

INTRODUÇÃO A MEDIDA E INTEGRAL À LEBESGUE COM EXERCÍCIOS



Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros

Introdução a Medida e Integral à Lebesgue com Exercícios

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Silva, Cícero José da
S586I Introdução a Medida e Integral à Lebesgue com Exercícios
/ Cícero José da Silva. Willames de Albuquerque Soares. Sérgio Mário Lins Galdino. Jornandes
Dias da Silva. Juan Carlos Oliveira de Medeiros. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2024

109 f.: il

DOI: 10.37423/2024.edcl969

ISBN: 978-65-5367-505-6

Modo de acesso: World Wide Web

Incluir Bibliografia

1. -medida-lebesgue 2. análise-matemática 3. integral-à-lebesgue 4. teoria-das-distribuições I. Silva,
Cícero José da II. Soares, Willames de Albuquerque III. Galdino, Sérgio Mário Lins IV. Silva,
Jornandes Dias da V. Medeiros, Juan Carlos Oliveira de VI. Título

CDU: 510

<https://doi.org/10.37423/2024.edcl969>

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORIA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

MSc Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior

MSc Humberto Costa

MSc Thays Merçon

MSc Adalberto Zorzo

MSc Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno

PHD Willian Douglas Guilherme

MSc Andrea Carla Agnes e Silva Pinto

MSc Walmir Fernandes Pereira

MSc Edisio Alves de Aguiar Junior

MSc Rodrigo Sanchotene Silva

MSc Wesley Pacheco Calixto

MSc Adriano Pereira da Silva

MSc Frederico Celestino Barbosa

MSc Guilherme Fernando Ribeiro

MSc. Plínio Ferreira Pires

MSc Fabricio Vieira Cavalcante

PHD Marcus Fernando da Silva Praxedes

MSc Simone Buchignani Maigret

Dr. Adilson Tadeu Basquerote

Dra. Thays Zigante Furlan

MSc Camila Concato

PHD Miguel Adriano Inácio

MSc Anelisa Mota Gregoleti

PHD Jesus Rodrigues Lemos

MSc Gabriela Cristina Borborema Bozzo

MSc Karine Moreira Gomes Sales

Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares

MSc Pedro Panhoca da Silva

MSc Helton Rangel Coutinho Junior

MSc Carlos Augusto Zilli
MSc Euvaldo de Sousa Costa Junior
Dra. Suely Lopes de Azevedo
MSc Francisco Odecio Sales
MSc Ezequiel Martins Ferreira
MSc Eliane Avelina de Azevedo Sampaio
MSc Carlos Eduardo De Oliveira Gontijo
MSc Rainei Rodrigues Jadejiski
Dr. Rodrigo Couto Santos
Dra. Milena Gaion Malosso
PHD Marcos Pereira Dos Santos



10.37423/2024.edcl969



Agradecimentos

- Ao Diretor e Vice-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Dr. Alexandre Duarte Gusmão e Prof. Dr. Sérgio Campello Oliveira, pela compreensão e pelo suporte para realização deste.
- Ao Vice-Reitor da UPE e ex-Diretor da Escola Politécnica de Pernambuco Prof. Ms. José Roberto de Souza Cavalcanti, pela percepção e incentivo para efetuação deste.
- Aos amigos UPE-Poli (Universidade de Pernambuco-Escola Politécnica de Pernambuco), pelo incentivo, conhecimento e experiência transmitido, os quais foram indispensáveis para construção, deste.
- A todos os colegas do Departamento Básico, pelo ânimo e amizade. Em especial, aos que contribuíram diretamente na concretização deste.
- Aos professores e amigos Ms. Cleto Bezerra de França, Prof. Ms. Roberto Lessa, Prof. Ms. Cláudio Maciel (poeta risadinha) e o Prof. Dr. Emerson Alexandre de Oliveira Lima.
- Ao amigo Prof. Dr. Marcos Luiz Crispino, por ter dado diversas sugestões em Medida e Integração à Lebesgue por mais de três décadas.

Dedicatória

Às Nossas Mães, Aos Nossos Pais,
Filhos, Esposas, Todos os familiares
e Ao grande Mestre Olavo Otávio
Nunes (In Memoriam)

Prefácio

A medida de Lebesgue generaliza os conceitos de comprimento, área e volume para conjuntos mais gerais que aqueles que são descritos por dimensões inteiras ou coordenadas cartesianas. Ela é particularmente útil em análise matemática, teoria da probabilidade e em muitas outras áreas da matemática.

A medida de Lebesgue é utilizada para a teoria da integração moderna, com ampliação da integral de Riemann. Ela estende o conceito de integral para uma maior gama de funções e conjuntos, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da análise matemática.

A medida de Lebesgue está definida para uma ampla família de subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Esta família é na realidade uma sigma-álgebra e contém os conjuntos abertos e conjuntos fechados.

Vale a pena salientar que buscamos dentro do possível, resolver os problemas com todos os passos, detalhando os conceitos básicos antes de fazer as demonstrações, inclusive, fazendo comentários matemáticos sobre o que está sendo realizado. Assim, o texto foi desenvolvido para que o aluno possa estudar sozinho (ou em grupo), de forma autônoma e com segurança, conferindo não apenas os resultados, mas todo o desenvolvimento lógico operacional.

Escrever um texto desta natureza demanda tempo e nos causa uma certo cuidado adicional pela equipe, pois se teme cometer os erros que ensinamos evitar. Por este motivo, sugestões, correções, comentários, antecipadamente agradecemos, devem ser enviados para um dos endereços:

cjs@poli.br
was@poli.br
galdino@poli.br
jornandesdias@poli.br
juca@ufc.br

Recife, 13 de março de 2024

Conteúdo

Copiright	iii
Corpo Editorial	iv
Agradecimentos	v
Dedicatória	vi
Prefácio	vii
DOI	vii
Conteúdo	ix
Capítulo 1 Introdução	1
Capítulo 2 Ponto de acumulação e Limites de funções	3
2.1 Relação de Ordem	3
2.2 Supremo e Ínfimo em $\mathbb{R}$	4
2.2.1 Axioma do <i>Sup</i>	4
2.2.2 Propriedade Arquimediana	4
2.2.3 Densidade dos Racionais em $\mathbb{R}$	5
2.2.4 Densidade dos Irracionais em $\mathbb{R}$	5
Capítulo 2 Exercício	5
2.2.5 Limites Superior e Inferior de sequências	6
2.2.6 Valores de aderência para sequências.	9
2.2.7 Valor de aderência.	9
2.2.8 Valores de aderência de uma função	10
Capítulo 3 Álgebra de Conjuntos e Mensurabilidade	12
3.1 Espaço Topológico	13
3.2 Espaço Mensurável-Função Mensurável	13
3.2.1 Existência de uma menor σ -álgebra em X	14
3.2.2 Borelianos	14
3.2.3 Álgebra da Mensurabilidade	16
3.2.4 Partes positiva e negativa	16
3.2.5 O caso de funções a valores reais estendidos	17
3.2.6 Mensurabilidade de funções estendidas.	18
3.2.7 Mensurabilidade do produto em $M(X, \mathfrak{M})$	18
3.2.8 Forma equivalente de mensurabilidade	19
3.2.9 Mais mensurabilidade	19
3.3 Espaço de Medida	20
3.3.1 Conceito de Medida	20

3.3.2	Espaço de Medida	21
3.3.3	Terminologia	21
3.3.4	Relação de equivalência	21
3.3.5	Espaço de Probabilidades	22
Capítulo 4 A Integral de Lebesgue		23
4.1	A Integral	24
4.1.1	Funções Simples	24
4.1.2	Propriedades	24
4.1.3	A Integral e Algumas propriedades elementares	26
Capítulo 4 Exercício		30
4.2	Funções Integráveis.	30
4.2.1	Carga	31
4.2.2	Linearidade da Integral de Lebesgue	31
4.3	Algumas Aplicações de T.C.D.L. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)	33
Capítulo 5 Espaço de Sobolev		37
5.1	Espaços L^p	37
5.1.1	Espaço L^p - Notação	38
5.1.2	Normas e Seminormas	38
5.1.3	Exemplos	38
5.2	Desigualdade de Hölder	40
5.3	Desigualdade de Cauchy-Schwarz.	41
5.4	Desigualdade de Minkowski.	41
5.5	$L^p = L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, é um espaço vetorial normado	43
5.6	O espaço $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$	45
Capítulo 6 Funções de Variação Limitada e Absolutamente Contínuas		49
6.1	Funções de Variação Limitada e Funções Absolutamente Contínuas.	50
6.2	Funções de Variação limitada	51
6.3	Variação Total	52
6.4	Aditividade da variação total.	53
Capítulo 6 Exercício		57
Capítulo 6 Exercício		58
Capítulo 6 Exercício		59
Capítulo 6 Exercício		62
Capítulo 7 Exercícios Resolvidos de Medida de Integração		67
7.1	Mensurabilidade $\mathcal{A}$	67
Capítulo 7 Exercício		67
7.2	Medidas	78
Capítulo 7 Exercício		78
7.3	Espaço L^p	88
Capítulo 7 Exercício		88

Capítulo 1 Introdução

O que é Medida de Lebesgue?



Henri Léon Lebesgue
viveu de 1875 a 1941

A medida de Lebesgue é uma maneira de atribuir uma medida ou "comprimento" a conjuntos abstratos, geralmente usada em espaços métricos ou espaços topológicos. Essa medida é chamada de medida de Lebesgue em homenagem ao matemático francês Henri Lebesgue, que desenvolveu a teoria da medida no início do século XX.

A ideia principal por trás da medida de Lebesgue é estender a noção de comprimento, área ou volume para conjuntos mais gerais do que aqueles que podem ser descritos por dimensões inteiras ou coordenadas cartesianas. Ela é particularmente útil em análise matemática, teoria da probabilidade e em muitas outras áreas da matemática.

A construção da medida de Lebesgue envolve vários conceitos abstratos, incluindo álgebra de conjuntos, conjuntos mensuráveis e integração. A medida de Lebesgue tem propriedades úteis, como a invariância sob translação e a capacidade de atribuir medidas precisas a conjuntos complicados, como conjuntos fractais.

A medida de Lebesgue é fundamental para a teoria da integração moderna, proporcionando uma abordagem mais geral e flexível do que a integral de Riemann. Ela permite estender o conceito de integral para funções mais amplas e uma variedade mais ampla de conjuntos, contribuindo significativamente para o desenvolvimento da análise matemática.

A medida de Lebesgue encontra aplicação em várias áreas da matemática, sendo uma ferramenta fundamental em análise matemática, teoria da probabilidade, teoria da medida e integração. Aqui estão algumas das principais áreas onde a medida de Lebesgue é aplicada:

Análise Matemática:

Integração Lebesgue: A medida de Lebesgue é utilizada para definir a integral de Lebesgue, uma generalização mais ampla e flexível da integral de Riemann. Essa abordagem permite a integração de uma ampla classe de funções, incluindo funções que não são integráveis na abordagem tradicional.

Convergência de sequências de Funções: A medida de Lebesgue é útil ao estudar a convergência de sequências

de funções. Ela permite analisar a convergência quase em todos os lugares, o que é uma generalização importante em relação à convergência pontual.

Teoria da Probabilidade:

Distribuições Contínuas: A medida de Lebesgue é utilizada para definir distribuições contínuas e para descrever a probabilidade de eventos em espaços contínuos.

Teorema da Convergência de Lebesgue: Esse teorema é usado para justificar a troca de limite e integral em contextos probabilísticos.

Análise Funcional:

Espaços de Funções: A medida de Lebesgue é essencial ao estudar espaços de funções, como espaços L^p , que são espaços de funções integráveis elevadas a uma potência p

Geometria Fractal:

Medida de Conjuntos Fractais: A medida de Lebesgue é aplicada para medir conjuntos fractais, que são conjuntos com dimensões não inteiras. Isso é crucial na descrição e análise de objetos fractais.

Equações Diferenciais Parciais:

Teoria da Distribuição: A medida de Lebesgue é utilizada para definir distribuições e distribuições temperadas, e, também, para lidar com soluções fracas de equações diferenciais parciais e cálculo estocástico.

Esses são apenas alguns exemplos, e a medida de Lebesgue tem aplicações em várias outras áreas da matemática. Sua flexibilidade e generalidade a tornam uma ferramenta poderosa na análise de conjuntos e funções em contextos mais amplos do que aqueles abordados pela teoria da medida mais tradicional.

Capítulo 2 Ponto de acumulação e Limites de funções



Marie-HÉLÈNE Schwartz
viveu de 1913 até 2013 Paris, França

Marie-Hélène Schwartz era filha de Paul Lévy e esposa de Laurent Schwartz. Ela viveu momentos muito difíceis, mas teve uma carreira notável na Universidade de Lille. Ela trabalhou em funções de uma variável complexa, na teoria de Ahlfors, no teorema de Poincaré-Hopf e, finalmente, em classes características de variedades singulares.

2.1 Relação de Ordem

Sejam X um conjunto e R uma relação entre seus elementos. Diz-se que R é uma relação de ordem parcial em X , se:

- i) $aRb, \forall a \in X$ (reflexiva)
- ii) aRb e $bRc \implies aRc$ (transitiva)
- iii) aRb e $bRa \implies a = b$ (antisimétrica)

Se R é uma relação de ordem parcial em X , diz-se que X é um conjunto parcialmente ordenado.

Uma relação de ordem parcial, R , em X , para a qual dados a e b , em X , arbitrários, tem-se aRb ou bRa , é dita uma relação de ordem total, em X .

Nesse caso X é dito um conjunto totalmente ordenado.

Exemplo 2.1

Seja $X = \mathbb{R}$, o conjunto dos números reais. Em R consideremos a relação $\leq$, "menos ou igual" $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{R}$. Na verdade $\mathbb{R}$ é um "corpo" totalmente ordenado e completo, segundo a relação

$\leq$ (Por quê?).

Exemplo 2.2

Seja X um conjunto não vazio. Em X consideremos a relação, R , de inclusão, denotada por $\subset$. A relação de inclusão é uma relação de ordem parcial em X , e, munido dessa relação de ordem, X não é um conjunto totalmente ordenado.

2.2 Supremo e Ínfimo em $\mathbb{R}$

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$, tal que $x \leq b$, para todo $x \in X$.

Neste caso diz-se que b é uma cota superior do conjunto X .

Diz-se que X é limitado inferiormente se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in X$. Tal número a é dito uma cota inferior de X .

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito limitado se é limitado superiormente e inferiormente.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e não vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ é dito o supremo de X se:

i) b é uma cota superior de X . ($x \leq b, \forall x \in X$)

ii) $c \in \mathbb{R}$ e $x \leq b$, para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A condição ii) é equivalente a: se $c < b$, então existe $x \in X$, tal que $c < x \leq b$, que por sua vez equivale a dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$; $b - \epsilon < x < b$.

Nesse caso escreve-se: $b = \sup X$. O supremo de um conjunto X , limitado superiormente é, pois, a menor de suas cotas superiores.

Um número a é dito o ínfimo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, limitado inferiormente se:

i) $a \leq x, \forall x \in X$

ii) $c \leq x, \forall x \in X$, implica $c \leq a$. (Equivalente, dado $\epsilon > 0$, existe $x \in X$, tal que $a < x < a + \epsilon$).

Nesse caso escreve-se $a = \inf X$.



Observação Tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto X , quanto existem, não são obrigados a pertencerem a X . Quando pertencem são chamados elemento máximo e elemento mínimo, respectivamente.

Exemplo 2.3

$X = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$b = \sup X$ e $b \in X$. b é o elemento máximo de X , $b = \max X$.

$a = \inf X$ e $a \in X$, a é o elemento mínimo de X , $a = \min X$.

Exemplo 2.4

$X = (a, b) \subset \mathbb{R}$ $a = \inf X$, $a \notin X$. $b = \sup X$, $b \notin X$.

2.2.1 Axioma do Sup

Todo conjunto, não-vazio, $X \subset \mathbb{R}$, limitado superiormente, possui um supremo $b = \sup X$, $b \in \mathbb{R}$.

é claro que existe o "Axioma do Ínfimo", com enunciado semelhante, mudando-se o que deve ser mudado.

No sentido desses axiomas, diz-se que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

2.2.2 Propriedade Arquimediana

Se $x \in \mathbb{R}$, então existe um número natural n_x tal que $x < n_x$.

De fato: caso contrário $x \in \mathbb{R}$ seria uma cota superior de N . Daí, pelo Axioma do Supremo. N tem um supremo $x_0 \in \mathbb{R}$. Como $x_0 - 1 < x_0$, existe $m \in N$, tal que $x_0 - 1 < m < x_0$. Assim $x_0 < 1 + m$, o que contradiz a pretensão de x_0 ser o supremo de N ($(1 + m) \in N$).

$\sqrt{2}$ Existe um número real positivo, x , tal que $x^2 = 2$.

2.2.3 Densidade dos Racionais em $\mathbb{R}$

O conjunto, $\mathbb{Q}$, dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, dados x e y , números reais, com $x < y$, existe um número racional r , tal que $x < r < y$.

De fato: Podemos supor $x > 0$. Considere o número real $\frac{1}{y-x}$. Pela propriedade Arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{y-x} < n$ ou seja $ny - nx > 1$. Sendo $nx > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq nx < m$.

De $m - 1 \leq nx$ tem-se $m \leq nx + 1 < ny$.

Assim, $nx < m < ny$ e $x < \frac{m}{n} < y$. Seja $r = \frac{m}{n}$.

2.2.4 Densidade dos Irracionais em $\mathbb{R}$

O conjunto dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$.

Lista de Exercícios Propostos

1. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq a < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Prove que $a = 0$.
2. Sejam a e b números reais com $a - \varepsilon < b$, para todo $\varepsilon > 0$. Prove que $a \leq b$.
3. Sejam a e b números reais. Prove que $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
4. Sejam $a > 0$, $b > 0$, números reais. Prove que $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$.
5. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$, números reais positivos, e $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, números reais positivos tais que $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = 1$. Prove que $\prod_{i=1}^n x_i^{\delta_i} \leq \sum_{i=1}^n \delta_i x_i$. Deduza a desigualdade do Exercício 6?

Sugestão: Considere a função $f(x) = -\ln x$, $x > 0$, e use argumentos de conexidade.

6. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos. Prove que

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$
 $\implies$ 6'. Outra demonstração de 6.
 - a) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$, números reais positivos e suponha que $x_1, x_2, \dots, x_n = 1$. Prove que $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.
 - b) Prove que $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$.
 - c) Usando a) prove a desigualdade do Exercício 6.
7. Prova a desigualdade de Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para $x > -1$.
 Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ números reais. Prove que

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

Sugestão: Considere a função $F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \dots + (a_n - tb_n)^2$ e mostre que $F(t) = A - 2Bt + Ct^2 \geq 0$, com $A = a_1^2 + \dots + a_n^2$, $B = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$, $C = b_1^2 + \dots + b_n^2$.
8. Para quaisquer números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$, prove que

$$[(a_1 + b_1)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2]^{\frac{1}{2}} \leq [a_1^2 + \dots + a_n^2]^{\frac{1}{2}} + [b_1^2 + \dots + b_n^2]^{\frac{1}{2}}.$$
9. Sejam S um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Define-se o conjunto $a + S = \{a + x; x \in S\}$. Mostre que $\sup(a + S) = a + \sup S$.

10. Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, funções dadas, $f(D) = \{f(x); x \in D\}$ e $g(D) = \{g(x); x \in D\}$ conjuntos limitados. Prove que,
 - i) Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$, então $\sup f(D) \leq \sup g(D)$.
 - ii) Se $f(x) \leq g(x), \forall x \in D$, então $\sup f(D) \leq \inf g(D)$.
11. Seja S um conjunto limitado, não-vazio, em $\mathbb{R}$.
 - i) Se $a > 0$, prove que $\inf(as) = a \inf(s)$ e $\sup(as) = a \sup(s)$. ($aS = \{as; s \in S\}$).
 - ii) Se $b < 0$, prove que $\inf(bs) = b \sup(s)$ e $\sup(bs) = b \inf(s)$.
12. Seja S um conjunto limitado, não-vazio, em $\mathbb{R}$.
 - i) Se $a > 0$, prove que $\inf(as) = a \inf(s)$ e $\sup(as) = a \sup(s)$. ($aS = \{as; s \in S\}$).
 - ii) Se $b < 0$, prove que $\inf(bs) = b \sup(s)$ e $\sup(bs) = b \inf(s)$.
13. Sejam A e B conjuntos, não-vazios, limitados, de $\mathbb{R}$, e defina-se: $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.
 Prove que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ e $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
14. Sejam X um conjunto não-vazio, e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções limitadas ($f(x)$ e $g(x)$ são subconjuntos, limitados, de $\mathbb{R}$).
 - i) Mostre que $\sup\{f(x) + g(x); x \in X\} \leq \sup\{f(x); x \in X\} + \sup\{g(x); x \in X\}$
 - ii) Mostre que $\inf\{f(x) + g(x); x \in X\} \geq \inf\{f(x); x \in X\} + \inf\{g(x); x \in X\}$
15. Sejam X e Y conjuntos não-vazios e $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \sup\{h(x, y); y \in Y\}$, $g(y) = \inf\{h(x, y); x \in X\}$.
 Prove que $\sup\{g(y); y \in Y\} \leq \inf\{f(x); x \in X\}$, ou seja,

$$\sup_y \inf_x h(x, y) \leq \inf_x \sup_y h(x, y).$$
16. Seja $y \in \mathbb{R}, y > 0$. Mostre que existe $n \in \mathbb{N}; \frac{1}{2^n} < y$.

2.2.5 Limites Superior e Inferior de seqüências

Dada uma sequência, $(x_n)_n$, de números reais, consideremos as sequências:

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \\ x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \\ x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots \\ \vdots \\ x_n, x_{n+1}, \dots \\ \vdots \end{array} \quad (1)$$

Se $(x_n)_n$ é limitada superiormente, as sequências em (1) tem para supremos, respectivamente, $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ com $K_1 \geq K_2 \geq \dots \geq K_n \geq K_{n+1} \geq \dots$

Então $(K_n)_n$ é uma sequência que tende para um limite finito ou tende a $-\infty$.

Proposição 2.1

$K_n \rightarrow -\infty$ se e somente se $x_n \rightarrow -\infty$.



Demonstração

Se $K_n \rightarrow -\infty$, como $x_n \leq K_n$, segue-se que $x_n \rightarrow -\infty$.

Por outro lado, se $x_n \rightarrow -\infty$, dado qualquer número K , bastante grande, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $x_n < -K$, para $n > n_0$.

Ora, para $n > n_0$, temos $K_n = \sup_{r \geq n} x_r \leq -K$, ou seja $K_n \rightarrow -\infty$.

Definição 2.1

Seja $(x_n)_n$ uma sequência de números reais, limitada superiormente. $\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{r \geq n} x_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ é chamado limite superior de $(x_n)_n$, e escreve-se $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \Lambda$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = \Lambda$. Se $(x_n)_n$ não é limitada superiormente, escreve-se $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n = +\infty$. Quando $(x_n)_n$ é limitado inferiormente a $k_1, k_2, \dots$, são os ínfimos das respectivas sequências em (1), então $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \leq k_{n+1} \leq \dots$ e $(k_n)_n$ tende para um limite finito ou para $+\infty$.



Definição 2.2

Seja $(x_n)_n$ uma sequência de números reais, limitada inferiormente. $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{r \geq n} x_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n$ é chamado o limite inferior de $(x_n)_n$, e escreve-se $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = \lambda$. Se $(x_n)_n$ não é limitada inferiormente, escreve-se $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n = -\infty$.



Observação

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$ e
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf(-x_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n$

Teorema 2.1

O número Λ é o limite superior da sequência $(x_n)_n$, se e somente se, dado $\epsilon > 0$,

- a) $x_n < \Lambda + \epsilon$, para todo n bastante grande
- b) $x_n > \Lambda - \epsilon$, para infinitos n .



Demonstração

Seja $\Lambda = \lim \sup x_n = \lim K_n$, $K_n = \sup_{r \geq n} x_r = \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$; $K_N < \Lambda + \epsilon$.

Assim $x_n < \Lambda + \epsilon$, $\forall n \geq N$. Isto prova a).

Para provar b), observamos que $(K_n)_n$ é decrescente, e daí $K_m \geq \Lambda$, $\forall m$.

Por definição de K_{p+1} , temos que existe $n \geq p + 1$, tal que

$$x_n > K_{p+1} - \epsilon \geq \Lambda - \epsilon.$$

Como p é arbitrário e $K_m \geq \Lambda$, $\forall m$, segue-se b).

Reciprocamente, de a) obtemos $K_n \leq \Lambda + \epsilon$, para $n \geq N$. Por b) $K_n > \Lambda - \epsilon$, $\forall n$. Então $K_n \rightarrow \Lambda$, ou seja $\Lambda = \lim \sup x_n$.

Corolário 2.1

O número λ é o limite inferior da sequência $(x_n)_n$ se e somente se, dado $\epsilon > 0$,

- i) $x_n > \lambda - \epsilon$, para todo n suficientemente grande
- ii) $x_n < \lambda + \epsilon$, para infinitos n .



Demonstração

Usar o teorema acima.

Corolário 2.2

A sequência (x_n) tende para ℓ , com $n \rightarrow \infty$, se e somente se $\liminf x_n = \limsup x_n = \ell$.



Demonstração

i) ℓ finito.

Se $x_n \rightarrow \ell$, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $\ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Temos $x_n < \ell + \varepsilon$, para todo n suficientemente grande. Também, como (K_m) decresce, $K_m \geq \ell \forall m$. Assim, por definição de K_{p+1} , existe $n \geq p + 1$, tal que $x_n > K_{p+1} \geq \ell - \varepsilon$.

Assim existe infinitos n ; $x_n > \ell - \varepsilon$.

Portanto $\ell = \limsup x_n$.

De modo análogo mostra-se que $\ell = \liminf x_n$.

A demonstração da recíproca segue dos resultados acima.

ii) ℓ infinito.

$$x_n \rightarrow \infty \iff \liminf x_n = \infty \text{ e } \liminf x_n = \infty \Rightarrow \limsup x_n = \infty$$

$$x_n \rightarrow -\infty \iff \limsup x_n = -\infty \text{ e } \limsup x_n = -\infty \Rightarrow \liminf x_n = -\infty$$

Corolário 2.3

a) $\Lambda = \limsup x_n$, se finito, é o maior número que é limite de uma subsequência de (x_n) .

b) $\lambda = \liminf x_n$, se finito, é o menor número que é o limite de alguma subsequência de (x_n) .



Demonstração

a) Por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existem infinitos n tais que $\Lambda - \varepsilon < x_n < \Lambda + \varepsilon$. Escolhamos $n_1 \in N$, tal que $\Lambda - \varepsilon < x_{n_1} < \Lambda + \varepsilon$. Em seguida escolhamos $n_2 \in N$, $n_2 > n_1$ tal que $\Lambda - \varepsilon < x_{n_2} < \Lambda + \varepsilon$.

Continuando o processo obtemos $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \Lambda$.

$(x_n)_n$ não pode ter uma subsequência convergindo para $\Lambda' > \Lambda$, pois se $\varepsilon < \Lambda' - \Lambda$, existe apenas finitos n ; $x_n > \Lambda' - \varepsilon$.

Por exemplo, se $\varepsilon = \frac{\Lambda' - \Lambda}{2}$, então $2\varepsilon = \Lambda' - \Lambda \Rightarrow \Lambda + \varepsilon = \Lambda' - \varepsilon$.

Existe uma infinidade de índices n tal que $\Lambda - \varepsilon < x_n < \Lambda + \varepsilon < \Lambda' - \varepsilon$. Assim $(\Lambda' - \varepsilon, \Lambda' + \varepsilon)$ não contém x_n , para infinitos n .

Exemplo 2.5

a) $x_n = (-1)^n$. $\liminf x_n = -1$, $\limsup x_n = 1$

b) $x_n = \frac{2n}{n+1}$. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = 2$. (Portanto $\liminf x_n = 2$ e $\limsup x_n = 2$.)

c) $x_n = n\{1 + (-1)^n\}$. $\liminf x_n = 0$, $\limsup x_n = \infty$.

Exemplo 2.6

Limite superior e inferior de conjuntos.

Seja $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma família enumerável de subconjuntos de um conjunto X .

O limite superior da sequência $\{E_n\}_n$, denotado por $\limsup E_n$, é definido por

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n.$$

O limite inferior é dado por $\liminf E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$.

2.2.6 Valores de aderência para sequencias.

Sejam a um número real e (x_n) uma sequencia em $\mathbb{R}$.

Proposição 2.2

Um número real a é limite de uma subsequência de $(x_n)_n$ se e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe uma infinidade de índices n tais que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.



Demonstração

Seja $N' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\} \subset N$ tal que $a = \lim_{n \in N'} x_n$. Dado $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in N$, tal que $x_{n_{i_0}} \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, para todo $i > i_0$.

Como existe uma infinidade de índices $i > i_0$, segue-se que existe infinitos $n_i \in N$, de modo que $x_{n_i} \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Portanto existem infinitos índices n ; $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Reciprocamente, suponhamos que, dado $\epsilon > 0$, o conjunto $\{n \in N; x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)\}$ seja infinito.

Então dado $\epsilon = 1$, o conjunto $\{n \in N; x_n \in (a - 1, a + 1)\}$ é infinito.

Seja $n_1 \in N$, tal que $x_{n_1} \in (a - 1, a + 1)$.

Dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, o conjunto $\{n \in N; x_n \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})\}$ é infinito.

Então existe $n_2 > n_1$, $n_2 \in N$, tal que $x_{n_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$.

Suponhamos, por indução, que $n_1 < n_2 < \dots < n_i$ estão determinadas, de modo que $x_{n_1} \in (a - 1, a + 1)$, $x_{n_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$, $\dots$, $x_{n_i} \in (a - \frac{1}{i}, a + \frac{1}{i})$.

