

Afirmação 3: Φ é sobrejetora
$\forall B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\exists f \in L(\mathbb{U};\mathbb{V})$, tal que:
$\Phi(f) = [A]_{\beta'}^{\beta} = \mathbb{M}(f) = B$

Consideremos $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$, tal que:
$f(u_1) = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \ldots + b_{m1}v_m$
$f(u_2) = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \ldots + b_{m2}v_m$
— — — — — — — — — — — — — —
$f(u_n) = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + \ldots + b_{mn}v_m$.
Então, temos:

$$\mathbb{M}(f) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B^1 & B^2 & \ldots & B^j & \ldots & B^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}_{m\times n} = B.$$

De sorte que: Φ é sobrejetora.

Por conseguinte, obtemos: $L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ é isomorfo a $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

25: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre R tais que: $\dim \mathbb{U} = n$ e $\dim \mathbb{V} = m$.

Então, o espaço $L(\mathbb{U};\mathbb{V})$ tem dimensão m: n

Prova:

Sejam β e β' as bases respectivamente de U e V: $\mathbb{U} \xrightarrow{T} \mathbb{V},\ \Phi : L(\mathbb{U};\mathbb{V}) \longrightarrow M_{mxn}(\mathbb{R}),$

$$\Phi(T) = [T]^{\beta}_{\beta'} \Longrightarrow \dim L(\mathbb{U};\mathbb{V}) = \dim M_{mxn}(\mathbb{R}) = m.n \qquad \blacksquare$$

26: Prove que:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{x+1}}dx \leq \frac{1}{10}.$$

Prova: Basta notar que:

$$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2} \Longrightarrow \tfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \tfrac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$$
$$\Longrightarrow \tfrac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \tfrac{x^9}{\sqrt{x+1}} \leq x^9,\ \forall x \in [0,1].$$

Daí, vem:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{x+1}}dx \leq \frac{1}{10}.$$

$\blacksquare$

27 Sejam $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que:

$$\left(\int_a^b f(x).g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 .dx\right).\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)$$

Prova:

Considere $\mathbb{H}(t) = \left(\int_a^b [f(x) - tg(x)]^2\,dx\right) \geq 0,$ então, temos:

$$\mathbb{H}(t) = t^2\int_a^b [g(x)]^2\,dx - 2t\int_a^b f(x).g(x)\,dx + \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Por conseguinte, obtemos:

$$\Delta = 4\left(\int_a^b f(x).g(x)\,dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right).\left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right) < 0.$$

De sorte que:

$$\left(\int_a^b f(x).g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,.dx\right).\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right).$$

$\blacksquare$

28: (Função Diferenciável que não é contínua)

Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Prove que:

(a) f é diferenciável à Gateaux em (0; 0) ;

(b) f não é contínua em (0; 0) :

Prova:

(a) Com efeito,

$$\begin{aligned} Df(0,0).\xi &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(0+t\xi)-f(0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(th,tk)}{t} \\ &= \begin{cases} \frac{k^2}{h}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo,

$$Df(0,0).\xi = Df(0,0).(h,k) = \begin{cases} \frac{k^2}{h}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}.$$

(b) Basta escolher a sequência

$$z_n = \left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0) \text{ e } f(z_n) = f\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$z_n \longrightarrow (0,0) \text{ e } f(z_n) \nrightarrow f(0) = 0.$$

Ou ainda, f não é contínua em (0; 0) : ■

NÚMEROS COMPLEXOS

Nos textos do Ensino Médio, em geral, são apresentados os números complexos a forma $z = (a,b)$ ou algébrica $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ onde: $i^2 = -1$ e $i = (0,1)$ é necessário fé, para aceita a identificação

$$z = (a,b) \simeq a + bi$$

Problema:

A equação $x^2 + a = 0,\ a > 0$ não é solúvel em R. Construir um corpo C que contenha um subcorpo $\varnothing \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$ onde $\mathbb{S}$ seja isomorfo a R e a equação $x^2 + a = 0,\ a > 0$ seja solúvel.

Lema 1: Seja $\varnothing \neq \mathbb{S} \subset \mathbb{C}$, onde:

$$\mathbb{S} = \left\{(a_o, 0) \in \mathbb{R}^2 : a_o \in \mathbb{R}\right\}.$$

$\mathbb{S} \simeq \mathbb{R}$ onde : S é isomorfo a R.

De fato, $\langle \mathbb{S}, +, \cdot \rangle$ é fechado

$$\begin{aligned} &+ : (a,0) + (b,0) = (a+b, 0) \in \mathbb{S}. \\ &\cdot : (a,0) \,.\, (b,0,) = (a.b - 0.0, a.0 + 0.b) = (ab, 0) \in \mathbb{S}. \end{aligned}$$

De sorte que: S é fechado.

■

Consideremos $\Phi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi(x,0) = x.$$

Afirmação 1: Φ é um homomorfismo Basta notar que:

$$\begin{aligned}(i)\ \ \Phi((a,0)+(b,0)) &= \Phi(a+b,0)=a+b=\Phi(a,0)+\Phi(b,0)\\ (ii)\ \ \Phi((a,0).(b,0)) &= \Phi(a.b,0)=a.b=\Phi(a,0).\Phi(b,0).\end{aligned}$$

Portanto, Φ um homomorfismo.

■

Afirmação 2: Φ injetora. De fato,

$$\Phi(a_o,0)=\Phi(b_o,0)\Rightarrow a_o=b_o\Rightarrow(a_o,0)=(b_o,0)$$

Usando uma equivalência tautológica, temos:

$$a_o\neq b_o\Rightarrow(a_o,0)\neq(b_o,0)\Rightarrow\Phi(a_o,0)\neq\Phi(b_o,0).$$

Logo, Φ é injetora.

Afirmação 3: Φ é sobrejetora. Com efeito, note que:

$$\forall m_o\in\mathbb{R},\ \exists(m_o,0)\in\mathbb{S}:\Phi(m_o,0)=m_o.$$

ou ainda, Φ é sobrejetora. Por conseguinte, vem : Φ é um isomorfismo.

■

Note que:

$$\begin{array}{l}(A)\ (a,0)\simeq a\\ (B)\ (a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi\\ (C)\ i^2=(0,1).(0,1)=(0.0-1.1,0.1+1.0)=(-1,0)\simeq-1.\\ \text{De sorte que: } z=(a,b)\simeq a+bi, \text{ onde } \operatorname{Re}(z)=a \text{ e } \operatorname{Im}(z)=b.\end{array}$$

1 $P_1(\mathbb{R})-$ Subespaço dos polinômios de grau menor do que ou igual a 1; com entradas reais.

$$\mathbb{W}_1=\{p(x)=ax+b\in\mathbb{P}_1(\mathbb{R})\ \ a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Desta forma, temos: $p(x)=ax^1+bx^0\in\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ Dito de outro modo, no subespaço $\mathbb{W}_1$ temos todos os casos particulares de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$a saber:

$(i)\ 0(x) = 0x + 0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ (polinômio identicamente nulo).

$(ii)\ p(x) = bx^0 = b$ (polinômio constante ou de grau zero) $\in \mathbb{P}_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (neste caso)

$(iii)\ p(x) = ax$ polinômio

(a rigor seria função polinomial na indeterminada x) passando pela origem, também chamado de função linear no sentido da álgebra linear; não por ser reta, $p(x) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, dito de outro modo, temos:

$$\mathbb{W}_0 = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R});\ b = 0\},$$

onde: $\mathbb{W}_0$ é um subespaço de $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. (Prove!) e finalmente o subespaço

$$\mathbb{W}_1 = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})\ \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

englobando todos os casos anteriores e mesmo sendo uma reta,

$$p(x) = ax + b = f(x)$$

Conhecida no ensino médio como como fução afim, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O matemático, Elon Lages Lima, aborda

$$p(x) = ax + b = f(x),\ \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Olhando como um subespaço $\mathbb{W}_1$ de polinômios de grau no máximo 1:

29:Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, definida por:

$$T(a, b) = ax + b$$

Mostre que:

(A) T é linear (b) T é injetora por definição.(c) T é sobrejetora por definição.

(B) T é bijetora (prove!)

(A) (i) Afirmação 1:

Queremos provar que T é injetora:

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2 : T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

De fato, $\forall u_1 = (a_1, b_1), u_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$,tem-se:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(u_2) \Longrightarrow T(a_1, b_1) = T(a_2, b_2) \Longrightarrow a_1 x + b_1 = a_2 x + b_2 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ \text{e} \\ b_1 = b_2 \end{cases} \Longrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Longrightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

De sorte que: T é injetora por definição.

■

De sorte que: T é injetora por definição.

Observação: Outro modo de provar a injetividade seria mostrar que o núcleo $\operatorname{Ker}(T) = \{(0,0)\}$

(ii) Afirmação 2:

Queremos provar que T é sobrejetora:

$$\forall p_0(x) = a_0 x + b_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}); \exists u_0 = (a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2 : T(u_0) = p_0(x).$$

Com efeito, $T(u_0) = T(a_0, b_0) = a_0 x + b_0 \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$,daí, obtemos: Im$(T) = \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ ou seja, o contra-domínio $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ é igual a imagem de T:

Logo, T é sobrejetora, consequentemente, T é bijetora.

Obtenha a

$$T^{-1} : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(Exercício!)

Observação: Poderíamos ter usado o teorema do núcleo e da imagem para provar a sobrejetividade de T:

Exercício

(A) Considere

$$\mathbb{W}_1 = \{p(x) = ax + b \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \ \ a, b \in \mathbb{R}\}. \qquad (1)$$

Pede-se:

(i) Provar que: $\mathbb{W}_1$ um subespaço;

(ii) Determinar uma base β de $\mathbb{W}_1$ e dê a dim $\mathbb{W}_1$;

(iii) $\beta = \{t, 1\}$ é uma base para $\mathbb{W}_1$? Justifique!

(B) Mostre que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por: $f(x) = ax$ satisfaz:

$(i)\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$(ii)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x_1 \in \mathbb{R}:\ f(\alpha x_1) = \alpha f(x_1)$. Isto é, T é linear.

Observação:

Cuidado! não se pode afirmar, como alguns textos do Ensino Médio, função do 1º grau, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Vale ressaltar: a função não é f (x) a função é f; f (x) já é o resultado da lei. Além disso, função não tem grau.(salvo no tocante a ser homogênea aí é outra coisa: é grau de homogeneidade de uma função).

30: Seja a transformação $T : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, definida por:

$$T[p(x)] = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n,$$

onde: $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) = \{p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ polinômiosg :

Prove que : T é linear

Observação:

$$T[p(x)] = \sum_{j=0}^{n} \frac{p^j(0)}{j!}x^j = \frac{p^0(0)}{0!}x^0 + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x + \ldots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n.$$

Prova:

(i) $\forall p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, temos:

$$\begin{aligned} T[(p+q)(x)] &= (p+q)(0) + \frac{(p+q)'(0)}{1!}x + \frac{(p+q)''(0)}{2!}x^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{(p+q)^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \left[p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\ &\quad + \left[q(0) + \frac{q'(0)}{1!}x + \frac{q''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{q^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\ &= T[p(x)] + T[q(x)]. \end{aligned}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$, tem-se:

$$\begin{aligned} T[(\lambda p)(x)] &= (\lambda p)(0) + \frac{(\lambda p)'(0)}{1!}x + \frac{(\lambda p)''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{(\lambda p)^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \lambda\left[p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n\right] \\ &= \lambda T[p(x)]. \end{aligned}$$

Portanto, T é linear.

$\blacksquare$

2 COMPOSIÇÕES DE FUNÇÕES

Onde:

(i) Im (g) : Imagem da função g

(ii) Im (g) $\subseteq \mathbb{F}$: A imagem da função g está contida ou é igual ao domínio da função f:

(iii) $f = g \Longrightarrow f^2 = f \circ f$, $f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f$ e $f^0 = \mathbb{I}$ (função Identidade) :

Observação 1 :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \ vezes}, \quad f \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ f = f \quad e \quad f^0 = \mathbb{I}.$$

Exemplo 2 : Considere as funções f e g; definidas por: $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Pede-se, caso existam:

$(i)\ D(f \circ g)$ e $f \circ g$ $\qquad$ $(ii)\ D(g \circ f)$ e $g \circ f$

Solução 3 : É fundamental obter primeiro os domínios das funções, alguns textos do Ensino Médio, induz que se pode fazer o contrário, ou seja, determinar a composta, para só em seguida, obter o domínio. Estes exemplos esclarecem que, se fizermos o contrário, daria errado. Vejamos

$$\begin{aligned} D(f \circ g) &= \{x \in \mathbb{R};\ x \in D(g) \wedge \operatorname{Im}(g) \in D(f)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R};\ (x \geq 0) \wedge \left(\sqrt{x}\right) \in \mathbb{R})\right\} = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}. \end{aligned}$$

Agora, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = |x| = x.$

Note que: se por um momento de fraqueza, fizessemos $f \circ g$ antes de obter o $D(f \circ g)$ existiria

$$(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f\left(\sqrt{-1}\right) = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

Absurdo! visto que $\sqrt{-1} \notin D(g)$.

Procedendo de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= \{x \in \mathbb{R};\ x \in D(f) \wedge \operatorname{Im}(f) \in D(g)\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R};\ (x \in \mathbb{R}) \wedge x^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x|$. Consequentemente, em geral se tem: $f \circ g \neq g \circ f$;, ou ainda, composições de funções não é comutativa.

Guarde bem e nunca esqueça! Obter a composta de duas funções $f \circ g$ e $g \circ f$. antes é necessário, obter o domínio de existência, caso sejam possíveis

■

31: Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$;, diz-se harmônica, quando:

$$\Delta f(x) = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f^2}{\partial x_j^2} = 0$$ (Equação de [1]Laplace);

para todo $x \in \Omega$. Mostre que: $u : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ u(x) = \frac{1}{\|X\|}$, onde: $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ é harmônica.

Prova:

Com efeito, $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = x^2 + y^2 + z^2$, onde: $X = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -1\,\|X\|^{-2}\,.\frac{1}{2\,\|X\|}.2x = -x.\,\|X\|^{-3} \Longrightarrow \\
\frac{\partial u^2}{\partial x^2} &= -\|X\|^{-3} + 3x\,\|X\|^{-4}\,.\frac{1}{2\,\|X\|}.2x \Longrightarrow \\
\frac{\partial u^2}{\partial x^2} &= \frac{-\|X\|^2 + 3x^2}{\|X\|^5}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Então, procedendo de forma análoga, tem-se:

$$\frac{\partial u^2}{\partial y^2} = \frac{-\|X\|^2 + 3y^2}{\|X\|^5}. \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial z^2} = \frac{-\|X\|^2 + 3z^2}{\|X\|^5}. \qquad (2)$$

Agora, decorre de (1) ; (2) e (3) que:

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u^2}{\partial z^2} = 0,$$

e, portanto, $\Delta u(x, y, z) = 0$ isto é, u é uma função harmônica.

$\blacksquare$

32:(Teste da razão para sequências)

Seja (x_n) $x_n > 0, \forall\, n$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1,$ então,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0.$$

Prova:

Seja $r \in \mathbb{R}$, tal que: $L < r < 1$ e fixemos $\varepsilon = r - L > 0$, por definição de limite existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < r - L,\ \forall n \geq n_0 \qquad (1)$$

Decorre de (1) que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - L < r - L,\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_{n+1} < r x_n < x_n,\ \forall n \geq n_0. \qquad (2)$$

Logo, $0 < x_{n+1} < x_n,\ \forall n \geq n_0$ e, portanto, a seqüência (x_n) é limitada inferiormente por zero, e decrescente, a partir da ordem n_0, sendo portanto convergente. Seja $a = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$, se a fosse positivo, então, teríamos:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \tfrac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1.$$

Isso contradiz a hipótese de ser ■

Portanto, $a = 0$.

Para ilustrar o teste, estude a convergência das seqüências descritas a seguir:

(i) Observe que:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ (Verifique este fato!), segue-se pelo teste da razão que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

■

33: (Função contínua)

Moste ou dê um contra-exemplo:

Não existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua que transforme todo número racional num irracional e vice-versa Queremos averiguar a existência ou não das seguintes funções

(a) $f_1:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ contínua;

(b) $f_1:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ contínua.

Prova: Suponhamos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seja contínua consideremos

$$g(x)=x-f(x).$$

Enão, g é obviamente contínua, visto que: f e x o são. Além disso, temos:

$$(i)\ x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Longrightarrow[g(x_0)=x_0-f(x_0)]\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$$
$$(ii)\ x_1\in\mathbb{Q}\Longrightarrow g(x_1)=[x_1-f(x_1)]\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Agora, dados que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ são ambos densos em $\mathbb{R}$; então, existe $k\in\mathbb{Q}$, tal que: $g(x_0)\le k\le g(x_1)$ Como g é contínua, segue-se do teorema do Valor Intermediário que existe $\bar{x}\in(x_0,x_1)$ tal que: $g(\bar{x})=k$. Absurdo! Visto que: $g(x_p)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ para qualquer que seja $x\in\mathbb{R}$.

Portanto, f acima descrito não existe.

∎

34: Revisitando as densidades dos números racionais e irracionais em $\mathbb{R}$

1. a $\mathbb{Q}$ é "denso" em $\mathbb{R}$, isto é, dados $x,y\in\mathbb{R}$ com $x<y$ existe $r\in\mathbb{Q}$, tal que; $x<r<y$.

Prova:

Seja $n\in\mathbb{N}$, tal que:

$$n>\frac{1}{y-x}\Longrightarrow ny-nx>1. \qquad (1)$$

Seja $m\in\mathbb{Z}$, tal que:

$$m-1<nx<m. \qquad (2)$$

Agora, decorre de (2) que $nx < m \Longrightarrow x < \frac{m}{n}$. Além disso, de (1) e (2), temos: $m \leq nx + 1 < ny \Longrightarrow \frac{m}{n} < y$ e, portanto,

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

■

b. $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ é "denso" em R, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe z irracional, tal que:

$$x < z < y.$$

Prova:

Basta usar o resultado do item anterior, destacando os números reais $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$ obtendo um número racional $r \neq 0$ tal que: $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$.

Então, $z := r\sqrt{2}$ é irracional satisfazendo $x < z < y$. ■

35: (Norma Euclidiana)

Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então, prove que:

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\mathrm{M},$$

onde: $\mathrm{M} = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Prova: Basta notar que:

$$|x_j|^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

tomando-se: $\mathrm{M} = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ vem:

$$|x_j|^2 \leq \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq \overbrace{\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}^2 + \ldots + \mathrm{M}^2}^{n \text{ vezes}} = n\mathrm{M}^2,$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

Portanto,

$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\mathrm{M},$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n.$

■

Observação: Algumas Normas em $\mathbb{R}^n$:

(i) Norma Euclidiana:

$$\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

(iii) Norma do máximo (ou supremo):

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

(Em espaços de dimensão finita todas as normas são equivalentes), em particular, em $\mathbb{R}^n$ temos:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_\infty.$$

36:(Condições de otimalidade de 1ª ordem)

$$1. \begin{cases} \text{Minimize } f(x) \\ \text{sujeito à } Ax = b, \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} \text{Min } \nabla f(x)\,\Delta x \\ \text{Sujeito à } A\Delta x = 0. \end{cases}$$

Afirmação: Os problemas (1) e (2) são equivalentes.

Prova: Sejam $x \in \mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \operatorname{Im}(A^t)$ e seja $f : \Omega \sqsubseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Considere a função Lagrangiana associada ao problema (1)

$$(i)\ \mathfrak{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T (b - Ax).$$

Utilizando as condições de otimalidade de 1ª ordem de KKT as quais são necessárias e suficientes neste caso, temos:

(ii)

$$\begin{cases} \nabla_x \mathfrak{L} = \nabla f(x) - A^T \lambda = 0 \\ \nabla_\lambda \mathfrak{L} = b - Ax = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \nabla f(x) = A^T \lambda \\ Ax - b = 0. \end{cases} \qquad (I)$$

Agora, de (I), vem: $\nabla f(x) \,//\, \operatorname{Im}(A^t)$, então, tem-se:

$$\nabla f(x) \perp \operatorname{Ker}(A) \Longrightarrow \nabla f(x).\Delta x = 0,$$

Para $\Delta x \in \operatorname{Ker}(A)$. Além disso, $A\Delta x = 0.$

De sorte que, o prescrito anteriormente produz o problema (2)

■

Observação : KKK generaliza a otimização usando os multiplicadores de Lagrange, aqui estamos falando de aspectos matemáticos da programação não-linear, destacando que Ω é a região aberta do $\mathbb{R}^n$ de uma região interior viável, podendo ser inclusive $\mathbb{R}^n_{++}$.

37: **(Projeção Estereográfica)**

São necessárias duas cartas locais no mínimo para cobrir a esfera. Além disso, tem-se: um **difeomorfismo local**

Considere $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e sejam $N(0, 0, 1)$,tal que:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{X}_1 & : \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ & (u, v) \longmapsto & \mathbb{X}_1(u, v) = (x, y, z). \end{array}$$

A equação da reta ξ que passa por N (0; 0; 1) e $P(u, v, 0)$ na direção $\overrightarrow{NP}$, é dada por:

$$\xi : X = (0, 0, 1) + (u - 0, v - 0, -1) r \Leftrightarrow X = (ur, vr, 1 - r). \qquad (I)$$

Agora, a intersecção da reta ξ com S^2 é descrita por:

$$\begin{cases} X = (ur, vr, 1 - r) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow u^2r^2 + v^2r^2 + (1 - r)^2 = 1$$

e, portanto,

$$r = 0 \text{ ou } r = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}. \qquad \text{(II)}$$

Decorre de (I) e (II) que: $\mathbb{X}_1(u, v) = (x, y, z)$, , onde: $\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \\ y = \frac{2v}{u^2+v^2+1} \\ z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \end{cases}$

Observação 1: A aplicação inversa de $\mathbb{X}_1$ $(\mathbb{X}_1^{-1} = \pi)$ é chamada de **Projeção Estereográfica**.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{X}_1^{-1} = \pi & : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) \longmapsto & \mathbb{X}_1^{-1}(x, y, z) = (u, v) \end{array}$$

(i) A equação da reta γ que passa por $N(0,0,1)$ e $P_0(x,y,z)$ na direção do vetor $\overrightarrow{NP_0}=(x,y,z-1)$, é dada por:

$$\gamma : X_0=(0,0,1)+(x,y,z-1)\,t \Leftrightarrow X=(xt,yt,1+(z-1)\,t)\,.$$

(ii) A intersecção da reta γ com o plano $\alpha : z=0$ produz o seguinte resultado:

$1+(z-1)\,t=0 \Longrightarrow t=\frac{1}{1-z}$, com $z\neq 1$.

Assim,

$$X_0=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z},0\right)\simeq\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)=(u,v)\,.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl}\pi & : \mathbb{S}^2\setminus\{N\}\rightarrow & \mathbb{R}^2\\ & (x,y,z)\longmapsto & \pi(x,y,z)=\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right).\end{array}$$

Observação 2: Revisitando a Álgebra Linear: O $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço vetorial $\mathbb{U}$ de dimensão 2 do $\mathbb{R}^3$ Sugestão: Por simplicidade tome $T(x,y)=(x,y,0)$ trivial que T é um isomorfismo. Vale ressaltar que: podemos fazer a seguinte identificação $(x,y)\simeq(x,y,0)$.

38: (**Projeção Estereográfica** ξ é biunívoca entre **é biunívoca entre** $C\setminus\{N\}$ **e** $\mathbb{R}$) Escreva as esquações paramétricas da reta que passa pelos pontos $N(0,1)$ e $Q(u,0)$ no plano. Mostre que, além do ponto N, essa reta corta a circunferência $C: x^2+y^2=1$ no ponto (x,y), onde $x=\frac{2u}{u^2+1}$ e $y=\frac{u^2-1}{u^2+1}$. Em seguida, escreva as equações paramétricas da reta que passa por $N(0,1)$ e pelo ponto $P(x,y)$ da circunferência $C: x^2+y^2=1$. Mostre que esta reta corta o eixo das abcissas no ponto $\xi(P)=(u,0)$, onde $u=\frac{x}{1-y}$, A função $\xi: C\setminus\{N\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\xi(P)=\xi(x,y)=u=\frac{x}{1-y},$$

estabelece uma correspondência biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$, cuja inversa

$$\begin{array}{ccc} \xi^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow C \setminus \{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}(u) = (x, y), \end{array}$$

tal que:

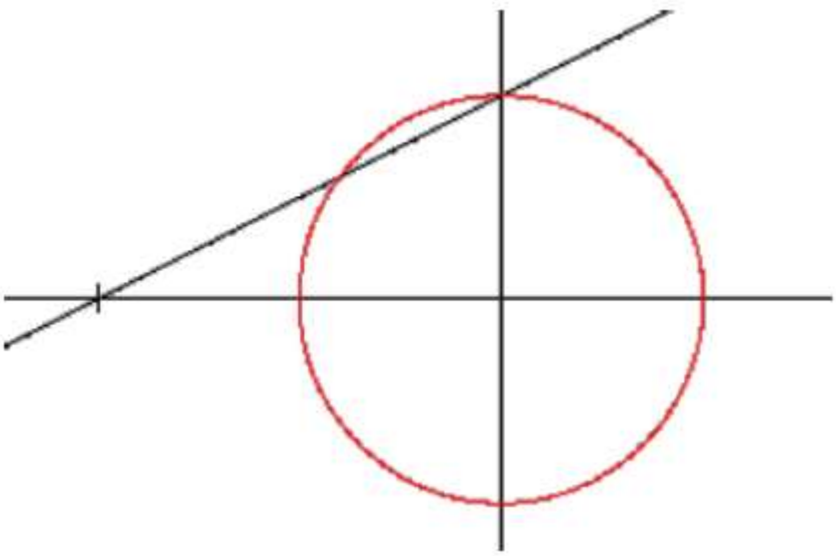
$$\begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}$$

A função ξ chama-se a projeção estereográfica de $C \setminus \{N\}$ sobre $\mathbb{R}$, e sua inversa fornece uma outra parametrização da circunferência (exceto o "polo norte" N) por meio de funções racionais.