O conjunto $\{n \in N; x_n \in (a - \frac{1}{i+1}, a + \frac{1}{i+1})\}$ é infinito. Então podemos determinar $n_{i+1} > n_i > \dots > n_2 > n_1$ tal que $x_{n_{i+1}} \in (a - \frac{1}{i+1}, a + \frac{1}{i+1})$.

Com isto construímos o conjunto $N' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\}$ de modo que $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}$, para todo $i \in N$.

Portanto $x_{n_i} \rightarrow a$, com $i \rightarrow \infty$.

2.2.7 Valor de aderência.

Um número a chama-se valor de aderência de uma sequencia $(x_n)_n$, quando a é limite de alguma subsequência de $(x_n)_n$.

Deduz-se, da definição de valor de aderência e da Proposição 2.2, que um número a é valor de aderência de $(x_n)_n$ se e somente se dados $\epsilon > 0$ e $n_0 \in N$, existe $n \in N$, $n > n_0$, tal que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Equivalentemente, a é valor de aderência de (x_n) , se todo intervalo aberto, centrado em a , contém termos x_n , com índices, n , arbitrariamente grandes.

Distinção entre valor de aderência e ponto limite de (x_n) , $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ se e somente se todo intervalo aberto centrado em a contém todos os termos x_n , com índices, n , arbitrariamente grandes.

é imediato que todo ponto limite é um valor de aderência de (x_n) . A recíproca é falsa, em geral.

Na sequencia $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$, 0 é um valor de aderência, mas não é um ponto limite.

Seja $(x_n)_n$ uma sequencia limitada de números reais, digamos $\alpha \leq x_n \leq \beta$, para todo $n = 1, 2, \dots$

Seja $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Claro que $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$. Se $k_n = \inf X_n$ e $K_n = \sup X_n$, temos:

$\alpha \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \leq \dots \leq K_n \leq \dots \leq K_2 \leq K_1 \leq \beta$.

Seja $(K_n)_n$ uma sequência monótona crescente, limitada superiormente, é convergente. Seja $a = \lim_n k_n = \sup_n k_n = \sup_n \inf X_n$.

Seja (K_n) uma sequência monótona decrescente, limitada inferiormente, é convergente. Seja $b = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = \inf_n K_n = \inf_n \sup X_n$.

Escreve-se: $a = \lim_n \inf k_n$, $b = \lim_n \sup K_n$ e diz-se que a é o limite inferior de (x_n) .

Tem-se: $\lim_n \inf x_n \leq \lim_n \sup x_n$, podendo ocorrer a desigualdade estrita, conforme a sequência (x_n) , onde $x_{2n-1} = -\frac{1}{n}$, $x_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$.

Para esta sequência, tem-se (verificar): $\inf X_{2n-2} = \inf X_{2n-1} = -\frac{1}{n}$, $\sup X_{2n-1} = \inf X_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$, donde $\lim_n \inf x_n = 0$ e $\lim_n \sup x_n = 1$. 0 e 1 são valores de aderência de (x_n) .

Teorema 2.2

Sejam $(x_n)_n$ uma sequência limitada de números reais. Então $\liminf x_n$ é o menor valor de aderência de (x_n) .



Demonstração

Temos duas coisas a provar:

i) $a = \lim_n \inf x_n$ é um valor de aderência de (x_n) .

ii) a é o menor valor de aderência de (x_n) .

Prova de i)

Sejam dados $\epsilon > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$.

Temos $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Então existe $n_1 > n_0$, tal que $a_{n_1} \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, ou seja $a - \epsilon < a_{n_1} < a + \epsilon$, $n_1 > n_0$.

Como $a_{n_1} = \inf X_{n_1}$ e $a + \epsilon$ não é cota inferior de X_{n_1} , existe $n > n_1$, tal que $a_{n_1} \leq x_n < a + \epsilon$.

Assim, existe $n > n_1 > n_0$, com $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Como n_0 é arbitrário, existe infinitos índices n , tais que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Pela Proposição 16, a é limite de alguma subsequência de $(x_n)_n$ ou seja a é um valor de aderência de (x_n) .

Prova de ii). Seja $c < a$. Então c não pode ser valor de aderência de (x_n) .

Temos, $a = \lim_n a_n = \sup_n a_n$. Sendo $c < a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $c < a_{n_0} \leq a$. Como $a_{n_0} = \inf X_{n_0}$, temos que $c < a_{n_0} \leq x_n$, para $n \geq n_0$.

Seja $\epsilon = a_{n_0} - c$. Então $c + \epsilon = a_{n_0}$ e o intervalo $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ não contém nenhum termo x_n , para $n \geq n_0$.

Logo $c < a$ não é valor de aderência de (x_n) .

Teorema 2.3

Sejam (x_n) sequência limitada de números reais. Então $b = \limsup x_n$ é o maior valor de aderência de (x_n) .



Demonstração

A demonstração pode ser feita imitando aquela de 2.2.

2.2.8 Valores de aderência de uma função

Fixemos um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação $a \in X'$ (X' o derivado de X).

Para $\delta > 0$, seja $V_\delta = \{x \in X; 0 < |x - a| < \delta\}$.

Diz-se que f é limitada numa vizinhança de a , se existe $\delta > 0$, tal que f/V_δ é limitada. ($|f(x)| \leq k, \forall x \in V_\delta$).

Um número real c chama-se um valor de aderência de f , no ponto (de acumulação) a , se existe uma sequência $(x_n)_n$, $x_n \in X - \{a\}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

Proposição 2.3

Um número real c é valor de aderência de f , no ponto a , se e somente se $c \in \overline{f(V_\delta)}$, $\forall \delta > 0$.

**Demonstração**

Seja c um valor de aderência de f , no ponto a . Então existe $x_n \in X - \{a\}$, tal que $x_n \rightarrow a$ e $f(x_n) \rightarrow c$.

Dado $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in V_\delta$.

Claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ ou seja c é o limite de uma sequência de pontos pertencentes a $f(V_\delta)$, isto é $c \in \overline{f(V_\delta)}$.

Reciprocamente, se $c \in \overline{f(V_\delta)}$, para todo $\delta > 0$, então $c \in \overline{f(V_{\frac{1}{n}})}$, para todo $n = 1, 2, \dots$

Daí, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in V_{\frac{1}{n}}$, tal que $|f(x_n) - c| < \frac{1}{n}$.

Assim $x_n \in X - \{a\}$, $\lim_n x_n = a$ e $\lim_n f(x_n) = c$, ou seja c é um valor de aderência de f no ponto a .

Denota-se o conjunto de todos os valores de aderência de f , no ponto a , por $VA(f; a)$.

De acordo com a Proposição 2.2, tem-se $VA(f; a) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{f(V_\delta)}$.

Portanto o conjunto dos valores de aderência de f , em a , é fechado. Será compacto se f for limitada numa vizinhança de a .

Nesse maior $VA(f; a)$ terá um maior e um menor elemento. Ao maior elemento chama-se limite superior de f , no ponto a , e denota-se por $\lim_{x \rightarrow a} \sup f(x) = L$.

Ao menor elemento chama-se limite inferior de f , no ponto a , e denota-se por $\lim_{x \rightarrow a} \inf f(x) = \ell$.

Capítulo 3 Álgebra de Conjuntos e Mensurabilidade



Sofia Vasilyevna Kovalevskaya
viveu de 1850 até 1891

O nome de Sofia está escrito de diferentes formas e devemos falar um pouco sobre isso aqui. Ignorando os problemas de transliteração do russo, o nome de seu pai era Krukovsky, mas ele fez pedidos ao Departamento de Heráldica para permitir que fosse considerado membro da nobreza. Isto foi recusado até que ele se aposentou em 1858, quando seu pedido foi permitido e ele se tornou Korvin-Krukovsky, o nome Korvin vindo de Matthias Corvinus, o rei da Hungria. Vasily herdou duas grandes propriedades em 1843, uma em Palibino e outra em Moshino. Na época em que herdou essas propriedades, ele se casou com Elizaveta Fedorovna Shubert (1820 – 1879), filha de Fyodor Fyodorovich von Shubert e Sophie von Shubert. Elizaveta havia nascido em 15 de dezembro de 1820, e era cerca de vinte anos mais nova que o marido. Notemos neste ponto que as fontes diferem quanto ao ano de nascimento de Vasily Korvin-Krukovsky, com datas variando entre 1800 e 1803. Também é importante notar que o avô de Elizaveta Shubert era o astrônomo e cartógrafo Theodor Friedrich Schubert (1789 – 1865), que tem uma cratera em Mercúrio com o seu nome. Sofia tinha uma irmã mais velha, Anyuta Vasilievna Korvin-Krukovskaya (1843 – 1887), e um irmão mais novo, Fyodor Vasilievich Korvin-Krukovsky (1855 – 1919). Fyodor estudou na Faculdade de Física-Matemática da Universidade de São Petersburgo e depois trabalhou em um ministério governamental. Sofia Kovalevskaya foi uma matemática russa que fez contribuições valiosas para a teoria das equações diferenciais. Ela terminou sua carreira na Suécia.

Na teoria da medida e na integração, a álgebra de conjuntos é uma parte crucial. Uma álgebra de conjuntos é um conjunto de subconjuntos de um conjunto dado que é fechado sob operações como união, interseção e complemento. Na teoria da medida, frequentemente trabalhamos com sigma-álgebras, que são álgebras de conjuntos que são fechadas sob contagens numeráveis de operações.

Álgebra de Conjuntos e Mensurabilidade

A mensurabilidade refere-se à capacidade de atribuir uma medida (como a medida de Lebesgue) a conjuntos específicos. Em um contexto topológico, a mensurabilidade frequentemente está associada à noção de conjuntos mensuráveis em um espaço métrico ou espaço topológico. Conjuntos mensuráveis são geralmente definidos de maneira a garantir que certos conceitos como integração possam ser estendidos de maneira adequada.

Espaço Topológico

Um espaço topológico é um conceito fundamental na topologia matemática. Consiste em um conjunto X juntamente com uma coleção de subconjuntos de X , chamada de topologia, que satisfaz certas propriedades. A topologia é definida de modo a capturar noções de proximidade e continuidade.

As propriedades que caracterizam um espaço topológico incluem: A coleção vazia e o próprio conjunto X fazem parte da topologia.

A interseção finita de conjuntos na topologia está na topologia. A união arbitrária de conjuntos na topologia está na topologia. Os elementos da topologia são chamados de conjuntos abertos, e seus complementos em relação a X são chamados de conjuntos fechados.

Exemplos de espaços topológicos incluem espaços métricos, onde a topologia é gerada por uma métrica, e espaços topológicos mais gerais, como o espaço topológico de Zariski em álgebra.

Em resumo, a álgebra de conjuntos, mensurabilidade e espaços topológicos são conceitos interligados, cada um desempenhando um papel importante em diferentes ramos da matemática, como análise, teoria da medida e topologia.

3.1 Espaço Topológico

Uma coleção τ , de subconjuntos de um conjunto X , é dita uma topologia em X , se tem as seguintes propriedades:

- i) $\phi \in \tau, X \in \tau$
- ii) Se $V_i \in \tau$, para $i = 1, 2, \dots, n$, então $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \tau$
- iii) Se $\{V_\alpha\}_\alpha$ é uma coleção arbitrária de elementos de τ , então $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Se τ é uma topologia sobre X , o par (X, τ) é dito um espaço topológico. Os elementos de τ são os conjuntos abertos de X .

Se (X, τ) e (Y, τ') são dois espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação dada, então f é contínua se $f^{-1}(V) \in \tau$, para todo $V \in \tau'$.

3.2 Espaço Mensurável-Função Mensurável

Uma coleção M de subconjuntos de um conjunto X é dita uma σ -álgebra em X , se tem as seguintes propriedades:

- a) $X \in M$
- b) Se $A \in M$ então o complementar, A^c , de A também pertence a M .
- c) Se $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $A_n \in M$ $n = 1, 2, \dots$, então $A \in M$.

Se M é uma σ -álgebra, o par (X, M) é dito um espaço mensurável. Os conjuntos em M são ditos conjuntos mensuráveis.

Se (X, M) é um espaço mensurável, (X, τ) é um espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$ é uma função dada, então f é dita mensurável se $f^{-1}(V) \in M$ para todo $V \in \tau$.



Observação · Se M é uma σ -álgebra em X , então $\phi \in M$ e M é fechado para a operação de interseção infinito. Além disso, se A e B estão em M , então $A - B \in M$ pois $A - B = B^c \cap A$.

3.2.1 Existência de uma menor σ -álgebra em X

Seja F qualquer coleção de subconjuntos de X . Então existe uma menor σ -álgebra, M^* , em X , tal que $F \subset M^*$.

De fato: seja Ω a família de todas as σ -álgebras M , de X , que contém F . A família de todos os subconjuntos de X , constituem uma σ -álgebra, em X (prove!) e evidentemente contém F . Logo Ω é não-vazio.

Seja M^* a interseção de todas as σ -álgebras $M \in \Omega$. Tem-se que $F \subset M^*$ e M^* pertence a toda σ -álgebra, em X , que contém F .

Por fim M^* é de fato σ -álgebra:

i) $X \in M^*$, pois X pertence a toda σ -álgebra, em X .

ii) Se $A_n \in M^*$, para $n = 1, 2, \dots$, e se $M \in \Omega$, então $A_n \in M$ e daí $\cup_n A_n \in M^*$. Como isto vale para toda $M \in \Omega$, segue-se que $\cup_n A_n \in M^*$.

iii) Se $V_i \in M^*$, $i = 1, 2, \dots, n$, então $V_i \in M$, $i = 1, 2, \dots, n$ para todo $M \in \Omega$.

Dáí $\cap_{i=1}^n V_i \in M$, para toda $M \in \Omega$, ou seja $\cap_{i=1}^n V_i \in M^*$.

A σ -álgebra M^* é dita σ -álgebra gerada por F .

3.2.2 Borelianos

Sejam (X, τ) um espaço topológico. Existe uma menor σ -álgebra, B , em X , contendo cada um dos elementos de τ . Cada elemento de B é dito um conjunto de Borel ou um boreliano.

Notemos que B contém todos os abertos do espaço topológico (X, τ) e, por ser uma σ -álgebra, B contém todos os fechados de X , a união enumerável de fechados e a interseção enumerável de abertos.

Um conjunto que é a união enumerável de fechados é dito um conjunto F_σ . Um conjunto que é a interseção enumerável de abertos é dito um G_δ .

(X, B) é um espaço mensurável e os borelianos passam a ser os conjuntos mensuráveis. Se Y é um espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então $f^{-1}(V) \in B$, para todo aberto, V , de Y . Diz-se então que toda função contínua é Borel mensurável ou B -mensurável.

Teorema 3.1

Sejam M uma σ -álgebra em X , Y um espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$.

- a) Se $\Omega = \{E \subset Y; f^{-1}(E) \in M\}$, então Ω é uma σ -álgebra em Y .
- b) Se f é mensurável e E é um boreliano em Y , então $f^{-1}(E) \in M$.
- c) Se $Y = [-\infty, \infty]$ e $f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, então f é mensurável.
- e) Se f é mensurável, se Z é um espaço topológico, $g : Y \rightarrow Z$ e B -mensurável mensurável a Borel e $h = g \circ f$, então $h : X \rightarrow Z$ é mensurável.

Demonstração

a) i) $Y \in \Omega$, pois $X = f^{-1}(Y) \in M$

ii) Se $A \in \Omega$, então $A^c \in \Omega$, pois,

$$A^c = Y - A \Rightarrow f^{-1}(A^c) = f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A).$$

Como $A \in \Omega$, tem-se $f^{-1}(A) \in M$ e daí $X - f^{-1}(A) \in M$.

iii) Se $A_i \in \Omega, i = 1, 2, \dots$, então

$$f^{-1}(A_i) \in M, \forall i = 1, 2, \dots \text{ e } \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \in M.$$

Como

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i),$$

segue-se que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in M$.

b) Por a) $\Omega = \{E \subset Y; f^{-1}(E) \in M\}$ é uma σ -álgebra em Y . Sendo f mensurável, Ω contém todos os abertos de Y . Sendo $E \subset Y$, um boreliano, E pertence à σ -álgebra de Borel de Y e daí $E \in \Omega$. Logo $f^{-1}(E) \in M$.

c) Seja $\Gamma = \{E \subset [-\infty, \infty]; f^{-1}(E) \in M\}$. Escolhamos $\alpha \in R$ e $\alpha_n < \alpha$; $\alpha_n \rightarrow \alpha$ com $n \rightarrow \infty$.

Temos: $(\alpha_n, \infty] \in \Gamma$, para cada n , pois $(\alpha_n, \infty]$ é um F_σ e um G_δ ,

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-\infty, \alpha_n] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \infty]^c,$$

Γ é um σ -álgebra

Logo $(-\infty, \alpha_n] \in \Gamma$

d) Seja $V \subset Z$, um aberto. Então V é um boreliano e como g é B -mensurável, segue-se que $g^{-1}(V)$ é um boreliano em Y .

Como $h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ e f é B -mensurável, segue-se que $h^{-1}(V) \in M$.

Lema 3.1

Seja (X, M) um espaço mensurável. Dada $f : X \rightarrow R$, são equivalentes:

I)– Para todo $\alpha \in R$, o conjunto $A_\alpha = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \in M$

II)– Para todo $\alpha \in R$, o conjunto $B_\alpha = \{x \in X; f(x) \leq \alpha\} \in M$

III)– Para todo $\alpha \in R$, o conjunto $C_\alpha = \{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \in M$

IV)– Para todo $\alpha \in R$, o conjunto $D_\alpha = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \in M$



Demonstração

Lembre que M é uma σ -álgebra em X .

$I) \Rightarrow III)$.

Suponhamos I) verdadeira. Então $A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in M$, para cada n .

Afirmção: $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$.

Seja $x \in C_\alpha$. Então $f(x) \geq \alpha \geq \alpha - \frac{1}{n}$, $\forall n = 1, 2, \dots$

Assim $x \in A_{\alpha - \frac{1}{n}}$, $\forall n = 1, 2, \dots$ ou seja $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$.

Logo $C_\alpha \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$.

Por outro lado se $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$, então $x \in A_{\alpha - \frac{1}{n}}$, $n = 1, 2, \dots$

Daí $f(x) > \alpha - \frac{1}{n}$, $\forall n = 1, 2, \dots$, donde $f(x) \geq \alpha$.

Logo $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \subset C_\alpha$.

Conclusão: $C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}}$.

Sendo M uma σ -álgebra e $A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in M$, para cada n , tem-se que

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} \in M$, ou seja $C_\alpha \in M$.

$III) \Rightarrow I)$.

Afirmção: $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}$.

Seja $x \in A_\alpha$. Então $f(x) > \alpha$, $\forall \alpha \in R$. Daí $f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}$ para algum $n \in N$, e então $x \in C_{\alpha + \frac{1}{n}}$. Logo $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}$ e $A_\alpha \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}$.

Por outro lado, se $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}$, então $x \in C_{\alpha + \frac{1}{n}}$, para algum $n \in N$. Daí $f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n} > \alpha$. Logo $x \in A_\alpha$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} \subset A_\alpha$.

Conclusão $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}}$.

Sendo $C_\alpha \in M$, $\forall \alpha \in R$, tem-se que $C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in M$, $\forall n = 1, 2, \dots$

e $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha + \frac{1}{n}} \in M$. Logo $A_\alpha \in M$.

3.2.3 Álgebra da Mensurabilidade

Sejam X um conjunto não-vazio, M uma σ -álgebra em X , $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$.

i) cf é mensurável.

Se $c = 0$, então cf é a função constante, identicamente nula, que é mensurável.

Se $c > 0$, então $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\}$ e, como f é mensurável, $\{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{c}\} \in M$.

Se $c < 0$, então $\{x \in X; cf(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) < \frac{\alpha}{c}\}$.

Como f é mensurável, pelo Lema 3.1-II, $\{x \in X; f(x) < \frac{\alpha}{c}\} \in M$.

Logo cf é mensurável, para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

ii) f^2 é mensurável.

Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X; f^2(x) > \alpha\} = X \in M$.

Se $\alpha \geq 0$, então $\{x \in X; f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$.

Os dois conjuntos à direita do sinal de igual, são mensuráveis.

Logo $\{x \in X; f^2(x) > \alpha\} \in M$.

Portanto f^2 é mensurável.

iii) $f + g$ é separável.

Notemos que se r é um número racional, então o conjunto

$S_r = \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha - r\}$ é mensurável.

Afirmção: $\{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\} \cup_{r \in Q} S_r$.

Se $x \in \cup_{r \in Q} S_r$, então $x \in S_r$, para algum $r \in Q$. Daí $f(x) > r$ e $g(x) > \alpha - r$, donde $f(x) + g(x) > \alpha$ ou seja $(f + g) > \alpha$.

Logo $x \in \{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\} \cup_{r \in Q} S_r \subset \{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\}$.

Por outro lado, se $(f + g)(x) > \alpha$, então $f(x) + g(x) > \alpha$ e $f(x) > \alpha - g(x)$.

$\exists r \in Q$;

$\alpha - g(x) < r < f(x)$ ou seja $f(x) > r$, $\alpha - g(x) < r$, para algum $r \in Q$.

Daí, $f(x) > r$, $g(x) > \alpha - r$, ou seja $x \in S_r$, para algum $r \in Q$, donde $x \in \cup_{r \in Q} S_r$ e $\{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\} \subset \cup_{r \in Q} S_r$.

Conclusão: $\{x \in X; (f + g)(x) > \alpha\} = \cup_{r \in Q} S_r$. Portanto $f + g$ é mensurável.

iv) fg é mensurável.

$$fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 - \frac{1}{2}(f - g)^2$$

v) $|f|$ é mensurável.

Se $\alpha \leq 0$, então $\{x \in X; |f| > \alpha\} = X \in M$

Se $\alpha \geq 0$, então $\{x \in X; |f| > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in X; f(x) < -\alpha\} \in M$.

Portanto $|f|$ é mensurável.

3.2.4 Partes positiva e negativa

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Define-se:

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}, f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$$

f^+ é dita "parte positiva" de f , enquanto que f^- é chamada "parte negativa" de f . Observemos que, apesar da nomenclatura, ambas, f^+ e f^- , são sempre não-negativas.

Tem-se: $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, donde se deduz que

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|), f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$$

Imediatamente nota-se que f é mensurável se e somente se f^+ e f^- o são.

3.2.5 O caso de funções a valores reais estendidos

Definição 3.1

Chama-se de conjunto dos números reais estendidos ao conjunto $[-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.



Definição 3.2

Uma função real estendida, definida em X , ou seja, uma função $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, é dita mensurável se, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X; f(x) > \alpha\}$ está na σ -álgebra definida em X .



Denota-se por $M(X, M)$ a coleção de todas as funções reais estendidas, definidas em X , mensuráveis segundo a σ -álgebra M (M -mensuráveis)

· Se $f \in M(X, M)$, então

$$\{x \in X; f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > n\}$$

e

$$\{x \in X; f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f(x) > -n\}.$$

Lema 3.2

Sejam $A = \{x \in X; f(x) = +\infty\}$, $B = \{x \in X; f(x) = -\infty\}$. Uma função $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ é mensurável se e somente se A e B são mensuráveis e a função real

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \notin A \cup B \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B \end{cases} \text{ é mensurável.}$$



Demonstração

Suponha $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, mensurável. Pelo Teorema 3.10, tem-se que A e B são mensuráveis.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha \geq 0$, então $\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} - A$, é mensurável.

Se $\alpha < 0$, então $\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cup B$ é mensurável.

Logo f_1 é mensurável.



Observação

$$\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} - A, \text{ se } \alpha \geq 0.$$

Se $x \in X$ é tal que $f_1(x) > \alpha$, como $f_1(x) \in \mathbb{R}$, x não deve pertencer a A .

Agora, como $\alpha \geq 0$, x também não pertence a B . Logo $f_1(x) = f(x)$ e $f(x) > \alpha$.

Assim $\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \subset \{x \in X; f(x) > \alpha\} - A$.

Se $x \notin A$, e $\alpha \geq 0$, então $x \notin B$ e daí $f(x) = f_1(x)$.

Logo $\{x \in X; f_1(x) > \alpha\} - A \subset \{x \in X; f(x) > \alpha\}$.

Reciprocamente, se A e B são conjuntos mensuráveis e f_1 é mensurável então, para $\alpha \geq 0$, tem-se

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} \cup A, \text{ que é mensurável, e para } \alpha < 0,$$

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f_1(x) > \alpha\} - B, \text{ que é mensurável.}$$

Logo f é mensurável.

3.2.6 Mensurabilidade de funções estendidas.

Se $f \in M(X, \mathfrak{M})$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf, f^2, |f|$ e f^+ e f^- estão em $M(X, \mathfrak{M})$. Para verificar que $cf \in M(X, \mathfrak{M})$ é preciso adotar a convenção $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Com relação a soma $f + g$, com $f, g \in M(X, \mathfrak{M})$, está não tem sentido nos conjuntos.

$$E_1 = \{x \in X; f(x) = -\infty \text{ e } g(x) = +\infty\}$$

$$E_2 = \{x \in X; f(x) = +\infty \text{ e } g(x) = -\infty\}$$

Para contornar este problema define-se $f + g$ como sendo o sobre $E_1 \cup E_2$. Isto torna $f + g$ mensurável.

Lema 3.3

Sejam, $(f_n)_n$ uma sequência em $M(X, \mathfrak{M})$, $f(x) = \inf f_n(x)$, $F(x) = \sup f_n(x)$, $f^*(x) = \lim f_n(x)$, $F^*(x) = \limsup f_n(x)$. Então $f, f^*, F, F^* \in M(X, \mathfrak{M})$.



Demonstração

i) $f \in M(X, \mathfrak{M})$.

$f(x) = \inf f_n(x)$, $x \in X$. Então $f_n(x) \geq f(x)$, $\forall n = 1, 2, \dots$,

Afirmção: $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$.

De fato: seja $x \in X; f(x) \geq \alpha$. Então $f_n(x) \geq \alpha$, $\forall n$. Assim

$x \in \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha, \forall n = 1, 2, \dots\}$ ou seja $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ e $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$.

Inversamente se $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$, então $f_n(x) \geq \alpha$, $\forall n$.

Daí, $f(x) = \inf_n f_n(x) \geq \alpha$ e $x \in \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$ ou seja

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\} \subset \{x \in X; f(x) \geq \alpha\}$.

Conclusão: $\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) \geq \alpha\}$ e $f = \inf f_n$ é mensurável.

ii) $F \in M(X, \mathfrak{M})$.

Basta ver que $\{x \in X; f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_n(x) > \alpha\}$

. $f^*, F^* \in M(X, \mathfrak{M})$

$$f^*(x) = \sup_{n \geq 1} \{\inf_{m \geq n} f_m(x)\}$$

$$F^*(x) = \inf_{n \geq 1} \{\sup_{m \geq n} f_m(x)\}, \text{ e use i) e ii).}$$

3.14 Se $(f_n)_n$ é uma sequência, em $M(X, \mathfrak{M})$, que converge a f , então $f \in M(X, \mathfrak{M})$.

Veja que se $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $x \in X$, então $f(x) = \lim f_n(x) (= \lim_n \sup f_n(x))$.

3.2.7 Mensurabilidade do produto em $M(X, \mathfrak{M})$

Sejam $f, g \in M(X, \mathfrak{M})$. Para $n \in \mathbb{N}$, defina-se

$$f_n = f(x), \text{ se } |f(x)| \leq n$$

$$= n \quad \text{se } f(x) > n$$

$$= -n \quad \text{se } f(x) < -n.$$

Para $m \in \mathbb{N}$ defina-se g_m de modo semelhante.

f_n e g_m são mensuráveis e $f_n g_m$ é mensurável (Note que f_n e g_m assumem apenas valores reais).

Se $x \in X$ e $|f(x)| \leq n$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x)$.

Se $x \in X$ e $f(x) = +\infty$, então $f(x) > n$, n arbitrário e $f_n(x) = n$. Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty = f(x)$.

Se $x \in X$ e $f(x) = -\infty$, então $f(x) < -n$, n arbitrário e $f_n(x) = -n$. Assim $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty = f(x)$.

Tem-se: $f(x)g_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)g_m(x)$. Como f_n e g_m são mensuráveis segue-se que f é mensurável e então $f g_m$ é mensurável.

Por fim $f(x)g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)g_m(x)$ é mensurável.

3.2.8 Forma equivalente de mensurabilidade

Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Dado $E \subset X$, a função característica, χ_E , de E , é definida por

$$\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R},$$

onde:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

A função característica de E também é conhecida como função indicadora de E e denotada por 1_E . Prova-se que χ_E é mensurável se e somente se $E \in \mathfrak{M}$.

Uma função simples, definida em X , é uma combinação linear finita de funções características de conjuntos de $\mathfrak{M}$.

Funções simples não assumem os valores $\pm\infty$.

Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é simples e a imagem, $I(f)$, de f é o conjunto $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, seja $E_j = f^{-1}(\{r_j\})$. Então $f = \sum_{j=1}^n r_j \chi_{E_j}$ é a representação padrão de f . Neste caso a combinação linear apresenta coeficiente distintos.

Teorema 3.2

Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Se $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável existe uma sequência $\{\varphi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq f$, $(\varphi_n)_n$ converge pontualmente a f , e uniformemente em qualquer conjunto onde f seja limitada.



Demonstração

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$.

Defina

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]), F_n = f^{-1}((2^n, \infty])$$

e

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n} \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

Tem-se:

$$\varphi_n \leq \varphi_{n+1}, \forall n$$

$$0 \leq f - \varphi_n \leq 2^{-n}, \text{ onde } f \leq 2^{-n}.$$

3.2.9 Mais mensurabilidade

Seja $(X, \mathfrak{M})$ e $(X, \mathfrak{P})$ dois espaços mensuráveis. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita mensurável se $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$, para todo $E \in \mathfrak{P}$.

3.3 Espaço de Medida

3.3.1 Conceito de Medida

Seja M uma σ -álgebra de subconjuntos de X . Uma medida, μ , é uma função $\mu : M \rightarrow [0, \infty]$, tal que

i) $\mu(\phi) = 0$

ii) se $(E_n)_n$ é uma sequência disjunta em M , então $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ (aditividade contável).

Uma medida, μ , tal que $\mu(E) < \infty, \forall E \in M$, é dita finita.

Se existe uma sequência $(E_n)_n$ de conjuntos de M , tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < \infty, \forall n$, então μ é dita uma medida σ -finita.

Lema 3.4

Seja μ uma medida definida sobre uma σ -álgebra M . Suponha $E, F \in M$ com $E \subseteq F$. Então $\mu(E) \leq \mu(F)$ e se $\mu(E) < \infty$, tem-se $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.



Demonstração

É claro que $F = E \cup (F \setminus E)$, com $E \cap (F \setminus E) = \phi$. Como μ é contavelmente aditiva, tem-se $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$, donde $\mu(F) \geq \mu(E)$.

Admitindo $\mu(E) < \infty$, de $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$, obtemos $\mu(F) - \mu(E) = \mu(F \setminus E)$.

Lema 3.5

Seja μ uma medida definida sobre uma σ -álgebra M . Se $(E_n)_n$ é uma sequência crescente em M , então $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ (*)



Demonstração

Se $\mu(E_n) = \infty$, para algum n , então como $(E_n)_n$ é crescente, tem-se $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m) = \infty$.

Também, como $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \supseteq E_n$, segue-se que $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \infty$ e a igualdade (*) se verifica.

Suponhamos $\mu(E_n) < \infty, \forall n$.

Seja $A_1 = E_1, A_2 = E_2 \setminus E_1, \dots, A_n = E_n \setminus E_{n-1}, \dots$. Então $(A_n)_n$ é uma sequência disjunta, em M , e, $E_n = \cup_{j=1}^n A_j, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sendo μ uma medida, tem-se

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu(A_n).$$

Como $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1}), n > 1$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(E_m), \text{ donde}$$

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m).$$

Lema 3.6

Se μ é medida definida sobre uma σ -álgebra M e $(F_n)_n$ é uma sequência decrescente, em M , com $\mu(F_1) < \infty$, então $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim \mu(F_n)$.



Demonstração

Seja $E_n = F_1 \setminus F_n$. Então $(E_n)_n$ é uma sequência crescente em M .

Pelo lema 28, $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu(F_1) - \lim_n \mu(F_n)$.

Agora $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = F_1 \setminus \cap_{n=1}^{\infty} F_n$, acarreta, $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(F_1) - \mu(\cap_{n=1}^{\infty} F_n)$.

Daí $\mu(F_1) - \lim_n \mu(F_n) = \mu(F_1) - \mu(\cap_{n=1}^{\infty} F_n)$, donde $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_n \mu(F_n)$.

3.3.2 Espaço de Medida

Um espaço de medida é um terno $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ onde X é um conjunto, M é uma σ -álgebra, em X , e μ é uma medida definida sobre M .

3.3.3 Terminologia

Diz-se que uma proposição é verdadeira μ -quase sempre (μ -q.s. ou μ -a.e.) se existe um subconjunto $N \in M$ com $\mu(N) = 0$, fora do qual a proposição é verdadeira.

Por exemplo, duas funções, f e g , são iguais quase sempre, se existe um conjunto $N \in M$, com $\mu(N) = 0$, tal que $f(x) = g(x), \forall x \notin N$.

Escreve-se $f = g, \mu$ -q.s.

Uma sequencia, (f_n) , de funções definidas, em X , converge μ -quase sempre para f , se existe um conjunto $N \in M$, tal que $\mu(N) = 0$ e $f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \notin N$.

Escreve-se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \mu$ -q.s.

Em geral, subentendida qual medida é usada, diz-se apenas, $f = g, \text{q.s.}; f_n(x) \rightarrow f(x), \text{q.s.}$, etc.

3.3.4 Relação de equivalência

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, uma função dada. Diz-se que uma função $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é equivalente a f , se f é igual a g , quase sempre.

Em notação lógica: $f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ q.s.}$

Prova-se, sem dificuldades que a relação "igual q.s." é uma relação de equivalência entre funções definidas sobre um espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Em geral denotar-se por $[f]$, ao conjunto de todas as funções equivalentes a f , ou seja, a classe de todas as funções g , que são iguais a f , quase sempre.

Exercício 3.1

· Sejam X um conjunto não-vazio e M a σ -álgebra. Seja p um elemento fixado em X e defina

$$\mu : M \rightarrow \mathbb{R}, \mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in E \\ 0, & \text{se } p \notin E \end{cases}$$

μ é uma medida finita, dita medida unitária concentrada em p .

· Seja $X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ e M a σ -álgebra de todos os subconjuntos de N . Para $E \in M$, defina-se $\mu(E) = \text{número de elementos em } E$, se E é finito, e $\mu(E) = +\infty$ se E é um conjunto infinito.

μ é uma medida σ -finita, sobre N , dita medida contagem.

· Sejam $X = \mathbb{R}$ e $M = B$ a σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Existe uma medida, λ , definida em B , que coincide a noção de comprimento de intervalos aberto. Tal medida é chamada medida Borel ou λ é uma medida σ -finita.

3.3.5 Espaço de Probabilidades

A principal característica da teoria das probabilidades é um espaço de medida $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, para o qual $\mu(X) = 1$.

X é considerado como o conjunto de todos os possíveis resultados de um processo (experimento, jogo, etc.) a $\mu(E)$ é a probabilidade de que o resultado permaneça em E , $E \in \mathfrak{M}$. Apesar de sua origem na teoria da medida, a teoria da probabilidade tem "vida própria". Vejamos alguma nomenclatura:

i) Em Análise, usa-se a expressão: espaço de medida, com medida total 1 e a notação $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Em Probabilidade, espaço amostral ou espaço de probabilidade, com notação $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$.

ii) Em Análise, conjuntos mensuráveis. Em Probabilidade, eventos.

Capítulo 4 A Integral de Lebesgue



Hanna Neumann
viveu de 1914 até 1971

Hanna Neumann trabalhou em teoria de grupos. Sua tese examinou produtos gratuitos com amálgama. Mais tarde, ela trabalhou com variedades de grupos e seu livro *Varieties of Groups* (1967) é um clássico.

A Integral de Lebesgue é um conceito fundamental na teoria da medida e na análise matemática. Ela é uma generalização da integral de Riemann, permitindo a integração de uma classe mais ampla de funções. A integral de Lebesgue foi desenvolvida por Henri Lebesgue no início do século XX como parte de sua teoria da medida.

A ideia principal por trás da integral de Lebesgue é considerar a medida dos conjuntos em que uma função toma valores específicos, em vez de focar nas variações da função em intervalos. A integral de Lebesgue é definida para funções mensuráveis em relação a uma medida de Lebesgue em um espaço de medida. A definição da integral de Lebesgue envolve os seguintes passos:

Função Mensurável: A função a ser integrada deve ser mensurável em relação à sigma-álgebra associada à medida de Lebesgue.

Partição do Domínio: O domínio da função é dividido em conjuntos mensuráveis.

Soma Ponderada: Em cada conjunto mensurável, a função é avaliada e multiplicada pela medida desse conjunto.

Límite: Tomando o limite dessas somas ponderadas à medida que a granularidade da partição se aproxima de zero, obtemos a integral de Lebesgue.

A integral de Lebesgue tem várias propriedades importantes, incluindo a capacidade de lidar com funções que não são limitadas ou contínuas em um conjunto mensurável. Além disso, ela preserva propriedades como a convergência quase em todos os lugares, que é uma generalização da convergência pontual.

A notação comum para a integral de Lebesgue de uma função f em relação à medida de Lebesgue é dada por:

$$\int_X f d\mu$$

onde X é o conjunto de integração e μ é a medida de Lebesgue. A integral de Lebesgue é um conceito-chave na análise funcional, teoria da probabilidade, equações diferenciais parciais e outras áreas da matemática.

4.1 A Integral

Notação

$(X, \mathfrak{M}, \mu)$, é um espaço de medida, fixada em todo este capítulo.

$M^+ = M^+(X, \mathfrak{M})$ é a coleção de todas as funções, não-negativas, mensuráveis, definidas em X a valores em $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

$M = M(X, \mathfrak{M})$, denota a coleção de todas as funções mensuráveis, definidas em X , a valores reais estendidas.

4.1.1 Funções Simples

Uma função, a valores reais, é simples se tem apenas um número finito de valores.

Se φ é uma função mensurável simples então φ pode ser escrita como

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j},$$

onde $a_j \in \mathbb{R}$ e χ_{E_j} é a função característica de um conjunto $E_j \in \mathfrak{M}$.

Chama-se representação padrão de uma função simples φ aquela representação caracterizada pelo fato de que os a_j são distintos e os E_j são disjuntos.

Se φ é uma função simples em $M^+(X, \mathfrak{M})$, com representação padrão $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$, define-se a integral, em relação a medida μ , como sendo o número real estendido

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

Adotamos a convenção $0 \cdot (+\infty) = 0$, para que a integral da função nula seja sempre zero, quer o espaço tenha medida finita ou não.

4.1.2 Propriedades

Propriedade Se φ é uma função simples em $M^+(X, \mathfrak{M})$ e $c \geq 0$ então

$$\int c\varphi d\mu = c \int \varphi d\mu.$$

Demonstração

Se $c = 0$, então

$$c\varphi \equiv 0 \text{ e } \int c\varphi d\mu = 0 = 0 \int \varphi d\mu.$$

Se $c > 0$ e a representação padrão de φ é dada por

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j},$$

então a representação padrão de $c\varphi$ é

$$c\varphi = \sum_{j=1}^n ca_j \chi_{E_j}.$$

Assim,

$$\int c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n ca_j \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) = c \int \varphi d\mu.$$

Propriedade Se φ e ψ são funções simples em $M^+(X, \mathfrak{M})$, então

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

Demonstração

Suponhamos

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}, \psi = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{F_k},$$

com representações padrão.

Então

$$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}.$$

Como os valores $a_j + b_k$ podem não ser distintos, esta não é a representação padrão de $\varphi + \psi$.

Sejam, $C_h, h = 1, 2, \dots, p$, os números distintos na coleção

$$\{a_j + b_k, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m\},$$

e G_h a união daqueles conjuntos $E_j \cap F_k$, nos quais $a_j + b_k = c_h$.

Temos

$$\mu(G_h) = \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k),$$

onde a soma é tomada sobre todo j, k , para os quais $a_j + b_k = c_h$.

Agora a representação padrão para $\varphi + \psi$ é dada por

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^p c_h \chi(G_h)$$

e

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) d\mu &= \sum_{h=1}^p c_h \mu(G_h) = \sum_{h=1}^p \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k) = \\ &= \sum_{h=1}^p \sum_{(j)} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) = \\ &= \sum_{h=1}^p \sum_{(j)} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n b_k \sum_{k=1}^m \mu(E_j \cap F_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m a_j \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m b_k \mu(E_j \cap F_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j) + \sum_{k=1}^m b_k \mu(F_k) = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu. \end{aligned}$$

Propriedade Se φ é uma função simples em $M^+(X, \mathfrak{M})$ e $\lambda : M \rightarrow R$ $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu$, então λ é uma medida sobre M .

Demonstração

Suponhamos $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$, representação padrão de φ . Então

$(E_j)_{j=1, \dots, n}$ é uma coleção finita de conjuntos mensuráveis, disjuntos, e $X = \cup_{j=1}^n E_j$.

Temos, $\lambda(E) = \int \varphi \chi_E d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \int \chi_{E \cap E_j} d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E \cap E_j)$

Como combinação linear não-negativa de medidas é novamente uma medida, segue-se que λ é uma medida.

4.1.3 A Integral e Algumas propriedades elementares

Propriedade Seja $f \in M^+(X, M)$. Define-se a integral de f com relação a medida μ se, por

$$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu$$

Em primeiro lugar, notemos que f é qualquer função mensurável, não negativa.

Em seguida, observemos que o supremo é tomado na classe de todas as funções simples, de $M^+(X, M)$, que satisfazem a condição

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \forall x \in X.$$

Sejam $f \in M^+(X, \mathfrak{M})$ e $E \in M$. Então $f \chi_E \in M^+(X, \mathfrak{M})$ e a integral de f , sobre E , com relação a μ , é definida por

$$\int_E f d\mu = \int f \chi_E d\mu.$$

Propriedade Sejam $f, g \in M^+(X, \mathfrak{M})$ e suponhamos $f \leq g$. Então

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Demonstração

Para qualquer função simples, φ , em $M^+(X, \mathfrak{M})$, com $0 \leq \varphi \leq f$, tem-se, evidentemente, $0 \leq \varphi \leq g$.

Propriedade Sejam $f \in M^+(X, \mathfrak{M})$ e E, F conjuntos mensuráveis. Se $E \subseteq F$, então

$$\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu.$$

Demonstração

Basta notar que

$$f \chi_E \leq f \chi_F$$

e aplicar o conceito de medida.

Teorema 4.1 (Teorema da Convergência Monótona.)

Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \mathfrak{M})$, convergindo para f . Então $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.



Demonstração Como f é o limite de uma sequência de funções mensuráveis, f é mensurável.

De, $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, segue-se que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu, \forall n.$$

Daí,

$$\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \quad (1)$$

Sejam $0 < \alpha < 1$ e φ uma função mensurável simples tal que

$$0 \leq \varphi \leq f.$$

Seja

$$\{x \in X; f_n(x) \geq \alpha \varphi(x)\}$$

. Então:

$$i) A_n$$

é mensurável.

$$ii) A_n \subseteq A_{n+1}$$

$$iii) X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Tem-se

$$\int_{A_n} \alpha \varphi(x) d\mu \leq \int_{A_n} f_n(x) d\mu \leq \int f_n d\mu$$

Sendo $(A_n)_n$ monótona crescente, cuja união é X , obtemos

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$

Daí

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

$$\sup_{0 < \alpha < 1} \alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

$$\sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

$$\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu \quad (2)$$

De (1) e (2) segue-se que

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Corolário 4.1

Se $f \in M^+$ e $c \geq 0$, então

$$cf \in M^+ \text{ e } \int cf d\mu = c \int f d\mu.$$

**Demonstração**

Se $c = 0$, ok!

Se $c > 0$, seja $(\varphi_n)_n$ uma sequência monótona crescente de funções simples em M^+ , convergindo para f , em X .

A sequência $(c\varphi_n)_n$ está em M^+ , é monótona crescente e converge para cf , em X .

Pelo T.C.M. tem-se

$$\int cf d\mu = \lim_n \int c\varphi_n d\mu = c \lim_n \int \varphi_n d\mu = c \int f d\mu.$$

Corolário 4.2

Se $f, g \in M^+$, então $f + g \in M^+$ e

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

**Demonstração**

Sejam $(\varphi_n)_n$ e $(\psi_n)_n$ sequências monótonas crescentes de funções simples, convergindo, em X , para f e g , respectivamente.

Então $(\varphi_n + \psi_n)_n$ é uma sequência monótona crescente, convergindo a $f + g$.

Daí,

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \lim_n \int (\varphi_n + \psi_n) d\mu \\ &= \lim_n \int \varphi_n d\mu + \lim_n \int \psi_n d\mu \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

Lema 4.1

Seja (f_n) uma sequência em $M^+(X, \mathfrak{M})$. Então,

$$\int \lim_n \inf f_n d\mu \leq \lim_n \inf \int f_n d\mu.$$

**Demonstração**

Seja $g_m = \inf \{f_m, f_{m+1}, \dots\}$. Então $g_m \leq f_n$, quando $m \leq n$, e assim

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu, m \leq n$$

donde,

$$\int g_m d\mu \leq \lim_n \inf \int f_n d\mu.$$

Note que $(g_m)_m$ é crescente e $g_m \longrightarrow \lim_n \inf f_n$.

Pelo T.C.M., segue-se que

$$\int \liminf \int f_n d\mu = \lim_m \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

Corolário 4.3

Se $f \in M^+$ e se $\lambda : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \lambda(E) = \int_E f d\mu$, então λ é uma medida.

**Demonstração**

i) $\lambda(E) \geq 0, \forall E \in M$.

Isto segue do fato de que $f \geq 0$, pois $\int_E f d\mu \geq \int_E 0 d\mu = 0$.

ii) Se $E = \emptyset$, então $f \chi_E \equiv 0$. Daí $\lambda(\emptyset) = \int_{\emptyset} f \chi_E d\mu = 0$.

iii) Seja $(E_n)_n$ uma sequência disjunta de conjuntos em M cuja união seja $E \in M$.

Defina $f_n = \sum_{k=1}^n f \chi_{E_k}$.

Tem-se,

$$\int f_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int f \chi_{E_k} d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \sum_{k=1}^n \lambda(E_k).$$

A sequência $(f_n)_n$ é crescente em M^+ , convergindo para $f \chi_E$ T.C.M. implica

$$\lambda(E) = \int f \chi_E d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k).$$

Corolário 4.4

Seja $f \in M^+$. Então $f(x) = 0$ q.s. $(X) \Leftrightarrow \int f d\mu = 0$.

**Demonstração**

$\Leftarrow$) Suponhamos que $\int f d\mu = 0$ e seja $E_n = \{x \in X; f(x) > \frac{1}{n}\}$.

Temos, $f \geq \frac{1}{n} \chi_{E_n}$, e então $0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(E_n) \geq 0$.

Donde $\mu(E_n) = 0$.

Como $\{x \in X; f > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, segue-se que $\mu\{x \in X; f > 0\} = 0$.

Logo $f = 0$ q.s. (X) .

$\Rightarrow$) $f = 0$ q.s. (X) .

Seja $E = \{x \in X; f(x) > 0\}$. Então $\mu(E) = 0$.

Seja $f_n = n \chi_E$

Tem-se $f \leq \liminf f_n$ e pelo T.C.M.,

$$0 \leq \int f d\mu \leq \int \liminf f_n \leq \liminf \int f d\mu = \liminf \int n \chi_E d\mu \leq \liminf n \mu(E) = 0.$$

Logo $\int f d\mu = 0$.

Corolário 4.5

Seja (f_n) uma sequência monótona crescente de funções em $M^+(X, \mathfrak{M})$ convergindo quase sempre, em X , para $f \in M^+$.

Então $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

**Demonstração**

Seja $N \in M$, tal que $\mu(N) = 0$ e $f_n \rightarrow f$, em $M = X \setminus N$.

A sequência $(f_n \chi_M)_n$ converge para $f \chi_M$, em X pelo T.C.M. temos

$$\int f \chi_M d\mu = \lim \int f_n \chi_M d\mu$$

Como $\mu(N) = 0$, as funções $f\chi_N$ e $f_n\chi_N$ anulam-se quase sempre.

Sendo

$$f = f\chi_M + f\chi_N, f_n = f_n\chi_M + f_n\chi_N,$$

tem-se

$$\int f d\mu = \int f\chi_M d\mu = \lim \int f_n\chi_M d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Corolário 4.6

Seja $(g_n)_n$ uma sequência em M^+ . Então,

$$\int (\sum_{n=1}^{\infty} g_n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n d\mu.$$



Demonstração

Seja $f_n = g_1 + \dots + g_n$. $(f_n)_n$ é uma sequência monótona crescente, convergindo para $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$.

Pelo T.C.M,

$$\begin{aligned} \int (\sum_{n=1}^{\infty} g_n) d\mu &= \lim_n \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\sum_{k=1}^n g_k) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int g_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k d\mu. \end{aligned}$$

Lista de Exercícios

1. Prove que a soma, o produto por escalar, e o produto de funções é novamente uma função simples.
2. Sejam $X = N$, M a σ -álgebra de todos os subconjuntos de N e μ a medida contante sobre M . Se f é uma função não negativa, definida em N , Prove que $f \in M^+(X, \mathfrak{M})$ e que $\int f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.
3. Sejam $X = \mathbb{R}$, $M = B$ e μ a medida de Lebesgue. Use a sequência $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[n, \infty)}$ para mostrar que o T.C.M não vale para sequência decrescente.
4. Seja $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0, n]}$. Mostre que $f_n \rightarrow f = 0$ uniformemente, mas $\int f d\mu \neq \lim \int f_n d\mu$.
5. Seja $h \in M^+(X, \mathfrak{M})$ e suponha que $\int h d\mu < \infty$. Se $(f_n)_n$ é uma sequência em $M(X, \mathfrak{M})$ e se $-h \leq f_n$, então $\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$.
6. Seja $f \in M^+(X, \mathfrak{M})$, com $\int f d\mu < \infty$. Prove que o conjunto $\{x \in X; f(x) = +\infty\}$ tem medida zero. Sugestão: Seja $E_n = \{x \in X; f(x) \geq n\}$. Considere $n\chi_{E_n} \leq f$.

4.2 Funções Integráveis.

Designar-se por $L = L(X, \mathfrak{M}, \mu)$ a coleção de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, que são mensuráveis, tais que as partes positiva e negativa de f , isto é, f^+ e f^- tem integral finita em relação a μ .

Define-se: $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.

No caso de E ser um conjunto mensurável, isto é, $E \in M$,

define-se

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$



Observação

Se $f = f_1 - f_2$, onde f_1 e f_2 são funções mensuráveis não negativas, com integrais finitas, então $\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$.

Notemos que $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2$ implica $f^+ + f_2 = f^- + f_1$ e daí

$$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f^- d\mu + \int f_1 d\mu$$

donde,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu.$$

4.2.1 Carga

Seja $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Uma carga é uma função $\lambda : M \rightarrow R$, satisfazendo:

$$\lambda(\phi) = 0 \text{ e } \lambda(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n), (E_n)_n \text{ sequência disjunta em } M.$$

Seja $f \in L$. A função $\lambda : M \rightarrow R$, dada por $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ é uma carga.

De fato: As funções $\lambda^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ e $\lambda^-(E) = \int_E f^- d\mu$, $E \in M$, são medidas sobre M .

Como $f \in L$, tem-se que $\int_E f^+ d\mu < \infty$ e $\int_E f^- d\mu < \infty$.

Assim $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ é uma carga.

Teorema 4.2

Uma função mensurável f pertence a L se e somente se $|f| \in L$. Neste caso, $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.



Demonstração

De fato:

$\Rightarrow$) Suponha $f \in L$. Então f^+ e f^- pertencem a M^+ e tem integrais finitas.

Também $|f| = |f|^+ - |f|^- = f^+ + f^-$ implica $|f| \in L$.

Por outro lado, se $|f| \in L$, então $|f| = |f|^+ + |f|^-$, com $|f|^+ \in M^+$, $|f|^- \in M^+$, e $\int |f|^+ d\mu < \infty$, $\int |f|^- d\mu < \infty$.

Mas $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$. Logo $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu < \infty$, donde $\int f d\mu < \infty$ e $f \in L$.

Por fim,

$$|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu.$$

Corolário 4.7

Suponha f mensurável, g integrável e $|f| \leq |g|$. Então f é integrável e $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.



Demonstração

Sendo f mensurável, $|f|$ também é mensurável e, como g é integrável, g é mensurável e $|g|$ é mensurável.

Assim $|f|, |g| \in M^+(X, \mathfrak{M})$ com $|f| \leq |g|$. Então $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.

Donde $|f|$ é integrável, $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$, e pelo Teorema 4.2 é integrável.



Observação

Quando se trata de integral de Riemann o resultado dado pelo Teorema 4.2 não é verdadeiro.

Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}$

4.2.2 Linearidade da Integral de Lebesgue

i) Se $\alpha \in R$ e $f \in L$, então $\alpha f \in L$

ii) Se $f, g \in L$, então $f + g \in L$.

Demonstração Dem: i) Caso $\alpha = 0$, ok!

Caso $\alpha > 0$.

Neste $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ e $(\alpha f)^- = \alpha f^-$.

Daí,

$$\int (\alpha f) d\mu = \int \alpha f^+ d\mu - \int \alpha f^- d\mu = \alpha \left\{ \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right\} = \alpha \int f d\mu.$$

Caso $\alpha < 0$.

Neste caso, $(-\alpha f)^+ = -\alpha f^+$, $(-\alpha f)^- = -\alpha f^-$.

é bastante ver que $\int (-f) d\mu = -\int f d\mu$ e para isto veja que $(-f)^+ = f^-$ e $(-f)^- = f^+$.

ii) $f, g \in L \Leftrightarrow |f|, |g| \in L$.

Como $|f + g| \leq |f| + |g|$, tem-se que $|f + g| \in M^+(X, \mathfrak{M})$.

Isto, mais o fato $|f + g| \leq |f| + |g|$, novamente, acarreta

$$\int |f + g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu.$$

Então $|f + g| \in L$, donde $f + g \in L$.

Além disso,

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

acarreta

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &= \int (f^+ + g^+) d\mu - \int (f^- + g^-) d\mu = \\ &= \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \int f^- d\mu - \int g^- d\mu = \\ &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

Teorema 4.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções integráveis definidas em X . Suponha que:

i) $(f_n)_n$ converge q.s. para uma função real, mensurável, f .

ii) existe uma função integrável g , tal que $|f_n| \leq g, \forall n$.

Então f é integrável e $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$.



Demonstração

1^o Passo:

Redefinir as funções f_n e f para que a convergência ocorra em X , isto é $f_n(x) \rightarrow f(x)$, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$.

Então, como $|f| \leq g$, segue-se que f é integrável.

2^o Passo:

De $|f_n| \leq g, \forall n$, obtemos $-g \leq f_n \leq g$ e $g + f_n \geq 0, \forall n$.

Aplicando o Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\mu &\leq \liminf_n \int (g + f_n) d\mu = \liminf_n \left\{ \int g d\mu + \int f_n d\mu \right\} \\ &\leq \int g d\mu + \liminf_n \int f_n d\mu \end{aligned}$$

$$\therefore \int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu \quad (I)$$

Por outro lado, de $g - f_n \geq 0$, novamente pelo Lema de Fatou, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int (g - f) d\mu &\leq \liminf \int (g - f_n) d\mu = \int g d\mu + \liminf \left[\int (-f_n) d\mu \right] \\
&\leq \int g d\mu + \liminf \left[- \int f d\mu \right] \\
&\leq \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu
\end{aligned}$$

$\therefore$

$$- \int f d\mu \leq - \limsup \int f_n d\mu$$

$$\int f d\mu \geq \limsup_n \int f_n d\mu \quad (II)$$

De (I) e (II), temos

$$\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \limsup_n \int f_n d\mu = \liminf_n \int f_n d\mu \\
&= \lim_n \int f_n d\mu.
\end{aligned}$$

4.3 Algumas Aplicações de T.C.D.L. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)

Seja $f : X \times [a, b] \rightarrow R$ uma função tal que, para cada $t \in [a, b]$, $f_t : X \rightarrow R$
 $x \mapsto f_t(x) = f(x, t)$ é mensurável.

Suponha que:

- $f(x, t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$, para algum $t_0 \in [a, b]$, para cada $x \in X$.
- existe $g : X \rightarrow R$, integrável, tal que

$$|f(x, t)| \leq g(x), \forall x \in X, \forall t \in [a, b].$$

Então,

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x).$$

Dem: Seja $(t_n)_n$ uma sequência em $[a, b]$, tal que $t_n \rightarrow t_0$.

Seja

$$f_n(x) = f(x, t_n), \forall x.$$

Tem-se:

a) $(f_n)_n$ é uma sequência de funções integráveis, pois

$$|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x), \forall x \in X.$$

b)

$$f_n(x) \rightarrow f(x, t_0), \forall x \in X.$$

T.C.D.L (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int f(x, t_0) d\mu(x) &= \lim_n \int f_n(x) d\mu(x) \\ &= \lim_n \int f(x, t_n) d\mu(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \int f(x, t) d\mu(x). \end{aligned}$$

Suponha que

- $f : X \times [a, b] \rightarrow R$ é tal que
- $\cdot x \in X \mapsto f(x, t) \in R$, é mensurável, para cada $t \in [a, b]$.
- $\cdot t \in [a, b] \mapsto f(x, t) \in R$, é contínua, para cada $x \in X$.
- $\cdot$ existe g , integrável em X , tal que

$$|f(x, t)| \leq g(x), \forall x \in X.$$

Então $F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$ é contínua em $[a, b]$.

Demonstração

Mostremos que F é contínua em $t_0 \in [a, b]$.

Sendo $t \in [a, b] \mapsto f(x, t) \in R$, contínua, se $(t_n)_n$ é uma sequência em $[a, b]$, tal que $t_n \rightarrow t_0$, então $f(x, t_n) \rightarrow f(x, t_0)$.

Assim

$$f(x, t_n) \rightarrow f(x, t_0), n \rightarrow \infty,$$

e

$$|f(x, t_n)| \leq g(x), \forall x \in X$$

TCDL $\Rightarrow$

$$\int f(x, t_0) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x, t_n) d\mu(x),$$

ou seja

$$F(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n).$$

Suponha que

- $f : X \times [a, b] \rightarrow R$ é tal que
- $\cdot x \in X \mapsto f(x, t) \in R$ é mensurável, para cada $t \in [a, b]$
- $\cdot x \in X \mapsto f(x, t_0) \in R$ é integrável em X
- $\cdot \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ existe em $X \times [a, b]$

· existe g , integrável em X , tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Então $F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Demonstração

Para qualquer $t \in [a, b]$, se $(t_n)_n$ é uma sequência em $[a, b]$, tal que $t_n \rightarrow t$, $t_n \neq t$, então

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}, \quad x \in X.$$

Note que a função $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$, é mensurável, para cada $t \in [a, b]$, ou seja $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ é mensurável para cada $t \in [a, b]$.