Prova:

Projeção Estereográfica ξ e sua inversa ξ^{-1} em $\mathbb{R}^2$.

A equação da circunferência dada por $C : x^2 + y^2 = 1$



(i) A equação da reta L que passa por $N(0,1)$ e $Q(u,0)$, é dada por:

$$X(t) = (x(t), y(t)), \text{ onde: } \begin{cases} x(t) = 0 + at \\ yt) = 1 + bt, \end{cases}$$

Sendo $v = (a,b) = \overrightarrow{NQ} = (u, -1)$ a direção de L:

Logo, $X(t) = (x(t), y(t)) = (ut, 1-t)$ onde:

$$\begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1-t \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Afirmação: $L \cap C = \{P\}$, onde:

Com efeito, $u^2t^2 + (1-t)^2 = 1$, então, temos: $(u^2+1)t^2 - 2t = 0$. Portanto,

$$t = 0 \text{ ou } t = \frac{2}{u^2+1} \qquad \text{(II)}$$

Agora, levando (II) em (I) ; obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2+1} \\ y = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}$$

De sorte que: $P(x,y) = \left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$.

(ii) A equação da reta que passa por $\mathrm{N}(0,1)$ e $P\left(\frac{2u}{u^2+1}, \frac{u^2-1}{u^2+1}\right)$ cujo vetor diretor é $v_0 = \overrightarrow{NP}$ é descrita por:

$$L: \begin{cases} x_0 = 0 + \frac{2u}{u^2+1}t \\ y_0 = 1 - \frac{2}{u^2+1}t \end{cases}.$$

Agora, L corta o eixo xx em $Q(x_0, 0)$.

Portanto, $\xi(P) = \xi(x,y) = (u,0)$,

Onde L : $\begin{cases} x(t) = ut \\ y = 1-t \end{cases} \Longrightarrow y = 1 - \frac{x}{u} \Longrightarrow x = (1-y)u \Longrightarrow u = \frac{x}{1-y}, y \neq 1.$

Consequentemente, vem:

A Projeção Estereográfica ξ é biunívoca entre $C \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}$, ou seja, $C \setminus \{N\}$ e é um isomorfismo $\mathbb{R}\,(C \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R})$ onde:

$$\begin{array}{ccc} \xi & : & C\setminus\{N\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \xi(x,y) = u = \dfrac{x}{1-y}. \end{array}$$

Daí, segue-se que:

$$\begin{array}{ccc} \xi^{-1} & : & \mathbb{R} \longrightarrow C\setminus\{N\} \\ u & \longmapsto & \xi^{-1}(u) = (x,y), \end{array}$$

Onde:

$$L : \begin{cases} x(u) = \frac{2u}{u^2+1} \\ y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{cases}.$$

■

39: Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferençável, tal que: $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que: f é linear.

A priori, vamos mostrar que:

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{f(x)}{2^n},\ n \geq 1.$$

De fato, para $n = 1$ temos: $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2}$ (hipótese) Suponha válido para $n-1$, ou seja,

$$f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{f(x)}{2^{n-1}},$$

Então, falta mostrar para n: Vejamos

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{1}{2}.\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}.\frac{f(x)}{2^{n-1}} = \frac{f(x)}{2^n},\ n \geq 1.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Além disso, $f(0) = f\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{1}{2}f(0) \Longrightarrow f(0) = 0.$

Agora, pela diferenciabilidade de f , temos:

$$Df(0).\xi = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0+t\xi) - f(0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t\xi)}{t}$$

Portanto,

$$Df(0).\xi = \lim_{t\to 0}\frac{f(t_n\xi)}{t_n},$$

Com $t_n = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$; donde, obtemos:

$$Df(0).\xi = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{\xi}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2^n}f(\xi)}{\frac{1}{2^n}} = f(\xi) \Longrightarrow Df(0).\xi = f(\xi)$$

De sorte que: f é linear.

40: Seja $B : E \times F \to G$ uma aplicação bilinear. Se B é uniformemente contínua. Mostre que: $B \equiv 0$.

Prova:

Suponha que $B \neq 0$, então, existe $(x_0, y_0) \in E \times F$, tal que:

$\alpha_0 = |B(x_0, y_0)| > 0$.

Assim, tomando-se: $\begin{cases} x_n = nx_0 \\ x_n^* = nx_0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y_n = \left(n+\frac{1}{n}\right)y_0 \\ y_n^* = ny_0 \end{cases}$, onde: $z_n = (x_n, y_n)$ e $z_n^* = (x_n^*, y_n^*)$, vem:

$$\begin{aligned} \|z_n - z_n^*\| &= \|(x_n, y_n) - (x_n^*, y_n^*)\| = \left\|\left(nx_0, \left(n+\frac{1}{n}\right)y_0\right) - (nx_0, ny_0)\right\| \\ &= \left\|\left(0, \frac{1}{n}y_0\right)\right\| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Agora,

$$|B(x_n, y_n) - B(x_n^*, y_n^*)| = \left|B\left(nx_0, \left(n+\frac{1}{n}\right)y_0\right) - B(nx_0, ny_0)\right|.$$

Usando o fato de que B é uma forma bilinear, obtemos:

$$\begin{aligned}\left|B\left(x_n,y_n\right)-B\left(x_n^*,y_n^*\right)\right| &= \left|B\left(nx_0,\frac{1}{n}y_0\right)\right| = \left|nB\left(x_0,\frac{1}{n}y_0\right)\right| \\ &= \left|n.\frac{1}{n}B\left(x_0,y_0\right)\right| = \left|B\left(x_0,y_0\right)\right| > 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|B\left(x_n,y_n\right)-B\left(x_n^*,y_n^*\right)\right| \nrightarrow 0.$$

Dito de outro modo, tem-se:

$$B\equiv 0, \text{ ou seja, } B\left(x_0,y_0\right)=0\ \forall\left(x_0,y_0\right)\in E\times F.$$

$\blacksquare$

41: (Questão: autor Prof. Dr. Marcos Crispino)

Dado a reta Γ e a esfera $\mathbb{S}:\|X-C\|=r,$ mostre que o comprimento L da corda determinada por S sobre Γ é $L=2\sqrt{r^2-\left(d\left(C,\Gamma\right)\right)^2}.$

Prova:

Sejam

$$\Gamma: X=P+tv\ , \text{ com } \|v\|=1 \text{ e}$$

$$\mathbb{S}:\|X-C\|=\|P+tv-C\|=r\Longrightarrow\|P+tv-C\|^2=r^2.$$

Daí, obtemos:

$$\|v\|^2t^2+2\left(P-C\right)vt+\|P-C\|^2-r^2=0. \qquad (1)$$

Agora, o comprimento $L=\|X_1-X_2\|$, onde: $X_1=P+t_1v$ e $X_2=P+t_2v.$

Assim, $L=\|(P+t_1v)-(P+t_2v)\|=|t_1-t_2|\,.\,\|v\|=|t_1-t_2|\,.$

Decorre de (1) que:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2(P-C)v \pm \sqrt{[2(P-C)v]^2 - 4\left(\|P-C\|^2 - r^2\right)}}{2} \\ t &= -(P-C)v \pm \sqrt{r^2 - \left[\|P-C\|^2 - \{(P-C).v\}^2\right]}. \end{aligned}$$

Desta forma, temos:

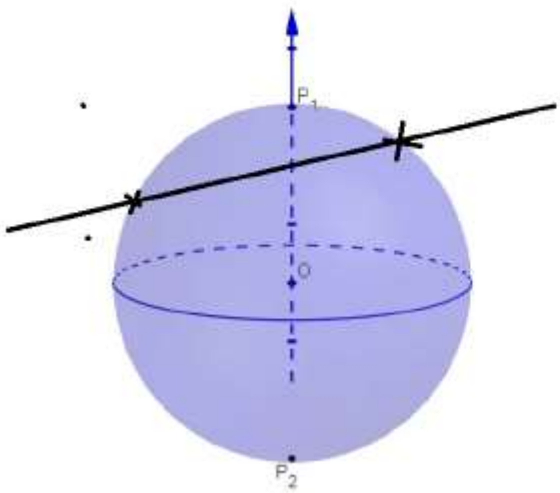
$$L = |t_1 - t_2| = 2\sqrt{r^2 - \left[\|P-C\|^2 - \{(P-C)v\}^2\right]}.$$

Além disso,

$$\left[\|P-C\|^2 - \{(P-C).v\}^2\right] = \|(P-C)\times v\|^2 = \frac{\|(P-C)\times v\|^2}{\|v\|^2} = \frac{\|(P-C)\times v\|}{\|v\|^2}^2$$
$$= (d(C,\Gamma))^2.$$

Portanto,

$$L = 2\sqrt{r^2 - (d(C,\Gamma))^2}.$$



■

44: Verifique se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por : $f(x) = \begin{cases} 1, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ é periódica sem período fundamental.

Sugestão: Basta notar que $f(x+p) = f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. ■

45: Dê exemplos de soma de funções periódicas que não é periódica.

Escolha $f(x)=\sin x+\sin(\alpha x)$ com $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (irracional). Mostre que: f não é uma função periódica.

Prova:

Por definição, temos:

$$\begin{aligned} f(x+p) &= f(x) \\ \sin(x+p)+\sin(\alpha x+\alpha p) &= \sin x+\sin(\alpha x) \iff \\ \sin(x+p)-\sin x &= -[\sin(\alpha x+\alpha p)-\sin(\alpha x)]. \end{aligned}$$

Note que: $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\sin b\cos a$. Assim,

$$\begin{aligned} \sin(x+p)-\sin x &= -[\sin(\alpha x+\alpha p)-\sin(\alpha x)] \\ 2\sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) &= -2\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x+\frac{\alpha p}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{p}{2}\right).\cos\left(x+\frac{p}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\alpha p}{2}\right).\cos\left(\alpha x+\frac{\alpha p}{2}\right). \end{aligned}$$

Se $x=\frac{\pi}{2}$, então, sin $\left(\frac{\alpha p}{2}\right)=0\Longrightarrow\frac{\alpha p}{2}=k_1\pi\Longrightarrow\alpha p=2k_1\pi,\ k_1\in\mathbb{Z},$

por outro lado, temos:

Se $\alpha x=\frac{\pi}{2}$, então, $\sin\left(\frac{p}{2}\right)=0\Longrightarrow\frac{p}{2}=k_2\pi\Longrightarrow p=2k_2\pi,\ k_2\in\mathbb{Z}.$

Daí, vem: $\alpha 2k_2\pi=2k_1\pi\Longrightarrow\alpha=\frac{k_1}{k_2}$, com $k_2\neq 0$. Absurdo! Visto que: α é irracional.

De sorte que f não é periódica. $\blacksquare$

46: Seja f uma função dada por:

$$f(x)=x^3+x.$$

Prove que:

(i) $|f(x)-f(2)|\leq 20.|x-2|$ para $0\leq x\leq 3$;

(ii) f é contínua em 2:

Prova:

Observe que:

$$|f(x) - f(2)| = |x^3 + x - 10| = |(x-2).(x^2 + 2x + 5)|.$$

Agora, $0 \leq x \leq 3 \Longrightarrow |x| \leq 3,$

por conseguinte, obtemos:

$$|(x-2).(x^2+2x+5)| \leq |x-2|.\left||x|^2 + 2|x| + 5\right| \leq 20|x-2|,$$

Visto que: $\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 3^2 + 2.3 + 5 = 20.$

Logo, $|f(x) - f(2)| \leq 20.|x-2|$ para $0 \leq x \leq 3.$

Algumas Majorações:

$$|x-2| < 1 \Longrightarrow 1 < x < 3 \Longrightarrow |x| \leq 3 \text{ e}$$

$$|(x-2)|.\left[|x|^2 + 2|x| + 5\right] \leq 20|x-2| < \epsilon \Longrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{20}.$$

Assim, basta tomar $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{20}\right\}$

Prova:

Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{20}\right\} > 0,$ tal que:

$$|x-2| < 1 \Longrightarrow |x| \leq 3 \Longrightarrow |x^2 + 2x + 5| \leq \left||x|^2 + 2|x| + 5\right| \leq 20 \text{ e}$$
$$|x-2| < \tfrac{\epsilon}{20} \Longrightarrow 20.|x-2| < \epsilon.$$

Assim,

$$20.|x-2|\,|x^2+2x+5| < 20.\epsilon \Longrightarrow |(x-2).(x^2+2x+5)| < \epsilon.$$

Portanto,

$$|f(x) - f(2)| = |x^3 + x - 10| < \epsilon \text{ desde que: } |x-2| < \delta.$$

Ou ainda, f é contínua em 2:

$$\blacksquare$$

Observação:

É um erro comum, de alguns livros de Cálculo, dizer que: toda função contínua é aquela que traçamos o gráfico de f sem tirar o lápis do papel. Toda função deste tipo é contínua. Mas, nem toda função contínua é deste tipo. Seja $\mathbb{X}$ um conjunto discreto (um conjunto é discreto se todo ponto de $\mathbb{X}$ isolado). Assim, toda função $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ é contínua em $x_0\in\mathbb{X}$. De fato,

$$\begin{aligned}(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap\mathbb{X} &= \{x_0\}\Longrightarrow|x-x_0|<\delta,\ x\in\mathbb{X}: \\ x &= x_0\Longrightarrow|f(x)-f(x_0)|=0<\epsilon,\ \forall\epsilon>0.\end{aligned}$$

■

47: Se $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}$ num corpo ordenado K, prove que, dados $a_1,a_2,\ a_3\ldots,a_n\in K$ tais que: $a_1y_1+\ldots+a_ny_n\neq0,$ tem-se: $\frac{\sum_{j=1}^{n}a_jx_j}{\sum_{j=1}^{n}a_jy_j}=\frac{x_1}{y_1}.$

Prova:

$$\text{Se } \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}=a, \text{ então, temos:}$$
$$\begin{cases}x_1=ay_1\\x_2=ay_2\\ \quad\vdots\\x_n=ay_n\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a_1x_1=a_1ay_1\\a_2x_2=a_2ay_2\\ \quad\vdots\\a_nx_n=a_nay_n\end{cases}\Longrightarrow\sum_{j=1}^{n}a_jx_j=a\sum_{j=1}^{n}a_jy_j.$$

Logo,

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_jx_j}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_jy_j}=\frac{x_1}{y_1}.$$

■

48: Dividir um número "a" em partes $x_1,x_2,\ldots,x_n$ proporcionais a: $a_1,a_2,\ldots,a_n\in K$, tais que: $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$ Prove que:

$$x_1=\frac{aa_1}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j},\ x_2=\frac{aa_2}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j} \text{ e } x_n=\frac{aa_n}{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j}.$$

Prova:

Com efeito, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é diretamente proporcional a $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$, com que: $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a$. Então, tem-se: $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = B$. Consequentemente, temos:

$$\begin{cases} x_1 = Ba_1 \\ x_2 = Ba_2 \\ \vdots \\ x_n = Ba_n \end{cases} \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j = B \sum_{j=1}^{n} a_j \Longrightarrow \frac{a}{\sum_{j=1}^{n} a_j} = B.$$

Daí, segue-se que:

$$x_1 = \frac{aa_1}{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \quad x_2 = \frac{aa_2}{\sum_{j=1}^{n} a_j}, \quad e \quad x_n = \frac{aa_n}{\sum_{j=1}^{n} a_j}$$

■

49: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto

$$Z_f = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$$

é fechado. Conclua que, se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas então $C = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = g(x)\}$ é fechado.

Fatos que ajudam:

(F1) S é fechado quando $\partial S \subset S$ onde ∂S denota a fronteira de S:

(F2) S é fechado $\Longleftrightarrow S = \bar{S} = S \cup \partial S$, onde $\bar{S}$ o fêcho de S: Queremos provar que Z_f é fechado. Isto é, $\bar{Z}_f = Z_f$.

Prova:

1° caso: $Z_f \subset \bar{Z}_f$

Seja $x \in Z_f$; então, como $\bar{Z}_f = Z_f \cup \partial Z_f$, segue-se que: $x \in \bar{Z}_f$.

Logo $\bar{Z}_f \subset Z_f$

Seja $x \in \bar{Z}_f$, então, existe (x_n) com $x_n \in Z_f$, tal que: $x_n \to x$.

Agora, por definição $f(x_n) = 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, segue-se que:

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x),$$

donde, vem $f(x) = 0$ ou ainda, $x \in Z_f$ e, portanto, $\bar{Z}_f \subset Z_f$.

Combinando os casos (1) e (2), obtemos:

$$\bar{Z}_f = Z_f.$$

Consequentemente, façamos $h = f - g$, então,

$$C_h = \{x \in \mathbb{R}; h(x) = f(x) - g(x) = 0\},$$

pelo item anterior, C_h é fechado, isto é, C é um conjunto fechado.

■

50: Sejam y, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,

tais que: $\xi > 0$ e $y_0 \neq 0$, tal que:

$$|y - y_0| < \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi |y_0|^2}{2}\right\}$$

$y \neq 0$, prove que:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

Vejamos **alguma majorações** antes de fazer a demonstração:

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0 - y|}{|y||y_0|} \text{ e } |y_0| - |y| \leq |y_0 - y| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow$$
$$|y| - |y_0| > -\frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow |y| > \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Assim,

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_0-y|}{|y|\,|y_0|} < \frac{2}{|y_0|^2}|y_0-y| < \frac{2}{|y_0|^2}\frac{\xi\,|y_0|^2}{2} = \xi$$
$$\Longrightarrow \left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

Prova:

Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \min\left\{\frac{|y_0|}{2}, \frac{\xi|y_0|^2}{2}\right\} > 0$,tal que:

$$|y-y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}. \tag{1}$$

$$|y-y_0| < \frac{\xi\,|y_0|^2}{2} \Longrightarrow \frac{2\,|y-y_0|}{|y_0|^2} < \xi. \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que:

$$\frac{1}{|y|}\frac{2\,|y-y_0|}{|y_0|^2} < \frac{2}{|y_0|}\xi.$$

De sorte que:

$$\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| < \xi.$$

■

51: Sejam x, y, x_0, y_0, ξ no corpo ordenado completo $\mathbb{R}$,tais que: $\xi > 0$

e

$$|x-x_0| < \min\left\{\frac{\xi}{2\,(|y_0|+1)}, 1\right\}$$

$$|y-y_0| < \frac{\xi}{2\,(|x_0|+1)}.$$

Prove que:

$$|xy-x_0y_0| < \xi.$$

Alguma majorações:

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &= |xy - x_0y + x_0y - x_0y_0| \\ &= |y(x - x_0) + x_0(y - y_0)| \\ &\leq |y|\,|(x - x_0)| + |x_0|\,|(y - y_0)|. \end{aligned}$$

Além disso, temos:

$$\begin{aligned} |x| - |x_0| &\leq |x - x_0| < 1 \Longrightarrow |x| \leq |x_0| + 1 \\ &\text{e} \\ |y| &\leq |y_0| + 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |xy - x_0y_0| &\leq |y|\,|(x - x_0)| + |x_0|\,|(y - y_0)| \\ &\leq (|y_0| + 1)\,.\frac{\xi}{2(|y_0| + 1)} + (|x_0| + 1)\,.\frac{\xi}{2(|x_0| + 1)}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$|xy - x_0y_0| < \xi.$$

Prova:

Faça a redação matemática da demonstração.

■

52: Seja f uma função dada por:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Prove que:

$$\begin{aligned} &(i)\ |f(x) - 2| \leq \left(1 + \tfrac{1}{x}\right).|x - 1| \text{ para } x > 0; \\ &(ii)\ |f(x) - 2| \leq 3|x - 1| \text{ para } x > \tfrac{1}{2}; \\ &(iii)\ f(x) \geq 2, \text{ para todo } x > 0. \end{aligned}$$

Prova:

(i) Com efeito, $|f(x) - 2| = \left|x + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|\frac{x^2 - 2x + 1}{x}\right|$

$\Longrightarrow \left|\frac{x^2 - 2x + 1}{x}\right| = \left|\frac{(x-1)^2}{x}\right| = \left|\frac{x-1}{x}\right|.|x - 1| \leq \frac{|x| + |1|}{|x|}.|x - 1|.$

Como $x > 0$, segue-se que:

$$|f(x) - 2| \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right) . |x - 1| .$$

(ii) Para $x > \frac{1}{2}$, então, $\frac{1}{x} < 2$ e, portanto, $1 + \frac{1}{x} < 3$. Daí e do item anterior, obtemos:

$$|f(x) - 2| \leq 3\,|x - 1| .$$

(iii) Basta revisitar a desigualdade entre as médias: geométrica e aritmética, obtendo:

$$\sqrt{x.\frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2}, \ x > 0.$$

Logo,

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

■

53: Se $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que: $\forall x \in]0,1[$, tem-se

$$|f(x)| < \frac{1}{2} \text{ e } f(x) = \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right],$$

então, verifique se:

$|f(x)| < \dfrac{1}{2^n}$ para todo $0 < x < 1$ e $n = 1, 2, \cdots, n, \ldots$

Prova: (Usar indução finita sobre n)

(i) Para $n = 2$, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2} < f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{2} \\ \text{e} \\ -\frac{1}{2} < f\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} -1 < f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) < 1 \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{4} < \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] < \frac{1}{4} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$|f(x)| < \frac{1}{2^2}.$$

(ii) Suponha válido para n. Então, falta mostrar para n + 1: Vejamos

$$\begin{cases} -\frac{1}{2^n} < f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{1}{2^n} \\ \text{e} \\ -\frac{1}{2^n} < f\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{1}{2^n} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{2^n} < f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) < \frac{2}{2^n} \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] < \frac{1}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

Logo,

$$-\frac{1}{2^{n+1}} < f(x) < \frac{1}{2^{n+1}},$$

ou ainda,

$$|f(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}, \ \forall x \in]0,1[, \ n = 1, 2, ...n, ...$$

■

54: Seja $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

(i) $\alpha = \sup f, \ \forall x \in S;$

(ii) Prove que: dado $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in S,$ tal que:

$$f(x_0) > \alpha - \epsilon \Longleftrightarrow \sup f = \inf \{C; f(x) \leq C, \forall x\}$$

Prova:

Com efeito, $f(x) \leq C, \ \forall x,$ donde, C é cota superior para $f(x), \ x \in S.$

Daí, vem: $f(x) \leq \alpha \leq C, \ \forall x \in S.$ Além disso, dado $\epsilon > 0$ existe $x_0 \in S,$ tal que: $f(x_0) > \alpha - \epsilon,$ ou seja, α é a menos das cotas superiores. Logo,

$$\alpha = \sup f.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq C, \ \forall x \in S \Longrightarrow \alpha \leq \inf X, \text{ onde:} \\ X &= \{C; \ f(x) \leq C, \ \forall x\}. \end{aligned}$$

Agora, sabe-se que por definição $\alpha \geq \inf X.$

De sorte que:

$$\alpha = \inf X,$$

ou ainda,

■

$$\sup f = \inf \{C; f(x) \leq C, \forall x\}.$$

■

Define-se:

$$\inf f := \sup \{C;\ C \leq f(x), \forall x\}.$$

Observação: Vale ressaltar que: se trocarmos $\forall x \in S$ por quase sempre (q.s.) a menos de um conjunto de medida nula à Lebesgue ou em quase todo ponto (q.t.p.) estabelecemos assim, o chamado Supremo Essencial

$$\text{supess}(f) := \inf \{C; f(x) \leq C, q.s.\}.$$

55: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, tais que: $x_1.x_2\ldots x_n = 1.$ Verifique se:

$$(1 + x_1).(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 2^n.$$

Prova: Basta notar que:

$$\begin{cases} \sqrt{1.x_1} \leq \frac{1+x_1}{2} \\ \sqrt{1.x_2} \leq \frac{1+x_2}{2} \\ \quad\vdots \\ \sqrt{1.x_n} \leq \frac{1+x_n}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x_1} \leq 1 + x_1 \\ 2\sqrt{x_2} \leq 1 + x_2 \\ \quad\vdots \\ 2\sqrt{x_n} \leq 1 + x_n \end{cases}$$

Donde, obtemos:

$$\begin{cases} \overbrace{2.2\ldots2}^{n\ \text{vezes}} \leq (1 + x_1).(1 + x_2)\cdots(1 + x_n), \end{cases}$$

visto que $\sqrt{x_1.x_2\ldots x_n} = 1.$ Portanto,

$$(1 + x_1).(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 2^n.$$

■

Observação: O mesmo problema, poderia ser provado ou não, por indução finita sobre n? Explique!