Também do T.V.M., segue-se que

$$f(x, t) - f(x, t_0) = (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_1),$$

s_1 entre t_0 e t .

Daí,

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &\leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_1) \right| \\ &\leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| g(x) \end{aligned}$$

Isto mostra que $f(x, t)$ é integrável, para cada $t \in [a, b]$.

Temos então,

$$\begin{aligned} \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} &\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \\ \left| \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} \right| &\leq g(x), \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

T.C.D.L(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x) &= \lim_n \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t} d\mu(x) \\ &= \frac{d}{dt} \int f(x, t) d\mu(x) \end{aligned}$$

Observe que

$$F(t) = \int f(x, t) d\mu(x),$$

estudada em 6.8.2 é contínua em $[a, b]$. Então podemos calcular sua integral de Riemann, isto é $\int_b^a F(t) dt$.

Temos;

$$\int_b^a F(t) dt = \int_b^a \left[\int f(x, t) d\mu(x) \right] dt$$

Consideremos a função

$$h : X \times [a, b] \rightarrow R, h(x, t) = \int_a^t f(x, s) ds.$$

Sendo f contínua na segunda variável (de acordo com 6.8.2), tem-se

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = f(x, t).$$

Como

$$\int_a^t f(x, s) ds$$

existe, para cada $t \in [a, b]$, tem-se que

$$\int_a^t f(x, s) ds$$

é o limite de uma sequencia de somas de Riemann. Logo $x \mapsto h(x, t)$ é mensurável para cada t .

Também,

$$|f(x, t)| \leq g(x) \Rightarrow |h(x, t)| \leq g(x)(b - a)$$

Logo $h(x, t)$ é integrável, para cada $t \in [a, b]$.

Defina

$$H(t) = \int h(x, t) d\mu(x)$$

Aplica 6.8.3 para obter

$$\begin{aligned} \int_b^a F(t) dt &= H(b) - H(a) = \int [h(x, b) - h(x, a)] d\mu(x) \\ &= \int \left[\int_a^b f(x, t) dt \right] d\mu(x). \end{aligned}$$

Capítulo 5 Espaço de Sobolev



Sergei Lvovich Sobolev
viveu de 1908 até 1989

Sergei Sobolev foi um matemático russo que trabalhou com análise matemática e equações diferenciais parciais.

O pai de Sergei Lvovich Sobolev, Lev Aleksandrovich Sobolev, foi um importante advogado e advogado. Sua mãe, Nataliya Georgievna, desempenhou um papel importante na educação de Sobolev, principalmente após a morte do pai de Sobolev, quando Sobolev tinha 14 anos. Ele estudou na Escola Técnica dos Trabalhadores de Kharkov (Kharkov/Kharkiv), preparando-se para ingressar no ensino médio, o que fez em 1922, na época da morte de seu pai.

A escola secundária em que ele ingressou era na época chamada de 190ª Escola de Leningrado, embora anteriormente tivesse sido chamada de Escola Secundária Lentovskii. Em [5] (ver também [4]) é explicado que esta escola: -Depois de terminar o ensino médio em 1925, Sobolev ingressou na Faculdade de Física e Matemática da Universidade Estadual de Leningrado, onde seus talentos foram rapidamente descobertos por Smirnov, que havia retornado a Leningrado três anos antes. Sobolev interessou-se por equações diferenciais, tema que dominaria suas pesquisas ao longo de sua vida, e mesmo nesta fase de sua carreira produziu novos resultados que publicou.

5.1 Espaços L^p

Os espaços L^p são espaços de funções associados a uma medida de Lebesgue μ , onde p é um número real positivo. Esses espaços são fundamentais na teoria da integração e na análise funcional. A definição dos espaços L^p envolve a noção de integração de Lebesgue e a mensurabilidade de funções em relação à medida de Lebesgue. Aqui está a definição geral dos espaços L . Funções Mensuráveis:

Considere um espaço de medida (X, Σ, μ) , onde X é um conjunto, Σ é uma sigma-álgebra de conjuntos mensuráveis, e μ é a medida de Lebesgue.

Funções L^p para $p \geq 1$, uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita ser uma função de L^p se a integral de Lebesgue da função elevada à potência p é finita

$$\int_X |f|^p d\mu < +\infty$$

Isso significa que a função é "integrável" em relação à medida de Lebesgue elevada à potência p .

Os espaços L^p são importantes em análise funcional e em várias disciplinas, incluindo teoria da probabilidade, equações diferenciais parciais, e processamento de sinais, entre outras. Diferentes valores de

p levam a diferentes propriedades e comportamentos desses espaços. O caso especial L^2 é especialmente significativo e frequentemente usado em contextos como o espaço de Hilbert.

5.1.1 Espaço L^p - Notação

Consideramos um espaço, $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, de medida, e introduzimos os espaços $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$, onde p é tal que $1 \leq p \leq \infty$.

Para facilitar a escrita, a notação $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ é também colocada na forma $L^p(X)$, ou L^p , subentendendo-se o espaço de medida em questão.

5.1.2 Normas e Seminormas

Seja V um espaço vetorial real. Uma norma sobre V é uma função $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça as propriedades:

i) $\|v\| \geq 0, \forall v \in V$.

ii) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

iii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$.

iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in V$.

Uma função real, definida em V , satisfazendo apenas i), ii), iv) é dita uma seminorma (pseudo-norma).

Um espaço vetorial normado é um par $(V, \|\cdot\|)$, onde V é um espaço vetorial (linear) e $\|\cdot\|$ é a norma sobre V .

5.1.3 Exemplos

Exemplo 5.1

Seja $V = \mathbb{R}$, o espaço vetorial dos números reais. A função $\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \|x\| =: |x|$ (valor absoluto de x) é uma norma sobre $\mathbb{R}$. (Verifique).

Portanto o conjunto dos números reais é um espaço vetorial normado.

Exemplo 5.2

Seja $V = \mathbb{R}^n = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n); u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$. A função $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|u\|_1 =: |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$, é uma norma sobre $\mathbb{R}^n$.

Provamos que $\|u\|_1 = 0 \Rightarrow u = 0$. O restante fica como exercício simples.

$$\|u\|_1 = 0 \Rightarrow |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| = 0.$$

Temos, $0 \leq |u_j| \leq \sum_{i=1}^n |u_i| = 0$, para $j = 1, \dots, n$.

Logo $|u_j| = 0, j = 1, \dots, n$, ou seja $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ e $u = (0, 0, \dots, 0)$.

Um espaço vetorial pode ter várias normas

Exemplo 5.3

Seja $V = \mathbb{R}^n$.

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|u\|_p = \{|u_1|^p + \dots + |u_n|^p\}^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

e

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \|u\|_\infty = \sup\{|u_1|, \dots, |u_n|\}$$
 são normas sobre $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.4

Seja $V = \ell_1 = \{u = (u_n)_n; \sum_{i=1}^n |u_n| < \infty\}$
 $\|\cdot\|_1 : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}, \|u\|_1 =: \sum_{i=1}^n |u_n|$, é uma norma sobre ℓ_1 .

Exemplo 5.5

Seja $V = \ell_p = \{u = (u_n)_n; \sum_{i=1}^n |u_n|^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty$.
 $\|\cdot\|_p : \ell_p \rightarrow \mathbb{R}, \|u\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^n |u_n|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$, é uma norma sobre ℓ_p .

Claro que os ℓ'_p ($1 \leq p < \infty$) são espaços vetoriais (Prove!).

Exemplo 5.6

Seja $V = B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ é limitada}\}$

A função $\|\cdot\| : B(X) \rightarrow \mathbb{R}, \|f\| =: \sup_{x \in X} |f(x)|$ é uma norma sobre $B(X)$.

i) $\|f\| \geq 0, \forall f \in B(X)$.

Como $|f(x)| \geq 0, \forall x \in X$, tem-se $\sup_{x \in X} |f(x)| \geq 0$, ou seja $\|f\| \geq 0$.

ii) Se $f = 0$, claro que $\|f\| = 0$.

Agora se $\|f\| = 0$, então $\sup_{x \in X} |f(x)| = 0$.

Daí, $0 \leq |f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| = 0, \forall x \in X$.

Logo $|f(x)| = 0, \forall x \in X$. Donde se conclui-se que $f \equiv 0$.

iii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f \in B(X)$.

$\|\alpha f\| = \sup_{x \in X} |\alpha f(x)| = \sup_{x \in X} |\alpha| |f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\alpha| \|f\|$

iv) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in B(X)$.

$\|f + g\| = \sup_{x \in X} |(f + g)(x)| = \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} \{|f(x)| + |g(x)|\}$
 $\leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$.

Exemplo 5.7

Seja X um espaço métrico compacto. Por $C(X)$ denota-se o espaço $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$.

A função $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$ é uma norma sobre $C(X)$, e $C(X)$ pode ser visto como um subespaço normado de $B(X)$.

Exemplo 5.8

Seja $V = \mathbb{R}^n$ e defina $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $f(u) = |u_1| + \dots + |u_n|$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ f é uma seminorma sobre $\mathbb{R}^n$.

Lema 5.1

- $L(X, \mathfrak{M}, \mu) = L(X)$ é um espaço vetorial.
- $N_\mu : L(X) \rightarrow \mathbb{R}, N_\mu(f) = \int |f| d\mu$, é uma seminorma sobre $L(X)$.
- $N_\mu(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0, q.s(X)$.



Demonstração

Organize os resultados estudados anteriormente.

Definição 5.1

Sejam f e g funções de $L(X, \mathfrak{M}, \mu) = L$. Diz-se que f e g são μ -equivalentes se $f = g$ μ -quase sempre. O conjunto de todas as funções $g \in L$ que são μ -equivalentes a $f \in L$, é denotado por $[f]$ e dito classe de equivalência de f .

$$[f] = \{g \in L; g = f \text{ q.s. } (\mu)\}.$$



Denota-se por $L_1 = L_1(X, \mathfrak{M}, \mu)$ o conjunto de todas as classes de μ -equivalência em L , isto é $L_1 = \{[f]; f \in L\}$.

Em L_1 define-se:

$\mapsto (L_1, \|\cdot\|_1)$ é um espaço vetorial normado.

A operação de soma em L_1 é definida por:

$$[f] + [g] = [f + g]$$

A operação de produto por escalar em L_1 é dada por

$$\alpha [f] = [\alpha f].$$

Com isto L_1 é um espaço vetorial. A demonstração de que $\|\cdot\|_1$ é uma norma sobre L_1 não oferece resistência e recomendamos ao leitor.



Observação

Deve ficar bastante claro que os elementos do espaço vetorial L_1 são classes de equivalência de funções de L .

Na prática quando trabalhamos com $[f]$ o que fazemos é escolher um representante desta classe e demonstramos nossos requerimentos para este elemento. Tudo o que for válido para o representante da classe, vale para toda classe.

Aceitando este fato, a frase "o elemento $f \in L_1$ ", significa que estamos trabalhando com f , em nome de toda a classe de equivalência de f .

Definição 5.2

Seja $1 \leq p < \infty$. Por $L(X, \mathfrak{M}, \mu) = L^p(X) = L^p$, entende-se o conjunto de todas as (classes de equivalências de) funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, que são M -mensuráveis, tais que $|f|^p$ tem integral finita, em relação a medida μ .

$$L^p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int |f|^p d\mu < \infty\}$$

$L^p(X)$ é um espaço vetorial.



5.2 Desigualdade de Hölder

Sejam, $f \in L^p, g \in L^q, p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

então: $fg \in L^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Demonstração Dem:

1º Passo:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, a \geq 0, b \geq 0.$$

Esta desigualdade pode ser provada com o auxílio da função

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t, t \geq 0.$$

Mostra-se que φ tem um mínimo em $t = 1$. Em seguida toma-se $t = ab^{-\frac{q}{p}}$, e usa-se $\varphi(t) \geq \varphi(1)$.

2º Passo:

Suponhamos

$$\|f\|_p \neq 0, \|g\|_q \neq 0.$$

Sejam $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$. Então

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Integrando, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p} \frac{1}{\|g\|_q} \int |f(x)| |g(x)| d\mu &\leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int |g(x)|^q d\mu \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Daí

$$\int |f(x)| |g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

Donde

$$\int |f(x) g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Portanto,

$$|fg|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$



Observação

Números reais estendidos, p, q , tais que $p \geq 1, q \geq 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, são ditos conjugados. O conjugado de $p = 2$ é $q = 2$.

5.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Se $f, g \in L^2$, então $fg \in L^1$ e $|\int fg d\mu| \leq \int |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

5.4 Desigualdade de Minkowski.

Se $f, g \in L^p, p \geq 1$, então $f + g \in L^p$ e $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Demonstração

O resultado já foi provado para $p = 1$. Caso $p > 1$:

A desigualdade

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq \{2 \sup[|f(x)|, |g(x)|]\}^p \\ &\leq 2^p [|f(x)|^p + |g(x)|^p] \end{aligned}$$

mostre que $f + g \in L^p$, se $f, g \in L^p$.

Agora,

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}$$

Note que, como $f + g \in L^p$, então $|f + g|^p \in L^1$.

Também $|f + g|^{p-1} \in L^q$.

De fato: $\int \left\{ |f + g|^{p-1} \right\}^q d\mu = \int |f + g|^{(p-1)q} d\mu$.

De $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, obtemos $p - 1 = \frac{p}{q}$ ou $(p - 1)q = p$.

Assim $\int \left\{ |f + g|^{p-1} \right\}^q d\mu = \int |f + g|^p d\mu < \infty$, provando que $|f + g|^{p-1} \in L^q$.

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int |f| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q$$

Mas

$$\begin{aligned} \| |f + g|^{p-1} \|_q &= \left\{ \int |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int |f + g|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\{ \int |f + g|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q}} = \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Daí,

$$\int |f| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}. \quad (\alpha)$$

De modo análogo,

$$\int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Segue-se que,

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p d\mu &\leq \int |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

ou seja

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Donde

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

5.5 $L^p = L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, é um espaço vetorial normado

Definição 5.3

Uma sequência $(f_n)_n$ em L^p , é dita uma sequência de Cauchy, em L^p , se dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon)$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_p < \epsilon, \forall n, m \geq M$$

Uma sequência $(f_n)_n$ em L^p , converge para f , em L^p , se dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$, tal que

$$\|f_n - f\|_p < \epsilon, \forall n \geq N.$$

Nesse caso diz-se que $(f_n)_n$ converge a f , na média de ordem p .

Um espaço linear normado é dito completo se toda sequência de Cauchy converge para algum elemento do espaço.

Um espaço linear normado completo é dito um espaço de Banach.



Lema 5.2

Seja $(f_n)_n$ uma sequência que converge para f , em L^p . Então $(f_n)_n$ é uma sequência de Cauchy, em L^p .



Demonstração

Dado $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon)$, tal que

$$\|f_n - f\|_p < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq N(\epsilon).$$

Assim, $\|f_n - f\|_p < \frac{\epsilon}{2}, \forall m \geq N(\epsilon)$.

Daí, para $n, m \geq N(\epsilon)$, tem-se

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f - f_m\|_p < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Teorema 5.1 (Riesz-Fisher)

(Completicidade de L^p). Para $1 \leq p < \infty$, L^p é um espaço de Banach, pela norma $\|f\|_p = \left\{ \int |f(x)|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}$.



Demonstração

Dem: Mostraremos que L^p , $1 \leq p < \infty$, é completo.

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy, em L^p . Então, dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) > 0$, tal que

$$(\#) \quad \|f_n - f_m\|_p^p = \int |f_n(x) - f_m(x)|^p d\mu < \epsilon^p, \forall n, m \geq M.$$

Tomando $\epsilon = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$, encontramos uma subsequência $(g_k)_k$, de $(f_n)_n$, tal que $\|g_{k+1} - g_k\|_p < \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots$

Seja,

$$\begin{aligned} (\#)_1 \quad g(x) &= |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \\ &\cdot g \in M^+(X, \mathfrak{M}) \\ &\cdot |g(x)|^p = \left\{ |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right\}^p \\ &\cdot \int |g(x)|^p d\mu \leq \lim_n \inf \int \left\{ |g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right\}^p d\mu, \\ &\text{pelo lema de Fatou.} \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ \int |g(x)|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \liminf_n \left[\int \left\{ |g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right\}^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}$$

Daí, usando a desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|g\|_p &\leq \liminf_n \left\{ \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|g_{k+1} - g_k\|_p \right\} \leq \\ &\leq \liminf_n \left\{ \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \right\} \leq \|g_1\|_p + 1 \end{aligned}$$

Logo $g \in L^p(X)$, o que significa que a série em $(\#)_1$ é convergente quase sempre.

Note que $g \in L^p(X)$, significa que se $E = \{x \in X; g(x) < \infty\}$ então E é mensurável e $\mu(X \setminus E) = 0$. Portanto, eventualmente pode acontecer $g(x) = \pm\infty$, em $x \in X \setminus E$.

Considere a função,

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)), & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

A sequência $(g_k)_k$ convergir pontualmente quase sempre para f , e

$$|g_k(x)| \leq \sum_{j=k}^{\infty} |g_{j+1} - g_j| \leq g,$$

em X .

Então

$$g_k^p \rightarrow f^p,$$

q.s.(X)

e

$$|g_k^p(x)| \leq g^p(x), \forall x \in X$$

TCDL

$$\Rightarrow f^p \in L_1 \Rightarrow f \in L^p$$

Também, como

$$|f(x) - g_k(x)|^p \rightarrow 0$$

q.s.

e

$$|f(x) - g_k(x)|^p \leq 2^p g^p(x), \forall x \in X$$

TCDL

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int |f(x) - g_k(x)|^p d\mu = 0,$$

ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - g_k\|_p = 0.$$

Por

$$(\#) \quad \|f_n - f_m\|_p^p < \epsilon^p, \quad \forall n, m \geq M$$

Se

$$m \geq M(\epsilon) \implies \|f_n - g_k\|_p^p < \epsilon^p$$

e k é suficientemente grande.

Logo,

$$\int |f_m(x) - g_k(x)|^p d\mu < \epsilon^p, \quad m \geq M(\epsilon).$$

Aplicando lema de Fatou, novamente, obtemos

$$\int |f_m(x) - f(x)|^p d\mu \leq \liminf_k \int |f_m(x) - g_k(x)|^p d\mu \leq \epsilon^p, \quad m \geq M(\epsilon)$$

ou seja, $(f_n)_n$ converge para f , em L^p .

5.6 O espaço $L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$

Entende-se por $L^\infty = L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ o conjunto de todas as (classes de equivalência de) funções $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, que são mensuráveis e quase sempre limitadas. Aqui, como nos espaços L^p , $1 \leq p < \infty$, duas funções são equivalentes, se são iguais μ -quase sempre.

Sejam $f \in L^\infty$ e $N \in \mathfrak{M}$, com $\mu(N) = 0$. Define-se:

$$S(N) = \sup \{|f(x)|; x \notin N\}$$

e

$$\|f\|_\infty = \inf \{S(N); N \in \mathfrak{M}, \mu(N) = 0\}$$

As funções de L_∞ são ditas "essencialmente limitadas".

é clara que,

$$\|f\|_\infty = \inf \{C; |f(x)| \leq C, \text{ q.s. } (X)\}$$

Afirmção:

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty, \text{ q.s. } (X), \text{ se } f \in L^\infty.$$

De fato: Pela definição de $\|f\|_\infty$, existe uma sequência (C_n) tal que $C_n \rightarrow \|f\|_\infty$, e $|f(x)| \leq C_n$, q.s. (X) , para cada n .

Então

$$|f(x)| \leq C_n, \quad \forall x \in X \setminus E_n, \quad \mu(E_n) = 0.$$

Seja $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Então $\mu(E) = 0$ e $|f(x)| \leq C_n$ e para todo $x \in X \setminus E$.

Logo $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, para todo $x \in X \setminus E$.

Teorema 5.2

L^∞ é um espaço linear normado completo (espaço de Banach).



Demonstração

1^o Passo: L^∞ é um espaço linear (vetorial).

A verificação deste fato é deixado a cargo do leitor.

2^o Passo:

$$\|f\|_\infty = \inf \{C; |f(x)| \leq C, \text{ q.s. } (X)\}$$

é uma norma em L^∞ .

$$i) \quad \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$$

q.s.(X). $\|f\|_\infty = 0$.

Então existe $N_k \in M$, com $\mu(N_k) = 0$, tal que $|f(x)| \leq \frac{1}{k}$, para $x \notin N_k$.

Seja $N = \bigcup_{k=1}^\infty N_k$. Então

$$N \in M, \mu(N) = 0 \text{ e } |f(x)| = 0$$

para todo $x \notin N$.

Logo $f(x) = 0$ q.s.(X)

i

$$i) \quad \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad f, g \in L^\infty.$$

Existe

$$N_1 \in M; \mu(N_1) = 0 \text{ e } |f(x)| \leq \|f\|_\infty, \quad x \notin N_1.$$

Existe

$$N_2 \in M; \mu(N_2) = 0 \text{ e } |g(x)| \leq \|g\|_\infty, \quad x \notin N_2.$$

Daí

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty, \quad x \notin N_1 \cup N_2$$

e

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

3^o Passo: L^∞ é completo.

Seja $(f_n)_n$ uma sequência de Cauchy em L^∞ . Seja $M \in M$, $\mu(M) = 0$, tal que $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$, para $x \notin M$, $n = 1, 2, \dots$ e

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad x \notin M, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Então $(f_n)_n$ é uniformemente convergente em $X \setminus M$.

Seja

$$f(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), & x \notin M \\ 0, & x \in M \end{cases}$$

f é mensurável e $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Teorema 5.3 (Teorema de Tonelli)

Suponhamos que $\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$ para quase todo $x \in \Omega_1$ e que $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy dx < \infty$.
Então $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.



Teorema 5.4 (Teorema de Fubini)

Suponha que $F \in (\Omega_1 \times \Omega_2)$. Então, para quase todo $x \in \Omega_1$, $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$ e $\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1)$, e, para quase todo $y \in \Omega_2$, $F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1)$ e $\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2)$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx$$



Teorema 5.5

Sejam X e Y dois subintervalos de $\mathbb{R}$, e $k : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada, digamos

$$|K(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Suponha que $f \in L(X)$, $g \in L(Y)$.

Então:

a) Para cada $y \in Y$, a integral de lebesgue $\int_X f(x) k(x, y) dx$ existe e $F(y) = \int_X f(x) k(x, y) dx$ é contínua em Y .

b) Para cada $x \in X$, a integral de lebesgue $\int_Y g(y) k(x, y) dy$ existe e $G(x) = \int_Y g(y) k(x, y) dy$ é contínua em X .

c) As duas integrais de lebesgue $\int_Y g(y) F(y) dy$ e $\int_X f(x) G(x) dx$ existem e são iguais, ou seja

$$(*) \quad \int_X f(x) \int_Y g(y) k(x, y) dy dx = \int_Y g(y) \int_X f(x) k(x, y) dx dy.$$



Demonstração

Fixado $y \in Y$, seja $f_y(x) = f(x) k(x, y)$. f_y é mensurável, em X , e

$$|f_y(x)| \leq |f(x) k(x, y)| \leq M |f(x)|, \forall x \in X.$$

Como k é contínua em $X \times Y$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow y} f(x) k(x, t) = f(x) k(x, y), \forall x \in X$$

Segue-se, do teorema da continuidade para funções definidas sob o sinal de integral, que F é contínua.

O item b) é análogo.

Temos, f, G é mensurável em X e

$$\begin{aligned} |f(x) G(x)| &\leq |f(x)| \int_Y |g(y)| |k(x, y)| dy \\ &\leq |f(x)| M \int_Y |g(y)| dy \leq M' |f(x)| \end{aligned}$$

Logo $fG \in L^1(X)$.

De modo semelhante $gF \in L^1(Y)$

· Notemos que (*) é verdadeiro quando f e g são funções escadas.

Para $f \in L(X)$, $g \in L(Y)$, dado $\epsilon > 0$, existem funções escadas s e t , tais que

$$\int_X |f - s| < \epsilon, \quad \int_Y |g - t| < \epsilon$$

Daí,

$$(*)_1 \quad \int_X f \cdot G = \int_X (s + (f - s)) G = \int_X sG + \int_X (f - s) G = \int_X sG + A_1$$

onde

$$|A_1| = \left| \int_X (f - s) G \right| \leq \int_X |f - s| \int_Y |g(y)| |k(x, y)| dy dx < \epsilon M \int_Y |g(y)| dy$$

Também:

$$G(x) = \int_Y g(y) k(x, y) dy = \int_Y t(y) k(x, y) dy + A_2,$$

com

$$|A_2| = \left| \int_Y (g - t) k(x, y) dy \right| \leq M \int_Y |g - t| dy < \epsilon M$$

Daí,

$$\int_X sG = \int_X s(x) \int_Y t(y) k(x, y) dy dx + A_3$$

$$|A_3| = \left| A_2 \int_X s(x) dx \right| \leq \epsilon M \int_X |s| \leq \epsilon M \int_X \{|s - f| + |f|\} < \epsilon^2 M + \epsilon M \int_X |f|$$

e

$$\int_X fG = \int_X s(x) \int_Y t(y) k(x, y) dy dx + A_1 + A_3$$

De modo análogo

$$\int_X gF = \int_X t(y) \int_Y s(x) k(x, y) dx dy + B_1 + B_3$$

com

$$|B_1| < \epsilon M \int_X |f|, \quad |B_3| \leq \epsilon M \int_Y |t| < \epsilon^2 M + \epsilon M \int_Y |g|$$

$$\begin{aligned} \left| \int_X fG - \int_Y gF \right| &\leq |A_1| + |A_3| + |B_1| + |B_3| \\ &< 2\epsilon^2 M + 2\epsilon M \left\{ \int_X |f| + \int_Y |g| \right\}. \end{aligned}$$

Capítulo 6 Funções de Variação Limitada e Absolutamente Contínuas



George Gabriel Stokes
viveu 1819 até 1903

George Stokes estabeleceu a ciência da hidrodinâmica com sua lei da viscosidade que descreve a velocidade de uma pequena esfera através de um fluido viscoso.

As funções de variação limitada e as funções absolutamente contínuas são conceitos importantes na teoria da análise matemática, especialmente na teoria da integração e na teoria da medida. Vamos entender cada uma delas: Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é considerada de variação limitada se a variação total da função em qualquer subintervalo fechado $[c, d]$ de $[a, b]$ for limitada, ou seja, existe uma constante M tal que, para qualquer partição P de $[c, d]$, temos:

$$\sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \leq M$$

onde x_i são os pontos de partição de P . Em outras palavras, a função não "varia muito" em intervalos pequenos.

Funções Absolutamente Contínuas: Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de absolutamente contínua se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer coleção finita e disjunta de subintervalos

(a_i, b_i) de $[a, b]$ com

$$\sum_{i=1}^n [b_i - a_i] < \delta \implies \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \leq \varepsilon.$$

Em outras palavras, funções absolutamente contínuas são extremamente "controladas" em termos de variação, mesmo para coleções arbitrárias de intervalos disjuntos.

Relação entre Funções de Variação Limitada e Absolutamente Contínuas

Toda função absolutamente contínua é de variação limitada, mas o contrário não é verdade. Existem funções de variação limitada que não são absolutamente contínuas. No entanto, se uma função é absolutamente contínua, ela é uniformemente contínua. Esses conceitos são importantes em teoria da medida, análise funcional e teoria da integração, sendo fundamentais para entender propriedades de funções em espaços métricos e espaços de medida.

6.1 Funções de Variação Limitada e Funções Absolutamente Contínuas.

Funções Monótonas

Uma função $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita

a) crescente, se

$$x < y \implies f(x) \leq f(y),$$

para qualquer $x, y \in S$.

b) decrescente, se

$$x < y \implies f(x) \geq f(y),$$

para qualquer $x, y \in S$.

Se

$$a') x < y \implies f(x) < f(y),$$

para qualquer $x, y \in S$, então f é dita estritamente crescente.

b) f é dita estritamente decrescente.

$$x < y \implies f(x) > f(y),$$

para qualquer $x, y \in S$, então

$f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita monótona se é crescente ou decrescente.

Teorema 6.1

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. Então para cada $c \in (a, b)$, $f(c^+)$ e $f(c^-)$ existe e tem-se $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$.

Nos extremos tem-se $f(a) \leq f(a^+)$, $f(b) \geq f(b^-)$.



Demonstração

Seja $A = \{f(x) : a < x < c\}$. A é limitado superiormente, pois f é crescente.

Seja $\alpha = \sup A$. Então $\alpha \leq f(c)$. Provaremos que $\alpha = f(c^-)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $f(x_1) \in A$, tal que

$$\alpha - \epsilon < f(x_1) \leq \alpha.$$

Como f é crescente, para todo $x \in (x_1, c)$, temos ainda $\alpha - \epsilon < f(x) \leq \alpha$.

Daí,

$$\alpha - \epsilon < f(x) \leq \alpha + \epsilon, \quad \forall x \in (x_1, c),$$

ou seja

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon, \quad \text{se } c - \delta < x < c.$$

Portanto $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \alpha = f(c^-)$.



Observação Um resultado semelhante é válido para funções decrescente.

Teorema 6.2

- a) $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Então f^{-1} existe e é estritamente crescente.
 b) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e estritamente crescente. Então f^{-1} é contínua e estritamente crescente em $[f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$.



Demonstração

Exercício

Teorema 6.3

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e sejam
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $n + 1$ pontos de $[a, b]$.
 Então, $\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] \leq f(b) - f(a) \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$.



Demonstração

Seja $y_k \in (x_k, x_{k+1})$. $f(x_k^+) \leq f(y_k)$, $k = 1, \dots, n - 1$
 $f(y_{k-1}) \leq f(x_k^-)$, $k = 1, \dots, n - 1$
 Então, $f(x_k^+) - f(x_k^-) \leq f(y_k) - f(y_{k-1})$ e
 $\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k^+) - f(x_k^-)] \leq f(y_{k-1}) - f(y_0) \leq f(b) - f(a)$.

Teorema 6.4

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Então o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.



Demonstração

Suponhamos f crescente.

Seja S_m o conjunto dos pontos de (a, b) nos quais o salto de f excede $\frac{1}{m}$, $m > 0$.

Seja $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} \in S_m$. Então $\frac{n-1}{m} \leq f(b) - f(a)$.

Pois $\sum_{k=1}^{n-1} \{f(x_k^+) - f(x_k^-)\} \leq f(b) - f(a)$.

Como $f(x_k^+) - f(x_k^-) \geq \frac{1}{m}$, temos um número finito de pontos.

Como o conjunto dos pontos de descontinuidade de f , em (a, b) , é um subconjunto de $\cup_{m=1}^{\infty} S_m$, este é enumerável.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ crescente. Então f é diferenciável q.s. $[a, b]$, f' é mensurável e $\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a)$.

(Referência Royden)

6.2 Funções de Variação limitada

Dado um intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$, um conjunto de pontos $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$, satisfazendo

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ é dito uma partição de $[a, b]$.

Cada intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ é dito o k -ésimo subintervalo de P .

Escreve-se $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ de modo que $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$.

A coleção de todas as possíveis partições de $[a, b]$ é denotada por $P[a, b]$.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, escreve-se $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$.

Se existe $M > 0$, tal que $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M$, para toda partição de $[a, b]$, então f é dita de variação limitada em $[a, b]$.

Exemplo 6.1

i) Toda função monótona definida em $[a, b]$ é de variação limitada em $[a, b]$.

De fato: suponhamos f crescente. Então $\Delta f_k \geq 0$.

Daí,

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n \Delta f_k = \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a) = M.$$

ii) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e f' existe e é limitada em (a, b) , então f é de variação limitada em $[a, b]$.

De fato: suponhamos $|f'(x)| \leq A, \forall x \in (a, b)$.

Temos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$.

Daí $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^n |f'(t_k)| \Delta x_k \leq A \sum_{k=1}^n \Delta x_k = A(b - a)$

6.3 Variação Total

Seja f uma função de variação limitada em $[a, b]$. Seja $\sum(P)$ a soma $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k|$ corresponde a partição $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$. O número $V_f(a, b) = \sup \{\sum(P) ; P \in \mathfrak{P}[a, b]\}$ é dito a variação total de f , em $[a, b]$.

Tem-se:

- sendo f de variação limitada em $[a, b]$ o número $V_f(a, b)$ é finito.
- $V_f(a, b) \geq 0$
- $V_f(a, b) = 0 \Leftrightarrow f$ é constante em $[a, b]$.

Teorema 6.5

Sejam f e g funções de variação limitada em $[a, b]$. Então

i) $f + g$ é de variação limitada em $[a, b]$ e $V_{f+g}(a, b) \leq V_f(a, b) + V_g(a, b)$.

ii) fg é de variação limitada em $[a, b]$ e $V_{fg}(a, b) \leq AV_f(a, b) + BV_g(a, b)$, onde $A = \sup_{x \in [a, b]} |g(x)|$, $B = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.



Demonstração

Prova de i). Exercício.

Prova de ii) Seja $h(x) = f(x)g(x)$.

Para qualquer partição, P , de $[a, b]$, tem-se:

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\ &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k) + f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq |g(x_k)||f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1})||g(x_k) - g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k| \end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^n |\Delta h_k| \leq A \sum_{k=1}^n |\Delta f_k| + B \sum_{k=1}^n |\Delta g_k|, \text{ e tomando supremo em } P(a, b), \text{ obtemos}$$

$$V_{fg}(a, b) \leq AV_f(a, b) + BV_g(a, b).$$



Observação

A recíproca de uma função de variação limitada pode não ser uma função de variação limitada. Entretanto tem-se o seguinte fato:

Se f é de variação limitada em $[a, b]$ e $0 < m \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$, então $g = 1/f$ é de variação limitada em $[a, b]$ e $V_g(a, b) \leq \frac{V_f(a, b)}{m^2}$.

6.4 Aditividade da variação total.

Teorema 6.6

Seja f de variação limitada em $[a, b]$ e suponha que $c \in (a, b)$. Então f é de variação limitada sobre $[a, c]$ e $[c, b]$, e $V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b)$.



Demonstração

Inicialmente mostremos que f é de variação limitada sobre $[a, c]$ e $[c, b]$.

Sejam P_1 uma partição de $[a, c]$ e P_2 uma partição de $[c, b]$.

Então $P_0 = P_1 \cup P_2$ é uma partição de $[a, b]$ e tem-se

$$\sum(P_1) + \sum(P_2) = \sum(P_0) \leq V_f(a, b),$$

pois f é de variação limitada em $[a, b]$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum(P_1) &\leq V_f(a, b) \\ \sum(P_2) &\leq V_f(a, b). \end{aligned}$$

Então,

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}[a, c]} \sum(P) \leq V_f(a, b) \text{ e } \sup_{P \in \mathfrak{P}[c, b]} \sum(P) \leq V_f(a, b).$$

Logo, f é de variação limitada em $[a, c]$ e $[c, b]$.

Da desigualdade

$$\sum(P_1) + \sum(P_2) \leq V_f(a, b),$$

e por propriedade do supremo, temos

$$V_f(a, c) + V_f(c, b) \leq V_f(a, b) \quad (I)$$

Para obter a desigualdade contrária, seja $P = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, e seja $P_0 = P \cup \{c\}$.

Se $c \in [x_{k-1}, x_k]$, então

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|.$$

Daí, $\sum(P) \leq \sum(P_0)$.

Note que os pontos de P_0 , em $[a, c]$, determinam uma partição, P_1 , de $[a, c]$. Os pontos de P_0 em $[c, b]$ determinam uma partição P_2 de $[c, b]$.

Tem-se

$$\sum(P) \leq \sum(P_0) = \sum(P_1) + \sum(P_2) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Daí,

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}[a, b]} \sum(P) \leq V_f(a, c) + V_f(c, b). \quad (II)$$

De (I) e (II) tem-se

$$V_f(a, b) = V_f(a, c) + V_f(c, b).$$

Teorema 6.7

Seja f de variação limitada em $[a, b]$. Defina $V : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$V(x) = \begin{cases} V_f(a, x), & \text{se } a < x \leq b \\ 0, & \text{se } x = a \end{cases}.$$

Então: i) V é crescente em $[a, b]$

ii) $V - f$ é crescente em $[a, b]$.



Demonstração

i) Se $a < x < y \leq b$, então $V_f(a, y) = V_f(a, x) + V_f(x, y)$

Daí, $V(y) - V(x) = V_f(x, y) \geq 0$ e $V(x) \leq V(y)$.

ii) Seja $D(x) = V(x) - f(x)$, $x \in [a, b]$. Então se $a \leq x < y \leq b$

Temos,

$$D(y) - D(x) = V(y) - V(x) - [f(y) - f(x)] = V_f(x, y) - [f(y) - f(x)]$$

Mas $f(y) - f(x) \leq V_f(x, y)$. Logo $D(y) - D(x) \geq 0$.

Teorema 6.8

i) Seja f definida em $[a, b]$. Então f é de variação limitada em $[a, b]$ se e só se f pode ser escrita como a diferença de duas funções crescentes.

ii) Seja f de variação limitada em $[a, b]$. Seja $V(x) = V_f(a, x)$, $x \in (a, b]$. Então todo ponto de continuidade de f é também um ponto de continuidade de V e vice-versa.

iii) Seja f contínua em $[a, b]$. Então f é de variação limitada em $[a, b] \Leftrightarrow f$ é a diferença de duas funções crescentes contínuas.



Teorema 6.9

Seja $f \in L^1[a, b]$ e defina $F(x) = \int_a^x f(x) dx$. Então $f \in C[a, b] \cap BV[a, b]$ e $F' = f$ q.s. $[a, b]$



Demonstração

1º Passo: $f \in C[a, b]$.

Lema 6.1

Seja $f \in L^1[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|\int_E f| < \epsilon$ quando $E \subset [a, b]$ é mensurável e $m(E) < \delta$.



Demonstração [do Lema]

Suponhamos $f \geq 0$.

$$\text{Seja } f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq f(x) \leq n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$$

$$\text{TCM} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Então dado } \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_{n_0}(x) dx < \frac{\epsilon}{2} \quad (1)$$

Escolhamos $\delta > 0$, $\delta < \frac{\epsilon}{2n_0}$

Seja $E \subset [a, b]$, mensurável com $\mu(E) < \delta$.

Temos

$$\int_a^b f_{n_0}(x) dx \leq \int_a^b n_0 dx = n_0 m(E) < n_0 \delta < \frac{\epsilon}{2} \quad (2)$$

De (1), (2)

, vem:

$$\int_E f = \int_E (f - f_{n_0}) + \int_E f_{n_0} \leq \int_a^b (f - f_{n_0}) + \int_E f_{n_0} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Donde, $|\int_E f| < \epsilon$, se $\mu(E) < \delta$.

Para f geral, escreve-se $f = f^+ - f^-$, com $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$.

$\exists \delta_1 > 0$; $\int_E f^+ < \frac{\epsilon}{2}$, $\mu(E) < \delta_1$

$\exists \delta_2 > 0$; $\int_E f^- < \frac{\epsilon}{2}$, $\mu(E) < \delta_2$

Seja $E \subset [a, b]$, $m(E) < \min\{\delta_1, \delta_2\}$

então

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2º Passo:

$$F(x) - F(y) = \int_x^y f(s) ds = \int_{(x,y)} f(s) ds$$

Se $|x - y| < \delta$, então $\left| \int_{(x,y)} f(s) ds \right| < \epsilon$, donde
 $|F(x) - F(y)| < \epsilon$, se $|x - y| < \delta$.

3º Passo:

Seja $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$.

Então

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}$$

Daí $V_F(a, b) \leq \|f\|_{L^1}$. Logo $F \in BV(a, b)$.

4º Passo:

Sejam

$$g, h \in L^1[a, b], g \geq 0, h \geq 0, \int_a^b g(x) dx < \infty, \int_a^b h(x) dx < \infty.$$

Fazendo

$$G(x) = \int_a^x g(x) dx, H(x) = \int_a^x h(x) dx,$$

tem-se $F = G - H$.

Mostraremos que $G' = g$, $H' = h$ q.s.

Desde que $g \in L^1[a, b]$, $g \geq 0$, existe uma seqüência não decrescente $\{g_n\}_n$ de funções contínuas não-negativas definidas em $[a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ q.s.

Seja $\varphi_0 = g_0$

$$\varphi_n = g_n - g_{n-1}, n \geq 1 \text{ e defina}$$

$$\Phi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t) dt.$$

Cada φ_n é contínua. Pelo TFC cada Φ_n é derivável, com $\Phi'_n = \varphi'_n, \forall x$

Com $\varphi_n \geq 0$, segue-se que Φ_n é não decrescente. Pelo Teorema da diferenciação de Fubini, $\sum_0^\infty \Phi_n$ é diferenciável e

$$(\sum_0^\infty \Phi_n)'(x) = \sum_0^\infty \Phi'_n \text{ q.s.}$$

Mas

$$\sum_0^\infty \Phi_n = \int_a^x \sum_0^\infty \varphi_n(x) dx = \int_a^x g_n(x) dx \text{ e } G(x) = \sum_0^\infty \Phi_n(x)$$

De modo análogo

$$\sum_0^\infty \Phi'_n(x) = \lim g_n(x) = g(x) \quad \text{q.s.}$$

Portanto $G'(x) = g(x)$ q.s.

Teorema 6.10 (Teorema da Diferenciação de Fubini)

Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções definidas em $[a, b]$. Defina $f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$

Se $|f(x)| < \infty$, para $a \leq x \leq b$, então $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty f'_n(x)$ q.s.



Demonstração

Note que f é crescente e daí, diferenciável quase sempre. Considere a série $\sum_{n=1}^\infty (f_n(x) - f_n(a))$, podemos supor que $f_n \geq 0$ (daí $f \geq 0$).

Seja $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. (s_n) é crescente e não negativa.

Se $h > 0$, então

$$\frac{s_n(x+h) - s_n(x)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sum_{k=n+1}^\infty f_k(x) - \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x+h)}{h} \leq 0$$

Fazendo $h \rightarrow 0$, temos

$$s'_n(x) \leq f'(x).$$

Agora $s'_n(x) \leq s'_{n+1}(x)$ ($f'_{n+1}(x) \geq 0$), de modo que $\{s'_n(x)\}$ é limitado superiormente quase sempre por $f'(x)$.

Então $\sum_1^\infty f'_n(x)$ converge quase sempre e $\sum_1^\infty f'_n(x) \leq (\sum_1^\infty f_n(x))'$ quase sempre.

Mostraremos que existe uma sequência (s_{n_j}) , de (s_n) , tal que $\lim s'_{n_j}(x) = f'(x)$ quase sempre.

Definição 6.1

Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\{x_j, y_j\}_{j=1}^p$ é uma família finita de subintervalos disjuntos de $[a, b]$, satisfazendo $\sum_{j=1}^p (y_j - x_j) < \delta$, então $\sum_{j=1}^p |f(y_j) - f(x_j)| < \epsilon$

A classe de todas as funções absolutamente contínuas sobre $[a, b]$ é denotada por $AC[a, b]$.



Proposição 6.1

Se $f \in L^1[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f d\mu$ então F é AC.



Demonstração

Usar o Teorema.



Observação $AC[a, b] \subset C[a, b]$.

Proposição 6.2

Se $f \in AC[a, b]$ então $f \in BV[a, b]$, f é diferenciável quase sempre e $f' \in L^1[a, b]$.



Demonstração

Exercício.

Lema 6.2

Seja $f \in AC[a, b]$ e suponha que $f' = 0$ quase sempre. Então f é constante.

**Demonstração**

Veja: A First Course in Integration. Asplund & Bungard.

Teorema 6.11

Se $f \in AC[a, b]$, então $f' \in L^1[a, b]$ e $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s) ds, \forall x \in [a, b]$.

**Demonstração**

A priori já foi provado que se $f \in AC[a, b]$, então $f' \in L^1[a, b]$.

Seja $g(x) = \int_a^x f' d\lambda$. Então $g \in AC[a, b]$ e $g' = f'$ quase sempre.

Se $h = f - g$, então $h \in AC[a, b]$ e $h' = 0$ quase sempre.

Então, pelo Lema 6.2, $h(t) = h(a) = f(a), \forall t \in [a, b]$

Daí $f(t) = h(t) + g(t) = h(a) + g(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds$.

Teorema 6.12

Seja $f \in BV[a, b]$. Então existe funções g e h em $BV[a, b]$ tais que $g \in AC[a, b]$, $h' = 0$ quase sempre e $f = g - h$.

**Demonstração**

$$g(x) = \int_a^x f'(t) dt = g - f.$$

Exercícios: Lista 1

1. Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Defina três σ -álgebras distintas em X . Justifique.
2. Defina uma σ -álgebra sobre o conjunto dos naturais. Justifique.
3. Sejam X um conjunto não enumerável e M a coleção de subconjuntos, de X , que são enumeráveis ou tem complemento enumerável. Mostre que tal coleção é uma σ -álgebra em X .
4. A união de duas σ -álgebras é um σ -álgebra? Que se pode dizer a respeito da interseção de duas σ -álgebras?
5. a) Mostre que

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right)$$

e

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right].$$

- b) Conclua que toda σ -álgebra de subconjunto de R que contenha todos os intervalos abertos contém todos os intervalos fechados.

6. Sejam (A_n) uma sequência de subconjunto de um conjunto X , $E_0 = \phi$ e

$$E_n = \cup_{k=1}^n A_k, F_n = A_n \setminus E_{n-1}, \forall n = 1, 2, \dots$$

- a) Mostre que (E_n) é uma sequência monótona crescente de conjuntos.
 b) Mostre que (F_n) é uma sequência disjunta.
 c) Mostre que

$$\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

7. Suponha f uma função mensurável e A um número real positivo. A função

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq A \\ +A, & \text{se } f(x) > A \\ -A, & \text{se } f(x) < -A \end{cases}$$

é dita a truncada de f , por A . Mostre que f_A é mensurável.

8. Sejam $(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que $\varphi \circ f$ é mensurável.

Exercícios: Lista 2

1. Sejam $\mu_1, \dots, \mu_n$, medidas sobre $(X, \mathfrak{M})$ e $a_1, \dots, a_n$ números reais

positivos. Prove que $\sum_{i=1}^n a_i \mu_i$ é uma medida sobre $(X, \mathfrak{M})$.

2. Sejam $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, um espaço de medida, e $E, F \in M$. Prove que

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

3. $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, um espaço de medida, e $E \in M$, fixado. Defina $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$, $\forall A \in M$. Prove que μ_E é uma medida.

4. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida.

i) Prove que se $E, F \in M$ e $\mu(E \triangle F) = 0$, então $\mu(E) = \mu(F)$

$$(E \triangle F) = (E - F) \cup (F - E).$$

ii) Prove que " $E \sim F \Leftrightarrow \mu(E \triangle F) = 0$ " é uma relação de equivalência, sobre M .

5. Seja (μ_n) uma sequência de medidas sobre M , tais que $\mu_n(X) = 1$,

$(X, \mathfrak{M})$ um espaço mensurável. Defina

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(E), E \in M.$$

Prove que λ é uma medida, sobre M , e que $\lambda(X) = 1$.

6. Seja λ a medida de Lebesgue definida sobre a álgebra de Borel, B , de $\mathbb{R}$.

i) se E é unitário, então $E \in B$ e $\lambda(E) = 0$. Prove

ii) se E é enumerável, então $E \in B$ e $\lambda(E) = 0$.

iii) $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b) = b - a$.

7. Mostre que a medida de Lebesgue do conjunto de Cantor é zero.

⌘ Exercícios: Lista 3 ⌘

1. Sejam $f \in L(X)$ e $a > 0$. Mostre que o conjunto $\{x \in X; |f(x)| \geq a\}$ tem medida finita. Mostre que
- $$\{x \in X; f(x) \neq 0\}$$

tem medida σ -finita.

2. Seja f uma função mensurável tal que $f(x) = 0$ μ -q.s.(X). Mostre que f é integrável e
- $$\int f d\mu = 0.$$

3. Sejam $f \in L(X)$ e g uma função mensurável, real, tal que $f = g$ μ -q.s.(X). Mostre que g é integrável e
- $$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

4. Sejam $f \in L(X)$ e $\epsilon > 0$. Mostre que existe uma função simples (escada) mensurável, φ , tal que
- $$\int |f - \varphi| d\mu < \epsilon.$$

5. Sejam $f \in L(X)$ e g uma função mensurável limitada. Prove que $fg \in L$.

6. Mostre, através de exemplos, que o fato de $f \in L$ não implica que $f^2 \in L$.

7. Sejam $X = \mathbb{N}$, $M = P(\mathbb{N})$ e μ a medida contagem sobre M . Mostre que $f \in L(X) \Leftrightarrow$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é absolutamente convergente e neste caso

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

8. Se $(f_n)_n$ é uma sequência em $L(X)$ que converge uniformemente em X , para uma função f , e se $\mu(X) < \infty$, prove que

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

9. Através de um exemplo mostre que a conclusão do Ex.8. pode ser falsa se retirarmos a condição $\mu(X) < \infty$.

10. Sejam $f_n = n\chi_{[0, \frac{1}{n}]}$, $X = \mathbb{R}$, $M = B$ e μ a medida de Lebesgue. Mostre que a condição $|f_n| \leq g$ não pode ser retirada no TCDL.

11. Seja $(f_n)_n$ uma sequência em $L(X)$ e suponha que $\sum_1^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$. Mostre que $\sum f_n(x)$ converge q.s. para uma função $f \in L(X)$, e que

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

12. Seja $(f_n)_n$ uma sequência em $L(X)$ e suponha que $f_n \rightarrow f$. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0,$$

mostre que

$$\int |f| d\mu = \lim \int |f_n| d\mu.$$

13. Se $t > 0$, mostre que $\int_0^\infty \exp^{-tx} dx = \frac{1}{t}$. Mostre ainda que se $t \geq a > 0$, então $\exp^{-tx} \leq \exp^{-ax}$. Deduza que

$$\int_0^\infty x^n \exp^{-x} dx = n!.$$

14. Sejam $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de probabilidade, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma variável aleatória integrável e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa.

Prove que

$$\int_X (g \circ f) d\mu \geq g\left(\int_X f d\mu\right).$$

15. Prove que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ e } x > 1 \end{cases},$$

é integrável a Lebesgue.

Sugestão: Seja

$$f_n = f \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$$

e considere $\sum_{n=1}^\infty f_n$.

16. Prove que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \sin x, & x \geq \pi \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

é L -integrável.

Sugestão: Use

$$g_n = g \chi_{[n\pi, (n+1)\pi]}$$

e considere a série

$$\sum_{n=1}^\infty g_n.$$

17. Suponha $f \in L$ integrável em $[a, b]$ e $\int_a^x f d\mu = 0, \forall a \leq x \leq b$. Mostre que $f = 0$ q.s. (a, b) .

18. Considere a função v definida em (a, b) da seguinte forma: $v(x) = n$, se $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Mostre que v não é integrável.

Sugestão:

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \geq \frac{1}{n} \\ n, & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

e T.C.D.L.

19. Seja $I_n = \int_0^\infty \frac{\exp^{-nx}}{\sqrt{x}} dx$, $n = 1, 2, \dots$. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

20. Seja $F(t) = \int_0^\infty x^2 \exp^{-tx} dx$, $t > 0$.

a) Mostre que F é contínua em $(0, \infty)$.

b) Calcule $F'(t)$.

21. Para $n = 1, 2, \dots$ seja

$$\begin{cases} f_n(x) = 2n, & \text{se } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = 0, & \text{se } x \in (0, \frac{1}{2n}) \cup (\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

Calcule

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

22. Seja $\int_0^\infty \exp^{-x^2} \cos(2xt) dx$, $t \in \mathbb{R}$. Mostre que F satisfaz a equação diferencial

$$F'(t) + 2tF(t) = 0$$

e conclua que $F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

23. Seja

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{x(x^2+1)} dx, \quad t > 0.$$

Mostre que F satisfaz a equação diferencial $F''(t) - F(t) + \frac{\pi}{2} = 0$ e conclua que

$$a) F(t) = \frac{\pi}{2} (1 - \exp^{-t})$$

$$b) \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{x(x^2+a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - \exp^{-at}), \quad t > 0, a > 0.$$

$$c) \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi \exp^{-at}}{2a}, \quad t > 0, a > 0.$$

$$d) \int_0^\infty \frac{-\sin(xt)}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} \exp^{-at}, \quad t > 0, a > 0.$$



Observação

Em alguns desses, quando necessário, use que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercícios: Lista 4

1. Prove que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_p$, $p \geq 1$, são, de fato, normas sobre $\mathbb{R}^n$.
2. Duas normas $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ sobre $\mathbb{R}^n$ são ditas equivalentes se existem números positivos α e β tais que

$$\alpha \|x\| \leq |||x||| \leq \beta \|x\|_1, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mostre que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, no Exercício 1, são equivalentes.

3. Prove que $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, é um espaço vetorial.
4. Seja $f \in L^1(X)$ e suponha f limitada. Mostre que $f \in L^2(X)$.
5. Dê exemplos de que $f \in L^1(X)$ não acarreta, em geral, que $f \in L^2(X)$.
6. Seja X um espaço de medida finita. Prove que se $f \in L^p(X)$ então $f \in L^r(X)$, $1 \leq r \leq p$, e $\|f\|_{L^r(X)} \leq \mu(X)^s \|f\|_{L^p(X)}$, onde $s = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.
7. Seja X um espaço de medida finita. Se f é mensurável, seja $E_n = \{x \in X; n-1 \leq |f(x)| < n\}$.
 - i) Mostre que $f \in L^1(X) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty$
 - ii) Mostre que $f \in L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(E_n) < \infty$
8. Seja X um espaço de medida finita. Se $\mu \in L^\infty(X)$, mostre que $\|u\|_{L^\infty(X)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u\|_{L^p(X)}$.
9. Seja X um espaço de medida e suponha que $f \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$, com $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$. Mostre que $f \in L^p(X)$, para qualquer p tal que $p_1 \leq p \leq p_2$.
10. Seja $1 < p < \infty$ e seja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Da desigualdade de Hölder temos

$$\left| \int fg d\mu \right| \leq \|f\|_{L^p(X)} \|g\|_{L^q(X)},$$

com $\|g\|_q \leq 1$.

Seja $g_0(x) = c(\operatorname{sgn} f(x)) |f(x)|^{p-1}$, se $f \neq 0$, com $c = \|f\|_p^{-\frac{p}{q}}$.

- a) Mostre que $g_0 \in L^q(X)$ e $\|g_0\|_q = 1$
 - b) Mostre que $\left| \int fg_0 \right| = \|f\|_p$.
11. Suponhamos $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, e $g \in L^\infty$. Mostre que $fg \in L^p$ e que

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_\infty.$$

12. Mostre que $L^\infty(X) \subset L^1(X) \Leftrightarrow \mu(X) < \infty$.

13. Se $1 \leq p < q < r \leq \infty$, mostre que

$$L^q \subset L^p + L^r.$$

Sugestão: se $f \in L^q$, seja $E = \{x; |f(x)| > 1\}$ e considere

$$g = f\chi_E, h = f\chi_{E^c}.$$

14. Seja $1 \leq p < r \leq \infty$. Mostre que $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_r$ é uma norma sobre $L^p \cap L^r$, e que relação a esta norma $L^p \cap L^r$ é um espaço de Banach.

15. Na situação do Exercício 14, se $1 < p < q < r$, mostre que a aplicação $i : L^p \cap L^r \rightarrow L^q$, $i(u) = u$, é contínua.

16. Sejam $f_1, f_2, \dots, f_k$ funções tais que $f_i \in L^p(X)$, $1 \leq i \leq k$, com $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Mostre que

$$f = f_1 f_2 \cdots f_k \in L^p(X) \text{ e } \|f\|_{L^p(X)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(X)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(X)}.$$

17. Sejam $(f_n)_n$ uma sequência de $L^p(X)$ e $f \in L^p(X)$, tais que $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, com $n \rightarrow \infty$. Prove que existe uma subsequência (f_{n_k}) , de (f_n) , tal que

$$f_{n_k} \rightarrow f, q.s.(X).$$

18. Por $L^1_{loc}(X)$ denota-se o conjunto de todas as funções u tais que $u \in L^1(K)$, para todo $K \subset X$, conjunto. Mostre que $L^p(X) \subset L^1_{loc}(X)$, para $1 \leq p \leq \infty$.

19. Sejam $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$, $q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Prove que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,$$

usando:

a) $\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda, t \geq 0, 0 < \lambda < 1$.

b) $u = t^{p-1}$

c) $\psi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t, t \geq 0$

d) $\gamma(t) = t^p - at, a > 0, t \geq 0$

20. Sejam $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prove que se $\epsilon > 0$, então

$$ab \leq \epsilon a^p + \epsilon^{-\frac{q}{p}} b^q.$$

21. Seja $f \in L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$. Se $E = \{x \in X; |f(x)| \neq 0\}$, mostre que E é σ -finito.

22. Seja $f \in L^p(X)$. Se $E_n = \{x \in X; |f(x)| \geq n\}$, mostre que $\mu(E_n) \rightarrow 0$ com $n \rightarrow \infty$.

23. Para quaisquer $f, g \in L^2(a, b)$, define

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

a) Mostre que $(\cdot, \cdot)$ é um produto interno sobre $L^2(a, b)$

b) Mostre que $\|f\|_2 = (f, f)^{\frac{1}{2}}$ é uma norma sobre $L^2(a, b)$

c) Mostre que $L^2(a, b)$ é completo.

24. Se $f, g \in L^2(a, b)$, mostre que $|\|f\|_{L^2} - \|g\|_{L^2}| \leq \|f - g\|_{L^2}$.

25. Sejam $(f_n), (g_n)$ seqüências em $L^2(a, b)$ e suponha que $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$, em $L^2(a, b)$. Mostre que $\{(f_n, g_n)\}_n$ converge para (f, g) . 25. Sejam $(f_n), (g_n)$ seqüências em $L^2(a, b)$ e suponha que $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$, em $L^2(a, b)$. Mostre que $\{(f_n, g_n)\}_n$ converge para (f, g) .
26. Seja $f_n = n^{-\frac{1}{p}} \chi_{[0, n]}$, $n = 1, 2, \dots$. Mostre que $(f_n)_n$ converge uniformemente para $f = 0$, mas não converge em $L^p(\mathbb{R})$.
27. Seja $(f_n)_n$ uma sequencia de funções, tal que $f_n \rightarrow f$, uniformemente em $[a, b]$. Mostre que $f_n \rightarrow f$, em $L^p(a, b)$.
28. Explique a aparente contradição dos exercícios 26 e 27.
29. Dê exemplos de sequencias de funções $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que convirjam pontualmente, mas não uniformemente.

Alfabeto Grego

A α (alfa)
B β (beta)
 Γ γ (gama)
 Δ δ (delta)
E ϵ (epsilon)
Z ζ (zeta)
H η (eta)
 Θ θ (teta)
I ι (iota)
K κ (capa)
 Λ λ (lambda)
M μ (mu)
N ν (nu)
 Ξ ξ (ksi)
O $\omicron$ (omicron)
 Π π (pi)
P ρ (rô)
 Σ σ (sigma)
 Υ τ (tal)
Y υ (upsilon)
 Φ ϕ (fi)
X χ (chi)
 Ψ ψ (phi)
 Ω ω (omega)

Sugestões de alguns livros clássicos

1. "Análise Funcional: Uma Introdução" por Elon Lages Lima

Este livro é uma introdução clássica à análise funcional, abordando tópicos como espaços vetoriais topológicos, espaços de Banach, espaços de Hilbert, teoria espectral e operadores lineares.