56: Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), tais que: $1 < a < b < c$ e $b - a = c - b,$ mostre que:

$$\frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}.$$

Prova: Basta observar que:

$$\sqrt{\ln a.\ln c} \leq \tfrac{\ln a + \ln c}{2} = \tfrac{\ln(ac)}{2} = \ln\left(\sqrt{ac}\right) < \ln\left(\tfrac{a+c}{2}\right) = \ln b$$

$$\sqrt{\ln a.\ln c} < \ln b.$$

Logo,

$$\ln a.\ln c < (\ln b)^2 \Longleftrightarrow \frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}.$$

■

57**: (Isomorfismo e espaço quociente)**

Seja $T : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ uma transformação linear. Mostre que: $\operatorname{Im}(T) \simeq \mathbb{U} / \operatorname{Ker}(T)$, onde $\mathbb{U} / \operatorname{Ker}(T)$ indica o espaço quociente de $\mathbb{U}$ por $\operatorname{Ker}(T)$.

Sugestão:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : & \mathbb{U} / \operatorname{Ker}(T) \longrightarrow \operatorname{Im}(T) \\ & [x] \longmapsto \Phi([x]) = T_x \end{array}$$

(i) Φ está bem definida
$[x_1] = [x_2] \Longrightarrow \Phi([x_1]) = \Phi([x_2]) \Longrightarrow T_{x_1} = T_{x_2}$.
(ii) Φ é injetora
(iii) Φ é sobrejetora por construção.

58: (Isomorfismo)

Prove que: C ([0; 1]) é isomorfo a C ([2; 3]), isto é, C $([0,1]) \simeq C[2,3]$. Vale destacar que:

$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua :

Prova: Com efeito, $2 \leq x \leq 3 \Longleftrightarrow 0 \leq x - 2 \leq 1,$ então podemos tomar

$$\begin{array}{rcl} T : & C([0,1]) \to & C[2,3] \\ & f \longmapsto & T(f)(x) = f(x-2). \end{array}$$

É fácil ver que T é linear (Verifique!)

Provemos que T é um isomorfismo, por simplicidade façamos o seguinte:

$$\begin{array}{rrl} \varphi: & [2,3] \rightarrow & [0,1] \\ & x \longmapsto & \varphi(x) = x-2, \end{array}$$

de modo análogo, a inversa de φ será dada por:

$$\begin{array}{rrl} \varphi^{-1}: & [0,1] \rightarrow & [2,3] \\ & (x-2) \longmapsto & \varphi^{-1}(x-2) = x. \end{array}$$

Além disso, observe o diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & [2,3] \\ & \searrow & \downarrow g \\ go\varphi^{-1} & & \mathbb{R}. \end{array}$$

Afirmação 1: T é injetora

Seja $f_0 \in \operatorname{Ker}(T)$, então, $T[f_0](x) = (f_0 o\varphi)(x) = 0$, daí seque-se que: $f_0 o\varphi$. Portanto,

$$(f_0 o\varphi)\, o\varphi^{-1} = 0.\varphi^{-1} = 0.$$

Dito de outro modo, temos:

$$f_0 o \left(\varphi o\varphi^{-1}\right) = f_0 = 0.$$

De sorte que: T é **injetora.**

Afirmação 2: T é sobrejetora

$$\forall g \in C([2,3])\,,\ \exists\varphi^{-1} \in C([0,1]) : go\varphi^{-1} \in C([0,1]),\ \text{tal que:}$$
$$T\left(go\varphi^{-1}\right) = go\left(\varphi^{-1}o\varphi\right) = g.$$

Portanto, T é sobrejetora.

Por conseguinte, T é um isomorfismo. Além disso, podemos escrever de outra forma:

$$C([0,1]) \simeq C[2,3]\,.$$

$\blacksquare$

59:**(Questão: autor Prof. Dr. Marcos Crispino: Lugar Geométrico)**

Sejam $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^3$, $M \in \mathbb{R}$ com $M > 0$. Que lugar geométrico é o conjunto

$$\mathbb{S} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^{3} [d(X, A_j)]^2 = M \right\}?$$

Solução:

Considere $[d(X, A_j)]^2$ com $j = 1, 2, 3$, então, temos:

$[d(X, A_1)]^2 = \|X - A_1\|^2 = \|X\|^2 - 2X.A_1 + \|A_1\|^2$

$[d(X, A_2)]^2 = \|X - A_2\|^2 = \|X\|^2 - 2X.A_2 + \|A_2\|^2$

$[d(X, A_3)]^2 = \|X - A_3\|^2 = \|X\|^2 - 2X.A_3 + \|A_3\|^2$.

Logo,

$3\|X\|^2 - 2X.(A_1 + A_2 + A_3) + \|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 + \|A_3\|^2 = M$

$$\|X\|^2 - \tfrac{2}{3}X.(A_1 + A_2 + A_3) = \tfrac{M}{3} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{3} \|A_j\|^2}{3} \right)$$

$$\|X\|^2 - \tfrac{2}{3}X.(A_1 + A_2 + A_3) + \tfrac{\|A_1 + A_2 + A_3\|^2}{9} = \tfrac{M}{3} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{3} \|A_j\|^2}{3} - \frac{\|A_1 + A_2 + A_3\|^2}{9} \right)$$

$$\left\|X - \tfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)\right\|^2 = \tfrac{M}{3} - \lambda, \text{ onde } : \lambda = \frac{\sum_{j=1}^{3} \|A_j\|^2}{3} - \frac{\|A_1 + A_2 + A_3\|^2}{9}$$

$$\left\|X - \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)\right\|^2 = \frac{M}{3} - \lambda,$$

$$\text{onde } : \lambda = \frac{\sum_{j=1}^{3} \|A_j\|^2}{3} - \frac{\|A_1 + A_2 + A_3\|^2}{9}.$$

Daí, teremos três casos, a saber:

(i) Se $\frac{M}{3} - \lambda < 0$, então, neste caso, $\mathbb{S} = \phi$.

(ii) Se $\frac{M}{3} - \lambda = 0$, então, $\mathbb{S} = \left\{ \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3) \right\}$ é um único ponto.

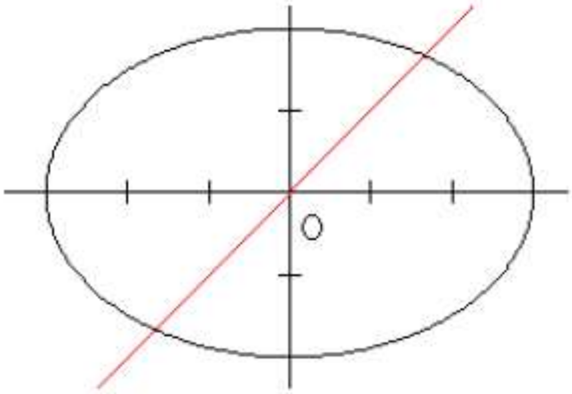
(iii) Se $\frac{M}{3} - \lambda > 0$, então, $\mathbb{S}$ descreve uma esfera de raio $R = \sqrt{\frac{M}{3} - \lambda}$.

■

60: **(Questão: autor Prof. Dr. Marcos Crispino)**

Dada a elipse descrita pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e seja L o comprimento da corda da elipse que contém a origem.Mostre que:

$$2b \leq L \leq 2a.$$



Prova:

Com efeito, um conjunto de equações paramétricas da reta S, são dadas por

$$S : \begin{cases} x = mt \\ y = nt \end{cases} \qquad (1)$$

onde: $v = (m, n)$ e $m^2 + n^2 = 1.$

Consequentemente, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \Longrightarrow \frac{(mt)^2}{a^2} + \frac{(nt)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow t^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = 1 \\ &\Longrightarrow t^2 \left(\frac{m^2 b^2 + n^2 a^2}{a^2 b^2} \right) = 1 \Longrightarrow t = \frac{\pm ab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Daí, levando (2) em (1) ; obtem-se:

$$\begin{aligned} (a)\ t &= \frac{ab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}} \Longrightarrow A(x_1, y_1), \\ \text{onde } x_1 &= \frac{mab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}} \text{ e } y_1 = \frac{nab}{\sqrt{m^2 b^2 + n^2 a^2}}. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga, vem:

$$
\begin{aligned}
(b)\ \ t &= \frac{-ab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}} \Longrightarrow B\left(x_2, y_2\right), \\
\text{onde } x_2 &= \frac{-mab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}} \text{ e } y_2 = \frac{-nab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}}.
\end{aligned}
$$

Assim, o comprimento L, é descrito por:

$$
\begin{aligned}
L &= d\left(A, B\right) = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\left(2mab\right)^2 + \left(2nab\right)^2}{\left(\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}\right)^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}}.
\end{aligned}
$$

Visto que: $m^2 + n^2 = 1.$

Logo,

$$
L = \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}}.
$$

Agora, observe que:

$$
\begin{aligned}
m^2b^2 + \left(1 - m^2\right)a^2 - a^2 &= m^2b^2 - m^2a^2 \\
&= m^2\left(b^2 - a^2\right) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Donde, vem:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{m^2b^2+n^2a^2} &\leq \sqrt{a^2} \Longrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}} \\
&\Longrightarrow 2b \leq \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}} = L. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos:

$$
\begin{aligned}
m^2b^2 + \left(1 - m^2\right)a^2 - b^2 &= -b^2\left(1 - m^2\right) + \left(1 - m^2\right)a^2 \\
&= \left(1 - m^2\right)\left(a^2 - b^2\right) \geq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sqrt{m^2b^2+n^2a^2} &\geq \sqrt{b^2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}} \leq \frac{1}{b} \\ &\Longrightarrow \frac{2ab}{\sqrt{m^2b^2+n^2a^2}} = L \leq 2a. \qquad (4)\end{aligned}$$

Segue-se de (3) e (4) o resultado, ou ainda,

$$2b \leq L \leq 2a.$$

■

61:**(Vestibular: COVEST 1999: Função e majorações)**

Seja $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \frac{x2^{-x}}{(2^{-x}+1)^2},$$

então, verifique se: $0 < f(100) < 10^{-28}$.

Solução:

Com efeito,

$$f(x) = \frac{\frac{x}{2^x}}{\left(\frac{1+2^x}{2^x}\right)^2} = \frac{x2^x}{(1+2^x)^2},$$

então,

$$f(100) = \frac{100.2^{100}}{(1+2^{100})^2} < \frac{100.2^{100}}{2^{200}} = \frac{100}{2^{100}}.$$

Afirmação: $2^{100} > 10^{30}$. De fato,

$$\begin{aligned}2^{100} &> 10^{30} \Longleftrightarrow 100.\log_{10} 2 > 30.\log_{10} 10 \\ &\Longleftrightarrow 100.0,301 > 30 \Longleftrightarrow 30,1 > 30.\end{aligned}$$

Por conseguinte, vem:

$$2^{100} > 10^{30} \Longleftrightarrow \frac{1}{2^{100}} < \frac{1}{10^{30}}.$$

Assim,

$$0 < f(100) < \frac{100}{2^{100}} < \frac{10^2}{10^{30}} = 10^{-28}.$$

De sorte que:

$$0 < f(100) < 10^{-28}.$$

■

62: (Máximo e Mínimo do módulo de um complexo sobre certas restrições)

Determine os valores máximos e mínimos $|z+i|$ quando $|z-2|=1$.

Solução:

Com efeito, seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, então,

$$|z-2| = |(x-2)+yi| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 1. \qquad \text{(I)}$$

A referida equação descreve uma circunferência de centro C_1 (2; 0) e raio r = 1: Além disso,

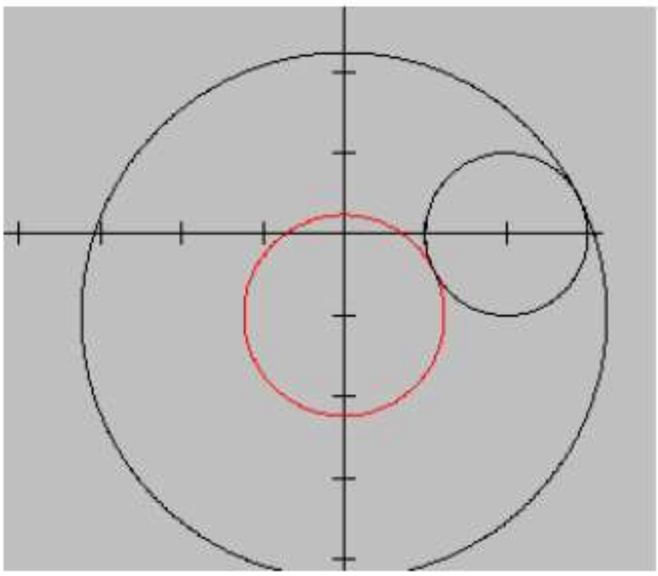
$$|z+i| = a \Rightarrow |x + (y+1)i| = a.$$

Daí, procedendo de forma análoga, obtemos:

$$x^2 + (y+1)^2 = a^2.$$

Esta equação apresenta o lugar geométrico de uma circunferência de centro $C_2(0,-1)$ e raio a. Agora, a distância entre os centros C_1 e C_2, é dada por: $d(C_1, C_2) = \sqrt{5}$ Assim, os pontos devem está sobre a circnferência (I) e, portanto, $\max|z+i| = a_1 = \sqrt{5}+1$ e $\min|z+i| = a_2 = \sqrt{5}-1$.

(Veja figura descita abaixo)



$C_1\,(2,0)$ e $C_2\,(0,-1)$

63:**(Representação matricial de um número complexo) A representação matricial** de um número complexo $z = x + yi$ dada pela função $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$, onde:

$$\Phi\,(z) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$$

Sejam z;w dois números complexos, então, mostre que:

$$\begin{array}{l} (i)\ \Phi\,(z+w) = \Phi\,(z) + \Phi\,(w) \\ (ii)\ \Phi\,(z\cdot w) = \Phi\,(z)\cdot\Phi\,(w) \\ (iii)\ z \neq 0\text{, tem-se: } \Phi\left(\frac{1}{z}\right) = [\Phi\,(z)]^{-1} \\ (iv)\ \Phi \text{ é injetora.} \end{array}$$

Vamos considerar (i) e (ii) como triviais.

(iii) Nesta caso, basta observar que

$$\Phi\,(1) = \Phi\,(1+0i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2,$$

onde: $\mathbb{I}_2 \in \mathbb{M}_2\,(\mathbb{R})$ a matriz identidade do espaço de todas as matrizes de ordem 2 com entradas em R: Desta forma é imediato que:

$$\Phi\,(1) = \Phi\left(\frac{1}{z}\cdot z\right) = \Phi\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\Phi\,(z) = \mathbb{I}_2.$$

O descrito acima nos diz que $\Phi(z)$ é uma matriz invertível, sendo: $z \neq 0$, além disso, nos dá:

$$\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = [\Phi(z)]^{-1}.$$

Dito de outra forma, $\Phi\left(\frac{1}{z}\right)$ que é a matriz do complexo $\frac{1}{z}$ é dada pela matriz inversa de $\Phi(z)$.

■

(iv) Afirmação : Φ é injetora.

De fato, $\forall z_1 = x_1 + y_1 i$ e $\forall z_2 = x_2 + y_2 i$, com $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos:

$$\Phi(z_1) = \Phi(z_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow z_1 = z_2.$$

De sorte que: Φ é injetora.

Observação 4 Poderíamos ter determinado o núcleo (kernel) do homomofismo Φ a saber:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\Phi) &= \left\{ z_0 = x_0 + y_0 i \in \mathbb{C} : \Phi(z_0) = \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z_0 = 0 + 0i. \end{aligned}$$

Portanto,

$\mathrm{Ker}(\Phi) = \{z_0 = 0 + 0i\} \Leftrightarrow \Phi$ é injetora.

■

64: Seja $f(z) = z^n + a_{(n-1)} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, um polinômio com coeficiente $a_n = 1$. Mostre que para $|z|$ suficiente grande, temos:

$$|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2} |z|^n.$$

Prova:

Basta escolher

$$\frac{|z|^{n-j}}{|a_j|} \geq 2n \Rightarrow \frac{|a_j|}{|z|^{n-j}} \leq \frac{1}{2n},$$

onde: $0 \leq j \leq n-1$.

Senão, vejamos

$$\begin{cases} \frac{|a_0|}{|z|^n} \leq \frac{1}{2n} \\ \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} \leq \frac{1}{2n} \\ \vdots \\ \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \frac{1}{2n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \leq \overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ vezes}} = \frac{1}{2}. \right.$$

Agora,

$$\begin{aligned} |f(z) - z^n| &= \left|a_{(n-1)} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| = |z|^n \cdot \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \\ &\leq |z|^n \cdot \left[\frac{|a_0|}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|}\right] \\ &\leq |z|^n \cdot \left(\overbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}^{n \text{ vezes}}\right) = \frac{1}{2}|z|^n. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$|f(z) - z^n| \leq \frac{1}{2}|z|^n.$$

■

65. (Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária)

Seja $f(x) = (x+1)^m + x^m + 1$ com m inteiro positivo. Para que valores de m; se tem: $f(x)$ é divisível por $g(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2$?

Solução

Basta observar que $\alpha = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ é raiz dupla de g (x), temos que α também é raiz dupla de f (x) :

Assim, temos que:

$$\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{m}+\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{m}=-1 \\ \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{m-1}+\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{m-1}=0. \end{cases} \qquad (1)$$

Dito de outro modo, temos:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2m\pi}{3}\right)+\left(\sin\left(\frac{m\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2m\pi}{3}\right)i\right)=-1 \\ \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right)+\left(\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right)i\right)=0. \end{cases} \qquad (2)$$

Consequentemente, fazendo $a=\frac{m\pi}{3}$, obtemos:

$$\begin{cases} \cos a+\cos 2a=-1 \\ \sin a+\sin 2a=0 \\ \cos\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right)=0 \\ \sin\left(\frac{(m-1)\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2(m-1)\pi}{3}\right)=0 \end{cases} \qquad (3)$$

Agora, da (1ª) equação do sistema (3) ; resulta que:

$$2\cos^2 a+\cos a=0.$$

Logo,

$$\cos a=0 \text{ ou } \cos a=\frac{-1}{2},$$

e, por conseguinte, vem:

$$a=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } a=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}, \qquad (4)$$

isto é,

$$\frac{m\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ ou } \frac{m\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}. \qquad (5)$$

Portanto,

$$m=\frac{3+6k}{2} \text{ ou } m=\pm 2+6k,\ \ k\in\mathbb{Z}. \qquad (6)$$

Daí, substituindo estes valores de m nas demais equações do sistema (3) ; vê-se que o único valor de m que as verifica é:

$$m = -2 + 6k.$$

■

66**: Um número** Gaussiano é um número complexo cuja parte real e imaginário é inteira. Denotamos por

$$\mathbb{G} = \mathbb{Z}[i] = \{m + in : \ m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Mostre que: A soma e o produto de dois números Gaussianos são Gaussianos. Ache uma condição necessária e suficiente para que um número Gaussiano seja invertível. Ache todos os números invertíveis de G.

Sejam $z_1 = m_1 + n_1 i$ e $z_2 = m_2 + n_2 i, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{G},$ então, facilmente, obtemos:

$(z_1 + z_2) \in \mathbb{G}$ e $(z_1 \cdot z_2) \in \mathbb{G}.$

Agora, seja $\alpha \in \mathbb{G}, \ \alpha \neq 0$ então, existe $\beta \in \mathbb{G}$ tal que: $\alpha \cdot \beta = 1.$

Assim, a função norma satisfaz

$$N(\alpha) \cdot N(\beta) = 1 \Rightarrow N(\alpha \cdot \beta) = N(1) = 1,$$

e portanto, $N(\alpha) \in \mathbb{Z}^+$; segue-se que: $N(\alpha) = 1$. Escolha $\alpha = x + yi$; temos:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

Cujas soluções em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ são $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

Portanto,

$\alpha \in \{-1, 1, -i, i\}$

■

(A) Aqui estamos caracterizando função norma por:

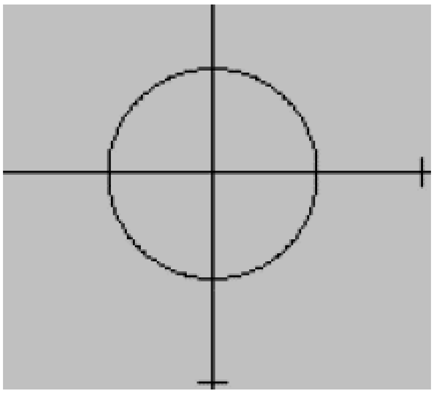
$$N : \quad \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$$
$$a + bi \longmapsto N(a + bi) = |a + bi|^2 = a^2 + b^2$$

(B) Em álgebra abstrata $\mathbb{G}=\mathbb{Z}[i]$ é chamado anel dos inteiros Gaussianos. (Veja Coleção Matemática Universitária: Curso de Álgebra IMPA: Abramo Hefez)

67: Escreva a equação do disco unitário D(1) no plano pelos números complexos, em seguida, calcule o

$$\max\left\{\left|z^2+1\right| : z\in\mathbb{D}(1)\right\}.$$

Basta notar que:



$$\mathbb{D}(1)=\{z=x+yi : x,y\in\mathbb{R}; |z|=1\}=\left\{z=x+yi : x,y\in\mathbb{R};\ x^2+y^2=1\right\}.$$

Além disso, $z^2+1=(x+yi)^2+1=x^2+2xyi-y^2+1=2x^2+2xyi$

$$\left|z^2+1\right|=\sqrt{(2x^2)^2+(2xy)^2}=\sqrt{(2x^2)^2+4x^2(1-x^2)}=2|x|.$$

Portanto,

$$\left\{\left(\begin{matrix}\max\left|z^2+1\right| \\ z\in\mathbb{D}(1)\end{matrix}\right)=2 \text{ e } \left(\begin{matrix}\min\left|z^2+1\right| \\ z\in\mathbb{D}(1)\end{matrix}\right)=-2.\right.$$

■

68: **(Matrizes)**

Sejam $A,B,C\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tais que: $B\in\mathbb{S}$ e $C\in\mathbb{A}$. Prove que:

$$(i)\quad \mathbb{M}_n(\mathbb{R})=\mathbb{S}+\mathbb{A} \qquad\qquad (ii)\quad \mathbb{S}\cap\mathbb{A}$$

Notações: $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})=\mathbb{S}\oplus\mathbb{A}\Longleftrightarrow\mathbb{M}_n(\mathbb{R})=\mathbb{S}+\mathbb{A}$ e $\mathbb{S}\cap\mathbb{A}=\{0\}$

dizemos que $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é soma direta S e A:

$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: Espaço das matrizes de ordem n com entradas reais.

S: Subespaço das matrizes simétricas.

A: Subespaço das matrizes anti-simétricas.

Note que: $B^t = B$ (matriz simétrica) e $C^t = -C$ (matriz anti-simétrica). $B \in \mathbb{S} : B^t = B$ e $C \in \mathbb{A} : C^t = -C$.

Observe que:

$$\begin{cases} A = B + C \\ \text{e} \\ A^t = (B+C)^t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = B + C \\ \text{e} \\ A^t = B^t + C^t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A + A^t = (B + B^t) + (C + C^t) \\ \text{e} \\ A - A^t = (B - B^t) + (C - C^t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + A^t = 2B \\ \text{e} \\ A - A^t = 2C \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{A+A^t}{2} = B \\ \text{e} \\ \frac{A-A^t}{2} = C \end{cases}. \text{ Assim, } \forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \text{ tem-se:}$$

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}.$$

Logo, $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S} + \mathbb{A}$.

Seja $K \in \mathbb{S} \cap \mathbb{A}$ então, temos: $K \in \mathbb{S}$ e $K \in \mathbb{A}$

$$\text{Ora, } \begin{cases} K \in \mathbb{S} \\ \text{e} \\ K \in \mathbb{A} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} K^t = K \\ \text{e} \\ K^t = -K \end{cases} \Longrightarrow K = -K \Longrightarrow K = 0.$$

Portanto, $\mathbb{S} \cap \mathbb{A} = \{0\}$.