2. "Análise Funcional: Teoria e Aplicações" por João Bosco Prolla

Nesta obra, Prolla apresenta os conceitos fundamentais da análise funcional, incluindo espaços normados, espaços de Banach, espaços de Hilbert, operadores lineares e muito mais. Também inclui aplicações em equações diferenciais parciais.

3. "Espaços Métricos e Introdução à Topologia" por Manfredo P. do Carmo

Este livro explora os fundamentos dos espaços métricos e sua relação com a topologia, abordando conceitos como distância, continuidade, compacidade, conectividade e completude. É uma obra essencial para entender a análise em espaços métricos.

4. "Introduction to Topology and Modern Analysis" por George F. Simmons

Neste livro, Simmons combina tópicos de topologia e análise matemática, fornecendo uma introdução a espaços métricos, topologia geral, séries de funções, funções holomorfas, integração de Lebesgue e mais.

5. "Introdução à Análise Funcional e às Equações Diferenciais Parciais" por Armando G. M. Neves

Esta obra aborda tanto a análise funcional quanto as equações diferenciais parciais, apresentando conceitos básicos e teoremas fundamentais. Inclui tópicos como espaços de Sobolev, operadores compactos, teoria de Fredholm e muito mais.

6. "Principles of Mathematical Analysis" (3rd Edition) por Walter Rudin

Este livro clássico oferece uma introdução abrangente à análise matemática, incluindo uma abordagem rigorosa dos espaços métricos e da análise funcional.

7. "Functional Analysis" por Walter Rudin

Neste livro, Rudin explora a teoria dos espaços vetoriais normados e espaços de Hilbert, bem como os conceitos de análise funcional, como operadores lineares, espaços duais, teoria espectral e muito mais.

8. "Topology" (2nd Edition) por James R. Munkres

Embora esse livro seja mais focado em topologia, ele também contém uma introdução detalhada aos espaços métricos e suas propriedades fundamentais.

9. "Functional Analysis: An Introduction" por Yuli Eidelman, Vitali Milman e Antonis Tsoolomitis

Esta obra fornece uma introdução acessível à análise funcional, abordando tópicos como espaços de Banach, espaços de Hilbert, teoria espectral e operadores lineares compactos.

10. "Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications" (2nd Edition) por Gerald B. Folland

Este livro aborda a análise real de uma perspectiva mais moderna, incluindo espaços métricos, funções contínuas, convergência e completude, além de tópicos mais avançados como espaços de Sobolev e teoria de medida.

Capítulo 7 Exercícios Resolvidos de Medida de Integração

7.1 Mensurabilidade $\mathcal{A}$

Exercícios Resolvidos de Medida de Integração

1. Seja $\mathcal{S}$ um conjunto não enumerável e denota por $\mathcal{A}$ a coleção dos subconjuntos de $\mathcal{S}$ que são enumeráveis ou possuem complementar enumerável. Mostre que $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra.

Solução

Com efeito, $\mathcal{S}$ é um conjunto não enumerável. Além disso

$$\mathcal{A} = \{ \mathcal{X} \subset \mathcal{S}; \mathcal{X} \text{ é enumerável} \} \cup \{ \mathcal{X} \subset \mathcal{S}; \mathcal{X}^C \text{ é enumerável} \}$$

(i) $\phi, \mathcal{S} \in \mathcal{A}$?

Ora, ϕ é enumerável, então $\phi \in \mathcal{A}$. Por outro lado, como $\mathcal{S}$ possui complementar enumerável. Isto é, $\mathcal{S}^C = \phi$, segue-se que:

$$\mathcal{S} \in \mathcal{A}.$$

(ii) Se $\mathcal{X} \in \mathcal{A}$, então, $\mathcal{X}^C \in \mathcal{A}$? [$\mathcal{X}^C = \mathcal{S} \setminus \mathcal{X}$]

Vejamos

1º caso: $\mathcal{X}$ é enumerável

De fato, se $\mathcal{X}$ é enumerável, então, $\mathcal{X}^C \in \mathcal{A}$. Visto que, $\mathcal{X}^C$ tem complementar enumerável. Isto é, $(\mathcal{X}^C)^C = \mathcal{X}$.

2º caso: $\mathcal{X}^C$ é enumerável

Procedendo de forma análoga ao prescrito no caso anterior, temos:

Se $\mathcal{X}^C$ é enumerável, então, $(\mathcal{X}^C)^C \in \mathcal{A}$.

(iii) Se $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ estão em $\mathcal{A}$, então, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{A}$?

De fato, consideremos $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ em $\mathcal{A}$. Então, temos que:

X_i ou X_i^C para todo $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ são conjuntos enumeráveis. Assim, temos:

1º caso: X_i é enumerável para $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

Basta notar que:

$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{A}$. Isto é, a união de conjunto enumeráveis é um conjunto enumerável.

2º caso: X_i^C é enumerável para $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

De forma análoga ao caso anterior temos:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^C$ é enumerável. Logo

$$X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n^C = (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots)^C = (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)^C \in \mathcal{A}.$$

Logo, $\mathcal{A}$ é σ -álgebra.

2. Mostre que a σ -álgebra de Borel é também gerada pelos intervalos fechados $[a, b]$. Qual é a σ -álgebra gerada pelos intervalos semi-abertos $(a, +\infty]$? e é gerada pelos intervalos do tipo $(a, +\infty)$?

Solução

1º caso: σ -álgebra geradas por intervalos fechados $[a, b]$.

Com efeito, temos: $(\mathcal{B}_{[a,b]})$

(I) $[a, b] = \cap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$. Então, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{[a,b]}$. Isto é, a σ -álgebra de Borel gerada pelos intervalos abertos (a, b) está contida na σ -álgebra gerada pelos intervalos fechados. Por outro lado,

$$(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$$

Donde, vem:

$$\mathcal{B}_{[a,b]} \subset \mathcal{B}$$

Logo,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{[a,b]}$$

2º caso: σ -álgebra gerada por intervalos do tipo $(a, b] - (\mathcal{B}_{(a,b]})$. neste caso, basta proceder como no caso anterior destacando que:

$$(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n} \right] \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{(a,b]}$$

Além disso,

$$(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n} \right] \Rightarrow \mathcal{B}_{(a,b]} \subset \mathcal{B}$$

Logo,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(a,b]}$$

3º caso: σ -álgebra gerada por intervalos do tipo $(a, +\infty) - (\mathcal{B}_{(a,+\infty)})$. Basta observar que:

$$(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, +\infty).$$

Além disso,

$$(a, +\infty) = \cup_{n=1}^{\infty} (a, a + n] \Rightarrow \mathcal{B}_{(a,+\infty)} \subset \mathcal{B}$$

Agora,

Seja $(a, +\infty) \in \mathcal{B}_{(a,+\infty)}$, então

$$(a, +\infty)^C = (-\infty, a] \in \mathcal{B}_{(a,+\infty)}$$

Assim, de (1), (2) e (3), obtemos:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{[a,b]}$$

Decorre do prescrito anterior que:

Todas estas classes estão na σ -álgebra de Borel-Lebesgue.

3. Seja $\{\mathcal{A}_n\}$ uma sequência de subconjuntos de $\mathcal{S}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$E_n = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k, E_0 = \phi, F_n = \mathcal{A}_n \setminus E_{n-1}.$$

Mostre que $\{E_n\}$ é uma sequência crescente, $\{F_n\}$ é uma sequência disjunta e

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

Solução

Como

$$E_1 = \mathcal{A}_1 \Rightarrow E_0 \subset E_1 \subset E_2$$

$$E_2 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$$

$$E_3 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \Rightarrow E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset E_3.$$

Então continuando com o processo, temos:

$$E_{n+1} = E_n \cup \mathcal{A}_{n+1} \Rightarrow E_n \subset E_{n+1}.$$

Logo,

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$$

Isto é, $\{E_n\}$ é uma sequência crescente.

Afirmção: $\{F_n\}$, onde $F_n = \mathcal{A}_n \setminus E_{n-1}$ é uma sequência disjunta, ou seja, $F_i \cap F_j = \phi$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, i \neq j$ (por simplicidade suponha $i < j$).

Com efeito,

$$F_i \cap F_j = (\mathcal{A}_i \setminus E_{i-1}) \cap (\mathcal{A}_j \setminus E_{j-1}),$$

ou seja,

$$\text{Como } E_{i-1} = \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{A}_k \text{ e } E_{j-1} = \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{A}_k.$$

Segue-se que:

$$F_i \cap F_j = (\mathcal{A}_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{A}_k) \cap (\mathcal{A}_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{A}_k).$$

Agora, por hipótese $i - 1 < j - 1$, então, tem-se que:

$$\bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{A}_k = \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{A}_k \cup \mathcal{A}_i \cup \dots \cup \bigcup_{k=i+1}^{j-1} \mathcal{A}_k$$

Daí, tomando-se $x \in F_i \cap F_j$, segue-se:

$$\begin{aligned}
x \in F_i \text{ e } x \in F_j &\Rightarrow \begin{cases} x \in (\mathcal{A}_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{A}_k) \\ x \in (\mathcal{A}_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{A}_k) \end{cases} \text{ e} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{A}_i \text{ e } x \notin \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{A}_k & \text{e} \\ x \in \mathcal{A}_j \text{ e } x \notin \bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{A}_k = \bigcup_{k=1}^{i-1} \mathcal{A}_k \cup \mathcal{A}_i \cup \dots \cup_{k=i+1}^{j-1} \mathcal{A}_k \end{cases}
\end{aligned}$$

Logo, de (*) e (**), tem-se um absurdo! consequentemente, obtemos:

$F_i \cap F_j = \emptyset$ são conjuntos disjuntos $\forall i \neq j$.

De sorte que: $\{F_n\}$ é uma sequência disjunta.

Sejam $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k$, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ e $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Então, mostraremos que: $\mathcal{A} = E = F$

$$F_1 = \mathcal{A}_1 \setminus E_0$$

$$F_2 = \mathcal{A}_2 \setminus E_1$$

$$\vdots$$

$$F_k = \mathcal{A}_k \setminus E_{k-1}$$

Afirmção 1: $\mathcal{A} = E$

i) Se $x \in E$, então, $x \in E_k, \forall k$, em particular, $x \in \bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$.

Logo, $x \in \mathcal{A}$. Isto é, $E \subset \mathcal{A}$. (1)

ii) Se $x \in \mathcal{A}$, então, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, daí $x \in \mathcal{A}_i$ para algum $i = 1, 2, \dots$. Além disso, suponhamos que: $x \in \mathcal{A}_j$, donde vem:

$x \in \bigcup_{k=1}^j \mathcal{A}_k = E_j$, por conseguinte, obtemos:

$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$. De sorte que: $\mathcal{A} \subset E$. (2)

De (1) e (2), segue-se: $\mathcal{A} = E$.

Afirmção 2: $\mathcal{A} = F$

De fato, se $x \in F$, então, $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, ou ainda, $x \in F_k$ para algum $k = 1, 2, \dots$, donde, segue:

$$x \in F_k = \mathcal{A}_k \setminus E_{k-1}.$$

Daí, obtemos:

$$x \in \mathcal{A}_k \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$$

Logo,

$$F \subset \mathcal{A}$$

Se $x \in \mathcal{A}$, então, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, em particular, temos:

$x \in \mathcal{A}_k$ para algum $k = 1, 2, \dots$ e $x \notin E_{k-1} \Rightarrow x \in \mathcal{A}_k \setminus E_{k-1} = F_k$.

Logo,

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = F.$$

Isto é,

$$\mathcal{A} \subset F$$

$\therefore \mathcal{A} = F$.

Decorre das afirmações que:

$$\mathcal{A} = E = F$$

4. Dada uma sequência $\{\mathcal{A}_n\}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$, defina os seguintes conjuntos

$$\limsup \mathcal{A}_n = \bigcap_{n=m}^{\infty} \mathcal{A}_n \quad \text{e} \quad \liminf \mathcal{A}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

- a) Se $\{\mathcal{A}_n\}$ é crescente, mostre que:

$$\limsup \mathcal{A}_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \liminf \mathcal{A}_n$$

- b) Se $\{\mathcal{A}_n\}$ é decrescente, mostre que:

$$\limsup \mathcal{A}_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}_k = \liminf \mathcal{A}_n$$

- c) Dê exemplo de uma sequência $\{\mathcal{A}_n\}$ de subconjuntos de $\mathcal{S}$ tal que: $\limsup \mathcal{A}_n = \mathcal{S}$ e $\liminf \mathcal{A}_n = \phi$.

Solução

1^o caso: $\limsup \mathcal{A}_n \subseteq \liminf \mathcal{A}_n$.

Seja $x \in \limsup \mathcal{A}_n$, então $x \in \mathcal{A}_n, \forall n \geq n_0$ para um certo $n_0 \in \mathbb{N}$.

Agora, como $\{\mathcal{A}_n\}$ é crescente, $x \notin \mathcal{A}_n$ para $n < n_0$, ou seja, $x \in \mathcal{A}_n$ exceto para um número finito de $\mathcal{A}_n$'s.

Logo, $\limsup \mathcal{A}_n \subseteq \liminf \mathcal{A}_n$.

2^o caso: $\liminf \mathcal{A}_n \subseteq \limsup \mathcal{A}_n$.

$x \in \liminf \mathcal{A}_n \Rightarrow x \in \mathcal{A}_n$, exceto para um número finito destes $\mathcal{A}_n$ são $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{n_0-1}$. Então, $x \in \mathcal{A}_n, \forall n \geq n_0$, ou seja,

$$x \in \limsup \mathcal{A}_n \Rightarrow \limsup \mathcal{A}_n = \liminf \mathcal{A}_n$$

$$\limsup \mathcal{A}_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

$$x \in \limsup \mathcal{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \Rightarrow x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall n \geq 1$$

Em particular, $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \subseteq \limsup \mathcal{A}_n$$

Se $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$, então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $x \in \mathcal{A}_{n_0}$. Como $\{\mathcal{A}_n\}$ é crescente, $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall n \geq n_0$.

Logo,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i = \limsup \mathcal{A}_n.$$

5. a) Se $\{\mathcal{A}_n\}$ é crescente, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \dots$ tem-se:

$$\limsup \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \cap \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n \cap \bigcup_{n=3}^{\infty} \mathcal{A}_n \cap \dots \cap \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathcal{A}_n \cap \dots$$

Mas

$$\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \cup \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_2 \cup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n = \cup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n.$$

Analogamente, temos:

$$\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \subseteq \cup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n \subseteq \dots \subseteq \cup_{n=m}^{\infty} \mathcal{A}_n \subseteq \dots$$

Logo,

$$\limsup \mathcal{A}_n = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

Por outro lado, temos:

$$\liminf \mathcal{A}_n = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \cap_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \cap_{n=3}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \dots \cup \cap_{n=m}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \dots$$

Mas

$$\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \cup \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_2 \cup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n = \cup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

Analogamente, temos:

$$\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1, \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2, \dots, \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$$

Logo,

$$\liminf \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n \dots = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

De sorte que:

$$\limsup \mathcal{A}_n = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \liminf \mathcal{A}_n$$

b) se $\{\mathcal{A}_n\}$ é crescente, temos:

$$\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{A}_n \supseteq \dots$$

Assim,

$$\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1, \quad \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2, \dots, \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n$$

Logo, pelo item a, temos:

$$\limsup \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \dots \cap \mathcal{A}_n \dots$$

Isto é,

$$\limsup \mathcal{A}_n = \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

Além disso,

$$\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \cap \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \supseteq \dots \mathcal{A}_2 \cap \cup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n.$$

Procedendo de forma análoga ao prescrito anteriormente, obtemos:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \supseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n \supseteq \cdots \supseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathcal{A}_n \supseteq \cdots$$

Assim

$$\begin{aligned} \liminf \mathcal{A}_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \bigcap_{n=3}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \cdots \cup \bigcap_{n=m}^{\infty} \mathcal{A}_n \cup \cdots \\ \liminf \mathcal{A}_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \end{aligned}$$

Logo,

$$\limsup \mathcal{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \liminf \mathcal{A}_n$$

c) Seja $\mathcal{S} = \{-1, 1\}$ e considere $\{\mathcal{A}_n\}$ dada por:

$$\mathcal{A}_n = \begin{cases} \{-1\}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \{1\}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Observe que:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \emptyset, \forall n$, desde que: $\mathcal{A}_{2k+1} = \{-1\}$ e $\mathcal{A}_{2k} = \{1\}$ são disjuntos.

Logo,

$$\liminf \mathcal{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \cup \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_i \cup \bigcap_{n=3}^{\infty} \mathcal{A}_i \cup \cdots \cup \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \cup \cdots = \emptyset = \bigcup_{i=n}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i = \bigcup_{i=n}^{\infty} \emptyset = \emptyset$$

Além disso,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_i = \mathcal{X}, \forall n, \text{ daí, obtemos:}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \cap \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_i \cap \bigcup_{n=3}^{\infty} \mathcal{A}_i \cap \cdots \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \cap \cdots &= \bigcap_{i=1}^{\infty} (\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{S} = \mathcal{S} \\ &= \limsup \mathcal{A}_n = \mathcal{S} \end{aligned}$$

Observação: Poderíamos tomar: $\mathcal{A}_n = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } n \text{ é par} \\ \mathcal{X}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$

$$\bullet \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=n}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_n = \liminf \mathcal{A}_n = \emptyset$$

$$\bullet \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i = \mathcal{X} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^n \mathcal{A}_n = \limsup \mathcal{A}_n = \mathcal{X}.$$

6. Se $\{\mathcal{A}_n\}$ é uma sequência de conjuntos de $\mathcal{X}$, prove que:

$$\emptyset \subseteq \liminf \mathcal{A}_n \subseteq \limsup \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{X}$$

Solução

Com efeito, $\emptyset \subseteq \mathcal{A}_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então, $\emptyset \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, em particular, temos:

$$\emptyset \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall n \geq 1$$

Logo,

$$\emptyset \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \cup \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathcal{A}_i \cup \cdots \cup \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i = \liminf \mathcal{A}_n$$

Se $x \in \liminf \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$, então, $x \in \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo, $x \in \mathcal{A}_i, \forall i \geq n$. Em particular, $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall i \geq n$, ou seja, $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i, x \in \bigcup_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{A}_i, x \in \bigcup_{i=n+2}^{\infty} \mathcal{A}_i, \dots$

Em particular, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i, \dots, x \in \bigcup_{i=n-1}^{\infty} \mathcal{A}_i$, então, $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall n \geq 1$, isto é, $x \in \bigcap_{i=n}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i = \limsup \mathcal{A}_n$.

Logo,

$$\emptyset \subseteq \liminf \mathcal{A}_n \subseteq \limsup \mathcal{A}_n$$

Agora, como cada $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{X}$, $\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{X}$, $\forall n \geq 1$. Daí, segue que:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i\right)}_{\subseteq \mathcal{X}} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i\right)}_{\subseteq \mathcal{X}} \cap \cdots \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i\right)}_{\subseteq \mathcal{X}} \cap \cdots \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i = \limsup \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Conclusão:

$$\emptyset \subseteq \liminf \mathcal{A}_n \subseteq \limsup \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{X}$$

7. Prove que:

- a) $\liminf \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$
- b) $\limsup \mathcal{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$

Solução

$\liminf \mathcal{A}_n = \{x \in \mathcal{X}; x \in \mathcal{A}_n, \text{ exceto para uma quantidade finita deles} \}$

$\Rightarrow) \liminf \mathcal{A}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$.

Se $x \in \liminf \mathcal{A}_n$, então, $x \in \mathcal{A}_n$, exceto para uma quantidade finita. Sem perda de generalidade, podemos supor que tal quantidade finita de $\mathcal{A}_n$'s se concentram no início da sequência, isto é, $x \notin \mathcal{A}_n$ para $n < n_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ arrumando se necessário. Então, $x \in \bigcap_{i=n_0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Observe que $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i, \dots, x \notin \bigcap_{i=n_0-1}^{\infty} \mathcal{A}_i$. No entanto, $x \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i)$, visto que $x \in \bigcap_{i=n_0}^{\infty} \mathcal{A}_i$. Daí, $\liminf \mathcal{A}_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$.

$\Leftarrow) \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \subseteq \liminf \mathcal{A}_n$

Se $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$, então, $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall n \geq n_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Portanto, $x \in \mathcal{A}_i, \forall i \geq n_0$ mas $x \notin \mathcal{A}_n$ para $n < n_0$ (uma quantidade finita). Podemos então arrumar a sequência $\mathcal{A}_n$, se necessário, de tal forma que $x \in \mathcal{A}_n$ para uma quantidade finita deles.

Logo,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \subseteq \liminf \mathcal{A}_n$$

Consequentemente, obtemos:

$$\liminf \mathcal{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$$

b) $\limsup \mathcal{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$

$$\limsup \mathcal{A}_n := \{x \in \mathcal{X}; x \in \mathcal{A}_n, \forall n \geq n_0\}$$

solução:

$\Rightarrow) \limsup \mathcal{A}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$.

Se $\limsup \mathcal{A}_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que: $x \in \mathcal{A}_n, \forall n \geq n_0$. Daí, $x \in \mathcal{A}_i$. Em particular, $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall k \geq 1$.

Logo, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$.

$\Leftarrow) \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \subseteq \limsup \mathcal{A}_n$

Se $x \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \cap \bigcup_{i=2}^{\infty} \mathcal{A}_i \cap \cdots \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i \cap \cdots]$, então, $x \in \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i, \forall n \geq 1$, donde, vem: $x \in \mathcal{A}_i, \forall i \geq n_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.

Logo, $x \in \limsup \mathcal{A}_n$.

Isto é,

$$\limsup \mathcal{A}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} \mathcal{A}_i$$

8. Dê exemplo de um espaço mensurável $\{\mathcal{S}, \mathfrak{A}\}$ e de uma função real $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ não mensurável de modo que f^2 e $|f|$ sejam mensuráveis.

Solução

Seja $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \mathcal{S}\}$ uma σ -álgebra e consideremos a função característica

$$\chi_E : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ -1, & x \notin E \end{cases},$$

onde: $\emptyset \neq E \subsetneq \mathcal{S}$. E é não mensurável, pois está fora da σ -álgebra $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \mathcal{S}\}$. Agora, χ_E é mensurável se, e só se, E é mensurável.

Logo, χ_E é não mensurável. Além disso, $(\chi_E)^C$ e $|\chi_E|$ é constante e igual a 1 contínua consequentemente mensurável.

9. Mostre que uma função $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E)$ é mensurável para qualquer boleaniano $E \subset \mathbb{R}$.

Solução

$\Rightarrow$) Suponha f mensurável. Então, pela questão 11, temos: $\mathfrak{A}_f = \{\mathcal{A} \subset \mathbb{R}; f^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathfrak{A}\}$ é uma σ -álgebra sendo f mensurável temos que os intervalos abertos da reta estão em $\mathfrak{A}_f$. Pois,

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathfrak{A} \Rightarrow (\alpha, +\infty) \in \mathfrak{A}_f, \forall \alpha$$

Logo, $(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b) \in \mathfrak{A}_f$. Pois, $[f < \alpha] = f^{-1}((-\infty, \alpha)) \Rightarrow (-\infty, \alpha) \in \mathfrak{A}_f$. Assim, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}_f$. Onde, vem:

$$E \in \mathfrak{B} \Rightarrow E \in \mathfrak{A}_f \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathfrak{A}$$

Logo, $f^{-1}(E)$ é mensurável.

$\Leftarrow$) Suponhamos que $f^{-1}(E)$ é mensurável para qualquer $E \in \mathfrak{B}$. Então, como $(\alpha, +\infty) \in \mathfrak{B}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathfrak{A}$ é mensurável.

Logo, f é mensurável.

10. Sejam $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado um boleaniano E da reta, mostre que $\varphi^{-1}(E)$ é um boleaniano da reta, usando este fato mostra que a composta $\varphi \circ f$ é mensurável.

Solução

Sendo $\mathfrak{B}$ a σ -álgebra de Borel-Lebesgue, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, temos pela questão 11 temos que:

$$\mathfrak{A}_\varphi = \{E \subset \mathbb{R}; \varphi^{-1}(E) \in \mathfrak{B}\} \quad \text{é uma } \sigma\text{-álgebra.}$$

Seja (a, b) um intervalo da reta, como φ é contínua então, temos: $\varphi^{-1}((a, b))$ é aberto. Logo $\varphi^{-1}((a, b)) \in \mathfrak{B}$, donde, vem: $(a, b) \in \mathfrak{A}_\varphi$, ou seja, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}_\varphi$. Então, dado um boleaniano E , tem-se: $E \subset \mathfrak{A}_\varphi$ e consequentemente, $\varphi^{-1}(E) \in \mathfrak{B}$.

Afirmção: $\varphi \circ f$ é mensurável

De fato,

$$[\varphi \circ f > \alpha] = \{x \in \mathcal{S}; (\varphi \circ f)(x) > \alpha\} = \{x \in \mathcal{S}; f(x) \in \mathcal{X}\} = f^{-1}(\mathcal{X}).$$

De sorte que, pela questão 8, temos: $f^{-1}(\mathcal{X})$ é mensurável, donde vem:

$$\{x \in \mathcal{S}; (\varphi \circ f)(x) > \alpha\} = [\varphi \circ f > \alpha] \quad \text{é mensurável.}$$

11. Se $\mathcal{A}$ -mensurável e φ é $\mathfrak{B}$ -mensurável, mostre que a composta $\varphi \circ f$ é $\mathcal{A}$ -mensurável.

Solução

Com efeito,

$$\{x \in \mathcal{S}; (\varphi \circ f)(x) > \alpha\} = \{x \in \mathcal{S}; \varphi(f(x)) > \alpha\} = \{x \in \mathcal{S}; f(x) \in \varphi^{-1}((\alpha, +\infty))\}.$$

Agora, como $(\alpha, +\infty) \in \mathfrak{B}$, então $\mathcal{X} = \varphi^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathfrak{B}$ (via questão 8).

Assim,

$$\{x \in \mathcal{S}; (\varphi \circ f)(x) > \alpha\} = \{x \in \mathcal{S}; f(x) \in \mathcal{X}\} = f^{-1}(\mathcal{X}).$$

Como $\mathcal{X} \in \mathfrak{B} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{X}) \in \mathcal{A}$ (de acordo com a questão 9).

Logo, $\varphi \circ f$ é $\mathcal{A}$ -mensurável.

12. Se $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de $\mathcal{S}$ e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Y}$ é qualquer função, mostre que a coleção $\mathcal{A}_f$ de subconjuntos de $\mathcal{Y}$ dada por:

$$\mathcal{A}_f = \{E \subset \mathcal{Y}; f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$$

é uma σ -álgebra.

Solução

$$\mathcal{A}_f = \{E \subset \mathcal{Y}; f^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}; \quad f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Y}$$

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}_f$, pois $\emptyset \subseteq \mathcal{Y}$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$

$y \in \mathcal{A}_f$, pois $y \subseteq \mathcal{Y}$ e $f^{-1}(y) \in \mathcal{A}$.

(ii) Se $E \in \mathcal{A}_f$, então $f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \Rightarrow [f^{-1}(E)]^C \in \mathcal{A}$. Como $[f^{-1}(E)]^C = f^{-1}(E^C)$, segue-se:

$$f^{-1}(E^C) \in \mathcal{A} \Rightarrow E^C \in \mathcal{A}_f.$$

(iii) Se $E_1, E_2, \dots, E_n$ então em $\mathcal{A}_f \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \mathcal{Y}$, visto que: $E_i \subseteq \mathcal{Y}; \forall i$ e

$$f^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(E_i) \in \mathcal{A}$$

Pois, $f^{-1}(E_i) \in \mathcal{A}, \forall i$. Logo, $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}_f$. Isto é, $\mathcal{A}_f$ é uma σ -álgebra. $\square$

13. Sejam E e F conjuntos mensuráveis. Mostre que uma função $f : E \cup F \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, suas restrições $f|_E$ e $f|_F$ são mensuráveis. Mostre que uma função $g : E \subset \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, a extensão nula $\tilde{g}$ de g é mensurável [a extensão nula de g é definida por $\tilde{g}(x) = g(x)$, se $x \in E$ e $\tilde{g}(x) = 0$, se $x \in \mathcal{S} \setminus E$].

Solução*1ª parte*

$\Rightarrow$) Suponhamos que $f : E \cup F \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável. Tem-se que: $\{x \in E \cup F; f(x) > \alpha\} = f^{-1}(\alpha, +\infty)$ é mensurável, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Agora, observe que:

$$\begin{aligned}\{x \in E; f(x) > \alpha\} &= \{x \in E \cup F; f(x) > \alpha\} \cap E \\ \{x \in F; f(x) > \alpha\} &= \{x \in E \cup F; f(x) > \alpha\} \cap F.\end{aligned}$$

Decorre do fato de que a intersecção de conjuntos mensuráveis também é mensurável concluímos que $f|_E$ e $f|_F$ são mensuráveis.

$\Leftarrow$) Suponhamos agora que $f|_E$ e $f|_F$ são mensuráveis, ou seja, $\{x \in E; f(x) > \alpha\}$ e $\{x \in F; f(x) > \alpha\}$ são mensuráveis, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Assim, $\{x \in E \cup F; f(x) > \alpha\} = \{x \in E; f(x) > \alpha\} \cup \{x \in F; f(x) > \alpha\}$ é mensurável.

Logo, f é mensurável.

2ª parte

$\Rightarrow$ Seja $g_1 : S \setminus E \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_1(x) \equiv 0, \forall x \in S \setminus E$ que é mensurável, visto que é constante.

Agora, $\tilde{g} : E \cup (S \setminus E) \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, suas restrições $\tilde{g}|_E$ e $\tilde{g}|_{(S \setminus E)}$ são mensuráveis (via parte 1) o prescrito acima ocorre se, e só se, g_1 e g foram mensuráveis, pois $\tilde{g}|_E = g$ e $\tilde{g}|_{(S \setminus E)} = g_1$. g_1 é mensurável. Logo, $\tilde{g}$ é mensurável se, e só se, g o for.

14. Mostre que o conjunto E dos pontos onde uma seqüência de funções mensuráveis converge é um conjunto mensurável.

Solução

Queremos mostrar que: $E = \{x \in S; f_n(x) \rightarrow f(x)\}$ é mensurável;

Fatos que ajudam.

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável não-negativa. Então, existe uma seqüência crescente $\{\varphi_n\}$ de funções simples, tais que: $\varphi_n \xrightarrow{p} f$.

solução: $f_n(x) \xrightarrow{p} f(x)$. Isto é, dado $\epsilon = 1 > 0$ existe $n_0 = n_0(x, 1) \in \mathbb{N}$, tal que: $|f_n(x) - f(x)| < 1, \forall n \geq n_0$.

Agora, como $|f_n(x)| - |f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| < 1, \forall n \geq n_0$.

Logo, $|f_n(x)| < |f(x)| + 1, \forall n \geq n_0$. Além disso, $\{f_n\}$ é uma seqüência de funções mensuráveis e portanto, $|f_n(x)|$ também é mensurável. Assim, $\{x \in S; |f_n(x)| < \alpha\} = [f_n < \alpha]$ é mensurável, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, desde que se tome: $|f(x)| + 1 = \alpha$. Logo, $E = \{x \in S; |f_n(x)| < \alpha\}$ é mensurável.

15. Mostre que a coleção $\mathfrak{F}$ constituída pelos intervalos abertos da reta com extremos racionais gera a σ -álgebra de Borel.

Solução

Com efeito $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$, visto que $\mathfrak{F}$ é gerada por intervalos abertos $(r, r_1) \subseteq \mathbb{R}$, com $r, r_1 \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, isto é, dado $a \in \mathbb{R}$ existe uma seqüência (q_n) de números racionais, tal que: $q_n \rightarrow a$.

Seja $[a, b]$ intervalos fechados de $\mathbb{R}$ e sejam as seqüências $\{q_n\}$ e $\{r_n\}$ de números racionais, tais que: $q_n \rightarrow a^+$ e $r_n \rightarrow b^-$. Assim, temos:

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n, r_n) \in \mathfrak{F}$$

Logo, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F} \Rightarrow \mathfrak{B} = \mathfrak{F}$

7.2 Medidas

Para os exercícios $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ estará representando um espaço de medida genérico.

Exercícios Resolvidos de Medida de Integração

1. Se $A \in \mathcal{A}$ e um conjunto fixado, mostre que a função $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$, $E \in \mathcal{A}$, define uma medida em $\mathcal{A}$. Fatos que ajudam

Um "Espaço de Medida" é uma terna $\{\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu\}$ constituída por um conjunto $\mathcal{S}$, uma σ -álgebra $\mathcal{A}$ é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, tal que:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{A}$
- (iii) Se $\{E_n\}$ é uma seqüência disjunta de conjuntos mensuráveis, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

(A função μ é denominada "função medida")

Medida de Lebesgue:

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}; \mathcal{A} = \mathfrak{B} - \sigma\text{-álgebra de Borel}$$

$$m : \mathfrak{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \text{ tal que: } m([a, b]) = b - a$$

Solução

$$\lambda(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$(i) \lambda(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) \lambda(E) = \mu(A \cap E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{A}$$

(iii) Seja $\{E_n\}$ uma seqüência disjunta de $\mathcal{A}$ de conjuntos mensuráveis, temos então que:

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n).$$

Logo, λ é uma Medida.

2. Se $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ são medidas em $\mathcal{A}$ e $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são números reais não negativos, mostre que a função λ definida em $\mathcal{A}$ por

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(E)$$

define uma medida em $\mathcal{A}$. Se $\{\mu_n\}$ é uma seqüência de medida em $\mathcal{A}$, com $\mu_n(\mathcal{S}) = 1, \forall n$, então

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^n 2^{-n} \mu_n(E)$$

define uma medida em $\mathcal{A}$. Calcule $\lambda(\mathcal{S})$.

Solução

1ª parte:

$$(i) \lambda(\emptyset) = \sum_{j=1}^n a_j \mu_j(\emptyset) = 0$$

(ii) $\lambda(E) = \mu(A \cap E) \geq 0$. Como $\mu_j(E) \geq 0, \forall j$ e $a_j \geq 0, \forall j$, segue que: $\lambda(E) \geq 0$ (iii) Seja $\{E_p\}$ uma seqüência disjunta de $\mathcal{A}$ de conjuntos mensuráveis. Temos então que:

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{p=1}^{\infty} \mu_j(E_p) = \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \mu_j\left(\bigcup_{p=1}^{\infty} E_p\right)\right) = \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} \lambda(E_p)}_{\lambda(E_p)}. \end{aligned}$$

Logo, λ é uma medida.

2ª parte: $\|\lambda(E_p)\| = \sum_{j=1}^n 2^{-n} \mu_n(E)$

(i) $\lambda(\emptyset) = \sum_{j=1}^n 2^{-n} \underbrace{\mu_n(E)}_0 = 0$;

(ii) $\lambda(E) = \sum_{j=1}^n 2^{-n} \mu_n(E) \geq 0$, visto que: $2^{-n} \mu_n(E) \geq 0, \forall n$

(iii) Seja $\{E_n\}$ uma seqüência disjunta de $\mathcal{A}$ de conjuntos mensuráveis. Temos então que:

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(E_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(E_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k). \end{aligned}$$

Note que:

$$\lambda(\mathcal{S}) = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu_n(\mathcal{S})\right)}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

3. Seja $E \subset \mathcal{A}$, com $\mu_n(E) \geq 0$, e suponha que existe um subconjunto $F \subset E$ não mensurável. Mostre que a seqüência $\{f_n\}$, $f_n \equiv 0, \forall n$, converge quase sempre para a função característica F . conclua que o limite quase sempre de uma seqüência de funções mensuráveis pode não ser mensurável. E se μ fosse a medida de lebesgue?

Solução

Como $f_n \equiv 0, \forall n$, segue-se que: $f_n \rightarrow F \equiv 0$ q.s.

$$\chi_F(x) = \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \notin F \end{cases} \quad . \text{ Assim, } f_n \rightarrow \chi_F(x), \forall x \notin F$$

Agora, como $F \subset E$, temos:

$f_n \rightarrow \chi_F(x), \forall x \notin E$. Além disso, sendo $\mu_n(E) = 0$, obtemos: $f_n \rightarrow \chi_F(x)$ q.s. (quase sempre).

Daí, segue-se que: $f_n : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ são mensuráveis, visto que: $f_n \equiv 0$ (f_n são contínuas $\forall n$). Mas converge q.s. para uma função $\chi_F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$. Pois, sabe-se que χ_F é mensurável se, e só se, F for mensurável.

{ Como vale para μ qualquer, em particular, é válido para $\mu = m : \mathfrak{B} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B} = \mathcal{A}$.

Isto é, basta proceder analogamente ao item anterior.

4. Seja $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{A}; \mu(E) = 0\}$. Se $E \in \mathcal{A}$ e F , mostre que $E \cap F \in \mathcal{C}$. Se $E_n \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N}$, mostre que $\cup E_n \in \mathcal{C}$. A coleção $\mathcal{C}$ é uma σ -álgebra?

Solução

Sejam $E \in \mathcal{A}$ e $F \in \mathcal{C}$. Então, temos $E, F \in \mathcal{A}$. Logo, ambos são mensuráveis, donde, sendo $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra, $E \cap F \in \mathcal{A}$. observe que: $E \cap F \subset F$. Assim, $0 \leq \mu(E \cap F) \leq \mu(F)$ como $F \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(F) = 0$. Logo, $\mu(E \cap F) = 0$. De sorte que: $E \cap F \in \mathcal{C}$.

Se $E_n \in \mathcal{C}$, temos $\cup E_n \in \mathcal{A}$. Além disso, $\mu(E_n) = 0$, para todo n . Logo,

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0 \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$$

Agora, Se $E \in \mathcal{C} \nRightarrow E^C \in \mathcal{C}$. Afortiori, $\mathcal{S}$ não necessariamente está em $\mathcal{C}$. Isto é, $\mathcal{C}$ não é uma σ -álgebra.

5. Seja $\mathcal{S} = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}$ a σ -álgebra constituída de todos os subconjuntos de $\mathcal{S}$, para $E \in \mathcal{A}$ defina

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é finito} \\ \infty, & \text{se } E \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Verifique se: μ define uma medida em $\mathcal{A}$.

Solução

(i) $\emptyset$ é finito. Donde, $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{A}$

(iii) Seja $\{E_n\}$ uma seqüência disjunta de conjuntos mensuráveis.

Temos dois casos a considerar:

1º caso: Se E_n é finito, $\forall n$. Então, temos: $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ é finito, daí, obtem-se:

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

2º caso: Se E_n é infinito, $\forall n$, então, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ é infinito. De fato que: $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \infty$.

Logo, μ é uma medida em $\mathcal{A}$.

Observação: Seja $E_n = \{n\}$, então, $\mu(E_n) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0$ e $\mu(E_n) = \mu(\mathbb{N}) = +\infty$.

Contradição!! $\square$

6. Dada uma seqüência $\{E_n\}$ de subconjuntos mensuráveis de $\mathcal{S}$, mostre que:

$$\leq \liminf \mu(E_n) \text{ e } \mu(\limsup E_n) \leq \limsup \mu(E_n)$$

sugestão: veja exercícios 1.1D

Solução Sabemos pelo exercícios 1.1D que:

$$\bullet \limsup E_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} E_n \text{ e}$$

$$\cdot \liminf E_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} E_n.$$

Daí, temos

$$\begin{aligned} \mu(\liminf E_n) &= \mu(\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} E_n) \\ &= \mu(\cup_{n=1}^{\infty} \cup \cap_{n=2}^{\infty} \cup \dots \cup \cap_{m=n}^{\infty} \cup \dots) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\cap_{m=n}^{\infty} E_n). \end{aligned}$$

7. Mostre que o eixo- x , $E_x = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ e o plano $P_{xy} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ tem medida de Lebesgue nula.

Solução

a) Considere a cobertura

$$I_n = (-n, n) \times \left(\frac{-\epsilon}{n \cdot 2^n}, \frac{\epsilon}{n \cdot 2^n} \right).$$

Então, temos: $E_x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

$$\begin{aligned} \ell(I_n) &= 2n \cdot \frac{2\epsilon}{n \cdot 2^n} = \frac{4\epsilon}{2^n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= 1 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\epsilon}{2^n} = 4\epsilon \end{aligned}$$

Agora, por definição, temos:

$$m^*(E_x) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < 4\epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Logo, $m(E_x) = m^*(E_x) = 0$.

b) $P_{xy} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$

Considere a cobertura

$$I_n = (-n, n) \times (-n, n) \times \left(\frac{-\epsilon}{n^2 \cdot 2^n}, \frac{\epsilon}{n^2 \cdot 2^n} \right)$$

Então, tem-se: $P_{xy} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

Além disso temos:

$$\begin{aligned} \ell(I_n) &= 2n \cdot 2n \cdot \frac{2\epsilon}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{8\epsilon}{2^n} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\epsilon}{2^n} = 8\epsilon \end{aligned}$$

Logo,

$$m^*(P_{xy}) = m(P_{xy}) = 0.$$

Observação: Se tomarmos $I_n = (-n, n) \times (-n, n) \times \left(\frac{-\epsilon}{n^2 \cdot 2^{n+3}}, \frac{\epsilon}{n^2 \cdot 2^{n+3}} \right)$.

Então, temos: $\ell(I_n) = 2n \cdot 2n \cdot \frac{2\epsilon}{n^2 \cdot 2^{n+3}} = \frac{\epsilon}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$.

8. Se f e g são mensuráveis e g , q.s., mostre que

$$f \cdot g \leq [\text{supess}(f)]_g.$$

Solução

Por definição, temos: $\text{supess}(f) := \inf \{C; f(x) \leq C \text{ q.s.}\}$. Além disso, $f \leq \text{supess}(f)$ q.s. e $g(x) \geq 0$ q.s., donde. Logo, $f \cdot g \leq g \text{supess}(f)$. $\square$

9. Se $\{R_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ é uma cobertura de E por retângulos do $\mathbb{R}^N$ e $m^*(E) < \infty$, mostre que para cada $\epsilon > 0$ existe uma cobertura $\{S_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ de E por retângulos abertos tal que:

$$R_k \subset S_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(S_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) + \epsilon$$

Fatos que ajudam

- Dada $\epsilon > 0$, $x_0, y_0 \in A$, tais que: $x_0 < \inf A + \epsilon$ e $y_0 > \sup A - \epsilon$;
- $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(S_k) \leq m^*(E) + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) + \epsilon$
- $R_k \subset S_k$

Solução

Com efeito, por hipótese $m^*(E) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) < \infty$, então considerando $\{R_k\}_{k \in \mathbb{R}}$ cobertura de E por retângulos do $\mathbb{R}^N$ com $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) < \infty$, os retângulos acima são descritos por:

$$R_k = (a_{1k}, b_{1k}) \times \cdots \times (a_{nk}, b_{nk}) = \prod_{j=1}^N (a_{jk}, b_{jk})$$

$$\text{vol}(R_k) = (b_{1k} - a_{1k}) \times \cdots \times (b_{nk} - a_{nk}) \quad \text{e} \quad E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k.$$

Dado $\epsilon > 0$, consideremos os conjuntos

$$S_k = (a_{1k}, b_{1k}) \times \cdots \times (a_{n-1k}, b_{n-1k}) \times \left(a_{nk} - \frac{\epsilon}{42^k(b_{n-1k} - a_{n-1k})}, b_{nk} + \frac{\epsilon}{42^k(b_{n-1k} - a_{n-1k})} \right).$$

Observe que: $R_k \subset S_k$ além disso, temos:

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_k) &= (b_{1k} - a_{1k}) \cdots (b_{n-1k} - a_{n-1k}) \left(b_{nk} - a_{nk} + \frac{\epsilon}{42^k(b_{n-1k} - a_{n-1k})} \right) \Rightarrow \\ \text{vol}(S_k) &= (b_{1k} - a_{1k}) \cdots (b_{n-1k} - a_{n-1k}) (b_{nk} - a_{nk}) 2^k \frac{(b_{n-1k} - a_{n-1k}) + 2\epsilon}{42^k(b_{n-1k} - a_{n-1k})} \Rightarrow \\ \text{vol}(S_k) &= (b_{1k} - a_{1k}) \cdots (b_{nk} - a_{nk}) (b_{n-1k} - a_{n-1k}) + \frac{2\epsilon}{42^k}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{vol}(S_k) = (b_{1k} - a_{1k}) \cdots (b_{nk} - a_{nk}) (b_{n-1k} - a_{n-1k}) + \frac{2\epsilon}{42^k}.$$

Daí, obtemos:

$$\text{vol}(S_k) = \text{vol}(R_k) + \frac{2\epsilon}{42^k} = \text{vol}(R_k) + \frac{\epsilon}{2^{k+1}}.$$

Agora, como $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) < \infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^k} = \frac{2\epsilon}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{2\epsilon}{4} < \infty$.

Segue-se que:

$$\begin{aligned} \text{vol}(S_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\text{vol}(R_k) + \frac{2\epsilon}{2^k} \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{2^k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) + \frac{2\epsilon}{4} \end{aligned}$$

Logo, $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(S_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) + \frac{2\epsilon}{4}$, com $R_k \subset S_k$.

Observação: A prova contínua válida caso não ajustemos as majorações a fim de que: $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(S_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) + \epsilon$, dado a abstrariedade do $\epsilon > 0$.

10. Mostre que um subconjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ é mensurável se, e somente se, dado $\epsilon > 0$ existe um conjunto compacto $K \subset E$ tal que $m^*(E \setminus K) < \epsilon$. [$m(E) < \infty$]

Solução

$\Rightarrow$) Suponhamos que E é mensurável além disso, $m^*(E) < \infty$. Agora, considerando

$$R_n = \overbrace{[-n, n] \times \cdots \times [-n, n]}^{n \text{ vezes}} \cap E, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $m^*(E) < \infty$, então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que: $m^*(E) < m^*(R_{n_0}) + \frac{\epsilon}{2}$.

Assim, como R_{n_0} é mensurável, pois é a interseção de conjuntos mensuráveis então pela questão 1.6C existe um fechado $K \subset R_{n_0} + \frac{\epsilon}{2}$, tal que:

$$m^*(E) < m^*(R_{n_0}) + \frac{\epsilon}{2}$$

Portanto

$$m^*(E) < m^*(K) + \epsilon, \text{ ou ainda, } m^*(E \setminus K) < \epsilon.$$

$\Leftarrow$) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um compacto $K_n \subset E$ tal que: $m^*(E \setminus K_n) < \frac{1}{n}$ tome $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, temos que: $F \in F_\delta$

$$E \setminus F \subset E \setminus F_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo,

$$0 \leq m^*(E \setminus F) \leq m^*(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Agora, fazendo $n \rightarrow \infty$, segue-se que: $m^*(E \setminus F) = 0$.

Logo, $E \setminus F$ é mensurável. Sendo $F \in F_\delta$ temos que F é mensurável.

Portanto,

$$E = (E \setminus F) \cup F \text{ é mensurável}$$

11. Dado um subconjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}$ e dado $\epsilon > 0$, mostre que existe um conjunto fechado $F \subset E$ tal que $m(E) < m(F) + \epsilon$. Mostre também que:

$$m(E) = \sup\{m(F); F \text{ fechado}, F \subset E\}.$$

Solução

1º caso: Suponhamos que $m(E) < \infty$ e $m(F) < \infty$. Então, o complementar de E é mensurável.

Seja $\epsilon > 0$, então, existe um aberto $\mathcal{O} \supset E^C$, tal que: $m^*(\mathcal{O}) < m^*(E^C) + \epsilon$.

Assim, $\mathcal{O} \setminus E^C = E \setminus \mathcal{O}^C$. $\mathcal{O}^C \subset E, E^C \subset \mathcal{O}$

Fazendo $\mathcal{O}^C = F$, então, temos: $F \subset E$ (F é fechado)

$$m(E \setminus F) = m(E \setminus \mathcal{O}^C) = m(\mathcal{O} \setminus E^C).$$

Logo, $m(E) - m(F) = m(\mathcal{O}) - m(E^C) < \epsilon$. Onde, vem $m(E) + m(F) < \epsilon$.

Logo, $\sup m(F) = m(E)$ ou ainda, $m(E) = \sup\{m(F); F \text{ fechado}, F \subset E\}$.

De fato, $m(E) \leq \sup m(F)$ pois $\sup m(F)$ é cota superior para $m(E)$.

Agora, dado $\epsilon > 0$ existe $m(F)$

$$m(F) > m(E) - \epsilon.$$

Isto é, $m(E)$ é a menor das cotas superior. Portanto, $\sup m(F) = m(E)$.

Observação: (*) Dado $\epsilon > 0$ e $E \subset \mathbb{R}$, existe um aberto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, tal que: $E \subset \mathcal{O}$ e $m^*(\mathcal{O}) < m^*(E) + \epsilon$.

$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ se $m(E) < \infty$, $E \subset F$, sendo E e F mensuráveis.

(**) $\mathcal{O} \setminus E^C = E \setminus \mathcal{O}^C$. De fato, $x \in \mathcal{O} \setminus E^C \Leftrightarrow x \in \mathcal{O}$ e $x \notin E^C \Leftrightarrow x \in E$ e $x \notin \mathcal{O}^C \Leftrightarrow x \in E \setminus \mathcal{O}^C$.

Logo, $\mathcal{O} \setminus E^C = E \setminus \mathcal{O}^C$.

(***) $E^C \subset \mathcal{O}$ e $\mathcal{O}^C \subset E$

$$m(E \setminus \mathcal{O}^C) = m(E) - m(\mathcal{O}^C) \quad (\mathcal{O}^C \subset E)$$

$$m(\mathcal{O} \setminus E^C) = m(\mathcal{O}) - m(E^C) \quad (E^C \subset \mathcal{O})$$

$E, E^C, \mathcal{O}, \mathcal{O}^C$ são mensuráveis e $m(E \setminus F) = m(E) - m(F)$.

12. Mostre que $E \subset \mathbb{R}^N$ é mensurável se, e somente se, existem um conjunto $F \in \mathcal{F}_\sigma$ e um conjunto E_0 mensurável de medida nula, tais que:

$$F \subset E, E_0 \subset E \text{ e } E = F \cup E_0.$$

Solução

$\Rightarrow$ Seja E mensurável então pela questão anterior para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um fechado $F_n \subset E$, tal que: $m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$. Tome $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}_\sigma$ e $F \subset E$, pois $F_n \subset E, \forall n$ e defina $E_0 = E \setminus F$, observe que $E_0 \subset E$ e $E = F \cup (E \setminus F) = F \cup E_0$. Assim, basta mostrar que $m(E_0) = 0$.

De fato, para cada n , temos: $m^*(E \setminus F) \leq m(E \setminus F_n)$, pois $E \setminus F = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq E \setminus F_n$. Assim, $m^*(E \setminus F) < \frac{1}{n}$. Logo, $m(E_0) = 0$. Conseqüentemente E_0 é mensurável.

$\Leftarrow$ Como $E = F \cup E_0$ e sendo F e E_0 mensuráveis. Logo, E é mensurável, onde: $E_0 = E \setminus F$.

13. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja J_n o retângulo fechado do $\mathbb{R}^N$

$$J_n = [-n, n] \times [-n, n] \times \cdots \times [-n, n].$$

(a) Mostre que $E \subset J_n$ é mensurável $\Leftrightarrow m(J_n) = m^*(E) + m^*(J_n \setminus E)$.

(b) Mostre que $E \subset \mathbb{R}^N$ é mensurável $\Leftrightarrow E \cap J_n$ é mensurável para cada n .

Solução

(a) $\Rightarrow$ Se $E \subset J_n$ é mensurável $\Rightarrow m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C), \forall A \subset \mathbb{R}^n$.

Fazendo $A = J_n$, segue-se que: $m^*(J_n) = m^*(J_n \cap E) + m^*(J_n \cap E^C)$.

Como $E \subset J_n$, temos que: $J_n \cap E = E, J_n \cap E^C = J_n \setminus E$.

Logo, $m^*(J_n) - m^*(E) = m^*(J_n \setminus E)$ ou ainda, $m^*(J_n) = m^*(E) + m^*(J_n \setminus E)$.

$\Leftarrow$ Suponhamos $m^*(J_n) = m^*(E) + m^*(J_n \setminus E)$ e seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, temos: $A \subseteq J_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $E \subset J_n$.

Agora, observe que A é união disjunta descrita por: $A = (A \cap E) \cup (A \cap J_n \setminus E)$.

Logo, $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap J_n \setminus E)$. Como

$$J_n \setminus E = J_n \cap E^C \quad \text{e} \quad A \cap J_n \setminus E = A \cap J_n \cap E^C = A \cap E^C$$

segue-se daí que: $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C); \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$. Isto é, E é mensurável.

Observação: Se considerarmos $A = \mathbb{R}^N$. Então, temos: $A = (A \cap E) \cup (A \cap (\mathbb{R}^N \setminus E)) = (A \cap E) \cup (A \cap E^C)$. Desta forma, " A " continua sendo descrita pela união disjunta de $A \cap E$ com $A \cap E^C$.

(b) Mostre que $E \subset \mathbb{R}^N$ é mensurável $\Leftrightarrow E \cap J_n$ é mensurável para cada n .

Fato que ajuda

Definição: E é mensurável quando $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$, $\forall A \subset \mathbb{R}^N$.

solução: Com efeito, decorre da definição acima que: E é mensurável $\Leftrightarrow m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$, $\forall A \subset \mathbb{R}^N$. Daí, tomando-se $A = J_n$, segue-se:

$$\begin{aligned} m^*(J_n) &= m^*(J_n \cap E) + m^*(J_n \cap E^C) \quad \text{para cada } n. \\ J_n \cap E^C &= J_n \setminus (J_n \cap E) \quad (2). \end{aligned}$$

Agora, substituindo (2) em (1), obtemos: $m^*(J_n) = m^*(J_n \cap E) + m^*(J_n \cap (J_n \setminus E))$. Além disso, $J_n \cap E \subset J_n$, conseqüentemente, pelo item anterior temos que: $(J_n \cap E) \subset J_n$ é mensurável $\Leftrightarrow m^*(J_n) = m^*(J_n \cap E) + m^*(J_n \cap (J_n \setminus E))$ ou ainda, $J_n \cap E$ é mensurável.

14. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^N$, tais que $\text{dist}(A, B) > 0$. Mostre que $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

Solução

Suponhamos $m^*(A) < \infty$ e $m^*(B) < \infty$. Como $\text{dist}(A, B) > 0$, então $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$.

Logo, podemos escolher $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ coberturas por retângulos abertos do $\mathbb{R}^N$ de A e B , respectivamente, tal que: $\cup R_k \cap \cup S_k = \emptyset$.

Seja $T_k = R_k \cup S_k$ e observe que $\cup_{k=1}^{\infty} T_k \supset A \cup B$.

Logo, $\text{vol}(T_k) = \text{vol}(R_k \cup S_k) = \text{vol}(R_k) + \text{vol}(S_k)$ visto que R_k e S_k são mensuráveis e disjuntos.

Assim, como $m^*(A) < \infty$ e $m^*(B) < \infty$, então $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) < \infty$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(S_k) < \infty$.

Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k \cup S_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(R_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(S_k)$$

Daí, tomando-se o ínfimo sobre todas as coberturas, obtemos: $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.

Observação: Se $m^*(A) = m^*(B) = \infty$, então, temos: $m^*(A \cup B) = \infty$.

15. Dados um retângulo R do $\mathbb{R}^N$ e um ponto $x \in \mathbb{R}^N$, mostre que a transformação $x + R = \{x + y; y \in R\}$ é um retângulo do $\mathbb{R}^N$ do mesmo tipo que R e $\text{vol}(x + R) = \text{vol}(R)$.

Fatos que ajudam

- Retângulo aberto: $R =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_N, b_N[$ onde $R \subset \mathbb{R}^N$.
- Volume de R : $\text{vol}(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_N - a_N)$.

Solução

Consideremos um retângulo aberto do $\mathbb{R}^N$, a saber: $R =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots \times]a_N, b_N[$. Além disso, temos: $x + R = \{x + y; y \in R\}$. Assim, tomando-se: $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ com $y_j \in]a_j, b_j[$ e $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)$, segue-se:

$$\begin{aligned} x + R &= \{x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N); y_j \in]a_j, b_j[\} \\ &= \{(z_1, z_2, \dots, z_N); z_j = x_j + y_j \text{ com } y_j \in]a_j, b_j[\} \\ &= \{(z_1, z_2, \dots, z_N); z_j \in [x_j + a_j, x_j + b_j[\} \\ &= \{(z_1, z_2, \dots, z_N); z_j \in [a_j + x_j, b_j + x_j[\}. \end{aligned}$$

Logo, $\text{vol}(x + R)$

$$\begin{aligned}
x + R &=]a_1 + x_1, b_1 + x_1[\times]a_2 + x_2, b_2 + x_2[\times \cdots \times]a_N + x_N, b_N + x_N[\quad e \\
\text{vol}(x + R) &= (b_1 + x_1) - (a_1 + x_1) \times ((b_2 + x_2) - (a_2 + x_2)) \times \cdots \times ((b_N + x_N) - (a_N + x_N)) \\
&= (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_N - a_N) = \text{vol}(R).
\end{aligned}$$

Portanto, $\text{vol}(x + R) = \text{vol}(R)$.

16. 16- Dados $E, F \subset \mathbb{R}^N$, demonstre os seguintes fatos com relação á transformação.

- (a) E é aberto se, e somente se, $x + E$ é aberto;
- (b) $(x + E) \cap F = x + [E \cap (-x + F)]$;
- (c) $m^*(x + E) = m^*(E)$;
- (d) E é mensurável se, e somente se, $x + E$ é mensurável. Neste caso $m(E) = m(x + E)$.

Solução

(a) $\Rightarrow$ Considere E aberto e seja $y \in x + E$, então, para algum $e \in E$, tem-se: $y = x + e$.

Agora,

$$\begin{aligned}
B_\epsilon(x + e) &= \{w \in \mathbb{R}^n; \|w - (x + e)\| < \epsilon\} = \{w \in \mathbb{R}^n; \|(w - x) - e\| < \epsilon\} \\
x + B_\epsilon(e) &= \{x + T; T \in B_\epsilon(e)\} = \{x + T; \|T - e\| < \epsilon\}.
\end{aligned}$$

Logo, $B_\epsilon(x + e) = x + B_\epsilon(e)$.

Além disso, como $y = x + e$, temos:

$$B_\epsilon(y) = B_\epsilon(x + e) = x + B_\epsilon(e) \subset x + E.$$

Visto que, $B_\epsilon(e) \subset E$ para $\epsilon > 0$ conveniente.

$\Leftarrow$ Com efeito, $x + E$ é aberto e seja $e \in E$. Então, temos: $(y = x + e) \in (x + E)$. Daí, existe $\epsilon > 0$, tal que: $B_\epsilon(x + e) \subset x + E$. Além disso,

$$B_\epsilon(x + e) = x + B_\epsilon(e) \subset x + E.$$

Afirmção: $B_\epsilon(e) \subset E$

Suponhamos que não ocorra. Isto é, $B_\epsilon(e) \not\subset E$. então, existe $T \in B_\epsilon(e)$ tal que: $T \notin E$.