■

Afirmação 1: S é um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

De fato, $\lambda \in \mathbb{R}, \forall B_1, B_2 \in \mathbb{S}$, tem-se:.

$$(B_1 + \lambda B_2)^t = B_1^t + \lambda B_2^t = (B_1 + \lambda B_2) \in \mathbb{S}.$$

Logo, S. é um subespaço.

$\blacksquare$

Procedendo de forma análoga, obtemos:

Afirmação 2: $\mathbb{A}$ é um subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii) De fato, $\lambda \in \mathbb{R}, \forall C_1, C_2 \in \mathbb{S}$, tem-se:

$$(C_1 + \lambda C_2)^t = C_1^t + \lambda C_2^t = -(C_1 + \lambda C_2) \in \mathbb{A}.$$

De sorte que: A é um subespaço.

$\blacksquare$

69: **(Matrizes)**

Seja $\mathbb{J}_n$, a matriz $n \times n$ tal que todas as entradas são 1: Mostre que se $n > 1$. então, temos:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n)^{-1} = \mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.$$

Prova: Com efeito, $\mathbb{J}_n^2 = n\mathbb{J}_n$, $\mathbb{I}\mathbb{J}_n = \mathbb{J}_n$ e $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I}$.

Basta mostrar que:

$$(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.\right) = \mathbb{I}.$$

Defato,

$$\begin{aligned}
(\mathbb{I} - \mathbb{J}_n) \cdot \left(\mathbb{I} - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.\right) &= \mathbb{I}^2 + \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n^2 - \frac{1}{n-1}\mathbb{I}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n\mathbb{I} \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1}n\mathbb{J}_n - \frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_n \\
&= \mathbb{I} + \frac{1}{n-1}n\mathbb{J}_n - \left(\frac{1}{n-1} + 1\right)\mathbb{J}_n \\
&= \mathbb{I} + \frac{n}{n-1}\mathbb{J}_n - \frac{n}{n-1}\mathbb{J}_n = \mathbb{I}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathbb{I}-\mathbb{J}_n)^{-1}=\mathbb{I}-\frac{1}{n-1}\mathbb{J}_n.$$

■

70: **(Matrizes)**

Sejam $\mathbb{A},\mathbb{B}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Se $\mathbb{A}+\mathbb{B}$ e $\mathbb{A}$ forem invertíveis, então, mostre que

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1}=\mathbb{A}^{-1}\left(\mathbb{I}_n+\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1}$$

Prova:

(A)

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^{-1}\left(\mathbb{I}_n+\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} &= \left[\left(\mathbb{I}_n+\mathbb{B}\mathbb{A}^{-1}\right).\mathbb{A}\right]^{-1}\\ &= \left[\mathbb{I}_n\mathbb{A}+\mathbb{B}(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\right]^{-1}\\ &= (\mathbb{A}+\mathbb{B})^{-1}\end{aligned}$$

■

71: O traço da matriz $\mathbb{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é definido por:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{jj}=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$$

Prove que:

(i) $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\pm\lambda\mathbb{B})=\operatorname{tr}\mathbb{A}\pm\lambda\operatorname{tr}\mathbb{B}$, (ii) $\operatorname{tr}\mathbb{A}^t=\operatorname{tr}\mathbb{A}$ (iii) $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B})=\operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$, com $\lambda\in\mathbb{R}$.

(B) Sugestão: Mostre por indução finita sobre n que: $(\mathbb{A}^n)^t=(\mathbb{A}^t)^n=\mathbb{A}^n$.

(iii) Basta observar que:

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}A_{i\alpha}B_{\alpha i}=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}B_{\alpha i}A_{i\alpha}=\operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}).$$

■

72**: (Normas equivalentes em espaços de dimensão finita)**

Seja $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, mostre que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|u\right\|_s \le \left\|u\right\| \le \left\|u\right\|_s ,$$

ou seja, a norma euclidiana é equivalente a norma da soma.

Observação: Algumas normas:

$\left\|u\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$ (norma euclidiana),

$\left\|u\right\|_s = |x|+|y|$ (norma da soma) e

$\left\|u\right\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$ (norma do máximo).

Prova:

A priori,

$$\left\|u\right\| = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow \left\|u\right\| \le \sqrt{x^2}+\sqrt{y^2} = |x|+|y| = \left\|u\right\|_s \Longrightarrow \left\|u\right\| \le \left\|u\right\|_s .$$

Dai, vem:

$$\left\|u\right\| \le \left\|u\right\|_s . \qquad (1)$$

Além disso,

$$(|x|-|y|)^2 \ge 0 \Longrightarrow |x|^2+|y|^2 \ge 2|x||y| \Longrightarrow 2\left(|x|^2+|y|^2\right) \ge (|x|+|y|)^2$$
$$\Longrightarrow \left\|u\right\|_s = |x|+|y| \le \sqrt{2}\sqrt{|x|^2+|y|^2} = \sqrt{2}\left\|u\right\| .$$

Donde, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\|u\right\|_s \le \left\|u\right\| \qquad (2)$$

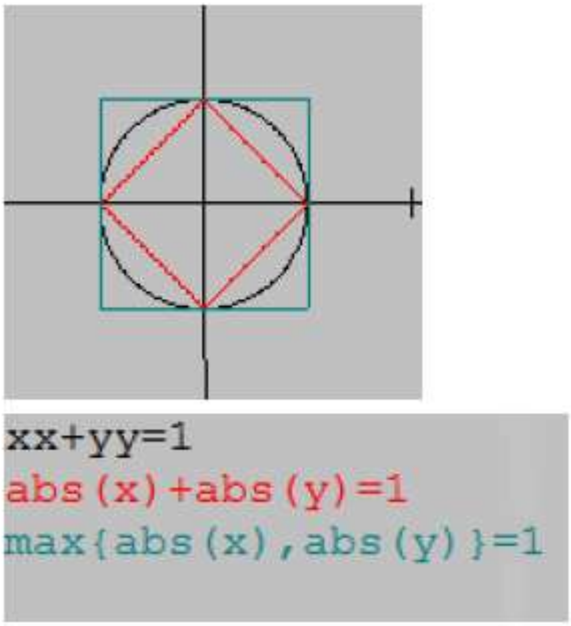
Agora, combinando os resultados (1) e (2), segue-se que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left\|u\right\|_s \le \left\|u\right\| \le \left\|u\right\|_s ,$$

■

73: Esboce os gráfico de $\mathbb{A}=\{u\in\mathbb{R}^2;\left\|u\right\|=1\}$, $\mathbb{B}=\{u\in\mathbb{R}^2;\left\|u\right\|_s=1\}$ e $\mathbb{C}=\{u\in\mathbb{R}^2;\left\|u\right\|_\infty=1\}$, onde: $u=(x,y)$.

Gráficos usando o **Winplot**



74: **(Normas equivalentes em espaços de dimensão finita)** Dê um contra-exemplo para mostrar que as normas da soma e do máximo não satisfazem a identidade do paralelogramo.

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

Basta tomar $e_1=(1,0)$ e $e_2=(0,1)$ .Senão, vejamos:

$$\|e_1\|_s=\|(1,0)\|_s=1 \text{ e } \|e_2\|_s=\|(0,1)\|_s=1$$
$$\|e_1+e_2\|_s=\|(1,1)\|_s=2,\ \|e_1-e_2\|_s=\|(1,-1)\|_s=2.$$

Procedendo de form análoga, obtemos:

$$\|e_1\|_\infty=1,\ \|e_2\|_\infty=1,\ \|e_1+e_2\|_\infty=\max\{|1|,|1|\}=1 \text{ e}$$
$$\|e_1-e_2\|_\infty=\max\{|1|,|-1|\}=1.$$

■

72: Seja $\mathbb{A}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, tal que: A é ortogonal. Então, prove que: $\|\mathbb{A}x\|=\|x\|$, para qualquer $x\in\mathbb{R}^n$ conclua daí que: $\langle\mathbb{A}x,\mathbb{A}y\rangle=\langle x,y\rangle$. $\mathbb{A}$ é ortogonal, isto é, $\mathbb{A}\mathbb{A}^t=\mathbb{A}^t\mathbb{A}=\mathbb{I}$

Considere a base canônica α de $\mathbb{R}^n$

$\alpha=\{(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,0,1)\}$. Assim, temos:

$$u=(x_1,x_2\ldots,x_n)=x_1(1,0,\ldots,0)+\ldots+x_n(0,0,\ldots,0,1).$$

Desta forma, a matriz de coordenadas do vetor u na base canônica é dada por:

$$[u]_{\alpha} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \in \mathbb{R}^{nx1},\ x^t x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1xn} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

$$x^t x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|x\|^2 .$$

Daí, vem:

$$\|\mathbb{A}x\|^2 = (\mathbb{A}x)^t (\mathbb{A}x) = x^t(\mathbb{A}^t\mathbb{A})x = x^t x = \|x\|^2 .$$

Logo,

$$\|\mathbb{A}x\| = \|x\| .$$

■

Decorre do delineado acima que:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}(x-y)\|^2 &= \|x-y\|^2 \\ \|\mathbb{A}x\|^2 - 2\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle + \|\mathbb{A}y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 . \end{aligned}$$

De sorte que:

$$\langle \mathbb{A}x, \mathbb{A}y\rangle = \langle x, y\rangle$$

■

3 ASPECTOS HISTÓRICOS (WIKIPÉDIA).

Frações simples foram usadas pelos egípcios por volta de 1000 a.C.; o védico "Shulba Sutras" ("As regras dos acordes") em, cerca de 600 a.C., incluiu o que pode ter sido o primeiro "uso" de números irracionais. O conceito de irracionalidade foi implicitamente aceito pelos primeiros matemáticos indianos desde Manava (750 - 690 a.C.), que sabiam que certos números como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{61}$ não podiam ser exatamente determinadas. Por volta de 500 a.C., os matemáticos gregos liderados por Pitágoras perceberam a necessidade de números irracionais, em particular a irracionalidade da $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de 2.)

A Idade Média trouxe a aceitação de números zero e dos números negativos, inteiros e fracionários, primeiro pelos matemáticos indianos e chineses e depois pelos matemáticos árabes, que também foram os primeiros a tratar números ir- racionais como objetos algébricos, o que foi possível graças ao desenvolvimento de álgebra. Os matemáticos árabes fundiram os conceitos de "número" e "magnitude" em uma ideia mais geral de números reais. O matemático egípcio Abu Kamil (850-930 a.C.) foi o primeiro a aceitar números irracionais como soluções para equações quadráticas ou como coeficientes em uma equação, geralmente na forma de raízes quadradas, raízes cúbicas e raízes quartas.

No século XV I, Simon Stevin criou a base da notação decimal moderna e insistiu que não havia diferença entre números racionais e irracionais a esse respeito. No século XV II, Descartes introduziu o termo "real" para descrever as raízes de um polinômio, distinguindo-as das "imaginárias".

Nos séculos XV III e XIX, houve muito trabalho sobre números irracionais e transcendentes. Johann Heinrich Lambert (1761) deu a primeira prova falha de que _ não pode ser um número racional; Adrien-Marie Legendre (1794) completou a demonstração e mostrou que π não é a raiz quadrada de um número racional. Paolo Ru¢ ni (1799) e Niels Henrik Abel (1842) construíram provas do teorema de Abel-Ruffini: que afirma que as equações gerais de grau cinco ou superior não podem ser resolvidas por uma fórmula geral que envolve apenas operações aritméticas e raízes. Évariste Galois (1832) desenvolveu técnicas para determinar se uma determinada equação poderia ser resolvida por radicais, o que deu origem ao campo da teoria de Galois. Joseph Liouville (1840) mostrou que nem "e" nem "e^2" podem ser a raiz de uma equação quadrática inteira e, então, estabeleceram a existência de números transcendentes; Georg Cantor (1873) estendeu e simplificou bastante. Charles Hermite (1873) provou que e é transcendente e Ferdinand von Lindemann (1882) mostrou que π é transcendente. A prova de Lindemann foi muito simpli.cada por Weierstrass (1885), sendo ainda mais por David Hilbert (1893) até que, finalmente, foi tornada elementar por Adolf Hurwitz e Paul Gordan.

O desenvolvimento do cálculo no século XV III usou todo o conjunto de números reais sem defini-los de maneira clara. A primeira definição rigorosa foi publicada por Georg Cantor em 1871. Em 1874, ele mostrou que o conjunto de todos os números reais é não enumerável, mas o conjunto de todos os números algébricos é enumerável. Ao contrário das crenças amplamente difundidas, seu primeiro método não foi seu famoso argumento diagonal, publicado em 1891.

4 ESTRUTURA, ORDEM E COMPLETEZA DE $\mathbb{R}$

Adição: $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e **Multiplicação:** $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto x + y$ $\qquad$ $(x, y) \longmapsto x \cdot y$

Axiomas

1. Associatividade: (i) $x + (y + z) = (x + y) + z$ e (ii) $x.(y.z) = (x.y).z$
2. Comutatividade: (i) $x + y = y + x$ e (ii) $x.y = y.x$
3. Elemento Neutro: (i) $x + 0 = x$ e (ii) $x.1 = x$
4. Elemento Inverso: (i) $x + (-x) = 0$ e (ii) $x.x^{-1} = 1$, com $x \neq 0$
5. Distributividade: $x\,(y + z) = x.y + x.z$

4.1 ALGUMAS CONSEQÜÊNCIAS DO CORPO $\mathbb{R}$

i) $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$: (a) $x + y = y + z \Longrightarrow x = z$ (b) $x.y = y.z$ com $y \neq 0 \Longrightarrow x = z$.

ii) $\forall x \in \mathbb{R}$: (a) $x.0 = 0$ $\qquad$ (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(-x).(-y) = xy$.

iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x.y = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

iv) As equações

$$a + x = b \quad \text{e} \quad a.x = b,$$

esta última com a $a \neq 0$ tem solução única.

Prova:

4.2 AXIOMA DE ORDEM

Existe em $\mathbb{R}$ um subconjunto $\mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, tem-se: $(x + y) \in \mathbb{R}^+$ e $(x.y) \in \mathbb{R}^+$,

(ii) Dado $x \in \mathbb{R}$. Então, tem-se: $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x = 0$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$ **(tricotomia)**

onde: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$ e $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : \; -x \in \mathbb{R}^+\}$ são respectivamente, os conjuntos dos números reais positivos e negativos.

Observação:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^{-}.$$

4.3 ORDEM: $x < y \Longleftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}^{+}$

Propriedades

(i) Transitiva:

$$x < y \text{ e } y < z \Longrightarrow x < z.$$

(ii) **Monotonicidade:**

(a) $x < y$ e para todo $z \in \mathbb{R} \Longrightarrow x + z < y + z$
(b) $x < y$ e $z > 0 \Longrightarrow x.z < y.z.$
(c) $x < y$ e $z < 0 \Longrightarrow x.z > y.z.$

Prova:

Exercício: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$, tem-se: $x^2 \in \mathbb{R}^{+}$ **(prove!) :**

Observação:

1. $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ é um corpo não ordenado. De fato, $i^2 = -1;$

2. $\langle \mathbb{Z}_2, +, \cdot \rangle$ é um corpo não ordenado, visto que: $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}.$

5 SUPREMO E ÍNFIMO

5.1 SUPREMO

1. Seja $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}.$ Dizemos que X é "limitado superiormente", quando:

Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que: $x \leq M,\ \forall x \in \mathbb{X}.$

Uma tal constante M é denominada "**cota superior de X"** e a menor delas é o "supremo de X", representado por: sup X.

Seja $\alpha = \sup \mathbb{X}$

(i) $x \leq \alpha,\ \forall x \in \mathbb{X}$ (α é uma cota superior de X)

(ii) Se $\beta < \alpha$, então, existe $x \in \mathbb{X}$, tal que: $\beta < x$.

Observação:

(A) A condição (ii) é equivalente a:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in \mathbb{X}:\ x > \sup \mathbb{X} - \varepsilon \Longleftrightarrow x > \alpha - \varepsilon.$$

(B) O máximo de um conjunto X é por definição, um elemento tal que:

$$x \leq x_M,\ \forall x \in \mathbb{X}.$$

Para efeito de ilustação, vejamos um exemplo de supremo, considere:

$$(i)\ x \leq 1, \forall x \in \mathbb{X},$$

ii) Dado $\varepsilon > 0$, o número $1 - \varepsilon < \frac{2-\varepsilon}{2} \in \mathbb{X} \Longrightarrow \sup \mathbb{X} = 1$.

5.2 ÍNFIMO

2. Seja $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é **"limitado inferiormente"**, quando:

Existe $m \in \mathbb{R}$, tal que: $m \leq x, \forall x \in \mathbb{X}$.

Uma tal constante m é denominada **"cota inferior de** X" e a maior delas é o **"ínfimo de X",** denotado por: inf X

Se $\beta = \inf \mathbb{X}$, então, temos:

$(i)\ \beta \leq x, \forall x \in \mathbb{X}$ (β é uma cota inferior de X)

(ii) Se $\gamma < \beta$, então, existe $x \in \mathbb{X}$, tal que: $\gamma < x$.

Observação:

A condição (ii) é equivalente a dizer:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in \mathbb{X}:\ x < \inf \mathbb{X} + \varepsilon \Longleftrightarrow x < \beta + \varepsilon.$$

3. X é limitado quando for inferiormente e superiormente, isto é, existem m; $M \in \mathbb{R}$, tal que:

$$m \leq x \leq M,\ \forall x \in \mathbb{X}.$$

Exercício

X é limitado $\Longleftrightarrow \exists\, C > 0,\ C \in \mathbb{R}\colon\ |x| \leq C,\ \forall x \in \mathbb{X}.$

[2]**Axioma da Completeza (Postulado de Richard Dedekind)**

Todo subconjunto $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente tem supremo.

Teorema:

(i) $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente;

(ii) $\inf \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\} = 0;$

(iii) Dados $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ existe $n \in \mathbb{N}$, tal que: $nx > y$.

(A condição (iii) caracteriza R como um corpo arquimediano[3]).

Prova:

(i) Seja $\alpha = \sup \mathbb{N},\ \alpha \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$ Então, $\alpha \geq n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}$. De sorte que: $\alpha - 1 \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$

Contradição! Pois, $\alpha - 1$ é uma cota superior para N menor do que α.

(ii) É claro que: $0 \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $m = 0$ é uma cota inferior para $\mathbb{X} = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$. Além disso, suponha que $\frac{1}{n} \geq a,\ \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $\frac{1}{a} \geq n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, donde, vem: $\frac{1}{a}$ é cota superior para N, por conseguinte, temos: N é limitado superiormente.

Logo, N tem supremo em R. Absurdo! e, portanto, $0 \leq \frac{1}{n} < a$, Isto é, $\inf \mathbb{X} = 0.$

∎

(iii) Como N não é limitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > \frac{y}{x} \Longrightarrow nx > y$$

∎

4 Q é "denso" em R, isto é, dados x; y $\in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que; $x < r < y$.

Prova:

Seja $n \in \mathbb{N}$, tal que:

$$n > \frac{1}{y-x} \Longrightarrow ny - nx > 1. \qquad (1)$$

Seja $m \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$m - 1 < nx < m. \qquad (2)$$

Agora, decorre de (2) que $nx < m \Longrightarrow x < \frac{m}{n}$. Além disso, de (1) e (2), temos:

$$m \leq nx + 1 < ny \Longrightarrow \frac{m}{n} < y$$

e, portanto,

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

■

5. $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ é "denso" em R, ou seja, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $x < y$ existe z irracional, tal que:

$$x < z < y.$$

Prova:

Basta usar o resultado do item anterior, destacando os números reais $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$, obtendo um número racional $r \neq 0$, tal que:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

Então, $z := r\sqrt{2}$ é irracional satisfazendo $x < z < y$.

■

6 LÓGICA DA DEMONSTRAÇÃO POR REDUÇÃO A UM ABSURDO:

(**Esta abordagem se deve ao matemático Daniel Cordeiro de Morais Filho -UFCG, no texto Um Convite à Matemática SBM**, 2012).

"...Como o valor lógico de uma sentença do tipo" $\tilde{}Q \wedge Q$" é F, é fácil ver que:

$$H \Rightarrow T \Leftrightarrow (H \wedge \tilde{}T) \Rightarrow (\tilde{}Q \wedge Q)$$

para uma sentença Q qualquer. $[(\tilde{}Q \wedge Q)$: chama-se **absurdo** ou **contradição]** Antes de começarmos a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional, vamos discorrer um pouco sobre a importância histórica deste fato. É provável e indícios históricos de que $\sqrt{2}$ foi o primeiro número irracional descoberto.

Mas acredita-se também que possa ter sido $\sqrt{5}$ ([Boyer, 1974] p. 54). Já na Antiga Grécia, a descoberta da irracionalidade de $\sqrt{2}$gerou a primeira grande crise da Matemática. Diante do que entendemos hoje por números, os pitagóricos, devotos de um misticismo numérico, acreditavam que todos eles eram racionais.

Na Grécia daquele tempo, os números eram considerados como comprimentos de segmentos de reta; eles entendiam que dois segmentos quaisquer eram sempre mensuráveis, isto é, existia sempre um terceiro segmento, do qual esses dois eram múltiplos inteiros. Mas parece que a Matemática, pregou-lhes uma peça: $\sqrt{2}$é um número que aparece naturalmente ao se usar o Teorema de Pitágoras, por ser a diagonal de um quadrado de lado medindo 1, e não é número racional!

Diz a lenda que foi um pitagórico quem descobriu a irracionalidade de $\sqrt{2}$ (ou seja, que a diagonal e o lado de um quadrado nunca são mensuráveis) e que seus companheiros o afogaram para não divulgar esse fato que punha por terra toda crença pitagórica. Outra história, menos trágica, reza que foi o pitagórico Hipa sus de Metaponto quem descobriu a irracionalidade de $\sqrt{2}$e que os pitagóricos o teriam expulso da seita. Mas qualquer que tenha sido o fato real que ocorreu, os pitagóricos não conseguiram manter essa descoberta em segredo.

Theorem 5 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Demonstração: Suponha por contradição que, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Logo, existem existem $p, q \in \mathbb{Z}$, tais que: $q \neq 0$ e $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ Podemos considerar, sem perda de generalidade, que p e q sejam primos entre si, ou seja, que não possuam divisores comuns além da unidade. Dá última igualdade, temos:

$\frac{p^2}{q^2} = 2$ e, daí, vem: $p^2 = 2q^2$. Como 2 divide o lado direito da última igualdade, ele divide p^2 garantindo que este último número é divisível por 2. Por conseguinte, vem: p é divisível por 2 (verifique este fato!). O absurdo tem seu valor! (As demonstrações por redução a um absurdo) portanto, da forma $p = 2k$, para algum número k inteiro. Substituindo p por 2k e fazendo a devida simplificação, encontramos $2k^2 = q^2$. Aplicando o raciocínio anterior para essa nova igualdade, se conclui que q é divisível por 2:

Mas isso contradiz o fato de p e q serem primos entre si. Portanto, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com p e $q \neq 0$. Assim, nossa suposição inicial de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ é falsa, ou seja. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.(Esta abordagem se deve ao matemático Daniel Cordeiro de Morais Filho -UFCG, no texto Um Convite à Matemática SBM, 2012)

■

6.0.1 OUTRA DEMONSTRAÇÃO DA IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

6.0.2 USANDO O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

A seguir, daremos um roteiro de outra demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ bem mais curta

(i) Do Teorema fundamental da Aritmética, deduza que, se n for um número inteiro, então os fatores de 2 que aparecem na decomposição de n^2 é em número par de vezes. (Em verdade, o resultado e válido trocando-se 2 por um número primo qualquer!)

(ii)) Do item anterior, prove que, para p e q inteiros, não pode ocorrer uma igualdade do tipo

(ii) Agora dê uma nova demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Nesta demonstração, não é preciso supor que "p e q sejam primos entre si.

6.0.3 PAUSA PARA UMA PEQUENA ANÁLISE DO TEOREMA 1:

Analisando atentamente, perceba que no teorema anterior apenas provamos que $\sqrt{2}$ não é um número racional. Nossa demonstração não garante que $\sqrt{2}$ existe, ou seja, que exista um número x tal que $x^2 = 2$. Provamos apenas que, se $x^2 = 2$, então x não é um número racional. Nada foi comentado sobre a existência de um número x que satisfizesse a equação $x^2 = 2$.

(A prova passa pelo o assim chamado corte de Dedekind : conjuntos limitados superiormente e inferiormente que não nem o supremo e nem o ínfimo que vive nos racionais)."

■

(Doutor em Matemática na UNICAMP/Campinas-SP-Brasil, 1994;Pós-Doutor em Matemática na Rutgers University/New Jersey USA, 1998 Áreas de Interesse/Linhas de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais Elípticas)

75: Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes inteiros.

(i) Se um número racional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $m.d.c.(p,q) = 1$

(p e q primos entre si) é tal que: $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, prove que:

p / a_0 e q / a_n p divide a_0 e q divide a_n).

(ii) Conclua daí que $a_n = 1$, as raízes reais de f são inteiras ou irracionais. Em particular, examinando $x^n - a = 0$ conclua que, se um número inteiro $a > 0$ não possui n-ésima raiz inteira, então, $\sqrt[n]{a}$ é irracional.

iii) Use o resultado geral para provar que $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ é irracional.

Prova:

(i) Com efeito, $f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, então temos:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} a_n p^n &= a_{n-1} q p^{n-1} - \cdots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n && (1) \\ &\text{ou} \\ a_0 q^n &= -a_n p^n - \cdots - a_1 p q^{n-1}. && (2) \end{aligned}$$

Agora, observe que:

q divide o 2°membro de (1) : Logo, q divide a_n ou q divide p: Como $m.d.c.\,(p,q)=1$, segue-se que: q/a_n. Analogamente, mostra-se que: p/a_0.

(p divide a_0 : $p/a_0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a_0 = kp$). ■

76: $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é racional ou irracional? justifique.

Solução:

Se $x=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, então, temos:

$$x^3=2-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}+3\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}.$$
$$x^3=4+3\sqrt[3]{-1}\left(2-\sqrt{5}\right)+3\sqrt[3]{-1}\left(2+\sqrt{5}\right)$$
$$x^3=-3\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)+4.$$

Donde, vem:

$$x^3+3x-4=0.$$

Daí, as possíveis raízes racionais, se existirem, são: $\pm1,\pm2,\pm4.$

Á luz do algoritmo de Briott-Ruffini, temos: $x=1$ é raiz. Assim, a equação toma a forma:

$$(x-1)\,.\left(x^2+x+4\right)=0.$$

Portanto, $x=1$ é o único racional admissível.

Ou ainda,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=1.$$

■

77: Se um número real "a" é tal que: $0\le a<\epsilon$, para qualquer número positivo ϵ, então, $a=0.$ Se $a-\epsilon<b,\ \forall\epsilon>0,$ então $a\le b.$

Prova:

Cm efeito, $0\le a<\epsilon,$ para $a>0$, tome $\epsilon=\frac{a}{2}$, logo teríamos $0\le a<\frac{a}{2}$

Absurdo! Portanto, $a=0.$

■

Se $a - \epsilon < b,\ \forall \epsilon > 0$, então, $a < b + \epsilon,\ \forall \epsilon > 0$.

Suponha $a > b$, então, $a - b > 0 \Leftrightarrow (a - b) \in \mathbb{R}^+$., Tomemos $\epsilon = a - b$. Então, tem-se:

$$a < b + \epsilon = b + a - b = a \Longleftrightarrow a < a.$$

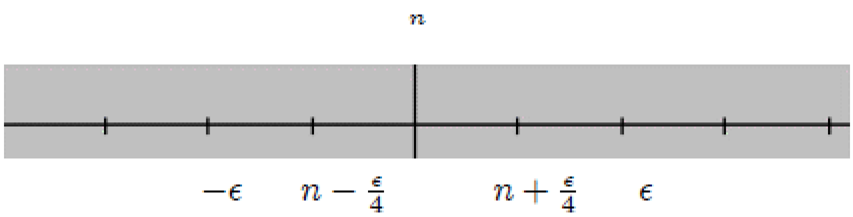
Contradição!

De sorte que: $a \leq b$. ■

78: Seja $\epsilon > 0$ um número real dado. Construa uma família infinita $\{\mathbb{I}_n\}$ de intervalos abertos com as seguintes propriedades:

(i) Cada intervalo $\mathbb{I}_n$ contém o natural n;

(ii) A soma dos comprimentos de todos os intervalos da família é $\leq \epsilon$.



Seja o natural n do item (i) e seja $\epsilon > 0$. Construamos a seguinte família de intervalos $\mathbb{I}_n$, admitindo $\delta = \frac{\epsilon}{4}$.

$\mathbb{I}_1 = \left(n - \frac{\epsilon}{4},\ n + \frac{\epsilon}{4}\right)$ cujo comprimento é $\frac{\epsilon}{2}$

$\mathbb{I}_2 = \left(n - \frac{\epsilon}{8},\ n + \frac{\epsilon}{8}\right)$ cujo comprimento é $\frac{\epsilon}{2^2}$

$\mathbb{I}_3 = \left(n - \frac{\epsilon}{16},\ n + \frac{\epsilon}{16}\right)$ cujo comprimento é $\frac{\epsilon}{2^3}$

$\mathbb{I}_n = \left(n - \frac{\epsilon}{2^n},\ n + \frac{\epsilon}{2^n}\right)$ cujo comprimento é $\frac{\epsilon}{2^{n-1}}$.

Agora, a soma dos comprimentos é descrito por :

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2^2}+\frac{\epsilon}{2^3}+\ldots+\frac{\epsilon}{2^{n-1}} &= \epsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\right)\\ &= \epsilon.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\epsilon.\end{aligned}$$

Observação 6 *Poderíamos ter tomado qualquer* $\delta \leq \frac{\epsilon}{4}$.

Vale ressaltar que: este tipo de argumento é fundamental para se provar o seguinte resultado Todo subconjunto **enumerável** $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$ **tem medida de Lebesgue zero. (Veja questão 94)**

79: Determine para que valores de "a" a equação

$$1+\sin^2(ax)=\cos x.$$

admite alguma solução não-nula.

Solução

Com efeito, $\sin^2(ax) \geq 0$, então, temos : $\sin^2(ax)=0$ ou $\sin^2(ax)>0$.

Afirmação: Não ocorre $\sin^2(ax)>0$.

De fato, se $\sin^2(ax)>0$, então, $\cos x>1$. Absurdo!

$$\text{Assim,}\left\{\begin{array}{c}\sin^2(ax)=0\\ \cos x=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\sin(ax)=0\\ \text{e}\\ \cos x=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}ax=n_1\pi\\ e\\ x=2n_2\pi\end{array}\right., \text{desde que:}$$

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ e $n_2 \neq 0$ (pois, buscamos soluções não-nulas).

Consequentemente, obtemos:

$$ax=n_1\pi \Longrightarrow a(2n_2\pi)=n_1\pi \Longrightarrow a=\frac{n_1}{n_2},$$

e, portanto, a é um número racional.

Observação: No corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ para todo $X \in \mathbb{R}$, temos: $X^2 \geq 0$.

80:. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são números reais, então, prove que:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_ny_n)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cdot \left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Prova: Ponha $f(t) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - ty_j)^2$, então, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2t \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + t^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \\ &= At^2 - 2Bt + C \ge 0, \end{aligned}$$

onde: $A = \sum_{j=1}^{n} y_j^2$, $B = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ e $C = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

$$f(t) = At^2 - 2Bt + C \ge 0 \iff B^2 \le AC.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right).$$

■

81: Um conjunto G de números reais é chama-se grupo aditivo quando $0 \in \mathbb{G}$ e $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$ um grupo aditivo de números reais .I indiquemos com $\mathbb{G}^+$ o conjunto dos números reais positivos pertencentes a G. Excetuando o caso trivial $\mathbb{G} = \{0\}$, $\mathbb{G}^+$ é não-vazio. Suponhamos pois $\mathbb{G}^+ \neq \{0\}$ Prove que:

(i) Se $\inf \mathbb{G}^+ = 0$, então, G é denso em R

(ii) Se $\inf \mathbb{G}^+ = a > 0$, então, $a \in \mathbb{G}^+$ e $\mathbb{G} = \{0, \pm a, 2a, \ldots\}$.

Prova:

(i) Suponhamos por absurdo que G não seja denso em R. Então, $\bar{\mathbb{G}} \neq \mathbb{R}$, pois, $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, donde, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que: $x \notin \bar{\mathbb{G}}$. Observamos que: $\inf \mathbb{G}^+ = 0 = [x + (-x)] \in \mathbb{G}$ pois $(\mathbb{G}, +)$ é um grupo aditivo, então $x \in \mathbb{G}$, por conseguinte, vem: $x \in \mathbb{G}$. Contradição! Logo, $\bar{\mathbb{G}} = \mathbb{R}$ e como $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, segue-se que G é denso em R.

■

(ii) Suponha por absurdo que $a \in \mathbb{G}^+$ pelo item anterior $\bar{\mathbb{G}} = \mathbb{R}$, então, $a \in \bar{\mathbb{G}}$ como $\mathbb{G}^+ \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{R}$, segue-se que; $a \notin \mathbb{G}^+ \cap \mathbb{G} \cap \subset \bar{\mathbb{G}}$. Daí, obtemos: $a \notin (\mathbb{G}, +)$ e $0 \in \mathbb{G}$. Donde, vem: $0 = [a + (-a)] \in \mathbb{G} \Longrightarrow a \in \mathbb{G}$. Contradição! e, portanto, $a \in \mathbb{G}^+ \subset \mathbb{G}$.

Agora, note que:

$$\begin{aligned}
&0 = [a + (-a)] \in \mathbb{G} \Longrightarrow 0 \in \mathbb{G}, \\
&-a = \{-a + [a + (-a)]\} \in \mathbb{G} \Longrightarrow -a \in \mathbb{G}, \\
&\pm 2a = \{-2a + [a + (-a)]\} \in \mathbb{G} \Longrightarrow \pm 2a \in \mathbb{G}.
\end{aligned}$$

Daí, continuando com o processo, obtemos:

$$\mathbb{G} = \{0, \pm a, \pm 2a, \ldots\}$$

■

82: Qualquer que seja a norma adotada em $\mathbb{R}^2$ mostre que: a circunferência

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$$

é um conjunto infinito. Generalize para $\mathbb{R}^n$.

Prova: Façamos no caso geral: Qualquer que seja a norma em R_n a esfera unitária

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$$

é um conjunto infinito.

Existe $x_1 \in \mathbb{R}^n$ com $x_1 \neq 0$ e $\|x_1\| \neq 1$, então, $\frac{x_1}{\|x_1\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Seja $x_2 \in \mathbb{R}^n$ com $x_2 \neq 0$ e $\|x_2\| \neq 1$, então, $\frac{x2}{\|x_2\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$

Daí, continuando com o processo, vem:

$x_n \in \mathbb{R}^n$ com $x_n \neq 0$ e $\|x_n\| \neq 1$;,então, $\frac{x_n}{\|x_n\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Tome agora $x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ com $x_{n+1} \neq 0$ e $\|x_{n+1}\| \neq 1$, então,

$$\frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|} \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

onde: $x_{n+1} \neq k_i x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Isso nos diz que $\mathbb{R}^n$ é um conjunto infinito e, portanto $\mathbb{S}^{n-1}$ também o é **Devo ressaltar que:** $\dim \mathbb{R}^n = n$ se a esfera estiver em espaço de dimensão infinita não é compacta (fechada e limitada).

(Faça os casos particulares $n = 2, 3$)

■

83: Prove que:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2 - x}dx \leq 2e^2$$

Prova:

Considere $\Phi : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função definida por: $\Phi(x) = e^{x^2 - x}$ então, temos:

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= e^{x^2 - x}(2x - 1) \\ \Phi'(x) &= 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \in (0, 2) \end{aligned}$$

(ponto crítico).

Agora, $\Phi(0) = 1,\ \Phi(2) = e^2$ (máximo absoluto) e $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ (mínimo absoluto), por conseguinte, obtemos:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \Phi(x) = e^{x^2 - x}dx \leq 2e^2.$$

Daí, integrando e aplicando o teorema fundamental do cálculo, vem:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2 - x}dx \leq 2e^2.$$

■

84: Sejam $a, b, c \in (0,1)$, Prove ou dê um contra-exemplo:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

Prova: Basta notar que:

$$\sqrt{abc} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

e, analogamente, tem-se:

$$\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt{(1-a)(1-b)} \leq \frac{(1-a)+(1-b)}{2}. \qquad (2)$$

Agora, de (1) e (2), segue-se que:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1.$$

■

85: Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$então, prove que: então, prove que:

$$|a+b|^p \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Prova:

Com efeito,

$$|a+b| \leq |a| + |b| \leq 2\max\{|a|, |b|\}.$$

Por conseguinte, temos:

$$|a+b|^p \leq (|a|+|b|)^p \leq 2^p(\max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p\left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Logo,

$$|a+b|^p \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right).$$

■

86: (A) Use translação de eixos para esboçar o gráfico da função f, dada por:

$$f(x) = |1 - 2tg\,|x||$$

(B) : Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos prove que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Sugestão: Use o fato de que: $e^x \geq 1+x,\ x \geq 0.$ (Prova trivial)

Prova: Basta observar que:

$$e^{\frac{x_j}{A}-1} \geq \frac{x_j}{A},$$

Com $j = 1, 2, \ldots, n$ e $A = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$

Vejamos

$$\begin{cases} e^{\frac{x_1}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} \\ e^{\frac{x_2}{A}-1} \geq \frac{x_2}{A} \\ \vdots \\ e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_n}{A} \end{cases} \Longrightarrow \left\{ \left(e^{\frac{x_1}{A}-1}\right) \cdot \left(e^{\frac{x_2}{A}-1}\right) \ldots e^{\frac{x_n}{A}-1} \geq \frac{x_1}{A} . \frac{x_2}{A} \ldots \frac{x_n}{A} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ e^{\overbrace{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{A}-n}^{=1}} \geq \frac{x_1.x_2\ldots x_n}{A^n}. \right.$$

Logo,

$$A \geq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n}.$$

A primeira desigualdade é imediata, de fato:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}{n}.$$

Logo,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n}.$$

De sorte que:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

■

87: Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais positivos, então, prove que:

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Prova: À luz dadas desigualdades entre as médias geométricas e aritméticas, temos:

$$\sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n} \leq \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)}{n}. \qquad (1)$$

e de forma análoga, vem:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}{n}. \qquad (2)$$

Agora, multiplicando membro a membro (1) e (2) e destacando que

$$\sqrt[n]{x_1.x_2\ldots x_n}\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}.\frac{1}{x_2}\ldots\frac{1}{x_n}} = 1,$$

obtemos:

$$n^2 \leq (x_1+x_2+\ldots+x_n)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$$

■

88: Se $y = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$, então, verifique se: $y = 4$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sin 10^o} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^o} = \frac{\cos 10^o - \sqrt{3}\sin 10^o}{\frac{1}{2}\sin 20^o} \\ &= 4\frac{\left(\frac{1}{2}\cos 10^o - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^o\right)}{\sin 20^o} = \\ &= 4\frac{(\cos 60^o \cos 10^o - \sin 60^o \sin 10^o)}{\sin 20^o} = \\ &= 4\frac{\cos(60^o + 10^o)}{\sin 20^o} = 4, \end{aligned}$$

visto que: $\cos(70^o) = \sin(20^o)$.

■

89: Se $y = \sin 10^o \cos 20^o \cos 40^o$, então, mostre que: $y = \frac{1}{8}$.

Prova: Análoga a questão anterior. (Faça!)

90: Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são constantes dadas,

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2}\cos(a_2 + x) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x),$$

E x_1, x_2 são reais tais que: $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Prove que $x_2 - x_1 = m\pi$ para algum inteiro m:

Prova:

Com efeito,

$\cos(a_1 + x) = \cos a_1 \cos x - \sin a_1 \sin x,$

$\frac{1}{2}\cos(a_2 + x) = \frac{1}{2}\cos a_2 \cos x - \frac{1}{2}\sin a_2 \sin x$

$\vdots$

$\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n + x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n \cos x - \frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n \sin x.$ Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\cos a_1 + \frac{1}{2}\cos a_2 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n\right)\cos x \\ &\quad - \left(\sin a_1 + \frac{1}{2}\sin a_2 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n\right)\sin x. \end{aligned}$$

Agora, fazendo

$$A = \cos a_1 + \frac{1}{2}\cos a_2 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos a_n \ \text{ e } B = \sin a_1 + \frac{1}{2}\sin a_2 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\sin a_n,$$

segue-se que:

$$f(x) = A\cos x - B\sin x.$$

Além disso, tomando-se: $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, obtemos:

$$f(x) = C\left[\frac{A}{C}\cos x - \frac{B}{C}\sin x\right]$$

Daí, existe $\phi \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$\cos\phi = \frac{A}{C} \text{ e } \sin\phi = \frac{B}{C},$$

visto que: $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$. Assim,

$$f(x) = C\left[\cos\phi\cos x - \sin\phi\sin x\right].$$

Dito de outro modo

$$f(x) = C\cos(\phi + x).$$

Consequentemente, vem:

$$\begin{cases} f(x_1) = C\cos(\phi + x_1) = 0 \\ \text{e} \\ f(x_2) = C\cos(\phi + x_2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi + x_1 = \frac{\pi}{2} + n_1\pi \\ \text{e} \\ \phi + x_2 = \frac{\pi}{2} + n_2\pi \end{cases}$$

Com $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. De sorte que:

$$x_2 - x_1 = (n_2 - n_1)\pi = m\pi, \text{ onde } m = (n_2 - n_1) \in \mathbb{Z},$$

para algum m:

∎

91: (Um exemplo de Corte de Dedekind)

Mostre que $\mathbb{A}=\{x\in\mathbb{Q}|\ x\geq 0 \text{ e } x^2<2\}$ não tem supremo em Q.

Majorações:

Considere $x\geq 0$ e $x^2<2,$ não haverá problemas, uma vez que: só queremos provar que A não tem supremo em Q. Escolha um racional $r<1$, daí, vem: $r^2<r$. Além disso, observe que:

$$(x+r)^2=x^2+2xr+r^2<x^2+2xr+r=x^2+(2x+1)r<2\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 0<r<\tfrac{2-x^2}{2x+1}\Longrightarrow(2x+1)r<2-x^2$$

Queremos mostrar que: $\forall x\in\mathbb{A}$, com $r<1$ e $0<r<\frac{2-x^2}{2x+1}\Longrightarrow(x+r)\in\mathbb{A}.$

De fato, $(x+r)^2=x^2+2xr+r^2<x^2+(2x+1)r<x^2+2-x^2=2.$

Ou ainda, $(x+r)^2<2.$

Portanto, $(x+r)\in\mathbb{A}.$

Procedendo de forma análoga, se mostra que $\mathbb{B}=\{y\in\mathbb{Q}|\ y>0 \text{ e } y^2>2\}$ não tem ínfimo em $\mathbb{Q}$.■

92: Sejam a; b; c; d elementos de R, onde b e d são positivos. Prove que $\frac{a+c}{b+d}$ está compreendido entre o menor e o maior dos elementos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Generalize:

Algumas sugestões e comentários saindo da forma sucinta da estética na escrita matemática:

Não iremos provar, o caso particular n = 2, vamos admitir como trivial, antes porém, vejamos alguma notações que facilitará a escrita

$$\sum_{j=1}^{n}a_j=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

, de formas análogas, temos:

$$\sum_{j=1}^{n}b_j=b_1+b_2+\ldots+b_n \text{ e } \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_j}{\sum_{j=1}^{n}b_j}.$$

Agora, estamos munidos de ferramentas para iniciar nossa busca de solução. Vale ressaltar que:

Se houver dificuldades; não deixe em hipótese alguma, de particularizar, vejamos:

$\sum_{j=1}^{3} a_j = a_1 + a_2 + a_3$, $\sum_{j=1}^{3} b_j = b_1 + b_2 + b_3$ e $\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} = \frac{\sum_{j=1}^{3} a_j}{\sum_{j=1}^{3} b_j}$. Neste caso, queremos mostrar que:

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = \frac{\sum_{j=1}^{3} a_j}{\sum_{j=1}^{3} b_j} \leq \mathbb{M},$$

Onde m e M são respectivamente, o menor e o maior dos números $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3},$ que para facilitar a redação matemática, escolhemos escrever na forma

$$m = \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}\right\} \text{ e } \mathbb{M} = \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}\right\}$$

desde que b_1, b_2 e b_3 sejam positivos.

(Conseguimos enunciar de forma clara para n = 3), é assim que se dá o processo da descoberta, mesmo que modesta: conjecturar, particularizar, enfraquecer hipóteses e vê se satisfaz a conclusão).

Deixemos de prosopopeia e passemos a ação

Prova:

Com efeito,

$$\begin{cases} m \leq \frac{a_1}{b_1} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_3}{b_3} \leq \mathbb{M} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mb_1 \leq a_1 \leq \mathbb{M}b_1 \\ mb_2 \leq a_2 \leq \mathbb{M}b_2 \\ mb_3 \leq a_3 \leq \mathbb{M}b_3 \end{cases} \Longrightarrow$$
$$m(b_1 + b_2 + b_3) \leq a_1 + a_2 + a_3 \leq \mathbb{M}(b_1 + b_2 + b_3)$$

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} \leq \mathbb{M} \Longrightarrow m \leq \frac{\sum_{j=1}^{3} a_j}{\sum_{j=1}^{3} b_j} \leq \mathbb{M}.$$

■

93: Mostre que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

Está compreendido entre o menor e o maior dos números $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, desde que: $b_1, b_2, \ldots b_n$ sejam todos positivos.

Prova:

A generalização, se processa de forma inteiramente análoga:

Sejam $b_j > 0 \text{ com } j = 1, 2, \ldots, n$ e $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, então temos:

$$\begin{cases} m \leq \frac{a_1}{b_1} \leq \mathbb{M} \\ m \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \mathbb{M} \\ \quad\vdots \\ m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \mathbb{M} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} mb_1 \leq a_1 \leq \mathbb{M}b_1 \\ mb_2 \leq a_2 \leq \mathbb{M}b_2 \\ \quad\vdots \\ mb_n \leq a_n \leq \mathbb{M}b_n \end{cases} \Longrightarrow$$
$$m(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \mathbb{M}(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \mathbb{M} \Longrightarrow m \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \leq \mathbb{M}.$$

■

94: Todo subconjunto **enumerável** $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$ **tem medida de Lebesgue zero.**

$$\mathbb{E} = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$$

Com efeito e sem perda de generalidade seja $\mathbb{E}=\{x_1,x_2,\ldots x_n,\ldots\}$enumerável e seja $\epsilon>0$ dado e $\mathbb{I}_n=\left(x_n-\frac{\epsilon}{2^n},x_n+\frac{\epsilon}{2^n}\right)$. Então, tem-se:

(i) $\mathbb{I}_n$ é enumerável;

(ii) $\operatorname{med}\left(\mathbb{I}_n\right)=x_n+\frac{\epsilon}{2^n}-\left(x_n-\frac{\epsilon}{2^n}\right)=\frac{\epsilon}{2^{n-1}}$;

(iii) $\mathbb{E}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}_n$.

Assim,

$$0\le\operatorname{med}\left(\mathbb{E}\right)\le\operatorname{med}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{I}_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{med}(\mathbb{I}_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{n-1}}=\epsilon,\ \forall\epsilon>0.$$

Portanto, med $(\mathbb{E})=0$ à luz de Lebesgue.

■

95: Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Definamos $\mathbb{A}.\mathbb{B}=\{x.y;\ x\in\mathbb{A}\text{ e }y\in\mathbb{B}\}$ Prove que se A e B forem limitados então,

(i) A:B é limitado, sendo

(ii) supA:B =supA: supB

(iii) inf A:B =inf A: inf B

Prova:

(i) Com efeito, $\forall x_1\in\mathbb{A},\forall y_1\in\mathbb{B}$,existem $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{cases} a_1\le x_1\le a_2\\ b_1\le y_1\le b_2\end{cases}\Longrightarrow\{a_1b_1\le x_1y_1\le a_2b_2.$$

Logo, A:B é limitado.

■

(ii) $\forall x\in\mathbb{A},\forall y\in\mathbb{B}$, tem-se: $x\le\sup\mathbb{A}$ e $y\le\sup\mathbb{B}\Longrightarrow x.y\le\sup\mathbb{A}.\sup\mathbb{B}$.

Isto é, supA: supB é uma cota superior para o conjunto A:B e, portanto,

$$\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} \leq \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}.$$

Agora, dado $\epsilon > 0$, existem $x_0 \in \mathbb{A}$ e $y_0 \in \mathbb{B}$, tais que:

$$x_0 > \sup \mathbb{A} - \frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})} \text{ e } y_0 > \sup \mathbb{B} - \frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})},$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \frac{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}.\epsilon + \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 \Longrightarrow \\ x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \epsilon + \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 \Longrightarrow \\ x_0.y_0 &> \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B} - \epsilon, \text{ pois, } \left[\frac{\epsilon}{(\sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B})}\right]^2 > 0. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, supA: supB é a menor das cotas superiores para o conjunto A:B. Logo,

$$\sup \mathbb{A}.\mathbb{B} = \sup \mathbb{A}.\sup \mathbb{B}.$$

$\blacksquare$

96: **(Envolvendo a reta real, pensando como um .o inextensível, sobre o círculo trigonométrico S^1 imaginado como um carretel)**

Mostre que:

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1, \text{ onde } \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

A priori, vamos apresentar algumas das notações:

(i) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ Espaço quociente de R por Z

(ii) $\simeq$: Isomorfismo

(iii) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1.$

Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, x \mapsto \varphi(x) = e^{2\pi x i}$ onde: $e^{2\pi x i} = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

Afirmação 1: φ está bem definida

De fato, $x_1 = x_2 \Longrightarrow e^{2\pi x_1 i} = e^{2\pi x_2 i} \Longrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2).$

Logo, φ está bem definida.

Afirmação 2: φ é um homomorfismo Com efeito, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\varphi(x+y) = e^{2\pi(x+y)i} = e^{2\pi xi} \cdot e^{2\pi yi} = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$$

e, portanto, φ é um homomorfismo **Afirmação 3:** $Ker(\varphi) = \mathbb{Z}$ (o núcleo de φ é $\mathbb{Z}$.)

Por definição, temos:

$$Ker(\varphi) = \{x_0 \in \mathbb{R}: \varphi(x_0) = e_1,\ e_1 \in \mathbb{S}^1\},$$

Note que: $(a,b)\cdot(1,0) = (a.1 - b.0, a.0 + b.1) = (a,b)$ Assim, (1; 0) é o elemento neutro para $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$.Por conseguinte, obtemos:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= (\cos(2\pi x_0), \sin(2\pi x_0)) = (1,0) = e_1 \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \cos(2\pi x_0) = 1 \\ \sin(2\pi x_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow 2\pi x_0 = 2n\pi \Longrightarrow x_0 = n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ou ainda, $Ker(\varphi) = \mathbb{Z}$.

Afirmação 4: φ é sobrejetora $\forall z \in \mathbb{C}$, tal que: $|z| = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$, onde: $z = (x, y)$.

Além disso,

$$x^2 \le x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow |x| \le 1 \Longrightarrow -1 \le x \le 1.$$

Então, existe $\theta \in \mathbb{R}$ (À luz do teorema do valor intermediário), tal que:

$$x = \cos\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) \text{ e } y = \sin\left(\frac{\theta}{2\pi}\right).$$

Assim,

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) = e^{2\pi\frac{\theta}{2\pi}i} = e^{\theta i} = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{S}^1.$$

Ditode outro modo, vem: φ é sobrejetora.

Agora, pelo teorema do homomorfismo, temos:

$$\mathbb{R}/Ker(\varphi) \simeq \mathrm{Im}(\varphi) \Longleftrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1.$$

97: **(Elementos de Aritmética)**

Prove que $\forall m \in \mathbb{Z},$ tem-se:

$$m^2 \equiv 0 \pmod 4 \text{ ou } m^2 \equiv 1 \pmod 4$$

Prova:

Com efeito, $m = 4q + r$, onde: $0 \le r < 4$. então, temos:
1 caso: $r = 0 \Rightarrow m^2 = (4q)^2 = 4(4q^2) \Longrightarrow m^2 \equiv 0 \pmod 4.$
2 caso: $r = 1 \Rightarrow m^2 = (4q+1)^2 = 16q^2 + 8q + 1 \Longrightarrow m^2 - 1 = 4(4q^2 + 2q)$
$\Longrightarrow m^2 - 1 \equiv 0 \pmod 4 \Longrightarrow m^2 \equiv 1 \pmod 4.$
3 caso: $r = 2 \Rightarrow m^2 = (4q+2)^2 = 16q^2 + 16q + 4 \Longrightarrow m^2 = 4(4q^2 + 4q + 1)$
$\Longrightarrow m^2 \equiv 0 \pmod 4.$
4 caso: $r = 3 \Rightarrow m^2 = (4q+3)^2 = 16q^2 + 24q + 9$
$\Longrightarrow m^2 - 1 = 4(4q^2 + 6q + 2) \Longrightarrow m^2 - 1 \equiv 0 \pmod 4 \Longrightarrow m^2 \equiv 1 \pmod 4.$

$\blacksquare$

98: (ELEMENTOS DE ARITMÉTICA)

Ache x inteiro que satisfaz simultaneamente as congruências:

$$(A)\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ 3x \equiv 1 \pmod 8 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod 5 \\ 2x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

Fatos que ajudam:

Se $m.d.c.(a, m) = 1,$ existe solução inteira x para a congruência

$$ax \equiv b \pmod m$$

Mais ainda, se x_0 é uma solução , o conjunto ξ de todas as soluções da congruência é dada por:

$$\xi = x_0 + \mathbb{Z}m = \{x_0 + km,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

(A) 1o Passo: $x \equiv 2$ (mod 5)

Uma solução particular é $x_0 = 7.$ Logo, a solução geral será dada por: $x = x_0 + mk = 7 + 5k.$

2º Passo: $3x \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow 3(7+5k) \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow 21 + 15k. \equiv 1 \pmod 8 \Longrightarrow 15k. \equiv -20 \pmod 8.$

Cuja solução particular é $k_0 = 4$ (Visto que: $8 \not| \,(15.4+20) \Longrightarrow 8 \not| \, 80 \Longrightarrow \exists p_1 : 80 = 8p_1$).

Daí, segue-se que $k = 4 + 8p,\ p \in \mathbb{Z}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} x &= 7+5k = 7+5\,(4+8p) = 27+40p,\ \ p \in \mathbb{Z}. \\ x &= 27+40p,\ \ p \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

é a solução do sistema.

■

Solução alternativa: $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ 3x \equiv 1 \pmod 8 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2 &= 5k_1 \\ 3x-1 &= 8k_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 8x-16 &= 40k_1 \\ 15x-5 &= 40k_2 \end{cases}$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow \{23x-21 = 40\,(k_1+k_2) = 40p \Longrightarrow \{23x-21 = 40p$

$\Longrightarrow 23 \equiv 21 \pmod{40}$. Note que: $x_0 = 27$ é solução particular. Portanto,

$$x = 27+40k,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

é a solução do sistema.

■

(B) Basta proceder de forma análoga!

99: (i) Seja p um número primo e $1 \leq n < p$, n inteiro. Mostre que

$$\binom{p}{n} \equiv 0 \pmod p$$

(ii) Prove que: se p é um número primo, então,

$$(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p,\ \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Prova:

(i)

$$\binom{p}{n} = \frac{p!}{(p-n)!n!} == \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!} = \frac{pa_n}{n!}.$$

Como $\left(\begin{array}{c} p \\ n \end{array}\right)$ é inteiro, segue-se que n! não divide p, donde, vem: $n!/a_n$.

Logo, existe $k \in \mathbb{Z}$, tal que: $a_n = n!k$ de sorte que:

$$\left(\begin{array}{c} p \\ n \end{array}\right) = \frac{pa_n}{n!} = \frac{pn!k}{n!} = pk \Longrightarrow \left(\begin{array}{c} p \\ n \end{array}\right) \equiv 0 \pmod{p}.$$

■

(ii)

$$(x+y)^p = x^p + \ldots + \left(\begin{array}{c} p \\ i \end{array}\right) x^{p-i} y^i + \ldots + y^p.$$

Pelo item anterior $\left(\begin{array}{c} p \\ n \end{array}\right) \equiv 0$ (mod p) : Portanto,

$$(x+y)^p - (x^p + y^p) = pk, \ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow (x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}, \ \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

■

100: Sejam K e L corpos. Uma função f : K ! L chama-se um homo-morfismo quando se tem

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{e} \quad f(x.y) = f(x).f(y)$$

quaisquer que sejam $x, y \in K$.

(i) Dado um homomorfismo $f : K \to L$, prove que: $f(0) = 0$.

(ii) Prove também que, ou $f(x) = 0$ para todo $x \in K$, ou então, $f(1) = 1$ e f é injetora.

Prova:

(i) Com efeito, $f(0+0) = f(0) + f(0)$, então, $f(0) = 0$.

■

(ii) Note que:

$$f(1.1) = f(1).f(1) \Longrightarrow f(1)[1 - f(1)] = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(1) = 0 \\ \text{ou} \\ f(1) = 1 \end{array} \right..$$

Assim, teremos dois casos a considerar.

1º Caso: $f(1)=0$, neste caso: $f(x)=f(x.1)=f(x).f(1)=f(x).0=0$.

Portanto,

$$f(x)=0,\ \forall x\in K.$$

2º Caso: $f(1)=1$ e f é injetora.

Afirmação: f é injetora: $\forall x_1,x_2\in K: f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$. Suponhamos $x_1\neq x_2$, então, existe $b\in K: b\neq 0$, tal que:

$$(x_1-x_2).b=1$$

Agora,

$$f[(x_1-x_2).b]=f(x_1-x_2).f(b)=\overbrace{[f(x_1)-f(x_2)]}^{=0}.f(b)=0. \qquad (1)$$

Por outro lado, temos:

$$f[(x_1-x_2).b]=f(1)=1 \qquad (2)$$

Consequentemente comparando (1) e (2), segue-se o absurdo!

Visto que supomos $x_1\neq x_2$ e, portanto, $x_1=x_2$.

Isto é, f é injetora.

■

101: Seja $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ um homomorfismo. Prove que, ou $f(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{Q}$ ou $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{Q}$.

Prova: $f(1)=[f(1)]^2\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c} f(1)=0\\ \text{ou}\\ f(1)=1\end{array}\right.$ (problema anterior).

Assim, teremos dois casos a analisar.

1º Caso: $f(x)=f(x.1)=f(x).f(1)=f(x).0=0,\ \forall x\in\mathbb{Q}$.

2º Caso: $f(1)=1$, neste caso, teremos:

(i) $x = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ é fácil ver que: $f(0) = 0$ e $\mathbb{Z}$

$$f(n) = f(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(1) + f(1) + \ldots + f(1)}_{n \text{ vezes}}) = nf(1) = n.$$

(ii) $x = m = -n$, $n > 0$, $m \in \mathbb{Z}$

$$0 = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) = n + f(-n) \Longrightarrow f(-n) = -n = m.$$

Logo,

$$f(m) = m, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Observe que:

$$1 = f(1) = f\left(n.\frac{1}{n}\right) = f\overbrace{\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}^{n \text{ vezes}} = \overbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right)}^{n \text{ vezes}} = n.f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Logo,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

(iv) $x = \frac{m}{n}$, $m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{m \text{ vezes}}\right) = \underbrace{m.f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ vezes}} \Longrightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}.$$

De sorte que:

$$f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

■

Observação: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ existe uma sequência de racionais (r_n) da densidade de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em R, tal que:

$$r_n \to x_0 \text{ e } f(r_n) = r_n.$$

Agora, passando o limite e pela continuidade de f, temos:

$$f(x_0) = x_0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

102: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Seja G um grupo e seja $\alpha \in G$. Mostre que: Ord $(\alpha) = mq$

Deduza daí que: $\text{Ord}(\alpha^m) = q$.

Prova:

Seja $r = \text{Ord}(\alpha^m)$, então, vem:

$$(\alpha^m)^r = e \Longrightarrow \text{Ord}(\alpha) / mr \Longrightarrow mq / mr \Longrightarrow q / r. \qquad (1)$$

Por outro lado, temos:

$$\text{Ord}(\alpha) = mq \Longrightarrow \alpha^{mr} = e \Longrightarrow (\alpha^m)^r = e \Longrightarrow \text{Ord}(\alpha^m) / q \Longrightarrow r / q. \qquad (2)$$

Logo, de (1) e (2) segue-se que: $r = q$; ou seja, $\text{Ord}(\alpha^m) = q$.

103: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

■

Seja $f : G \to G_1$ um isomorfismo de grupos. Então, prove que:

$$\text{Ord}(f(x)) = \text{Ord}(x).$$

Prova:

Suponhamos que $\text{Ord}(x) = n$ e $\text{Ord}(f(x)) = k$. Então, queremos mostrar que $n = k$.

Se $\text{Ord}(x) = n$, então, tem-se:

$$x^n = e_G \Longrightarrow e_{G_1} = f(e_G) = f(x^n) = f\Big(\overbrace{x \dots x}^{n \text{ vezes}}\Big)$$

Decorre daí que:

$$e_{G_1} = \overbrace{f(x) \dots f(x)}^{n \text{ vezes}} \Longrightarrow e_{G_1} = [f(x)]^n \Longrightarrow \text{Ord}(f(x)) / n \Longrightarrow k / n. \qquad (1)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ord}(f(x)) &= k \Longrightarrow [f(x)]^k = e_{G_1} \Longrightarrow f\left(x^k\right) = e_{G_1} = f(e_G) \Longrightarrow \\ \overbrace{x^k = e_G}^{\text{injetividade de } f} &\Longrightarrow \operatorname{Ord}(x) \diagup k \Longrightarrow n \diagup k. \end{aligned} \tag{2}$$

Agora, de (1) e (2) segue-se que: n = k:

Portanto,

$$\operatorname{Ord}(f(x)) = \operatorname{Ord}(x).$$

■

104: PROFMAT(Pensando um pouco mais)

Seja G um grupo e sejam $a, b \in G$ diferentes da identidade, tais que $a^5 = e$, $aba^{-1} = b^2$ e $b \neq e$.

Prova:

Com efeito, $aba^{-1} = b^2$ então,

$$ab = b^2 a$$

Analogamente, temos:

$$a = a\left(bb^{-1}\right) = (ab)\,b^{-1} = \left(b^2 a\right) b^{-1} = b^2 a b^{-1}.$$

Agora,

$$a^2 = \left(b^2 a b^{-1}\right)^2 = \left(b^2 a b^{-1}\right)\left(b^2 a b^{-1}\right) = b^2\,(ab)\,ab^{-1}.$$

Assim,

$$a^2 = b^2\,(ab)\,ab^{-1} = b^2\left(b^2 a\right) ab^{-1} = b^4 a^2 b^{-1}.$$

Pocedendo como no caso anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} a^3 &= a^2 a = \left(b^4 a^2 b^{-1}\right)\left(b^2 a b^{-1}\right) = \left(b^4 a\right)(ab)\,ab^{-1} \\ &= \left(b^4 a\right)\left(b^2 a\right) ab^{-1} = b^4\,(ab)\left(ba^2\right) b^{-1} = b^4\left(b^2 a\right)\left(ba^2\right) b^{-1} \\ &= b^6\,(ab)\,a^2 b^{-1} = b^6\left(b^2 a\right) a^2 b^{-1} = b^8 a^3 b^{-1}. \end{aligned}$$

Daí, procedendo como nos casos descrito anteriormente, vem:

$$a^4 = b^{16}a^4b^{-1}$$

e finalmente, temos:

$$e = a^5 = b^{32}a^5b^{-1} = b^{32}eb^{-1} = b^{31}.$$

Ou ainda, obtemos:

$$b^{31} = e$$

Afirmação: $\text{Ord}(b) = 31$.

De fato, se $b^m = e$, então,

$$\text{Ord}(b) \diagup m.$$

Ou ainda,

$$\text{Ord}(b) \diagup 31.$$

De sorte que: $\text{Ord}(b) = 31$ (visto que $b \neq e$). ■

105: PROFMAT(Pensando um pouco mais)

Mostre que:

$$GL_n(\mathbb{C}) \diagup SL_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$$

Fatos que ajudam:

$$\begin{array}{l} 1 \;\; GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\} \\ \quad 2 \;\; SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\} \subseteq GL_n(\mathbb{C}). \end{array}$$

Prova:

Considere

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & GL_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & A & \longmapsto & \varphi(A) = \det A \end{array}$$

1.1. φ está bem definida De fato,

$$A = B \Longrightarrow \det A = \det B \Longrightarrow \varphi(A) = \varphi(B).$$

De sorte que φ descrita acima está bem definida. ■

1.2. φ é um homomorfismo Com efeito,

$$\varphi(AB) = \det(AB) = \det A.\det B = \varphi(A)\varphi(B).$$

Portanto, φ é um homomorfismo.

■

1.3: Núcleo de φ

$$N(\varphi) = Ker(\varphi) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \varphi(A) = 1\}.$$

Vejamos

$$\varphi(A) = \det A = 1 \Longrightarrow A \in SL_n(\mathbb{C}).$$

Dito de outro modo, temos:

$$N(\varphi) = Ker(\varphi) = SL_n(\mathbb{C}).$$

■

1.3: φ é sobejetora De fato, mostremos que:

$$\forall X \in \mathbb{C}^* : \exists\ B \in GL_n(\mathbb{C}) \ \text{ tal que: } \varphi(B) = X.$$

A priori,

$$\varphi(B) = X \Longrightarrow \varphi(B) = \det B = X, \ \text{ com } X = a + bi.$$

Assim, basta tomar

$$B = \begin{bmatrix} a+bi & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Donde, obtemos:

$$\varphi(B) = a + bi = X = \det B, \text{ com } X = a + bi.$$

Ou ainda, $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{C}^*$.

Logo, φ é sobrejetora.

Agora, pelo teorema do homomorfismo, vem:

$$\frac{GL_n(\mathbb{C})}{Ker(\varphi)} \cong \operatorname{Im}(\varphi) \Longleftrightarrow \frac{GL_n(\mathbb{C})}{Ker(\varphi)} \cong \mathbb{C}^*.$$

■

106: PROFMAT(Pensando um pouco mais)

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$,onde:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$$

Prova:

A priori, vamos apresentar algumas das notações:

(i) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ Espaço quociente de R por Z

(ii) $\simeq$: Isomorfismo

(iii) R_Z é

isomorfo a $\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$.

Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\ x \mapsto \varphi(x) = e^{2\pi x i}$, onde: $e^{2\pi x i} = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

Afirmação 1: φ está bem definida

De fato,

$$x_1 = x_2 \Longrightarrow e^{2\pi x_1 i} = e^{2\pi x_2 i} \Longrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2).$$

Logo, φ está bem definida.

Afirmação 2: φ um homomorfismo

Com efeito, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\varphi(x+y)=e^{2\pi(x+y)i}=e^{2\pi xi}\cdot e^{2\pi yi}=\varphi(x)\cdot\varphi(y),$$

e, portanto, φ é um homomorfismo.

Afirmação 3: $Ker(\varphi)=\mathbb{Z}$ (o núcleo de φ é $\mathbb{Z}$.)

Por definição, temos:

$$Ker(\varphi)=\left\{x_0\in\mathbb{R}:\varphi(x_0)=e_1,\ e_1\in\mathbb{S}^1\right\},$$

Note que: $(a,b)\cdot(1,0)=(a.1-b.0,a.0+b.1)=(a,b)$.

Assim, (1; 0) é o elemento neutro para $\langle\mathbb{C},\cdot\rangle$ Por conseguinte, obtemos:

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= (\cos(2\pi x_0),\sin(2\pi x_0))=(1,0)=e_1\\ &\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(2\pi x_0)=1\\ \sin(2\pi x_0)=0\end{array}\right. \Longrightarrow 2\pi x_0=2n\pi\Longrightarrow x_0=n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ou ainda, $Ker(\varphi)=\mathbb{Z}$.

Afirmação 4: φ é sobrejetora $\forall z\in\mathbb{C}$, tal que: $|z|=1\Longrightarrow x^2+y^2=1$, onde: $z=(x,y)$.

Além disso,

$$x^2\le x^2+y^2=1\Longrightarrow|x|\le1\Longrightarrow-1\le x\le1.$$

Então, existe $\theta\in\mathbb{R}$,(À luz do teorema do valor intermediário), tal que:

$$x=\cos\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)\text{ e }y=\sin\left(\frac{\theta}{2\pi}\right).$$

Assim,

$$\varphi\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)=e^{2\pi\frac{\theta}{2\pi}i}=e^{\theta i}=(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbb{S}^1.$$

Dito de outro modo, vem: φ é sobrejetora.

Agora, pelo teorema do homomorfismo, temos:

$$\frac{\mathbb{R}}{Ker\,(\varphi)} \simeq \mathrm{Im}\,(\varphi) \Longleftrightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{S}^1.$$

■

107: PROFMAT(Pensando um pouco mais)

$\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, se $m.d.c.\,(n,m) = 1$.

Prova:

Seja $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m,\ x \mapsto \varphi\,(a) = \left(\bar{a}, \bar{\bar{a}}\right)$

Afirmação 1: φ está bem definida

De fato,

$$a_1 = b_1 \Longrightarrow \left(\bar{a}_1, \bar{\bar{a}}_1\right) = \left(\bar{b}_1, \bar{\bar{b}}_1\right) \Longrightarrow \varphi\,(a_1) = \varphi\,(b_1)\,.$$

Logo, φ está bem definida.

Afirmação 2: φ é um homomorfismo Com efeito, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\varphi\,(a+b) = \left(\overline{a+b},\ \overline{\overline{a+b}}\right) = \left(\bar{a}, \bar{\bar{a}}\right) + \left(\bar{b}, \bar{\bar{b}}\right) = \varphi\,(a) + \varphi\,(b)\,,$$

e, portanto, φ é um homomorfismo.

Afirmação 3: $Ker\,(\varphi) =_{nm} \mathbb{Z}($ o núcleo de φ é $_{nm}\mathbb{Z}.)$ Por definição, temos:

$$Ker\,(\varphi) = \left\{x \in \mathbb{Z} : \varphi\,(x) = \left(\bar{0}, \bar{\bar{0}}\right)\right\},$$

Vejamos

$$\varphi(x) = \left(\bar{x}, \bar{\bar{x}}\right) = \left(\bar{0}, \bar{\bar{0}}\right) \Longrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \bar{0} \\ \text{e} \\ \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{0}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \equiv 0(\operatorname{mod} n) \\ \text{e} \\ x \equiv 0(\operatorname{mod} m) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 0 = nq_1,\ n \in \mathbb{Z} \\ \text{e} \\ x - 0 = mq_1,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in n\mathbb{Z} \\ \text{e} \\ x \in m\mathbb{Z} \end{cases}.$$

Logo, $x \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$.

Fato:

Seja $x \in nm\mathbb{Z} \Longrightarrow x = k_1 nm \Longrightarrow x = (k_1 m)\, n \in n\mathbb{Z}$ e $x = (k_1 n)\, m \in m\mathbb{Z}$ $\Longrightarrow x \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$.

Portanto,

$$nm\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}.$$

Falta mostrar que:

$$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \subset nm\mathbb{Z}.$$

Seja $x \in n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$, então, tem-se: $x \in n\mathbb{Z}$ e $x \in m\mathbb{Z}$.

Agora, $m.d.c.\,(n, m) = 1 \Longrightarrow \exists r, s \in \mathbb{Z}$, tais que:

$$mr + ns = 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} x &= x.1 = x\,(mr + ns) = (ms')\,(ns) + (nr')\,(mr) \\ &= mn\,(s's + rr') = mnk \in nm\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De sorte que:

$$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = nm\mathbb{Z}.$$

Isto é,

$$Ker\,(\varphi) =_{nm} \mathbb{Z}.$$

Ou ainda, $Ker\left(\varphi\right) = \mathbb{Z}$

Afirmação 4: $\boldsymbol{\varphi}$ é sobrejetora

$$\forall \left(\bar{x}_0, \bar{\bar{x}}_0\right) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m,\ \exists\ x_0 \in \mathbb{Z},\ \text{tal que:}$$

$$\varphi\left(x_0\right) = \left(\bar{x}_0, \bar{\bar{x}}_0\right).$$

Logo, φ é sobrejetora.

Agora, pelo teorema do homomorfismo, temos:

$$\frac{\mathbb{Z}}{Ker\left(\varphi\right)} \simeq \operatorname{Im}\left(\varphi\right) \Longleftrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{{}_{nm}\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m.$$

■

Observação:

$$\exists\ a\ \in\ \mathbb{Z};\ \left(\bar{a}, \bar{\bar{a}}\right) = \left(\bar{\alpha}, \bar{\bar{\beta}}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \bar{a} = \bar{\alpha} \\ \text{e} \\ \bar{\bar{a}} = \bar{\bar{\beta}} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \alpha (\operatorname{mod} n) \\ \text{e} \\ a = \beta (\operatorname{mod} m) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} a - \alpha = nq_1 \\ \text{e} \\ a - \beta = mq_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = \alpha + nq_1 \\ \text{e} \\ a = \beta + mq_2; \\ q_1, q_2 \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \Longrightarrow \beta - \alpha = nq_1 + m\left(-q_2\right)$$

108: PROFMAT(Pensando um pouco mais)

Seja $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{R}.$ Considere

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & a + b\sqrt{2} & \longmapsto & \varphi\left(a + b\sqrt{2}\right) = \left|a^2 - 2b^2\right|. \end{array}$$

Mostre que: $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], \varphi\right)$ é um D.E. (Domínio Euclidiano)

Prova:

Com efeito, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ existem $q, r \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\ \beta \neq 0,$ tais que:

$$\alpha = \beta q + r \text{ com } \varphi(r) < \varphi(\beta) \text{ ou } r = 0.$$

Sejam $\alpha = a + b\sqrt{2}$ e $\beta = c + d\sqrt{2}$ em $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] - \{0\}$, então, temos:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right).\left(c - d\sqrt{2}\right)}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{(bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2}.$$

Façamos

$$x = \tfrac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} \quad \text{e} \quad y = \tfrac{(bc - ad)}{c^2 - 2d^2}.$$

Daí, vem:

$$\frac{\alpha}{\beta} = x + y\sqrt{2}.$$

Escolha e; $f \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, tais que:

$$|x - e| \leq \frac{1}{2} \text{ e } |y - f| \leq \frac{1}{2}.$$

(1) Suponhamos que r $\neq$0, então, queremos mostrar que:

$$\varphi(r) < \varphi(\beta).$$

Como

$$\alpha = \beta q + r \Longrightarrow r = \alpha - \beta q = \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - q\right),$$

segue-se que:

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \varphi(\alpha-\beta q)=\varphi\left[\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}-q\right)\right] \\
\varphi(r) &= \varphi(\beta).\varphi\left(\frac{\alpha}{\beta}-q\right) \\
\varphi(r) &= \varphi(\beta).\varphi\left(\left(x+y\sqrt{2}\right)-\left(e+f\sqrt{2}\right)\right) \\
&= \varphi(\beta).\varphi\left((x-e)+(y-f)\sqrt{2}\right) \\
&= \varphi(\beta)\left|(x-e)^2-2(y-f)^2\right| \\
&= \varphi(\beta)\left||x-e|^2-2|y-f|^2\right|.
\end{aligned}$$

De sorte que:

$$\varphi(r)\leq\varphi(\beta).\left|\frac{1}{4}-2.\frac{1}{4}\right|=\varphi(\beta).\frac{1}{4}<\varphi(\beta).$$

Logo,

$$\varphi(r)<\varphi(\beta).$$

(2) Queremos mostrar que:

$$\varphi(\alpha)\leq\varphi(\alpha\beta).$$

Sejam $\alpha=a+b\sqrt{2}$ e $\beta=c+d\sqrt{2}$ em $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]-\{0\}$, então, temos:

$$\alpha\beta=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}.$$

Por conseguinte, vem:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha\beta) &= \varphi\left((ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\right). \\
\varphi(\alpha\beta) &= \left|(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2\right| \\
\varphi(\alpha\beta) &= \left|a^2\left(c^2-2d^2\right)-2b^2\left(c^2-2d^2\right)\right| \\
\varphi(\alpha\beta) &= \left|\left(c^2-2d^2\right)\left(a^2-2b^2\right)\right| \\
\varphi(\alpha\beta) &= \left|c^2-2d^2\right|\left|a^2-2b^2\right| \\
&\geq 1.\left|a^2-2b^2\right|=\varphi(\alpha).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\varphi(\alpha) \leq \varphi(\alpha\beta).$$

Isto é, $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \varphi)$ é um D.E. (Domínio Euclidiano)

$\blacksquare$

109: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Os números reais p; q e _ são, tais que: $p > 0, q > 0$ e $\alpha > 1$. Prove que:

$$\frac{p+\alpha^2 q}{p+q} > \alpha \Longrightarrow \frac{p}{q} < \alpha.$$

Prova:

Basta notar que:

$$\begin{aligned} \frac{p+\alpha^2 q}{p+q} &> \alpha \Longrightarrow p+\alpha^2 q > p\alpha + q\alpha \\ &\Longrightarrow p(1-\alpha) > q\alpha(1-\alpha), \ \alpha > 1 \\ &\Longrightarrow \frac{p}{q} < \alpha. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

110: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Descreva as classes de equivalência e o conjunto quociente em relação a $\sim$ induzida pela seguinte função: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

F_1) É fácil ver que: uma função Fatos que ajudam: $f : X \longrightarrow Y$ satisfazendo a

$$\forall x_1 x_2 \in X, \ x \sim y \Longleftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_2.$$

de.ne uma relação de equivalência no conjunto X (Neste caso, dizemos que $\sim$ é uma relação de equivalência induzida por f).

F_2) Uma função $f : A \longrightarrow B, Y \subseteq B,$ quando $Y = \{y\}; f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y)$ é chamado fibra de f sobre y.

Solução:

$$\begin{aligned} x \quad \sim \quad & a \Longleftrightarrow f(x) = f(a) \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = a^2 - 5a + 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x-a)(x+a) - 5(x-a) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (x-a)(x+a-5) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = a \text{ ou } x = 5 - a. \end{aligned}$$

Fazendo um esboço do gráfico da função f descrita por: $f(x) = x^2 - 5x + 6,$ claramente fazendo uma varredura dos pontos isolados formamos as classe de equivalências que são as fibras, desta forma vem:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \{a, 5-a\} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \bar{a} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \overline{5-a} \quad \bigcup_{a\in\mathbb{R}} f^{-1}(a),$$

Onde:

$\bar{a} = \{x \in \mathbb{R} : x \sim a\}$ e $f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R} : x \sim a\} = \bar{a}$ (A imagem inversa são fibras de f sobre a).

Observação:

$f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R} : x \sim a\} = \bar{a}$

(As classes de equivalências são as fibras de f)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\sim \quad &= \{f^{-1}(y_o), f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_n), \ldots\} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \bar{a} \\ &= \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \overline{5-a} = \left\{\bar{a}, \overline{5-a}\right\} = \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\bigcup_{a\in\mathbb{R}} \bar{a} = f^{-1}(y_o) \text{ ou } \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \overline{5-a} = f^{-1}(y_1)$$

■

111: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Sejam a; b e c pertencentes ao corpo ordenado completo R: Prove que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Prova:

Com efeito, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ (b-c)^2 \geq 0 \\ (c-a)^2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \\ b^2+c^2 \geq 2bc \\ c^2+a^2 \geq 2ca. \end{cases} \qquad (I)$$

Agora, somando membro a membro as desigualdades de (I) obtemos:

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(ab+bc+ac\right).$$

De sorte que:

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac.$$

$\blacksquare$

112: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Mostre que: $e^x > 1+x, \forall x > 0.$ Deduza daí que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Prova:

A priori, considere $\varphi : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $\varphi(t) = e^t$.

(i) φ é contínua em $[0, x]$,

(ii) φ é derivável em $(0, x)$,tal que:

$$e^{x_0} = \frac{e^x - e^0}{x-0} \Longrightarrow e^x = 1 + xe^{x_0}$$

Como $e^{x_0} > 1$, segue-se que:

$$e^x > 1+x, \ \forall x > 0.$$

Agora,

$$e^{\frac{x}{n+1}} > \frac{x}{n+1} \Longrightarrow e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{x^{n+1}}{A}.$$

Portanto,

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{A} \Longrightarrow \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{A} \Longrightarrow 0 < \frac{x^n}{e^x} < \frac{A}{x}.$$

Daí, passando ao limite , à luz do teorema do confronto, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

■

Observação:

Se tivermos $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o,\ a_n \neq 0,$ então, tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^n}.\frac{x^n}{e^x} = a_n.0 = 0.$$

113: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ (corpo ordenado completo), tais que: $1 < a < b < c$ e $b - a = c - b$; mostre que:

$$\frac{\ln b}{\ln a} > \frac{\ln c}{\ln b}.$$

Prova:

Queremos mostrar que:

$$\ln a . \ln c < (\ln b)^2,$$

onde: $1 < a < b < c$ e $b - a = c - b$ sendo a; b; c no corpo ordenado R.

De fato, pela comparação entre as médias geométrica e aritmética, temos:

$$\sqrt{\ln a . \ln c} < \frac{\ln a + \ln c}{2} = \ln \sqrt{ac} < \ln(\frac{a+c}{2}) = \ln b,$$

e, portanto,

$$\sqrt{\ln a . \ln c} < \ln b \Longleftrightarrow \ln a . \ln c < (\ln b)^2 \Longleftrightarrow \frac{\ln c}{\ln b} < \frac{\ln b}{\ln a}.$$

■

114: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Dados a, b, ϵ no corpo ordenado R, prove que:

$$|a-b| < \epsilon \Longrightarrow |b| - \epsilon < |a| < |b| + \epsilon$$

Conclua que

$$|a-b| < \epsilon \Longrightarrow a < |b| + \epsilon.$$

Prova:

Basta notar que:

$$\begin{cases} |a| - |b| \leq |a-b| < \epsilon \\ \text{e} \\ |b| - |a| \leq |a-b| < \epsilon \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |a| < |b| + \epsilon \\ \text{e} \\ |b| - \epsilon < |a| \end{cases} \Longrightarrow |b| - \epsilon < |a| < |a| < |b| + \epsilon,$$

além disso, vem:

$$a \leq |a| < |b| + \epsilon \Longrightarrow a < |b| + \epsilon.$$

■

115: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Para determinar o valor de "a" de uma grandeza foram feitas, em laboratório, n medições. Os valores encontrados foram $x_1, x_2, ..., x_n$. Resolveu-se adotar como estimativa de "a" o valor para o qual a soma dos quadrados dos erros das medidas fosse mínimo. Que valor é esse?

Solução:

Seja

$$\Phi(a) = (a - x_1)^2 + (a - x_2)^2 + \ldots + (a - x_n)^2,$$

Então, fazendo as manipulações algébricas necessárias, obtemos:

$$\Phi(a) = na^2 - 2a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

De sorte que, a abscissa do vértice produz

$$a_V = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

116: PROFMAT(Pensando um pouco mais)

Sejam a; b; c > 0 no corpo ordenado completo R, então, prove que:

$$(a+b).(b+c).(c+a) \geq 8abc$$

Prova:

Basta notar que:

$$\frac{a+b}{2}.\frac{b+c}{2}.\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ab}.\sqrt{bc}.\sqrt{ac} \Longrightarrow (a+b).(b+c).(a+c) \geq 8a.b.c.$$

■

117: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados, seja $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \{x + y;\ x \in \mathbb{A} \text{ e } y \in \mathbb{B}\}$ limitado: Prove que:

$$\sup(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \sup \mathbb{A} + \sup \mathbb{B}$$

Prova:

Para $\forall x \in A, \forall y \in B$, temos: $x \leq \sup A$ e $y \leq$ sup B; donde obtemos:

$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$

Logo, sup A + sup B é uma cota superior para o conjunto A + B por conseguinte, vem:

$$\sup{(A+B)} \leq \sup A + \sup B.$$

Agora, dado $\xi > 0$ existem $x_0 \in A$ e $y_0 \in B$, tais que:

$$x_0 > \sup A - \frac{\xi}{2} \text{ e } y_0 > \sup B - \frac{\xi}{2} \Longrightarrow x_0 + y_0 > \sup A + \sup B - \xi.$$

Portanto, sup A + sup B é a menor das cotas superiores, ou ainda,

$$\sup{(A+B)} = \sup A + \sup B.$$

■

118: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Seja $k \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Se $a \leq x_n \leq n^k$ para todo n; então, verifique se:

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

Prova:

Basta observar que:

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{n^k}.$$

Como lim $\sqrt[n]{a} = 1$ e $\lim \sqrt[n]{n^k} = 1$ (prove!) segue-se do Teorema do Sanduíche que

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

■

119: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Use a definição para provar que: (x_n), com $x_n = \frac{1-n}{2n+1}$, $x_n \to \frac{-1}{2}$.

Majorações:

$$\begin{aligned}\left|x_n - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\frac{1-n}{2n+1} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-2n+2n+1}{2\left(2n+1\right)}\right| \\ &= \left|\frac{3}{2(2n+1)}\right| = \frac{3}{2\left(2n+1\right)} \leq \frac{3}{2n+1} \\ &\Longrightarrow n > \frac{3}{2\epsilon}.\end{aligned}$$

Desta forma, basta tomar $n_0 \geq \frac{3}{2\epsilon}$.

Prova:

Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0\left(\epsilon\right) \geq \frac{3}{2\epsilon}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\begin{aligned} n &> n_0 \Longrightarrow n > \frac{3}{2\epsilon} \Longrightarrow \frac{3}{2n} < \epsilon \Longrightarrow \left|\frac{3}{2(2n+1)}\right| = \frac{3}{2\left(2n+1\right)} \\ &\leq \frac{3}{2n+1} \leq \frac{3}{2n} < \epsilon \Longrightarrow \left|x_n - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1-n}{2n+1} + \frac{1}{2}\right| \\ &= \left|\frac{2-2n+2n+1}{2\left(2n+1\right)}\right| = \left|\frac{3}{2(2n+1)}\right| = \frac{3}{2\left(2n+1\right)} \leq \frac{3}{2n+1} \\ &\leq \frac{3}{2n} < \epsilon.\end{aligned}$$

Portanto, $\left|x_n - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \epsilon, \forall n > n_0$. Isto é, $x_n \to \frac{-1}{2}$.

∎

120: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Prove que: Se (x_n) converge, então, (x_n) limitada. Em seguida, dê um contra-exemplo para recíproca.

Prova:

Suponha que $x_n \to a$, então, dado $\epsilon = 1$ existe $n_0\left(1\right) \in \mathbb{N}$,tal que:

$$|x_n| - |a| \leq |x_n - a| < 1, \forall n \geq n_0,$$

daí, segue-se que:

$$|x_n| \leq 1 + |a|\,,\ \forall n \geq n_0.$$

Assim, tomando-se $M = \max\{|x_1|\,, |x_2|\,, \ldots, |x_{n_0-1}|\,, 1 + |a|\}$, obtemos:

$$|x_n| \leq M,\ \forall n$$

Portanto, (x_n) é limitada. Quanto a recíproca, escolha (x_n); com

$$x_n = (-1)^n$$

é obviamente limitada. Mas, sabemos que a mesma não tem valor limite.

■

121: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Prove que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

Prova:

A priori, temos:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$ e $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = 1$, segue-se à luz do Teorema do Sanduíche que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

■

122: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Use indução finita para provar que:

$$2^n \leq n!, \text{ para } n \geq 4 \text{ inteiro.}$$

Prova:

(i) Para $n = 4$, temos: $2^4 \leq 4!$.

(ii) Suponhamos válido para $n \ (2^n \leq n! \ )$ então, falta mostrar para n+1:

De fato,

$$2^{n+1} = 2^n.2 \leq n!2 = n! + n! \leq n.n! + n! = (n+1).n!,$$

e, portanto,

$$2^{n+1} \leq (n+1)!$$

■

123: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Use a definição para provar que: (x_n), com $x_n = 2 + \frac{\ln n}{n^3}$, $x_n \to 2$.

Majorações:

$$|x_n - 2| = \left|2 + \frac{\ln n}{n^3} - 2\right| = \left|\frac{\ln n}{n^3}\right| = \frac{\ln n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} < \xi \Longrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\xi}}.$$ Daí,

basta tomar $n_0 \geq \sqrt{\frac{1}{\xi}}$.

Prova:

Faça a prova com redação matemática!

124: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Se (x_n) é não-decrescente, então, $x_n \to a$, onde $a = \sup \mathbb{A}$ e

$$\mathbb{A} = \{x_n;\ x_n \leq x_{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Prova:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Logo, $|x_n - a| < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$, ou ainda, $x_n \to a$.

$\blacksquare$

125: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Sejam $x_0 \in \mathbb{X}$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função, são equivalentes:

(A) f é contínua em x_0

(B) Se $(x_n) \subset \mathbb{X}$, tal que: $x_n \to x_0$, então,

$$f(x_n) \to f(x_0).$$

Prova:

$(A \Rightarrow B)$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$:

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow (x_n) \subset \mathbb{X}, \ x_n \to x_0, \ \text{tal}$, tal que:

$$|x_n - x_0| < \delta, \forall n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0).$$

$(B \Rightarrow A)$

Se f não fosse contínua em x_0 existiria $\varepsilon_0 > 0$ tal que: $\forall \ \delta > 0$ existe $x_n \in \mathbb{X}, \ n \in \mathbb{N}$ tal que: $|x_n - x_0| < \delta \ \text{mas} \ |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, ou seja,

$$f(x_n) \nrightarrow f(x_0).$$

Absurdo!

■

126: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Verifique se: f é contínua no ponto $(0,0)?$, onde:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0. \end{cases}$$

Observe que: $f(0,y) = 0, \ \forall y,$ em particular, tem-se: $f(0,0) = 0.$

Queremos mostrar que:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(x,y)| < \xi \text{ desde que: } \|(x,y) - (0,0)\| < \delta.$$

Afirmação 1: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ e } \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

De fato,

$$\left|y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y|.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} \left|y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| & \leq & |y|\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |y| \\ & \Downarrow & \\ -y & \leq & y\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq y. \end{array}$$

Agora, sin $\left(\frac{1}{x}\right)$ é limitada e $y \to 0.$

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0,0).\end{aligned}$$

Majorações:

$$\left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x+y| \leq |x| + |y| < \xi$$

e

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| < \xi,$$

assim, basta tomar $\delta = \xi > 0$, onde $\delta = \delta(\xi,(0,0)) > 0$.

Afirmação 2: $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},\ \forall a,b \geq 0$

Sejam $a,b \geq 0$, então, temos:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a}\right)^2 &= |a| = a, \left(\sqrt{b}\right)^2 = |b| = b \\ &\text{e} \\ 2\sqrt{ab} &\geq 0 \Longleftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq a+b.\end{aligned}$$

Por conseguinte, tomando-se: $a = x^2$ e $b = y^2$ obtemos:

$$\begin{aligned}\|(x,y)\| &= \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = \|(x,y)\|_s \\ &\Longrightarrow \|(x,y)\| \leq \|(x,y)\|_s \ \text{(Norma da soma)}\end{aligned}$$

Deixemos de tantos detalhes e passemos a ação.

Prova:

Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \delta(\xi,(0,0)) > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} \|(x,y)-(0,0)\| &= \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y| < \delta = \xi \\ &\Longrightarrow \left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)-(0,0)\right| \\ &\leq |x+y| \leq |x|+|y| < \xi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y)-f(0,0)| = |f(x,y)| < \xi.$$

Isto é, f é contínua em (0; 0) :

$\blacksquare$

127: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Uma função $f: \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo $\mathbb{I}$, satisfazendo a condição de Lipschitz $|f(x)-f(y)| \leq c|x-y|$ para $x, y \in \mathbb{I}$, quaisquer, se, e somente, se, $|f'(x_0)| \leq c$, para todo $x_0 \in \mathbb{I}$.

Prova:

$(\Longrightarrow)$ Com efeito, pela condição de Lipschitz, temos:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq c.$$

Agora, passando ao limite quando $x \to x_0$ e sabendo-se que f é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{I}$, vem:

$$|f'(x_0)| \leq c,$$

para todo $x_0 \in \mathbb{I}$.

$(\Longleftarrow)$ reciprocamente,

$$|f'(x_0)| \leq c \text{ e } f'(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Ou ainda,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| \leq \xi \text{ desde que } |x-x_0|<\delta(x_0,\xi).$$

Daí, obtemos:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|-|f'(x_0)| \leq \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right| \leq \xi \text{ quando } |x-x_0|<\delta.$$

Agora, pondo $c=|f'(x_0)|+\xi$ segue-se que:

$$|f(x)-f(x_0)| \leq c\,|x-x_0|\,,\ \forall x,x_0 \in \mathbb{I}.$$

De sorte que: f é de Lipschitz.

■

128: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

seja f uma função contínua, tal que: $f(\alpha s)=\alpha^2 f(s)$ Sabendo-se que:

$$\int_0^1 f(s)\,ds=1.\ \text{Calcule: } \int_0^{30}[6f(2t)+2]\,dt.$$

Solução:

A priori, observe que:

$$f\left(\frac{s}{30}\right)=\frac{1}{30^2}f(s).$$

Assim,

$$\int_0^{30}[6f(2t)+2]\,dt=\int_0^{30}\left[6.2^2f(t)+2\right]dt=24\int_0^{30}[f(t)\,dt]+60.$$

Cálculos auxiliares:

$$\frac{1}{30}\int_0^{30} f\left(\frac{s}{30}\right) ds = \int_0^1 f(u)\, du = \int_0^1 f(s)\, ds = 1.$$

$$\left\{\begin{array}{c} u = \frac{s}{30} \\ du = \frac{1}{30} ds \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{c} 0 \leq s \leq 30 \\ \Downarrow \\ 0 \leq u = \frac{s}{30} \leq 1 \end{array}\right. .$$

E, consequentemente, vem:

$$\int_0^{30} [6f(2t) + 2]\, dt = 24\int_0^{30} [f(t)\, dt] + 60 = 24.30^3 + 60.$$

■

129: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas, tais que: $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Prove que: existe $x_0,\ a < x_0 < b,$ de modo que:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

(Ilustre graficamente f e g)

Prova:

Consideremos H : $[a, b] \to \mathbb{R}$ uma função, definida por:

$$H(x) = f(x) - g(x).$$

(i) H é contínua em $[a, b]$: Pois, f e g o são;

$(ii)\ H(a) = f(a) - g(a) < 0$ e $H(b) = f(b) - g(b) > 0,$ assim $H(a).H(b) < 0.$ Por conseguinte, pelo teorema do anulamento, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$H(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) = g(x_0).$$

■

130: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

(A) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa no intervalo I, Se $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Pertemcem a a I, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ pertencem a $[0,1]$ e $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$, prove que:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j)$$

Prova:

Vejamos, basta usando indução .nita sobre n:

(i) Para n = 2, temos:

$$\begin{array}{ccc} f(t_1 a_1 + t_2 a_2) & \leq & t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) \\ & \Updownarrow & \\ f\left(\sum_{j=1}^{2} t_j a_j\right) & \leq & \sum_{j=1}^{2} t_j f(a_j). \end{array}$$

(ii) Suponha válido para n (hipótese de indução) :

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j).$$

Então, falta mostrar para n + 1:

De fato,

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) &= f\left[\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) + t_{n+1} a_{n+1}\right] \\ &\underset{\text{hipótese de indução}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j)\right) + t_{n+1} f(a_{n+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(a_j). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} t_j f\left(a_j\right).$$

$\blacksquare$

(B) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ números não-negativos, com

$\sum_{i=i}^{n} t_i = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1.$ Prove que:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} \leq \sum_{j=1}^{n} t_j x_j,$$

onde o produtório e somatório são, descritos respectivamente por:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} = x_1^{t_1}.x_2^{t_2}\ldots x_n^{t_n}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} t_j x_j = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n.$$

Prova:

À luz do problema (A), tomando-se $f(x) = e^x$, temos:

$$\begin{array}{rcl}
f t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n & \leq & t_1 f\left(a_1\right) + t_2 f\left(a_2\right) + \ldots + t_n f\left(a_n\right) \\
& \Updownarrow & \\
e^{t_1 a_1 + t_2 a_2 + \ldots + t_n a_n} & \leq & t_1 e^{a_1} + t_2 e^{a_2} + \ldots + t_n e^{a_n} \\
& \Updownarrow & \\
\left(e^{a_1}\right)^{t_1}.\left(e^{a_2}\right)^{t_2}\ldots\left(e^{a_n}\right)^{t_n} & \leq & t_1 e^{a_1} + t_2 e^{a_2} + \ldots + t_n e^{a_n}
\end{array}$$

Daí, fazendo $e^{a_j} = x_j$, com $j = 1, 2, \ldots, n,$ obtemos:

$$\begin{array}{rcl} (e^{a_1})^{t_1}.(e^{a_2})^{t_2}\ldots(e^{a_n})^{t_n} & \leq & t_1e^{a_1}+t_2e^{a_2}+\ldots+t_ne^{a_n} \\ & \Updownarrow & \\ x_1^{t_1}.x_2^{t_2}\ldots x_n^{t_n} & \leq & t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n. \end{array}$$

De sorte que:

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{t_j} \leq \sum_{j=1}^{n} t_j x_j,$$

■

131: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Verifique se: a equação da reta tangente à curva $\xi : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, no ponto (x_o, y_o) é dada por:

$$\frac{xx_o}{a^2}+\frac{yy_o}{b^2}=1.$$

Prova:

Com efeito, dada a curva $\xi : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ e derivando implicitamente $y=f(x)$, obtemos:

$$y'(x_o, y_o) = -\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_o}{y_o}.$$

Assim, a equação da reta que passa por (x_o, y_o) e é tangente a ξ é dada por:

$$y-y_o=-\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_o}{y_o}(x-x_o),$$

decorre daí com algumas manipulações elementares que:

$$b^2xx_o+a^2yy_o=b^2x_o^2+a^2y_o^2, \qquad (1)$$

Agora, dividindo em (1) a igualdade por $a^2b^2 \neq 0$ segue-se que:

$$\frac{xx_o}{a^2}+\frac{yy_o}{b^2}=\frac{x_o^2}{a^2}+\frac{y_o^2}{b^2}=1,$$

portanto,

$$\frac{xx_o}{a^2} + \frac{yy_o}{b^2} = 1,$$

$\blacksquare$

132: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Seja $f(x) = x^4$ então**, use a definição** para provar que f é contínua em 1:

Majorações

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &= \left|x^4 - 1\right| = |x-1| . \left|x^3 + x^2 + x + 1\right| \\ &\leq |x-1| \left[|x|^3 + |x|^2 + |x| + 1\right] \end{aligned}$$

Observe que: $|x| - 1 \leq |x-1| < 1 \Longrightarrow |x| < 2.$

Agora,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &= \left|x^4 - 1\right| = |x-1| . \left|x^3 + x^2 + x + 1\right| \\ &\leq |x-1| \left[|x|^3 + |x|^2 + |x| + 1\right] \\ &\leq |x-1| \left[8 + 4 + 2 + 1\right] < \xi \end{aligned}$$

segue-se daí que $|x-1| < \frac{\xi}{15}$. Assim basta tomar $\delta = \min\left\{1, \frac{\xi}{15}\right\}$.

faça a redação matemática da prova!

133: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Sejam f e g funções definidas e deriváveis em R: Suponhamos que $f(0) = 0,\ g(0) = 1$ e que para todo x

$$f'(x) = g(x) \text{ e } g'(x) = -f(x).$$

Mostre que, para todo x;

$$(f(x) - senx)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0.$$

Conclua daí que $f(x) = senx$ e $g(x) = \cos x.$

Prova:

Basta escolher $\mathbb{H}(x) = (f(x) - senx)^2 + (g(x) - \cos x)^2$ usar a regra da cadeia, vem:

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}'(x) &= 2(f(x) - \sin x)(f'(x) - \cos x) + 2(g(x) - \cos x)(g'(x) + \sin x) \\
&= 2(f(x) - \sin x)(g(x) - \cos x) + 2(g(x) - \cos x)(-f(x) + \sin x) \\
&= 2(f(x) - \sin x)[g(x) - \cos x - (g(x) - \cos x)] = 0.
\end{aligned}$$

Mostrando que

$$\mathbb{H}'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{H}(x) = C.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(x) &= (f(x) - senx)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = C \\
& \text{e} \\
\mathbb{H}(0) &= (f(0) - sen0)^2 + (g(0) - \cos 0)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, C = 0:

Por conseguinte, vem:

$$(f(x) - senx)^2 + (g(x) - \cos x)^2 = 0.$$

Daí, concluímos que:

$$f(x) = senx \text{ e } g(x) = \cos x.$$

■

134: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Calcule (sem usar L.Hôpital):

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^x - 4}{x - 2}$$

Solução:

Seja $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, então, derivando obtemos:

$$f'(x) = x^x[\ln x + 1], \qquad (1)$$

em particular, temos: $f'(2) = 4[\ln 2 + 1]$.

Por outro lado, usando a definição, tem-se:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^x - 4}{x - 2} \qquad (2)$$

Comparando (1) com (2) obtemos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^x - 4}{x - 2} = 4[\ln 2 + 1]$$

■

135: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Seja f uma função contínua e positiva no intervalo [a; b] e derivável em (a; b)

Mostre que: existe $x_o \in (a, b)$, tal que:

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a).\frac{f'(x_o)}{f(x_o)}}$$

Prova:

Escolha $\mathbb{H} : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $\mathbb{H}(x) = \ln(f(x))$ e aplicando o Teorema do Valor Médio existe $x_o \in (a, b)$, tal que:

$$\mathbb{H}'(x_o) = \frac{f'(x_o)}{f(x_o)} = \frac{\ln(f(b)) - \ln(f(a))}{b - a}$$

dito de outro modo temos:

$$\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a).\frac{f'(x_o)}{f(x_o)}.$$

Portanto,

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\cdot\frac{f'(x_o)}{f(x_o)}}.$$

■

136: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$, tal que: $sena = -1 + a.$

Prova:

Basta considerar $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sin x - x + 1.$$

(A função f foi construída fazendo esboços dos gráficos de $y_1 = \sin x$ e $y_2 = x - 1$)

(i) f é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(ii) $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0,$ daí, à luz do teorema do anulamento, vem : existe $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que:

$$f(a) = 0 \Longleftrightarrow 0 = \sin a - a + 1 \Longleftrightarrow sena = -1 + a.$$

■

137: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua. Prove que existe $x_0 \in [0, 1]$, tal que: $f(x_0) = x_0$ (Teorema do ponto fixo de Brouwer em dimensão 1). Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ sem ponto fixo.

Prova:

Com efeito, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ (caso trivial.)

Consideremos $f(0) > 0$ e $f(1) < 1$ e seja $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, definida por:

$$g(x) = f(x) - x.$$

(i) g é contínua em [0; 1] : Pois, f e a identidade o são;

(ii) $g(0) = f(0) - 0 > 0$ e $g(1) = f(1) - 1 < 0.$ Assim, $g(0).g(1) < 0.$

Daí, à luz do teorema do anulamento, existe $x_0 \in (0,1)$, tal que:

$$g(x_0) = 0 \iff f(x_0) - x_0 = 0 \iff f(x_0) = x_0.$$

Basta considerar as funções $f, g : [0,1) \to [0,1)$ definidas por:

$$f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$$

para todo $x \in [0,1)$.(Faça os esboços dos gráficos)

■

138: **PROFMAT(Pensando um pouco mais**

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'$. Se (x_n) e (y_n) são sequências de pontos em X, tais que: $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n < a < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.prove que:

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{x_n - y_n} = f'(a).$$

Prova:

Basta notar que:

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{x_n - y_n} = t_n . \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + [1 - t_n] . \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$

Onde

$$t_n = \frac{y_n - a}{y_n - x_n}, \; 0 \leq t_n \leq 1$$

■

Observação:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $0 \leq t_n \leq 1$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a,$

É fácil provar que:

$$\lim_{n \to \infty} [t_n . x_n + (1 - t_n) . y_n] = a$$

Veja o texto Lima, Elon Lages, Curso de Análise, vol. 1- Projeto Euclides,SBM,21ª, IMPA, 2019.

139: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Seja $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ contínua no ponto a interior a $\mathbb{I}$. Suponha que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{x_n - y_n} = L,$$

para todo par de sequências de pontos em $\mathbb{I}$, com $x_n < a < y_n$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$. Prove que existe $f'(a)$ e é igual a L: Mostre que: a hipótese de f ser contínua no ponto a é indispensável.

Prova:

A priori, temos:

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{x_n - y_n} = t_n . \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + [1 - t_n] . \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}, \text{ onde } t_n = \frac{y_n - a}{y_n - x_n}$$

Basta notar que:

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{x_n - y_n} = t_n . \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + [1 - t_n] . \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$

onde:

$$t_n = \frac{y_n - a}{y_n - x_n}, \; 0 \leq t_n \leq 1.$$

Agora, passando ao limite; à medida que $n \to \infty$, obtemos:

$$L = \lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{x_n - y_n} = f'(a) \lim t_n + f'(a) . \lim (1 - t_n) = f'(a) .$$

■

Observação:

Vale ressaltar que: se f é contínua em $a \in int(\mathbb{I})$, então, temos:

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$$

e de forma inteiramente análoga, vem:

$$\lim f(y_n) = f(a).$$

Além disso,

$$L = \lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{x_n - y_n} = f'(a).$$

140: **PROFMAT(Pensando um pouco mais)**

Uma função $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, derivável no intervalo $\mathbb{I}$. Se existe $\alpha > 1$ tal que: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{I}$, então, f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de $\mathbb{I}$. Consequentemente, f é constante.

1ª Parte: Majorações

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^{\alpha} < \xi \Longrightarrow |x - x_0| < \sqrt[\alpha]{\xi}.$$

Desta forma basta tomar $\delta = \sqrt[\alpha]{\xi}$.

Prova:

Dado $\xi > 0$ existe $\delta = \sqrt[\alpha]{\xi} > 0$, tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x - x_0| < \sqrt[\alpha]{\xi} \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^{\alpha} < \xi,$$

segue-se que:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \xi.$$

Isto é, f é contínua em x_0.

2ª Parte:

Basta observar que:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|^{\alpha - 1}.$$

Daí, passando ao limite à medida que $x \to x_0$, obtemos:

$(\Longrightarrow)$ Com efeito, pela condição de Lipschitz, temos:

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq c.$$

Agora, passando ao limite quando $x \longrightarrow x_0$ e sabendo-se que f é derivável em todo $x_0 \in \mathbb{I}$, vem:

$$f'(x_0)=0,\ \forall x_0 \in \operatorname{int}(\mathbb{I}).$$

De sorte que: $f(x)=C$ (constante).

■

APÊNDICE A

Teorema:

Sejam $f : \mathbb{X} \to \mathbb{E}$ contínua em a e $g : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ contínua em $b = f(a)$. Então,

$$g \circ f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$$

é contínua em a.
Prova:
Seja $(x_n) \subset \mathbb{X}$, $x_n \to a$. f é contínua em a, então, $f(x_n) \to f(a) = b$. Como g é contínua em b segue-se que $g(f(x_n)) \to g(f(a))$, ou seja,

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a).$$

■

Teorema: (Localização de zeros de uma função contínua)

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a).f(b) < 0$, então, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que: $f(x_0) = 0$.
Prova:
Seja $\gamma = \frac{a+b}{2}$. Se $f(\gamma) = 0$ tomamos $x_0 = \gamma$ e a demonstração está concluída. Se $f(\gamma) < 0$, então, tomamos $x_1 = \gamma$ e $y_1 = b$. Se $f(\gamma) > 0$ escolhemos $x_1 = a$ e $y_1 = \gamma$. Em quaisquer dos casos, temos:

$$f(x_1) < 0 < f(y_1), y_1 - x_1 \leq \frac{b-a}{2^1}.$$

Seja $\gamma_1 = \frac{x_1+y_1}{2}$, então, temos: $f(\gamma_1) = 0$, a demostração está concluída. Se $f(\gamma_1) < 0$, pomos $y_2 = y_1$ e $x_2 = \gamma_1$, caso contrário, $f(\gamma_1) > 0$ e neste caso, tomamos $x_2 = x_1$ e $y_2 = \gamma_1$ daí tem-se:

$$f(x_2) < 0 < f(y_2), y_2 - x_2 < \frac{y_1 - x_1}{2} \leq \frac{b-a}{2^2}.$$

Continuando com o processo, obtemos uma seqüência de intervalos

$$[a, b] \supset \mathbb{I}_1 \supset \mathbb{I}_2 \supset \ldots \mathbb{I}_n \supset \ldots$$

onde $\mathbb{I}_n = [x_n, y_n]$, com

$$y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Seja $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_n$, então, à luz do Teorema do Sanduíche, vem:

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^{n-1}} \Rightarrow (y_n - x_n) \to 0. \tag{1}$$

Além disso, $x_n \leq x_0 \leq y_n$, $\forall\ n$ e mais.

$$0 \leq x_0 - x_n \leq y_n - x_n, \forall n \Rightarrow x_n \to x_0. \tag{2}$$

Como

$$y_n = (y_n - x_n) + x_n \tag{3}$$

segue-se combinando (1), (2) e (3) que:

$$y_n \to x_0.$$

Agora, pela continuidade de f temos:
$f(x_n) \to f(x_0)$ e $f(y_n) \to f(x_0)$, por outro lado, tem-se:

$$f(x_n) < 0 < f(y_n) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0 \\ \text{e} \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) \leq 0 \\ \text{e} \\ f(x_0) \geq 0 \end{cases}.$$

De sorte que: $f(x_0) = 0$.

■

Observação:
É fundamental destacar que: o teorema de localização de zeros (ou anulamento) de uma função contínua é um teorema de existência.

Teorema do Valor Intermediário:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que: $f(a) < k < f(b)$, então, existe $x_0 \in (a.b)$, tal que: $f(x_0) = k$.
Prova:
Basta considerar $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por: $g(x) = f(x) - k$. Então, temos:
(i) g é contínua em $[a, b]$ (por quê?);
(ii) $g(a) = f(a) - k < 0$ e $g(b) = f(b) - k > 0$.
Logo, pelo Teorema do anulamento segue-se que: existe

$$\bar{x}_0 \in (a, b) : g(\bar{x}_0) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{x}_0) = k.$$

■

6.1 Máximo e Mínimo Local (Relativo)

Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:
(i) $f(x_0)$ é máximo local, quando: existe $\delta > 0$, tal que:

$$f(x) \leq f(x_0), \forall\ x \in (\mathbb{X} \cap \mathbb{V}_\delta(x_0)).$$

(ii) $f(x_0)$ é mínimo local, quando: existe $\delta > 0$, tal que:

$$f(x_0) \leq f(x), \forall\ x \in (\mathbb{X} \cap \mathbb{V}_\delta(x_0)).$$

Observação: Ao máximo ou mínimo local (relativo) chama-se: extremo local (relativo).

Teorema:

Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função, tal que:
(i) f é derivável em $x_0 \in int\,(\mathbb{X})$;
(ii) f admite um extremo local em $x_0 \in int\,(\mathbb{X})$. Então, $f'(x_0) = 0$.

Observação:
Antes de passarmos a demonstração, vejamos que a recíproca do teorema é falsa. Basta escolher, $f(x) = x^3$. Além disso, $f'(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$. No entanto, $f(0) = 0$ não é extremo local.
Demonstração: (**Máximo Local**)
Com efeito,

$$f(x) \leq f(x_0)\,,\ \forall\ x \in (\mathbb{X} \cap \mathbb{V}_\delta(x_0))\,.$$

Então, temos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0, & x > x_0 \\ \geq 0, & x < x_0 \end{cases},$$

então, vem: $f_+'(x_0) \leq 0$ e $f_-'(x_0) \geq 0$ e como f é derivável em x_0 segue-se que: $f'(x_0) = 0$.

■

Teorema de Weiertrass:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$, então, existem $x_1, x_2 \in [a, b]$, tais que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\,,\ \forall x_1, x_2 \in [a, b]\,.$$

Prova:
Veja o texto de Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo.6 ed.RJ: LTC, 2018. Apêndice B.4 página 449.

Teorema de Rolle:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função, satisfazendo as seguinte condições:

(i) f é contínua em $[a, b]$;
(ii) f é derivável em (a, b);
(ii) $f(a) = f(b)$. Então, existe $x_0 \in (a, b)$, tal que: $f'(x_0) = 0$.

(Interprete geometricamente o resultado do teorema)

Demonstração: Faremos a prova em duas parte, a saber:
1º Caso: Se $f(x) = c$, então, $f'(x_0) = 0$, para todo $x_0 \in (a, b)$. Admita agora, f não constante.

2^o **Caso**: Se f não é constante, então, f atinge o máximo e o mínimo em $[a, b]$ (Via Teorema de Weierstrass) e como $f(a) = f(b)$, segue que o máximo e o mínimo de f ocorre no interior do intervalo $[a, b]$. Além disso, como f é derivável em (a, b) segue-se que: existe $x_0 \in (a, b)$, tal que: $f'(x_0) = 0$.

■

Teorema do Valor Médio:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função, satisfazendo as seguinte condições:

(i) f é contínua em $[a, b]$;
(ii) f é derivável em (a, b). Então existe $x_0 \in (a, b)$. tal que:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(Interprete geometricamente o resultado do teorema)

Demonstração:
Consideremos $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a).$$

Então, temos:
(i) Φ é contínua em $[a, b]$;
(ii) Φ é derivável em (a, b);
(iii) $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, então, pelo Teorema de Rolle existe $x_0 \in (a, b)$, de modo que:

$$\Phi(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f(x_0) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) = 0,$$

e, portanto,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Teorema: (Regra da Cadeia)

Sejam $\mathbb{I}$ e $\mathbb{J}$ intervalos da reta e sejam $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{J} = f(\mathbb{I}) \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se f é derivável em $x = x_0$ e g é derivável em $y_0 = f(x_0)$, então, $g \circ f$ é derivável em x_0
e vale

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

Prova:

Consideremos $G : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ dada por $G(y) := \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & , y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , y = y_0 \end{cases}$, então, G é contínua em $\mathbb{J}$.

$$\lim_{y \to y_0} G(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = G(y_0).$$

Logo, G é contínua em $\mathbb{J}$.
Agora, para $y \neq y_0$, temos:

$$g(y) - g(y_0) = G(y)(y - y_0),$$

ou ainda,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x)) . \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

$G \circ f$ é contínua e, portanto, passando o limite em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} G(f(x)) . \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= G(f(x_0)) . f'(x_0) = g'(f(x_0)) . f'(x_0). \end{aligned}$$

■

Teorema: (função Inversa)

Sejam $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ derivável e estritamente crescente com inversa $g : \mathbb{J} = f(\mathbb{I}) \to \mathbb{R}$, com $f'(x_0) \neq 0$. Então, tem-se:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, y_0 = f(x_0).$$

Sugestão:
Com efeito, sendo $f'(x_0) \neq 0$ segue que $f'(x_0) > 0$ ou $f'(x_0) < 0$, em quaisquer dos casos f é inversível. Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} g'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0))}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

■

6.2 A Dedução da equação do 2º grau por Viète e Um pouco de História

4

(i) Vamos descrever o método de Viète para a resolução de equação do 2º grau. Seja

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0. \tag{1}$$

Fazendo $x = u+v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e levando na equação (1), vem:

$$av^2 + (2au + b)\,v + au^2 + bu + c = 0. \tag{2}$$

Viète transformou essa equação (2) numa equação incompleta do 2º grau, anulando o coeficiente de
v, isto é, escolhendo $u = \frac{-b}{2a}$. Obteve assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0, \tag{3}$$

e fazendo algumas manipulações simples em (3), obtemos:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{4}$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então, decorre de (4) que:

$$v = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{5}$$

e, portanto,

$$x = u + v = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Que é a " **fórmula de Báskara** " o que parece ser exclusiva do Brasil.

■

6.3 Funções Convexas e Condições de Otimalidade de 1ª e 2ª ordem

Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo $\mathbb{X}$. Dizemos que f é convexa, quando:

$$f\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)\,f(x_1) + tf(x_2)\,,$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ e $0 \leq t \leq 1$.

Teorema: (Condição de 1ª ordem)
Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ uma função, $f \in C^1$, então, temos:
f é convexa se, e somente se,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

para todo $x, x_0 \in int(\mathbb{X})$.
Demonstração:
($\Longrightarrow$) Suponha que f é convexa, então, temos:

$$f((1-t)x_0 + tx) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x),$$

ou ainda,

$$f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0) \leq t(f(x) - f(x_0)),$$

dito de outro modo, vem:

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0). \qquad (\#)$$

Passando ao limte, quando $t \to 0$, obtemos:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x).$$

($\Leftarrow$) Reciprocamente,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

para todo $x, x_0 \in int(\mathbb{X})$.
Agora, fixando $x_1, x_2 \in int(\mathbb{X})$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, temos:

$$\alpha f(x_1) \geq \alpha f(x_0) + f'(x_0)(\alpha x_1 - \alpha x_0), \qquad (1)$$

e analogamente,

$$(1-\alpha)f(x_2) \geq (1-\alpha)f(x_0) + f'(x_0)((1-\alpha)x_2 - (1-\alpha)x_0), \qquad (2)$$

Decorre de (1) e (2) que:

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - x_0],$$

como $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ segue que:

$$\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \geq f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2).$$

Logo, f é convexa. ■

Observação: Na demonstração fazendo os detalhes de (#), obtemos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+t(x-x_0)\right)-f\left(x_0\right)}{t}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f\left(x_0\right)}{\frac{h}{x-x_0}}=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right).$$

Teorema: (Condição de 2^a ordem)
Seja $f:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ uma função, $f\in C^2$. Então,
f é convexa se, e somente se,

$$f''\left(x\right)\geq 0,$$

para todo $x\in int\left(\mathbb{X}\right)$.
Demonstração:
($\Longleftarrow$) Com efeito, $f''(x)\geq 0$, então, à luz do desenvolvimento de Taylor, temos:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots,\qquad (A)$$

ou ainda,

$$f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

Visto que, $\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2\geq 0$, portanto,

$$f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right),\qquad (B)$$

e pelo Teorema das condições de otimalidade de 1^a ordem, segue que: f é

convexa.
($\Longrightarrow$) Por hipótese f é convexa. Suponha que $f''(x)<0$ para algum $x\in int\left(\mathbb{X}\right)$, temos também que existe $x_0\in int\left(\mathbb{X}\right)$, de modo que:

$$\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2<0.$$

Além disso, pela expansão de Taylor, vem:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots,\qquad (A)$$

conseqüentemente,

$$f\left(x\right)<f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right).\qquad (B)$$

Logo, $A\nRightarrow B$.
Portanto, f não é convexa. Absurdo! Pois, supomos $f''(x)<0$.
De sorte que: $f''(x)\geq 0$.

■

Alfabeto Grego:

A α (alfa)
B β (beta)
Γ γ (gama)
Δ δ (delta)
E ϵ (epsilon)
Z ζ (zeta)
H η (eta)
Θ θ (teta)
I ι (iota)
K κ (capa)
Λ λ (lambda)
M μ (mu)
N υ (nu)
Ξ ξ (ksi)
O o (omicron)
Π π (pi)
P ρ (rô)
Σ σ (sigma)
Υ τ (tal)
Y ν (upsilon)
Φ ϕ (fi)
X χ (chi)
Ψ ψ (phi)
Ω ω (omega)

BIBLIOGRAFIA:

Bartle, R. G.-The elements of Real Analysis. New York, J. Wiley, 2018.

Friedlander, Ana. Elementos de Programação Não-linear, Editora da Uni camp, 2016:Coelho, Flávio Ulhoa; Lourenço, Maria Lilian, Álgebra Linear Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

Martinez, J. Mario, S. A. Santos. Métodos Computacionais de Otimização. 20o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000 Lima, Elon Lages, Matemática e Ensino- Coleção do Professor de Matemática, 4a, RJ, 2017.

Barbosa, João Lucas, Geometria Euclidiana Plana, 2aEd., SBM. Euclides, IMPA,1997:Aragona, Jorge, Números Reais, Texto Universitário do IME-USP, 2010.

Boaler, Jo, Mentalidade Matemática, Instituto Sidarta, Porto Alegre, 2018 Lima, Elon Lages, Curso de Análise, vol. 1- Projeto Euclides, SBM, 21a , IMPA, 2019.

Struik, Drik J., História Concisa das Matemáticas, tradução João Cosme Santos Guerreiro- Gravida Publicações, Lisboa, 1989

Bartle, Robert G.- Introduction to Real Analysis. New York, J. Wiley, 2019: Lima, Elon Lages. Curso de Análise vol.2., 3a ed., Rio de Janeiro, IMPA /CNPq, 2018.

Aaboe, Asger, Episódios da História Antiga da Matemática (tradução João P. de Carvalho), SBM, 1986.

Lima et al, E. L., Morgado, A. C., Judice, E. D., Wagner, E., de Carvalho, J. B. P., 2021

Carneiro, J. P. Q., Gomes, M. L. M., & Carvalho., P. C. P. Exames de Textos. Análise de livros de Matemática para Ensino Médio. VITAE, IMPA & SBM, 2001

Matos, Marivaldo P., Séries e Equações Diferenciais, Ciência Moderna, 2021: Figueiredo, D. G. Análise I . Livros Técnicos Científicos, 2016.

Oliveira, Santos, J. P. Introdução a Teoria dos Números. Colecão Matemática Universitária, IMPA., 2000.

De Morais Filho, Daniel Cordeiro, Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, SBM 2012 Guidorizzi, Hamilton Luiz,. Um Curso de Cálculo.vol.1, 6a edição, RJ: LTC, 2018

Crispino, Marcos Luiz, 320 Questões Resolvidas de Álgebra Linear, 2012: Carmo, Manfredo P., Di¤erential Geometry of Curves and Surfaces, Revised and Updated Second Editionm 2016: I. Lequain, Yves; Garcia, Arnaldo, Projeto Euclides -Álgebra, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2020: Gnçalves, Adilson, -Introdução à Álgebra, 4a edição, RJ, Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA, 1999:

NOTAS

Nota 1

Pierre Simon Marquuis de Laplace (1749 ? 1827) Um notório matemático, físico e astrônomo, Laplace foi chamado por alguns dos seus contemporâneos de " o Newton da França". Embora Laplace tenha usado a transformada integral (1) em seu trabalho sobre teoria da probabilidade, é mais provável que a integral tenha sido descoberta por Euler. Publicações importantes de Laplace foram os tratados Mècanique Cèlest e Thèorie Analytique des Probabilités. Nascido de uma família pobre, Laplace se tornou amigo de Napoleão, mas foi elevado à aristocracia por Luís XV III após a Restauração.

Nota 2

Este postulado pode ser apresentado como teorema, com o seguinte enunciado: Se $\phi \neq \mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente. Então, X tem supremo em R.

Nota 3

Na realidade, o item (iii) é devido ao matemático grego Eudoxo, que viveu alguns séculos antes de Arquimedes.

Nota 4

François Viète foi um matemático francês que nasceu em Fontenay no ano de 1540 e morreu em Paris no ano de 1603. Na sua juventude, estudou e exerceu Direito e tornou- se membro do Parlamento da Bretanha. Não era, portanto, um matemático por profissão; porém o seu lazer era dedicado à Matemática, dentro da qual desempenhou um papel central na transição da época Renascentista para a Moderna. Fez contribuições à Aritmética, Álgebra, Trigonometria e Geometria, mas sem dúvida foi na Álgebra que ocorreram suas mais importantes contribuições, pois aqui Viète chegou mais próximo das idéias modernas.