Logo, $x + T \notin x + E$, donde, vem: $x + B_\epsilon(e) \not\subset x + E$. Absurdo!

Portanto, $B_\epsilon(e) \subset E$, ou ainda, E é um aberto.

(b) $(x + E) \cap F = x + [E \cap (-x + F)]$;

(1) $(x + E) \cap F = \{x + e; e \in E\} \cap \{f; f \in F\} = \{f; f = x + e, e \in E \text{ e } f \in F\}$.

Por outro lado, temos: $E \cap (-x + F) = \{e; e \in E\} \cap \{-x + f; f \in F\} = \{e; e = -x + f; f \in F \text{ e } e \in E\}$.

Daí, obtemos:

(2) $x + [E \cap (-x + F)] = \{e; x + e = (x + (-x)) + f; f \in F \text{ e } e \in E\}$. Logo, de (1) e (2), segue-se que:

$$(x + E) \cap F = x + [E \cap (-x + F)]$$

(c) $m^*(x + E) = m^*(E)$

Por definição $m^*(E) = \inf \{\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(R_n); R_n \text{ é cobertura de } E\}$.

Dado $\epsilon > 0$ existe T_n cobertura de E , tal que: $\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(T_n) < \inf \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(R_n) + \epsilon$.

Além disso, temos: $x + E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (x + T_n)$. Conseqüentemente, obtemos: $m^*(x + E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(x + T_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(T_n)$.

[Visto que, pelo exercício anterior temos: $\text{vol}(x + R) = \text{vol}(R)$.]

Logo, $m^*(x + E) \leq m^*(E)$.

Por outro lado, temos: $E = [x + (-x)] + E = -x + (x + E)$. Donde $m^*(E) = m^*([x + (-x)] + E) = m^*(-x + (E + x))$.

Agora, fazendo $x + E = \widehat{E}$ e aplicando I, vem:

$$m^*(E) = m^*(-x + (E + x)) = m^*(-x + \widehat{E}) \leq m^*(\widehat{E}) = m^*(x + E),$$

ou ainda, $m^*(E) \leq m^*(x + E)$ (II) e portanto, de (I) e (II), obtem-se: $m^*(E) = m^*(x + E)$.

(d) $\Rightarrow$ Se E é mensurável. Então, $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$,

$\forall A$. Além disso, sabe-se que:

$$m^*(A) = m^*(x + A), \quad m^*(A \cap E) + m^*(x + (A \cap E)) \quad e \quad m^*(A \cap E^C) = m^*(x + (A \cap E^C)).$$

Logo,

$$(I) \quad m^*(x + A) = m^*(x + (A \cap E)) + m^*(x + (A \cap E^C)).$$

Agora, decorre do item (b) que:

$$-x + [A \cap (-x + F)] = (x + A) \cap F$$

$$-x = F = E \text{ se, e só se, } F = x + E$$

$$\bullet \quad x + [A \cap E] = (x + A) \cap (x + E).$$

(II)

$$\begin{aligned} (x + A) \cap (x + E) &= \{x + a; a \in A\} \cap \{x + e; e \in E\} = \\ &= \{x + a = x + e; a \in A \text{ e } e \in E\} = x + (A \cap E) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad -x + F = E^C \Rightarrow F = x + E^C = (x + E)^C.$$

Seja $w \in (x + E)^C$, então $w \notin x + E$ se, e só se, $w \neq x + e$, para todo $e \in E \Leftrightarrow w - x \neq e, \forall e \in E \Leftrightarrow (w - x) \notin E \Leftrightarrow (w - x) \in E^C \Leftrightarrow w \in x + E^C$.

(III) $x + (A \cap E^C) = (x + A) \cap (x + E^C)$.

logo, substituindo (II) e (III), em (I), temos:

$$m^*(x + A) = m^*((x + A) \cap (x + E)) + m^*((x + A) \cap (x + E^C)).$$

Façamos $x + A = \widehat{A}$. Assim, obtemos: $m^*(\widehat{A}) = m^*(\widehat{A} \cap (x + E)) + m^*(\widehat{A} \cap (x + E^C))$ ou ainda, $m^*(\widehat{A}) = m^*(\widehat{A} \cap (x + E)) + m^*(\widehat{A} \cap (x + E)^C)$.

Dito de outro modo, $x + E$ é mensurável.

$\Leftrightarrow$ Se $x + E$ é mensurável, então, E é mensurável e $m(x + E) = m(E)$. Suponhamos que $x + E$ é mensurável, então,

$$m^*(\widehat{A}) = m^*(\widehat{A} \cap (x + E)) + m^*(\widehat{A} \cap (x + E^C)).$$

Agora, fazendo $A = \widehat{A} - x$, obtemos: $m^*(x + A) = m^*((x + A) \cap (x + E)) + m^*((x + A) \cap (x + E^C)), \forall A$. Logo, $m^*(x + A) = m^*(x + (A \cap E)) + m^*(x + (A \cap E^C))$ ou ainda, $m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$. Isto é, E é mensurável. Além disso, $m^*(x + E) = m^*(E)$. De sorte que: $m(x + E) = m(E)$.

17. Dado $E \subset \mathbb{R}^N$, mostre que: $m^*(E) = \inf\{m(G); E \subset G, G \text{ aberto}\}$. Usando este fato, mostre que existe um conjunto $G \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $m^*(E) = m(G)$.

Solução

Por definição, temos: $m^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j); \{R_j\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ cobertura de } E\right\}$. Agora, suponhamos que $m(E) < \infty$, então, dado $\epsilon > 0$ existe uma cobertura $\{S_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de E , tal que pelo 1º exercício da lista, a saber, 1.6 A, temos

$$R_j \subset S_j \quad e \quad \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(S_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) + \epsilon$$

Tome $G = \cup_{j=1}^{\infty} S_j$, G é aberto. Além disso, temos:

$$m^*(G) = m^*\left(\cup_{j=1}^{\infty} S_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(S_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \text{vol}(R_j) + \epsilon < m^*(E) + 2\epsilon$$

Como, $m^*(G) < m^*(E) + 2\epsilon, \forall \epsilon > 0$ arbitrário, segue-se daí que: $m^*(E) = \inf\{m(G); E \subset G, G \text{ aberto}\}$.

Agora, dado $\epsilon = \frac{1}{n}$ e seja G_n o aberto descrito acima, ($G \subset G_n, \forall n$).

Seja

$$G = \cap_{n=1}^{\infty} G_n = (G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \cap \dots) \in \mathcal{G}_\delta.$$

Logo, para cada n , temos: $m(G) \leq m(G_n) < m^*(E) + \frac{1}{n}$. Onde, $m(G) \leq m^*(E)$. Por outro lado, $E \subset G$ ($E \subset G \subset G_n, \forall n$), donde $m(G) = m^*(E)$. Portanto, $m(G) = m^*(E)$.

7.3 Espaço L^p

Exercícios Resolvidos de Medida de Integração

1. 1- Seja $1 < p < \infty$ e q o seu índice conjugado. Se $f \in L^p(0, \infty)$, mostre que para $x > 0$ se tem

$$\left| \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \|f\|_p (xq)^{-1/q}$$

Solução

Com efeito, $e^{-xt} \in L^q(0, \infty)$, então, temos

$$\int_0^\infty |e^{-xt}|^q dt = \int_0^\infty e^{-xtq} dt = \frac{1}{xq} e^{-xtq} \Big|_0^\infty = \lim_{B \rightarrow \infty} -\frac{e^{-xtq}}{xq} \Big|_0^B = \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-xtq}}{xq} + \frac{1}{xq} \right) = \frac{1}{xq}$$

Agora, sabemos que:

$$\left| \int f \cdot g \right| \leq \int |f \cdot g| \stackrel{*}{\leq} \|f\|_p \|g\|_q$$

onde (*) é a desigualdade de Hölder.

Assim,

$$\left| \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-xt} f(t)| dt \leq \|e^{-xt}\|_q \|f(t)\|_p = \left(\frac{1}{xq} \right)^{1/q} \cdot \|f\|_p.$$

Logo,

$$\left| \int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \left(\frac{1}{xq} \right)^{1/q} \cdot \|f\|_p$$

2. Suponhamos que $f \in L^p(0, \infty)$, $\forall p \geq 1$. Para que valores de p a função $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1+x}}$ está em $L^1(0, \infty)$?

Solução

Seja $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por: $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x}}$. Então observe que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) dx &= \int_0^\infty (x+1)^{-q/2} dx = \left. \frac{(x+1)^{-q/2+1}}{-\frac{q}{2}+1} \right|_0^\infty = \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{(B+1)^{1-\frac{q}{2}}}{1-\frac{q}{2}} - \frac{1}{1-\frac{q}{2}} \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 1 - \frac{q}{2} \geq 0 \\ \frac{1}{\frac{q}{2}-1}, & \text{se } 1 - \frac{q}{2} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) dx = \frac{2}{q-2}$, desde que, $q > 2$.

Agora,

$$\left| \int_0^\infty \left(\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}} \right) dx \right| \leq \int_0^\infty \left| \left(\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}} \right) \right| dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f(x)\|_p \left\| (x+1)^{-\frac{1}{2}} \right\|_q$$

$$\bullet \left\| (x+1)^{-\frac{1}{2}} \right\|_q^q = \int_0^\infty |(x+1)^{-\frac{q}{2}}| dx = \frac{2}{q-2}, \text{ desde que, } q > 2.$$

Isto é, $\left\| \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right\|_q = \left(\int_0^\infty |(x+1)^{-\frac{q}{2}}| dx \right)^{1/q} < \infty$, donde vem: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \in L^q(0, \infty)$, para todo $q > 2$. Além disso, temos $f \in L^p(0, \infty)$. Isto é,

$$\|f\|_p =: \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

$$\left| \int_0^\infty \left(\frac{f(x)}{\sqrt{1+x}} \right) dx \right| \leq \|f(x)\|_p \cdot \frac{2}{q-2}, \forall q > 2.$$

Assim, $\|f(x)\|_p \cdot \frac{2}{q-2} < \infty$, para todo $p \neq 2$. Consequentemente, temos: $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x}} \in L^1(0, \infty)$, desde que $p \neq 2$.

3. Mostre que $C^0[a, b] \subset L^p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, e que existe uma constante positiva C , tal que:

$$\|f\|_p \leq C \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \forall f \in C^0[a, b].$$

Solução

$C^0[a, b]$ é o espaço vetorial das funções reais contínuas em $[a, b]$.

1º caso: $p = 1$

Co efeito, $[a, b]$ é compacto e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Então, f atinge o máximo e o mínimo em $[a, b]$. Logo, $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Agora,

$$(*) \quad \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b |f(x_0)| dx = |f(x_0)| \int_a^b 1 dx = |f(x_0)| \cdot m([a, b]).$$

Logo, $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$.

2º caso: $1 < p < \infty$

Seja $f \in L^1(a, b)$, então, $|f|^p \in L^{1/p}(a, b)$. Visto que, $\int_a^b (|f(x)|^p)^{1/p} = \int_a^b |f| < \infty$.

Daí,

$$(**) \quad \int_a^b |f(x)|^p \cdot 1 dx \leq \| |f|^p \|_{\frac{1}{p}} \cdot \| 1 \|_{\frac{1}{1-p}} = \| f \|^p m([a, b])^{1-p} < \infty.$$

De sorte que: $f \in L^1(a, b)$.

3º caso: $p = \infty$

$\sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = \inf \{ C; f(x) \leq C, q.s. \} \leq f(x_0)$. Logo, $f \in L^\infty(a, b)$, ou ainda, $C^0(a, b) \subset L^p(a, b), 1 \leq p < \infty$.

Decorre de (**) que:

$$\begin{aligned} \| f \|_p &= \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \leq (\| f \|_p m([a, b])^{1-p})^{1/p} = \| f \| m([a, b])^{\frac{1}{p}-1} = \\ &= m([a, b])^{\frac{1}{p}-1} \int_a^b |f| \leq m([a, b])^{\frac{1}{p}-1} |f(x_0)| \int_a^b 1 dx = \\ &= m([a, b])^{\frac{1}{p}-1} |f(x_0)| m([a, b]) = m([a, b])^{\frac{1}{p}} |f(x_0)| = \\ &= C \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \end{aligned}$$

Logo, $\| f \|_p \leq C \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

4. Se $f, g \in L^1(a, b)$, então $\sqrt{|fg|} \in L^1(a, b)$ e se $0 < p, q < 1, p + q = 1$, então $|f|^p |g|^q \in L^1(a, b)$.

Solução :

Observe que: $\left(\int_a^b |f| \right)^{1/2} = \left\{ \int_a^b (|f|^{1/2})^2 \right\}^{1/2}$. Assim, se $f, g \in L^1(a, b)$ então, $|f|^{1/2} \in L^2(a, b)$ e $|g|^{1/2} \in L^2(a, b)$. Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, segue-se da desigualdade de Hölder que: $|f|^{1/2} |g|^{1/2} \in L^1(a, b)$, ou ainda,

$$\int_a^b \sqrt{|fg|} dx = \int_a^b \sqrt{|f|} \cdot \sqrt{|g|} dx = \int_a^b |f|^{1/2} |g|^{1/2} dx < \infty.$$

Logo, $\sqrt{|fg|} \in L^1(a, b)$. Agora, como $f, g \in L^1(a, b)$, segue que:

$$|f|^p \in L^{1/p}(a, b) \quad e \quad |g|^q \in L^{1/q}(a, b) \quad \text{sendo} \quad \frac{1}{1/p} + \frac{1}{1/q} = 1.$$

Temos, $|f|^p |g|^q \in L^1(a, b)$ (via Hölder).

5. Extenda a desigualdade de Minkowski para n funções.

Solução

Seja $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^p(E), p \geq 1$, então, $f_1 + f_2 + \dots + f_n \in L^p(E)$ e $\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\| \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p$.

(i) Para $n = 2$, temos $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$ (via teorema já prescrito anteriormente)

(ii) Suponhamos que a desigualdade vale para n , então, falta mostrar para $n + 1$.

Vejamos

$$\|(f_1 + f_2 + \dots + f_n) + f_{n+1}\|_p \leq \|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|_p + \|f_{n+1}\|_p.$$

Agora, pela hipótese de indução sobre n , temos

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n\|_p = \left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_p \leq \|f_1\|_p + \dots + \|f_n\|_p$$

ou ainda,

$$\left\| \sum_{j=1}^n f_j \right\|_p \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p$$

Assim,

$$\|f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1}\|_p \leq \sum_{j=1}^n \|f_j\|_p + \|f_{n+1}\|_p$$

Logo,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-1} f_j \right\|_p \leq \sum_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_p$$

6. Sejam $f \in L^r$ e $g \in L^s$, $r, s > 0$. Mostre que: $f \cdot g \in L^p$, onde: $p = \frac{rs}{r+s}$.

Solução

Se $f \in L^r$, então, $\int (|f|^p)^{r/p} = \int |f|^r < \infty$. Logo, $f \in L^{r/p}$.

Analogamente, temos

se $g \in L^s$, então, $\int (|g|^p)^{s/p} = \int |g|^s < \infty$. Logo, $g \in L^{s/p}$.

Agora, sendo $\frac{r}{p}$ e $\frac{s}{p}$ índices conjugados, temos

$$\frac{1}{\frac{r}{p}} + \frac{1}{\frac{s}{p}} = \frac{p}{r} + \frac{p}{s} = p \frac{(s+r)}{rs} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$$

De sorte que:

Usando a Desigualdade de Hölder $|f|^p |g|^p \in L^1$, ou ainda, $\int |f g|^p = \int |f|^p |g|^p < \infty$. Donde vem: $f, g \in L^p$.

7. Seja E um conjunto mensurável e seja $\mu_0^+ = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mensurável tal que: } f > 0 \text{ q.s.}\}$. Encontre o Mínimo do Funcional $\Phi : \mu_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi(f) = \int_E f \cdot \int_E \frac{1}{f}$$

Solução

Com efeito, $F = \sqrt{f} \in L^2(E)$ e $G = \frac{1}{\sqrt{f}} \in L^2(E)$.

Então, pela Desigualdade de Hölder, temos:

$$\int_E \sqrt{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} dm(x) = \int_E 1 dx = m(E) \leq \|F\|_2 \|G\|_2,$$

onde:

$$\|F\|_2 = \int_E (\sqrt{f})^2 = \int_E f \quad e \quad \|G\|_2 = \int_E \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right)^2 dx = \int_E \frac{1}{f}.$$

Logo,

$$m(E) \leq \int_E f \cdot \int_E \frac{1}{f} = \Phi(f).$$

Isto é, $m(E)$ é uma cota inferior para $\Phi(f)$.

Por outro lado, temos $\Phi(f) = m(E)$.

Seja $\{f; f \text{ é constante}\}$, então, temos $f C_1 = \frac{1}{f} C_2$, donde, $f^2 = \frac{C_2}{C_1}$.

Logo, $f = C$ (constante).

Isto é, $\Phi(f) = \{f; f \text{ é constante}\} = m(E)$.

8. Seja $f \in L^p(a, b)$ e seja $E_n = \{x \in (a, b); |f(x)| \geq n\}$. Mostre que: $\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 0$.

Solução

Se $f \in L^p(a, b)$, então, $\int_{E_n} |f|^p < \int_a^b |f|^p < \infty$. Decorre daí que:

$$\int_{E_n} |f|^p \geq \int_{E_n} n^p dm(x) = n^p \int_{E_n} 1 dx = n^p \cdot m(E_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ou ainda,

$$0 \leq m(E_n) \leq \frac{1}{n^p} \int_{E_n} |f|^p < \infty$$

Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que: $\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) = 0$.

9. Dada uma função mensurável $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, considere os conjuntos $E_n = \{x \in (a, b); n-1 \leq |f(x)| < n\}$. Mostre que $f \in L^1(a, b) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot m(E_n) < \infty$. Mais geralmente, mostre que:

$$f \in L^p(a, b), 1 \leq p < \infty \text{ se, e somente se, } \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot m(E_n) < \infty.$$

Solução

(*) Suponhamos que não ocorra $E_n \cap E_{n+1} = \emptyset$. Então, existe $x \in E_n \cap E_{n+1}$. Daí, obtemos

$$n+1 \leq |f(x)| < n. \text{ Absurdo!}$$

De sorte que: $E_n \cap E_{n+1} = \emptyset$.

(**) $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = (a, b)$.

(***) Considere $F_n = \{x \in (a, b); n-1 \leq |f(x)| < n\}$. Assim, $F_n = E_{n+1}$ e $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Agora,

$$\begin{aligned} f \in L^p(a, b) &\Leftrightarrow \int_a^b |f|^p dx < \infty \Leftrightarrow \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} |f|^p dx < \infty \Leftrightarrow \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} n^p \leq \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} |f|^p < \infty \\ &\Leftrightarrow n^p m(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) < \infty \Leftrightarrow m(n^p \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) < \infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f \in L^p(a, b) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} m(n^p E_n) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^p m(E_n) < \infty.$$

Agora, tomando-se $p = 1$, vem

$$f \in L^1(a, b) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^1 m(E_n) < \infty$$

10. Sejam p e q índices conjugados, com $1 < p < \infty$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, com $\|g\|_q \leq 1$, segue da desigualdade de Hölder que:

$$\left| \int fg \right| \leq \|f\|_p$$

Se $f \neq 0$, considere g_0 definida em (a, b) por $g_0(x) = C[\text{sgn}(f(x))] \cdot f(x)^{p-1}$, onde: $C = \|f\|_p^{-p/q}$. Mostre que $g_0 \in L^q$, $\|g_0\|_q = 1$ e $\left| \int fg_0 \right| = \|f\|_p$.

Solução

Sejam p e q índices conjugados $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donde, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow p = q(p-1)$.

Agora,

$$\begin{aligned} \int_a^b |g_0(x)|^q dx &= \int_a^b |C[\text{sgn}(f(x))] \cdot f(x)^{p-1}|^q dx = \int_a^b \left| \|f\|_p^{-p/q} \cdot f(x)^{p-1} \right|^q dx = \\ &= \int_a^b \|f\|_p^{-p} \cdot f(x)^{q(p-1)} dx = \|f\|_p^{-p} \cdot \|f\|_p^p = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b |g_0(x)|^q dx &= 1 < \infty. \text{ Isto é, } g_0 \in L^q. \\ \|g_0\|_q &= \left(\int_a^b |g_0(x)|^q dx \right)^{1/q} = 1^{1/q} = 1 \end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Hölder, temos:

$$\left| \int fg \right| \leq \left| \int fg_0 \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g_0\|_q = \|f\|_p$$

11. Se $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ e $g \in L^\infty$, mostre que o produto $f \cdot g \in L^p$ e que: $\|fg\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_\infty$.

Solução

- $1 \leq p < \infty$

$$\int |fg|^p = \int |f|^p |g|^p.$$

Sabemos que $g \leq |g| \leq \supess |g|$ q.s. $\Rightarrow |g|^p \leq \|g\|_\infty^p$.

Logo,

$$\int |fg|^p \leq \|g\|_\infty^p \int |f|^p < \infty \Rightarrow f \cdot g \in L^p \text{ e } \left(\int |fg|^p \right)^{1/p} \leq \left(\|g\|_\infty^p \int |f|^p \right)^{1/p} = \|g\|_\infty \|f\|_p.$$

-- Caso $p = \infty$, $f \in L^\infty$ e $g \in L^\infty$ sabemos que: $|f| \leq (\supess |f|)$ q.s., logo $|f||g| \leq (\supess |f|)|g|$.

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} \supess |fg| &\leq \supess (\supess |f|)|g| \\ &= \supess |f| \cdot \supess |g| < \infty \end{aligned}$$

Pois, $f, g \in L^\infty$ e também,

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

12. Se $f \in L^\infty(a, b)$ e $\alpha < \|f\|_\infty$, mostre que existe um conjunto mensurável $E \subset (a, b)$, com $m(E) > 0$, tal que $|f(x)| > \alpha, \forall x \in E$.

Solução

Com efeito $\alpha < \|f\|_\infty = \supess |f| = \inf \{C; |f(x)| \leq C, \text{ q.s. } \} = C < \infty$ e considere o conjunto $|f|^{-1}(\alpha, \supess |f|) = E$ ou seja, $E = \{x \in (a, b); |f(x)| \in (\alpha, \supess |f|)\}$.

- $E \subset (a, b)$;

• $\alpha < |f(x)|, \forall x \in E$;

Suponha $m^*(E) = 0$ como $\alpha < |f(x)| < \|f\|_\infty, \forall x \in E$, então, $|f(x)| \leq \alpha$ q.s. $\Rightarrow \alpha \geq C$ absurdo! pois por (I) $\alpha < C$.

Logo, $m(E) > 0$.

Fatos que ajudam

Seja f mensurável e B um conjunto de Borel, então $f^{-1}(B)$ é um conjunto mensurável.

(ver 1ª lista de exercícios)

Como $(\alpha, \supess |f|)$ é um intervalo, logo, um conjunto de Borel.

De sorte que: $E = |f|^{-1}(\alpha, \supess |f|)$ é mensurável

13. Seja $1 \leq p < \infty$ e seja f uma função de $f \in L^p(a, b)$. Dado $\lambda > 0$, considere o conjunto

$$E_\lambda = \{x \in (a, b); f(x) > \lambda\}.$$

Usando a desigualdade $\int_{E_\lambda} |f|^p \leq \int_a^b |f|^p$, estabelece a desigualdade de Chebyschov

$$m(E_\lambda) \leq \lambda^{-1} \|f\|_p^p.$$

Solução

Com efeito, $\|f\|_p^p = \int_a^b |f|^p \geq \int_{E_\lambda} |f|^p$ pois, $E_\lambda \subset (a, b)$ para todo λ .

Observe que: $|f| > \lambda \Rightarrow \int_{E_\lambda} \lambda^p = \lambda^p m(E_\lambda)$. Ou ainda, $m(E_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda^p} \|f\|_p^p$.

14. Denote por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis e integráveis à lebesgue sobre os compactos do $\mathbb{R}^N$. mostre que $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$.

Solução

Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ devemos mostrar que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, isto é, $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, observe que:

$$\begin{aligned} \int_K |f(x)| dx &\leq \|f\|_{L^p(K)} \cdot \|1\|_{L^q(K)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left(\int_K 1 dx \right)^{1/q} = \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} m(K)^{1/q} < \infty \end{aligned}$$

onde: p, q são índices conjugados. Logo, para $1 \leq p < \infty$, tem-se $L^p(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

$p = \infty$

Devemos mostrar que: $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então, $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \Rightarrow M = \supess |f| < \infty$$

Logo,

$$\int_K |f| \leq \int_K M \text{ pois } |f| \leq \supess |f| \text{ q.s.}$$

Portanto, $\int_K |f| \leq M \cdot m(K) < \infty$.

15. Se $f \in L^r \cap L^s$, $1 \leq r < s < \infty$, mostre que f faz espaço intermediários L^p , com $r \leq p \leq s$.

Solução

Se $r \leq p \leq s$, então p é da forma: $(1-t)s + tr = p$ para algum $t \in [0, 1]$.

observe que:

$$(*) \int |f|^p = \int |f|^{(1-t)s+tr} = \int (|f|^s)^{(1-t)} \cdot (|f|^r)^t.$$

A questão (4) desta lista diz que, se $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^1$ e se $0 < p, q < 1, p+q=1$, então, $|\tilde{f}|, |\tilde{g}| \in L^1$

Tome $\tilde{f} = |f|^s, \tilde{g} = |f|^r$ são intergráveis, visto que, $f \in L^r$ e $f \in L^s$ considerando $p = 1-t$ e $q = t$, temos $0 < p, q < 1, p+q=1$.

Portanto, $(|f|^s)^{(1-t)} \cdot (|f|^r)^t \in L^1$ (Via questão (4)), ou seja, por (*)

$$\int |f|^p = \int (|f|^s)^{(1-t)} \cdot (|f|^r)^t < \infty \Rightarrow f \in L^p$$

Afirmção: $x + E^C = (x + E)^C$

$$\begin{aligned} w \in (x + E)^C &\Leftrightarrow w \notin x + E \Leftrightarrow w \neq x + e, \forall e \in E \\ &\Leftrightarrow w - x \neq e, \forall e \in E \Leftrightarrow (w - x) \notin E \Leftrightarrow (w - x) \in E^C \\ &\Leftrightarrow w \in (x + E^C). \end{aligned}$$

Logo, $(x + E)^C = x + E^C$.

Bibliografia

- [1] De Moraes Filho, Daniel Cordeiro. Um Convite à Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 3ª Edição, SBM 2016.
- [2] Bartle, Robert G. Introduction to Real Analysis. New York, J. Wiley, 2019
- [3] Guidorizzi, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo, vol.1, 6ª Edição, RJ: LTC, 2018
- [4] Lima, Elon Lages. Matemática e Ensino, Coleção do Professor de Matemática, 4ª Edição, RJ, 2017
- [5] De Moraes Filho, Daniel Cordeiro. Manual de Redação Matemática, Coleção Professor de Matemática, RJ, 2ª Edição, SBM 2018
- [6] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, vol. 1, Projeto Euclides, SBM, 21ª Edição, IMPA, 2019
- [7] Aragona, Jorge. Números Reais, Texto Universitário do IME-USP, 2010
- [8] Eves, Howard. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas, SP, Editora da Unicamp, 2004
- [9] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm, em 17 de março às 12h e 25min, 2023
- [10] Figueiredo, D. G. Análise I, Livros Técnicos Científicos, 2016
- [11] Ávila, Geraldo. Introdução à Análise Matemática, Editora Edgar Blücher Ltda, 1993
- [12] Boyer, Carl B. História da Matemática; tradução Elza F. G., SP Edgard Blucher, 1974
- [13] Bartle, Robert G. The Elements of Real Analysis. New York, J. Wiley, 1964
- [14] Figueiredo, D.G. Análise I, RJ, LTC. 2ª edição, 1996
- [15] Lima, E.L. Análise Real, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1993
- [16] Gonçalves, Adilson. Introdução à álgebra. 4ª Edição, Projeto Euclides, IMPA, 1999
- [17] Koblitz, Neal. A Course in Number Theory and Cryptography, Springer 2ª Edição, 1994.
- [18] Lequain, Yves e Garcia, Arnaldo. álgebra: Um curso de Introdução, Série II, Projeto Euclides, IMPA, 2020
- [19] Matos, Marivaldo Pereira, Séries e Equações Diferenciais, Editora Ciência Moderna, 2017
- [20] Neves, Wladimir Augusto, Uma Introdução à Análise Real, RJ-Editora UFRJ, 2014.
- [21] Bartle, Robert G - Elementos de Análise Real. Editora Campos, 2014.
- [22] http://clubes.obmep.org.br/blog/b_a-l-cauchy/, em 01 de junho 2023
- [23] Loibe, Gilberto Francisco-Introdução à topologia-SP: Editora UNESP, 2007.
- [24] Silva, Cícero José da, Soares, Willames de Albuquerque, Galdino, Sérgio Mário Lins. Pré-Cálculo com Problemas Resolvidos / Piracanjuba-GO Editora Conhecimento Livre, 2022

- [25] Silva, Cícero José da, Soares, Willames de Albuquerque, Galdino, Sérgio Mário Lins. *Análise Real: Introdução as Majorações* vol.I, Piracanjuba-GO
- [26] Silva, Cícero José da, Soares, Willames de Albuquerque, Galdino, Sérgio Mário Lins. *Análise Real: Introdução as Majorações* vol. II, Piracanjuba-GO

INTRODUÇÃO A MEDIDA E INTEGRAL À LEBESGUE COM EXERCÍCIOS



conhecimentolivre.org/home



contato@conhecimentolivre.org



[editoraconhecimentolivre](https://www.instagram.com/editoraconhecimentolivre)

Cícero José da Silva
Willames de Albuquerque Soares
Sérgio Mário Lins Galdino
Jornandes Dias da Silva
Juan Carlos Oliveira de Medeiros



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE