

Rômulo Damasclin Chaves dos Santos
Jorge Henrique de Oliveira Sales

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA BIDIMENSIONAL EM C++ PARA A TERMOFLUIDODINÂMICA



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE

Rômulo Damasclin Chaves dos Santos
Jorge Henrique de Oliveira Sales

Análise e simulação numérica bidimensional em C++ para a termofluidodinâmica

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Santos, Rômulo Damasclin Chaves dos
S237A Análise e simulação numérica bidimensional em C++ para a termofluidodinâmica
/ Rômulo Damasclin Chaves dos Santos. Jorge Henrique de Oliveira Sales. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2024

168 f.: il

DOI: 10.37423/2024.edcl913

ISBN: 978-65-5367-462-2

Modo de acesso: World Wide Web

Incluir Bibliografia

1. escoamento 2. domínio-3d 3. domínio-externo 4. fluido 5. termodinâmica I. Santos, Rômulo Damasclin Chaves dos II. Sales, Jorge Henrique de Oliveira III. Título

CDU: 530

<https://doi.org/10.37423/2024.edcl913>

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORIA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

MSc Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior

MSc Humberto Costa

MSc Thays Merçon

MSc Adalberto Zorzo

MSc Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno

PHD Willian Douglas Guilherme

MSc Andrea Carla Agnes e Silva Pinto

MSc Walmir Fernandes Pereira

MSc Edisio Alves de Aguiar Junior

MSc Rodrigo Sanchotene Silva

MSc Wesley Pacheco Calixto

MSc Adriano Pereira da Silva

MSc Frederico Celestino Barbosa

MSc Guilherme Fernando Ribeiro

MSc. Plínio Ferreira Pires

MSc Fabricio Vieira Cavalcante

PHD Marcus Fernando da Silva Praxedes

MSc Simone Buchignani Maigret

Dr. Adilson Tadeu Basquerote

Dra. Thays Zigante Furlan

MSc Camila Concato

PHD Miguel Adriano Inácio

MSc Anelisa Mota Gregoleti

PHD Jesus Rodrigues Lemos

MSc Gabriela Cristina Borborema Bozzo

MSc Karine Moreira Gomes Sales

Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares

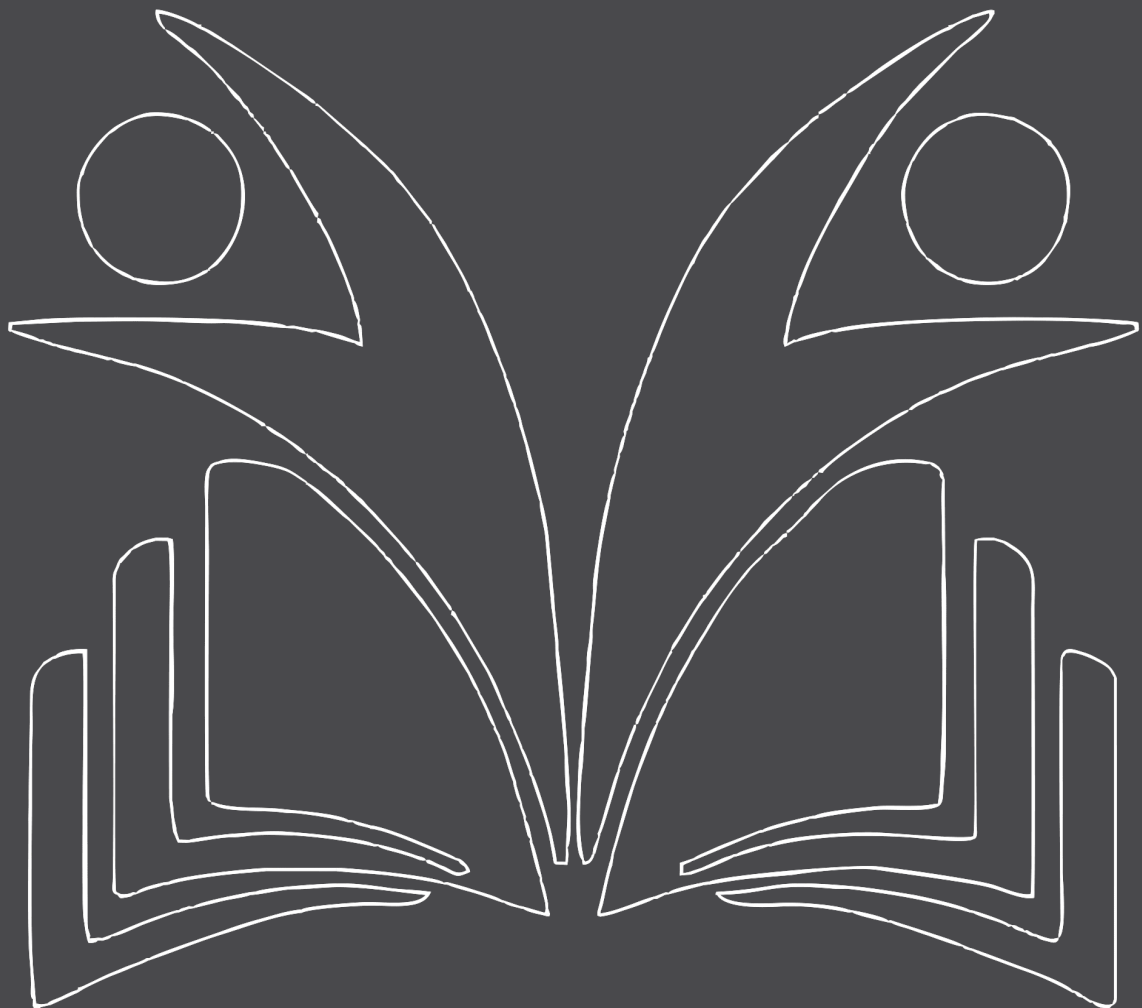
MSc Pedro Panhoca da Silva

MSc Helton Rangel Coutinho Junior

MSc Carlos Augusto Zilli
MSc Euvaldo de Sousa Costa Junior
Dra. Suely Lopes de Azevedo
MSc Francisco Odecio Sales
MSc Ezequiel Martins Ferreira
MSc Eliane Avelina de Azevedo Sampaio
MSc Carlos Eduardo De Oliveira Gontijo
MSc Rainei Rodrigues Jadejiski
Dr. Rodrigo Couto Santos
Dra. Milena Gaion Malosso
PHD Marcos Pereira Dos Santos



10.37423/2024.edcl913



Ao Grande Arquiteto do Universo por sua luz e inspiração
para realização desta obra,

Agradecimentos

- Ao meu filho, **Douglas Damasclin de Oliveira Santos** (*Doug*) (*in memoriam*), meu primogênito, que representa (segundo as escrituras sagradas, a força do pai). Sempre amado em nossas doces lembranças. Papai e Mamãe amam você e seus irmãos (*in memoriam*), nunca serão esquecidos.
- Ao **Prof. Dr. Jorge Henrique de Oliveira Sales, Ph.D.** (Co-Autor), Professor Pleno do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Santa Cruz - BA, pela paciência, atenção e dedicação neste trabalho.

Resumo

Poucos estudos científicos investigam, em conjunto, os efeitos térmicos com os fenômenos associados aos processos iniciais da turbulência. Em geral, estas questões são estudadas separadamente. Assim, o propósito deste livro é utilizar o Método de Fronteira Imersa (MFI) (do inglês, *Immersed Boundary Method - IBM*) acoplado com o Modelo Físico Virtual (MFV) para estudar escoamentos Newtonianos bidimensionais incompressíveis em torno de corpos aquecidos com temperatura constante (isotérmicos) à superfície, considerando a transferência de calor por convecção mista em conjunto com os processos iniciais da turbulência, isto é, considerando números de Reynolds moderados.

O Modelo Físico Virtual avalia dinamicamente a força que o fluido exerce na superfície imersa do corpo e a troca térmica entre ambos para números de Reynolds (Re) no intervalo $[1, 5000]$. Para as simulações dos escoamentos incompressíveis, são utilizados os modelos de Smagorinsky e Spalart-Allmaras. O primeiro modelo utiliza a metodologia (LES) (do inglês, *Large Eddy Simulation*) e baseia-se na hipótese de equilíbrio local para as pequenas escalas associadas à hipótese de Boussinesq, de tal forma que a energia injetada no espectro da turbulência equilibra a energia dissipada pelos efeitos viscosos. O segundo modelo, utiliza o conceito URANS (do inglês, *Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*), utilizando apenas uma equação de transporte para a viscosidade turbulenta, sendo calibrada nas camadas de gradiente de pressão. O objetivo deste trabalho é analisar as combinações dos fenômenos de transferência de calor com os processos iniciais da turbulência para a interação termo-fluido-corpo em corpos com diferentes geometrias (simples e complexas). Para isto, foi desenvolvido um código em linguagens *C++* e Matlab, onde não requer meios computacionais elevados em termos de memória RAM de computador.

Nesta obra, apresentamos e analisamos resultados sobre os efeitos dos aumentos do número de Reynolds e de Richardson, no aumento do coeficiente de arrasto, bem como a influência da distribuição de pressão a jusante do corpo imerso, a qual é fortemente influenciada pela formação e desprendimento de vórtices, isto somado à magnitude da vorticidade a jusante do corpo imerso com os padrões térmicos que são acentuados, principalmente, através do transporte convectivo.

Abstract

Few scientific studies investigate, together, the thermal effects with phenomena associated with the initial processes of turbulence. In general, these issues are studied separately. Therefore, the purpose of this thesis is to use the Immersed Frontier Method (MFI) coupled with Virtual Physical Model (VPM) to study incompressible two-dimensional Newtonian flows around heated bodies with constant temperature at the surface, considering the heat transfer by mixed convection together with the initial turbulence processes (moderate Reynolds).

The Virtual Physical Model dynamically evaluates the force that the fluid exerts on the immersed surface of the body, and the thermal exchange between them for Reynolds numbers (Re) in the interval $[1, 5000]$. For the simulations of incompressible flows, the Smagorinsky and Spalart-Allmaras models are used. The first model uses the Large Eddy Simulation (LES) methodology and is based on the local equilibrium hypothesis for the small scales associated with the Boussinesq hypothesis, such that the energy injected into the turbulence spectrum balances the energy dissipated by the convective effects. The second model uses the URANS concept (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations), using only one transport equation for turbulent viscosity, being calibrated in the pressure gradient layers. The objective of this work is to analyze the combinations of the heat transfer phenomena with the initial processes of the turbulence for the thermo-fluid-body interaction in bodies with different geometries (simple and complex). For this, a code was developed in C++ and Matlab languages, which does not require high computational means in terms of computer RAM.

In this work, we present and analyze results on the effects of Reynolds and Richardson number increasements on the drag coefficient as well as the influence of the pressure distribution downstream of the immersed body, which is strongly influenced by the formation and detachment of vortices, this added to the magnitude of the vorticity downstream of the body immersed with the thermal patterns that are accentuated mainly by the convective transport.

Lista de Símbolos

C_d	Coeficiente de arrasto
C_l	Coeficiente de sustentação
c	norma da magnitude de velocidade local
C_p	Coeficiente de pressão
c_p	Calor específico
C_s	Constante de Smagorinsky
d_w	Distância do corpo imerso até a parede mais próxima
D	Diâmetro do cilindro
D_{ij}	Função distribuição
$\mathbf{f}$	Vetor força Euleriana
E_p	Energia potencial
e	Energia interna do fluido
f_i	Componente i do vetor campo de força Euleriana
$\mathbf{F}$	Vetor força Lagrangiano
F_d	Força de arrasto
F_l	Força de sustentação
G	Gradiente da função indicadora
Gr	Número de Gashof
I	Função indicadora
J	Intervalo de tempo
$\mathbf{j}$	Vector unitário na direção positiva do eixo y
ℓ	Escala de comprimento
L	Distância entre os centros de dois cilindro alinhados
$\mathcal{L}$	Espessura global do filtro
L_∞	Comprimento característico
Nu	Número de Nusselt
p	Pressão ou pressão mecânica
p_t	Pressão termodinâmica
P_c	Distância entre os centros de dois cilindros deslocados
Pe	Número de Péclet
Q	Transferência de calor para o sistema
q	Fonte de energia escalar

R	Raio da interface
$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano n-dimensional
Ri	Número de Richardson
Re	Número de Reynolds
St	Número de Strouhal
S_{ij}	Taxa de deformação
t	Tempo físico
T_∞	Temperatura de referência
T_{ad}	Tempo adimensional
T_c	Temperatura da superfície do corpo imerso
u_i	Componente do vetor velocidade na direção x
u_j	Componente do vetor velocidade na direção y
u_∞	Velocidade da corrente livre
$\mathbf{u}$	Campo de velocidade
$\mathbf{U}$	Vetor velocidade adimensional
$\mathbf{U}_\infty$	Vetor velocidade de referência adimensional
V	Volume de um fluido
v_j	Componente j do vetor velocidade
x	Coordenada cartesiana horizontal
$\mathbf{x}$	Vetor posição da malha Euleriana
$\mathbf{X}_k$	Vetor posição da malha Lagrangiana
W	Trabalho realizado
y	Coordenada cartesiana vertical
Δs	Distância entre dois pontos Lagrangianos consecutivos
Δt	Passo de tempo
∂h	Variação da entalpia
$\partial\Omega_b$	Fronteira
Ω_f	Malha do fluido
Ω_b	Domínio do corpo imerso

Símbolos Gregos

β	Coeficiente de expansão térmica
γ	Difusividade térmica
κ	Condutividade térmica
ρ	Massa específica
ρ_∞	Massa específica característica
μ	Viscosidade dinâmica
τ_{ij}	Tensor sub-malha de Reynolds
Θ	Temperatura adimensional
θ	Ângulo
φ^*	Quantidade adimensional qualquer
φ_∞	Valor de referência de quantidade
ν	Viscosidade cinemática
ν_t	Viscosidade turbulenta
ν_{ef}	Viscosidade efetiva
ω	Velocidade angular
α	rotação específica
τ	Tensor global
δ	Função delta de Dirac
Δ	Tamanho da malha
φ	Variável genérica
ψ	Grandeza física
Ψ	Qualquer grandeza extensiva
Γ	Interface Lagrangiana

Operadores

∇	Operador gradiente
∇^2	Operador Laplaciano
∂	Derivada parcial
Δ	Diferença finita
$\sum$	Somatório
$\prod$	Produtório
$-$	Operador média espacial
$\int$	Integral

Índices e Superíndices

i, j	Índices para pontos da malha Euleriana
k	Índice para pontos Lagrangiana
f_k	Índice para o fluido próximo a interface Lagrangiana
n, N	Índice para o Norte
s, S	Índice para o Sul
e, E	Índice para o Leste
w, W	Índice para o Oeste
$\sim$	Superíndice para variável auxiliar
$*$	Superíndice para Grandeza adimensional, variável estimada
$'$	Superíndice para Variável aproximada
n	Superíndice para iteração

Siglas

<i>CFD</i>	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
<i>DNS</i>	<i>Direct Numerical Simulation</i>
<i>FFT</i>	<i>Fast Fourier Transform</i>
<i>LES</i>	Large Eddy Simulation
MFI	Método de Fronteira Imersa
MFV	Modelo Físico Virtual
MPF	Método do Passo Fracionado
<i>MSIP</i>	<i>Modified Strongly Implicity Procedure</i>
<i>RANS</i>	<i>Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>
<i>URANS</i>	<i>Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>

Lista de Figuras

3.1	Ilustração das malhas Eulerianas e Lagrangianas para um corpo imerso de geometria arbitrária	37
3.2	Ilustração do volume de controlo localizado sobre uma partícula de fluido Lagrangiana.	45
3.3	Ilustração da alocação dos pontos auxiliares utilizados no cálculo de derivadas espaciais da pressão e da velocidade.	46
3.4	Ilustração para a interpolação da pressão (p) e da temperatura (θ).	47
3.5	Ilustração dos pontos auxiliares no esquema de interpolação para o cálculo das forças Lagrangianas.	49
3.6	Esquema ilustrativo do procedimento de interpolação da velocidade sobre o ponto auxiliar 3: (a) – para a componente u na direção X e (b) – para a componente v na direção Y	50
3.7	Distribuição da força interfacial $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ e da fonte térmica $q(\mathbf{x}_i)$ em cada nó Lagrangiano no corpo imerso no escoamento, resultando num campo de força interfacial aquecido, permitindo que a partícula de fluido reconheça a fronteira sólida e o corpo aquecido.	52
4.1	Esquema ilustrativo de uma malha deslocada.	74
4.2	Esquema ilustrativo de duas células cartesianas não-uniforme.	75
4.3	Ilustração da localização dos pontos p , e , w , n e s	77
4.4	Malha não-uniforme e distâncias associadas a face e	78
4.5	Ilustração para a discretização do termo convectivo da equação da energia em x	81
4.6	Ilustração para a discretização do termo convectivo da equação da energia em y	81
4.7	Ilustração para a discretização do termo difusivo da equação da energia em x	81
4.8	Ilustração para a discretização do termo difusivo da equação da energia em y	82
5.1	Ilustração da malha não-uniforme.	85
5.2	Campos simplificados de temperatura (a), pressão (b), linhas isotérmicas (c) e coeficientes de arrasto e sustentação (d) para $Re = 1$ e $Ri = 0$	87
5.3	Campos simplificados de temperatura (g), pressão (h), linhas isotérmicas (i) e coeficientes de arrasto e sustentação (j) para $Re = 1$ e $Ri = 0,5$	88
5.4	Campos simplificados de temperatura (i), pressão (j), linhas isotérmicas (l) e coeficientes de arrasto e sustentação (m) para $Re = 1$ e $Ri = 1,0$	89

5.5	Linhas de corrente em torno de um cilindro quadrado isotérmico para $Re = 1$ e $Re = 2$ com diferentes números de Ri	90
5.6	Linhas de corrente em torno de um cilindro quadrado isotérmico para $Re = 10$ com diferentes números de Ri	91
5.7	Campos simplificados de vorticidade para (a) $Re = 1, Ri = 0$, e (b) $Re = 1, Ri = 0, 5$	92
5.8	Campos simplificados de vorticidade para (c) $Re = 1, Ri = 1, 0$; (d) $Re = 10, Ri = 0$; (e) $Re = 10, Ri = 0, 5$; (f) $Re = 10, Ri = 1, 0$; (g) $Re = 30, Ri = 0$, e (h) $Re = 30, Ri = 0, 5$	93
5.9	Campos simplificados de vorticidade para (i) $Re = 30, Ri = 1, 0$; (j) $Re = 40, Ri = 0$; (k) $Re = 40, Ri = 0, 5$; (l) $Re = 40, Ri = 1, 0$; (m) $Re = 50, Ri = 0$, e (n) $Re = 50, Ri = 1, 0$	94
5.10	Padrão de linhas isotérmicas simplificadas para (a) $Re = 1, Ri = 0$; (b) $Re = 1, Ri = 0, 5$; (c) $Re = 1, Ri = 1, 0$, e (d) $Re = 10, Ri = 0$	95
5.11	Padrão de linhas isotérmicas simplificadas para (e) $Re = 10, Ri = 0, 5$; (f) $Re = 10, Ri = 1, 0$; (g) $Re = 30, Ri = 0$; (h) $Re = 30, Ri = 0, 5$; (i) $Re = 30, Ri = 1, 0$, e (j) $Re = 40, Ri = 0$	96
5.12	Padrão de linhas isotérmicas simplificadas para (k) $Re = 40, Ri = 0, 5$; (l) $Re = 40, Ri = 1, 0$; (m) $Re = 50, Ri = 0$, e (n) $Re = 50, Ri = 1, 0$	97
5.13	Campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) linhas isotérmicas, (d) vorticidade e (e) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para $Re = 100$ e $Ri = 0$	100
5.14	Campos simplificados de (f) temperatura, (g) pressão, (h) linhas isotérmicas, (i) vorticidade e (j) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para $Re = 100$ e $Ri = 1, 0$	101
5.15	Campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) linhas isotérmicas, (d) vorticidade e (e) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para $Re = 500$ e $Ri = 0$	103
5.16	Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l), para $Re = 5000$ com $Ri = 0$	105
5.17	Modelo de Spalart-Allmaras para os campos simplificados de (g) temperatura, (h) pressão, (i) viscosidade efetiva, (j) vorticidade, (l) linhas isotérmicas, e (m) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l), para $Re = 5000$ com $Ri = 0$	106
5.18	Ilustração da configuração de dois cilindros: (a) - Configuração de cilindros alinhados (cilindros em <i>tandem</i> , isto é, $\varphi_m = 0^\circ$) e (b) - Configuração de cilindros apresentando angulação, ou deslocamento, a jusante com $0^\circ < \varphi_m < 90^\circ$	109
5.19	Ilustração de risers. Fonte: https://www.nov.com/home.aspx	110
5.20	Ilustração da distância das superfícies dos cilindros aos limites da região da malha uniforme.	111
5.21	Ilustração do domínio computacional com configuração de dois cilindros em tandem.	112
5.22	Ilustração do domínio computacional com configuração de dois cilindros em tandem com cilindro a jusante (B) apresentando angulação.	112

- 5.23 Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura e (b) pressão, (c) viscosidade efetiva, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para os respectivos cilindros A e B, para $Re = 500$ com $Ri = 0$ 117
- 5.24 Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva total, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para cilindros com deslocamento angular de 65° , para $Re = 500$ com $Ri = 1,0$ 118
- 5.25 Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva total, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para cilindros com deslocamento angular de 65° , para $Re = 500$ com $Ri = 2,0$ 119
- 5.26 Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva total, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para cilindros com deslocamento angular de 65° , para $Re = 500$ com $Ri = 5,0$ 120
- 5.27 Variação local do número de Nusselt para o mesmo instante adimensional. (a) - $Re = 100, 200$ e 500 para $Ri = 0$ e (b) - $Re = 500$ para $Ri = 1,0; 2,0$ e $5,0$ 122

Lista de Tabelas

5.1	Comparação dos valores médios dos coeficientes de arrasto e do número Nusselt para $Ri = 0$ e $Pr = 0.7$ com diferentes valores de Re	98
5.2	Comparação dos valores médios dos coeficientes de arrasto e do número Nusselt para $Re = 100$ e $Pr = 0.7$ para diferentes Ri	102
5.3	Coefficiente médio de arrasto para o escoamento em torno de um cilindro quadrado isotérmico para diferentes números de Re com $Ri = 0$	107
5.4	Números de Strouhal para diferentes Re e Ri	108
5.5	A convergência do esquema do escalonamento temporal de primeira ordem para diferentes parâmetros para $Re = 200$	113
5.6	Comparação do coeficiente médio de arrasto e número de Strouhal para um único cilindro para $Re = 100$	114
5.7	Comparação do coeficiente médio de arrasto e número de Strouhal para um único cilindro para $Re=200$	115
5.8	Comparação do Nusselt médio para um único cilindro em função do número de Reynolds.	115
5.9	Parâmetros de escoamento do presente trabalho para $Re = 100, 200$ e 500 em comparação com dados disponíveis na literatura.	116
5.10	Parâmetros de escoamento do presente trabalho para $Re = 500$ para diferentes valores de Ri	121
5.11	Os números médios de Nusselt para os cilindros a montante e a jusante em função do número de Reynolds e da relação L_{cc}/d	123

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contribuições	1
1.2	Notação matemática. Teoremas relevantes	2
1.2.1	Teorema do transporte de Reynolds	3
1.2.2	Regra de Leibniz	5
1.3	Balço das equações fluido-dinâmicas	5
1.3.1	Conservação da massa	5
1.3.2	Conservação do momentum	7
1.3.3	Equação da energia	8
1.4	A simulação numérica	10
1.5	Organização deste livro	15
2	Estado da arte	17
2.1	Introdução	17
2.2	Trabalhos envolvendo o método da fronteira imersa	18
2.3	Trabalhos envolvendo o modelo físico virtual	25
2.4	Características da modelação turbulenta	27
2.4.1	A imprevisibilidade	28
2.4.2	A influência dos efeitos advectivos	29
2.4.3	A capacidade de mistura	29
2.4.4	A vorticidade	29
2.4.5	A multiplicidade de escalas	30
2.5	Análise de Fourier nos aspectos fundamentais da turbulência	30
2.5.1	A dissipação viscosa da energia	30
2.5.2	A troca de energia entre movimentos	30
2.5.3	O espectro da energia turbulenta	32

3	Modelo matemático	35
3.1	Introdução	36
3.2	Método de fronteira imersa	36
3.3	As equações governantes	38
3.4	A adimensionalização das equações	39
3.4.1	O acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e de transporte	40
3.4.2	A adimensionalização das equações da continuidade e de Navier-Stokes	40
3.4.3	A adimensionalização da equação de transporte da temperatura	40
3.4.4	Equações adimensionais para convecção mista	42
3.5	A função indicadora	43
3.6	Modelo físico virtual	44
3.6.1	O cálculo do parâmetro L_2	51
3.6.2	O cálculo da distribuição da força Lagrangiana e da fonte térmica	52
3.7	Outros importantes parâmetros adimensionais	53
3.7.1	O tempo adimensional	53
3.7.2	O coeficiente de pressão	53
3.7.3	A força e o coeficiente de arrasto	53
3.7.4	A força e o coeficiente de sustentação	54
3.7.5	O número adimensional de Strouhal	54
3.7.6	O número adimensional de Nusselt	54
3.8	A modelação matemática da turbulência	55
3.8.1	A formulação RANS para a turbulência	56
3.8.1.1	Equações médias de Reynolds	56
3.8.1.2	Equações de Navier-Stokes filtradas	57
3.8.1.3	A hipótese de Boussinesq	58
3.8.2	A formulação URANS para a turbulência	60
3.8.3	A modelação de Smagorinsky para a turbulência	61
3.8.4	A modelação de Spalart-Allmaras para a turbulência	64
4	Método numérico	67
4.1	Introdução	67
4.2	Método de solução de sistemas lineares	68
4.3	Discretização do domínio Euleriano	70
4.3.1	Acoplamento entre pressão e velocidade	70
4.3.2	Discretização temporal	71
4.3.2.1	Método de Runge-Kutta de segunda ordem	72
4.3.2.2	Método de Adams-Bashforth de segunda ordem	72

4.3.3	Cr�terio de estabilidade e a condição de CFL	73
4.3.4	C�culo da variação temporal	73
4.4	Discretização espacial das equações	74
4.4.1	Discretização das equações de Navier-Stokes	74
4.4.2	Discretização da equação para correção da pressão	76
4.4.3	Discretização do modelo de Smagorinsky	76
4.4.4	Interpolação das propriedades para malhas não-uniformes	77
4.4.5	Discretização do modelo de Spalart-Allmaras	78
4.4.6	Discretização da função indicadora	79
4.4.7	Discretização da equação da energia	80
5	Resultados e análise das simulações	83
5.1	Introdução	83
5.2	Simulação e análise para um corpo rombudo isotérmico	84
5.2.1	Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 1$ a $Re = 40$ para diferentes números de Richardson	86
5.2.2	Validação do coeficientes médios de arrasto (C_d) e do Nusselt (Nu)	98
5.2.3	Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 10^2$ para diferentes números de Richardson	99
5.3	Simulação para $Re = 500$ e $Re = 5000$ com convecção forçada	102
5.3.1	Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 500$ com $Ri = 0$	102
5.3.2	Visualização bidimensional dos campos de escoamento com turbulência para $Re = 5000$ com $Ri = 0$ - Modelos de Spalart-Allmaras e Smagorinsky	104
5.3.2.1	Frequência de desprendimento de vórtices para o cilindro quadrado isotérmico	107
5.4	Simulação em torno de cilindros isotérmicos em tandem	108
5.4.1	Cilindros circulares isotérmicos em tandem	110
5.4.1.1	Descrição do problema e condições de contorno	111
5.4.1.2	Campos do escoamento para $Re = 500$ e $Ri = 0$	116
5.4.1.3	Campos do escoamento para $Re = 500$ com diferentes valores de Ri	118
5.4.1.4	Variações do número local de Nusselt	122
6	Conclusões e perspectivas futuras	125

Capítulo 1

Introdução

Sumário

1.1	Contribuições	1
1.2	Notação matemática. Teoremas relevantes	2
1.2.1	Teorema do transporte de Reynolds	3
1.2.2	Regra de Leibniz	5
1.3	Balanco das equações fluido-dinâmicas	5
1.3.1	Conservação da massa	5
1.3.2	Conservação do momentum	7
1.3.3	Equação da energia	8
1.4	A simulação numérica	10
1.5	Organização deste livro	15

1.1 Contribuições

As contribuições deste trabalho, contrariamente a alguns trabalhos, como, por exemplo, Silva et al. (2003), Remigio (2005), Oliveira (2006), Santos (2014), Park et al. (2017) e Ashrafizadeh and Hosseini (2017), é que traz consigo – para além da modelação dos campos de velocidades, pressões, temperaturas, campos espectrais dos processos turbulentos – a simulação bidimensional de escoamentos laminares incompressíveis nos intervalos $1 \leq Re \leq 40$ (laminar) e $40 \leq Re \leq 5000$ (moderado) associados ao processo de transferência de calor por convecção mista (natural e forçada). A transferência de calor é realizada em torno de corpos imersos com temperatura constante e definida na superfície dos corpos imersos (corpos isotérmicos) para fluidos Newtonianos incompressíveis. Estas contribuições envolvem um processo de implementação e de desenvolvimento de um código computacional que reúne ambos os fenómenos físicos, que, em diferentes trabalhos científicos, é visto de forma segregada.

Durante este trabalho, foram utilizadas soluções numéricas bidimensionais envolvendo as equações médias de Reynolds e as equações filtradas de Navier-Stokes, permitindo assim a modelação físico-matemática dos fenómenos e das diferentes geometrias para as análises de interesse. Foram implementados dois modelos de turbulência, a saber, o modelo de sub-malha de Smagorinsky e o modelo de Spalart-Allmaras, ambos no contexto do método de Fronteira Imersa acoplado ao Modelo Físico Virtual. O primeiro modelo de turbulência (Smagorinsky)

utiliza o conceito de Simulação de Grandes Escalas - (em inglês, *Large Eddy Simulation - LES*), enquanto o segundo modelo (Spalart-Allmaras), utiliza o conceito de Equações Médias Transientes de Reynolds (em inglês, *Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations - URANS*). Apesar da metodologia *LES* ser aplicada a escoamentos tridimensionais, no presente trabalho, esse conceito foi aplicado como aproximação bidimensional para a simulação do campo do escoamento. Após a fundamentação teórica que será apresentada no Capítulo 3, a simulação numérica bidimensional realizada traz consigo diferentes corpos imersos em meio fluido. Optou-se também em estender as análises para casos relacionados à movimentação de fronteira (sem elasticidade), não contido no corpo deste trabalho, mas nos trabalhos publicados, tendo como objetivo, avaliar o escoamento laminar e moderado em torno de corpos imersos aquecidos, considerando importantes números adimensionais que serão apresentados a posteriori. É possível antecipar que os resultados obtidos neste livro através do desenvolvimento e da implementação computacional dos fenômenos físicos de interesse, apresentam resultados estáveis e confiáveis com boa concordância numérica, sendo este, um requisito necessário para a efetiva comparação com alguns outros importantes trabalhos científicos contidos nas referências.

Neste trabalho, não houve a necessidade de utilizar elevados custos computacionais e/ou softwares comerciais. A potencialidade dos resultados deste trabalho não ocorre de maneira isolada, mas a proposta é utilizá-los em outras frentes de investigação no futuro próximo, como, por exemplo, na modelação e simulação dos processos termo-químicos, como é o caso da combustão, na análise de sistemas envolvendo energia renovável, em conversores de energia, que utilizam a mecânica das ondas marítimas, na otimização e análise de sistemas de aquecimento solar, em sistemas de refrigeração de componentes eletrônicos, em resfriamento de reatores nucleares, na dispersão de poluentes no meio ambiente, dentre outras possibilidades que possam surgir como interesse científico ou técnico. Assim, com relação às simulações numéricas bidimensionais dos processos iniciais da turbulência e da termo-fluido dinâmica em torno de corpos imersos em fluidos Newtonianos incompressíveis, este trabalho apresenta a sua parcela de contribuição.

1.2 Notação matemática. Teoremas relevantes

Seja Ω um volume de $\mathbb{R}^n$ e $J \subset \mathbb{R}_0^+$ um intervalo de tempo. Então $(t, \mathbf{x}) \in J \times \Omega$ denota a posição do ponto $\mathbf{x}$ no tempo t . A velocidade de um campo de velocidade é dado por $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Ao longo deste texto, para uma melhor legibilidade, a dependência explícita em $(t, \mathbf{x})$ dos campos de vectores é omitida. A representação para o gradiente do campo vetorial $\mathbf{u}$ é $\nabla \mathbf{u} = \nabla_x \mathbf{u} = \text{grad } \mathbf{u} = (\partial u_1 / \partial x_1, \dots, \partial u_n / \partial x_n)^T$. Vectores e tensores são escritos em negrito e as suas componentes são indexadas por $i, j, \dots$. A matriz unidade é representada por $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $\mathbf{e}_i$ representa o i -ésimo vector unitário cartesiano ($i = 1, \dots, n$). Seja $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ um campo de matrizes diferenciável. O divergente de M é definido por $(\nabla \cdot M)_i = \sum_{j=1}^n \partial / \partial x^j M_{ij}$, para $i = 1, \dots, n$, ou simplesmente por $\nabla_j M_{ij}$, usando a notação de Einstein sobre índices repetidos ($\nabla_j = \partial / \partial x^j$). Assim, o divergente de um campo matricial é um campo vetorial. O divergente ($\nabla \cdot$) de uma matriz é definido como $\nabla \cdot \mathbf{T} = (\nabla \cdot (\mathbf{T}_{1j})_{j=1, \dots, n}, \dots, \nabla \cdot (\mathbf{T}_{nj})_{j=1, \dots, n})^T$. Considerando um escoamento em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, o movimento do fluido é caracterizado pelas seguintes variáveis: a velocidade $\mathbf{u} : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, a pressão $p : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e a densidade $\rho : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se a velocidade é independente do tempo, o escoamento é chamado de *estacionário* ou *permanente*, caso contrário, é *não-estacionário*. Com relação a descrição dos escoamentos, há duas possibilidades, sendo bastante conhecidas, quer usando um sistema de referência que se move com o fluido, conhecido como descrição *Lagrangiana*, ou utilizando um sistema de referência fixo, conhecido como descrição *Euleriana*. A descrição *Lagrangiana*

significa considerar uma quantidade material movendo-se com o fluido. Como ilustração, pode-se imaginar um observador situado em uma partícula em movimento, onde se observa as variações na velocidade, pressão, temperatura e da densidade em cada posição. De facto, uma partícula fluido é selecionada e é seguida em seu curso/trajetória. Assim, para cada partícula é atribuído uma posição inicial $\mathbf{x}_0$ em um instante $t = t_0$. A posição instantânea desta partícula é então representada por $\Phi(t) := \Phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$. É importante mencionar que as variáveis independentes de uma grandeza física, aqui representada por ψ , são o tempo t e a posição espacial x da partícula. Assim, a velocidade da partícula é descrita matematicamente por $d/dt \Phi(t) = \mathbf{u}(t, \Phi(t))$, isto é, $\Phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ é a solução de

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \mathbf{u}(t, \Phi(t)), \quad \Phi(t_0) = \mathbf{x}_0.$$

Do ponto de vista físico, a descrição Lagrangiana é a preferida, uma vez que as leis de conservação são mais naturais nessa descrição. De maneira análoga, um observador posicionado em $\mathbf{x}$ estuda as variações que ocorrem na velocidade, pressão, temperatura e densidade à medida que o fluido passa por este ponto. As variáveis independentes de uma grandeza física ψ são o tempo t e a posição $\mathbf{x} \in \Omega$. A derivada material, ou Lagrangiana, ou substancial, de uma função $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(t, \Phi)$ é

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \psi(t, \Phi)) \\ \frac{d}{dt} \psi(t, \Phi(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \Phi) + \nabla \psi(t, \Phi) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Phi \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \Phi) + \nabla \psi(t, \Phi) \cdot \mathbf{u}(t, \Phi). \end{aligned} \tag{1.1}$$

A Eq. (1.1), é então escrita como

$$\frac{d}{dt} \psi = \frac{\partial}{\partial t} \psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi, \tag{1.2}$$

onde o primeiro termo do lado direito da Eq. (1.2) descreve a *taxa de variação local*, enquanto o segundo termo indica a *taxa de variação convectiva*.

Nesse seguimento, agora considerando Ψ qualquer grandeza extensiva, como por exemplo, massa e momentum. E ainda, considerando ψ sua grandeza intensiva, isto é, uma grandeza independente da grandeza do material do sistema considerado, como a densidade (massa por unidade de volume) e velocidade (momentum por massa). Além disso, para $B_0 \subset \Omega$ compacto com $\partial B_0 \in C^1$, sendo $B(t) = \{\Phi(t; t_0, x_0) : x_0 \in B_0\}$, então a grandeza extensiva Ψ no volume substancial $B(t)$ pode ser expressa por

$$\Psi(t) = \int_{B(t)} \psi(t, x) \, dx.$$

1.2.1 Teorema do transporte de Reynolds

Teorema 1.1. (Teorema do transporte de Reynolds) *Seja $\mathbf{u} \in C^1(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ limitado. Para cada $(t_0, \mathbf{x}_0) \in J \times \Omega$, $\Phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ é solução de*

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \mathbf{u}(t, \Phi(t)), \quad \Phi(t_0) = \mathbf{x}_0. \tag{1.3}$$

Para $B_0 \subset \Omega$ compacto e $\partial B_0 \in C^1$, seja $B(t) = \{\Phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \in B_0\}$ o volume movendo-se com velocidade $\mathbf{u}$, e sendo $\psi \in C^1(J \times \mathbb{R}^n)$. Então,

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial B(t)} \psi(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) dA, \quad (1.4)$$

onde $\mathbf{n}$ indica a normal externa em ∂B .

Uma demonstração detalhada para o Teorema (1.1) pode ser encontrada em Serrin (1959).

No caso de um fluido incompressível (o campo de velocidade $\mathbf{u}$ está livre da divergência) e com $\psi(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})\phi(t, \mathbf{x})$, a Eq. (1.4) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \phi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \frac{D}{Dt} \phi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

com o operador D/Dt da Eq. (1.2). Examinando o volume de material $B(t)$ em um instante t , então pode-se considerar que coincide com um volume fixo B . Além disso, a Eq. (1.4) pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_B \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial B} \psi(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) dA. \quad (1.5)$$

Então, o primeiro termo do membro direito da Eq. (1.5) pode ser interpretado como a taxa de variação de Ψ no volume fixo B e o segundo termo descreve o "dentro-e-fora" na fronteira ∂B . O termo $\psi(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ indica o fluxo convectivo da grandeza Ψ .

Seja $\mathbf{q}: J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ o fluxo de Ψ , ∂B a fronteira de B com a unidade externa normal $\mathbf{n}$, e $f: J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ representando a intensidade de fontes e sumidouros, respectivamente. Então, o balanço da grandeza Ψ é dada a seguir como

$$\frac{d}{dt} \int_B \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\partial B} \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dA + \int_B f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Se $\Psi \in C^1(J \times \Omega)$, $\mathbf{q} \in C^1(J \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ e $f \in (J \times \Omega)$, aplicando o teorema da divergência do teorema de Gauss, resulta em

$$\int_B \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall B \subset \Omega, \partial B \in C^1. \quad (1.6)$$

Escolhendo $B = B_r(\mathbf{x})$, a divisão pelo seu volume $|B_r(\mathbf{x})|$ e $r \rightarrow 0_+$ resulta na seguinte equação de balanço local

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{q}(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}), \quad \text{para } t \in J, \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.7)$$

uma vez que a Eq. (1.6) é válida para todo $B \subset \Omega$ com $\partial B \in C^1$. Para volumes geométricos movendo-se com uma velocidade constante, a regra de Leibniz torna-se indispensável, sendo apresentada na Seção a seguir.

1.2.2 Regra de Leibniz

Teorema 1.2. (Regra de Leibniz) *Seja $B(t)$ uma região dependente do tempo com $\partial B \in C^1$ e sendo $\psi \in C^1(J \times \Omega)$. Então,*

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial B(t)} \psi \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n} dA,$$

onde $\mathbf{u}_S$ indica a velocidade na fronteira ∂B e $\mathbf{n}$ a normal exterior em ∂B .

No caso de um volume geométrico apenas mover-se com a velocidade da partícula $\mathbf{u}$, isto é, $\mathbf{u}_S = \mathbf{u}$, o volume já não é arbitrário – em vez disso, o volume coincide com o volume substancial. Assim, obtém-se o teorema de transporte de Reynolds como uma especialização da regra de Leibniz.

1.3 Balanço das equações fluido-dinâmicas

A lei da conservação da massa é um princípio básico da mecânica clássica, onde se afirma que a massa é uma grandeza fixa que só pode ser deformada, mas não pode ser criada ou destruída. Do ponto de vista físico, é natural considerar as leis de conservação em coordenadas substanciais. Então, para lidar com o fluxo dentro de uma certa região espacial, as leis de conservação serão transformadas em coordenadas espaciais através do teorema de transporte de Reynolds.

1.3.1 Conservação da massa

A massa total $m: J \rightarrow \mathbb{R}$ do fluido no interior de um domínio substancial, sendo descrito por $B(t) \subset \Omega(t)$ em um instante fixo t é dado por

$$m(t) = \int_{B(t)} \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad t \geq 0.$$

De acordo com a lei da conservação da massa, a derivada temporal $m(t)$ torna-se nula. Assim, da Eq. (1.4) o balanço da Eq. (1.7) com $\psi = \rho$, $f = 0$ e o fluxo convectivo $\mathbf{q} = \rho \mathbf{u}$. Obtém-se a equação diferencial do balanço de massa, conhecida como *equação da continuidade*, representada matematicamente por

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot (\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x})) = 0. \quad (1.8)$$

Agora, retomando a ideia de fluidos incompressíveis. Segue para este caso, que o volume V do fluido no tempo t é conservado, e portanto,

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} 1 d\mathbf{x} = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Ao aplicar o teorema do transporte de Reynolds com $\psi = 1$ na Eq. (1.9), escolhe-se o volume substancial $B(t)$ como uma bola com centro $\mathbf{x}$ em um tempo t , isto é,

$$B(t) = B_r(\mathbf{x})(t) := \{\Phi(t; t_0, \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \in B_r(\mathbf{x})\},$$

onde $\Phi(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ é a solução da Eq. (1.3). Então, dividindo pelo seu volume $|B_r(x)(t)|$ e $r \rightarrow 0^+$, resulta em $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, em $\Omega(t)$, uma vez que a Eq. (1.9) é válida para todo $B(t) \subset \Omega(t)$. Inserindo esse resultado na Eq. (1.8), as seguintes equações para *fluidos incompressíveis* são obtidas, podendo ser rescritas nas formas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, \mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (1.10)$$

Se, além disso, a densidade for independente tanto de t como de $\mathbf{x}$, isto é, $\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0$, a segunda equação de (1.10) é trivialmente completa e a equação da continuidade para *fluidos incompressíveis* com densidade constante é simplesmente representada por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.11)$$

Definição 1.1. (*Escoamento incompressível*) Um escoamento é chamado *incompressível*, se a Eq. (1.11) for mantida.

A próxima propriedade física, é utilizada para a descrição matemática de fluxos, é a conhecida *conservação do momentum*. O momentum $M: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um fluido dentro de um elemento de volume $B(t)$ em um tempo fixo t é dado por

$$M(t) := \int_{B(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad t \geq 0.$$

De acordo com a conservação do momentum, também conhecido como a segunda lei de Newton, a taxa de variação de momentum é igual à soma $\mathbf{F}: J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ para todas as forças impostas, isto é,

$$\frac{d}{dt} M(t) = \mathbf{F}. \quad (1.12)$$

As forças de atuação são divididas em *forças externas* e *internas*. As *forças externas* atuam sobre o fluido do lado de fora, como por exemplo, a força gravitacional. De maneira análoga, as *forças internas* agem no interior do fluido, como por exemplo, a pressão e a fricção interna, conforme verificado no trabalho de Giesekus (2011). As forças externas podem ser escritas como uma integral de volume, representada e calculada pela integral

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \int_{B(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.13)$$

onde o produto entre os termos $\rho(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ indica a *densidade de força* (força por unidade de volume).

Com relação às *forças internas*, as mesmas podem ser equilibradas, eliminando um elemento de fluido infinitesimal e considerando as forças que são "colocadas" na superfície do elemento fluido em conformidade com a terceira lei de Newton. De acordo com a hipótese de Cauchy: o estresse depende apenas da posição do elemento e da orientação da face do elemento, conforme Giesekus (2011). Assim, *forças internas* podem ser descritas como uma integral de superfície, calculada através da integral

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_{\partial B(t)} \mathbf{t}(\mathbf{n}, t, \mathbf{x}) dA, \quad (1.14)$$

onde a tensão $\mathbf{t}$ depende da direção da normal $\mathbf{n}$, exterior sobre o elemento de superfície $\partial B(t)$, do instante t , e da posição $\mathbf{x}$. Note, que a tensão $\mathbf{t}$ possui a mesma unidade como a pressão. A tensão $\mathbf{t}$ é precisamente dado como

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, t, \mathbf{x}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n}, \quad (1.15)$$

onde $\mathbf{T}$ é denominado de *tensor das tensões*. Para validade da Eq. (1.15), como referência, sugere-se os trabalhos de Aris (2012) e Spurk (2013).

1.3.2 Conservação do momentum

Definição 1.2. (*O tensor das tensões*) O Tensor $\mathbf{T} : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ implicitamente de acordo com a Eq. (1.15) é denominado de o tensor das tensões ou o tensor das tensões de Cauchy.

Combinando as Eqs. (1.13) e (1.14), a lei de conservação do momentum pode ser lida como

$$\frac{d}{dt} \int_{B(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{B(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial B(t)} \mathbf{T}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n} dA. \quad (1.16)$$

Aplicando o teorema do transporte de Reynolds, a regra do produto e o teorema da divergência de Gauss na Eq. (1.16), e como antes a escolha de $B(t) = B_r(\mathbf{x}(t))$, a divisão pelo seu volume e $r \rightarrow 0_+$, resulta na equação diferencial de balanço do momentum

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega. \quad (1.17)$$

O tensor das tensões determina a ordem da Eq. (1.17). Para o restante desta seção é assumido que $\mathbf{T}$ pode ser separado no termo de pressão linear p e no tensor de tensão viscosa $\mathbf{S} : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + \mathbf{S}. \quad (1.18)$$

Se a Eq. (1.17) for inserida na equação do balanço de momentum, isto é, na Eq. (1.16), e a equação da continuidade, a Eq. (1.11) for adicionada, o sistema de balanço das equações será validado para o movimento de um fluido incompressível, podendo ser representado pelas respectivas equações de balanço, dado a seguir por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nabla \cdot \mathbf{S} + \rho \mathbf{f}, \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

onde o tensor das tensões $\mathbf{S}$ para fluidos Newtonianos viscosos e incompressíveis, é dado por

$$\mathbf{S} = \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right], \quad (1.20)$$

onde μ é a *viscosidade dinâmica* e $(\nabla \mathbf{u})^T$ é a transposta do gradiente de velocidade $\nabla \mathbf{u}$.

Em seguida, inserindo a Eq. (1.20) no conjunto de equações de balanço, isto é, a Eq. (1.19), e dividindo por ρ , são obtidas as conhecidas equações de Navier-Stokes, que são válidas para movimento de fluido Newtoniano incompressível, representadas por

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}, \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

onde $\nu := \mu/\rho$ é *viscosidade cinemática*. Se as forças viscosas forem desprezadas, isso resulta nas chamadas *equações de Euler* para um fluido ideal (invíscido). Então, a Eq. (1.18) se reduz automaticamente à $\mathbf{T} = -p \mathbf{I}$.

Definição 1.3. (*Taxa do tensor deformação*) O tensor $\mathbf{D} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ dado por

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right], \quad (1.22)$$

é denominado *taxa do tensor deformação*.

1.3.3 Equação da energia

Considera-se o balanço de energia para o fluido no volume de controlo V . O trabalho é realizado na massa de fluido pelas forças do corpo e da superfície. O trabalho realizado e a transferência de calor aparecem como um aumento na energia interna do fluido (sendo este último associado ao movimento térmico das moléculas), de acordo com a primeira lei da termodinâmica. A atividade destas duas formas de energia na energia total de uma partícula-fluido é válida se o fluido for apenas um pouco dissipador.

Uma vez que o escoamento do fluido ocorre necessariamente sob condições de não-equilíbrio termodinâmico, assume-se que as partículas-fluido passam por uma sucessão de estados de equilíbrio. Pode-se então definir a energia interna E para as partículas-fluido, em qualquer instante, como o valor correspondente a um estado hipotético de equilíbrio.

A densidade ρ pode ser definida como usualmente como a razão entre a massa e o volume instantâneo da partícula-fluido. O conhecimento das duas propriedades do estado E e ρ em qualquer instante, permite determinar outras grandezas. Por mais suave que este procedimento possa parecer, parece apresentar uma pequena dificuldade. A pressão termodinâmica, representada por p_t , portanto calculada, pode não ser igual à pressão mecânica, dada por p . De facto, pode-se escrever

$$p - p_t = -k\varepsilon_{kk}, \quad (1.23)$$

onde $-k\varepsilon_{kk}$ é um coeficiente escalar chamado de viscosidade do volume ou segundo coeficiente de viscosidade (em inglês, *bulk viscosity coefficient*). A Eq. (1.23) indica o atraso no ajuste da pressão sobre os valores que mudam continuamente de ρ e E em um fluxo de fluido. Fisicamente, esse atraso é consequência do atraso na equipartição de energia entre os vários modos (translação, rotação e vibração) de uma molécula de fluido.

No entanto, na maioria dos casos estudados, as taxas de dilatação são muito menores do que as taxas de cisalhamento, de modo que a viscosidade do volume não desempenha um papel importante. Deve-se portanto, negligenciá-lo e considerar p e p_t como sendo idênticos em todos os lugares.

A equação que expressa a primeira lei da termodinâmica é representada por

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + E_p \right) \rho dx = \frac{DQ}{Dt} - \frac{DW}{Dt}, \quad (1.24)$$

onde e é a *energia interna* do fluido por unidade de massa, E_p é a *energia potencial* do fluido num campo conservativo de força-corpo, $\mathbf{F} = -\nabla U$. O termo Q é a transferência de calor para o sistema, e W é a entrega de trabalho ou o trabalho realizado no sistema.

Considerando

$$Q = \int_V q dx, \quad W = \int_V w dx, \quad (1.25)$$

a Eq. (1.24) torna-se

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + E_p \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{u} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + E_p \right) \right\} - \frac{Dq}{Dt} + \frac{Dw}{Dt} \right] dx = 0, \quad (1.26)$$

da qual tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + E_p \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho \mathbf{u} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + E_p \right) \right\} = \frac{Dq}{Dt} - \frac{Dw}{Dt}. \quad (1.27)$$

Utilizando a Eq. (1.11), a Eq. (1.27) torna-se em,

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + E_p \right) + \mathbf{u} \cdot \nabla \left(e + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + E_p \right) \right] = \frac{Dq}{Dt} - \frac{Dw}{Dt}. \quad (1.28)$$

Para o fluido em movimento, considera-se

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.29)$$

onde a parte não-isotrópica δ_{ij} representa a tensão tangencial que surge apenas em um fluido móvel, e ainda, considerando

$$p = -\frac{1}{3}\tau_{ii}, \quad (1.30)$$

sendo a média das três tensões normais para um conjunto ortogonal de eixos, reduzindo-se à pressão hidrostática quando o fluido entra em repouso. Uma vez que o fluido no movimento relativo não está em estado de equilíbrio termodinâmico, ρ não é uma variável de estado na termodinâmica. Portanto, usando as Eqs. (1.29) e (1.12), a Eq. (1.28), torna-se

$$\rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{Dq}{Dt} + d_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (1.31)$$

Note que, d_{ij} é a taxa de deformação local, sendo definida pela seguinte relação

$$d_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta\varepsilon_{kk} \right), \quad (1.32)$$

onde nota-se que,

$$\begin{aligned} d_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \varepsilon_{ij} d_{ij} = 2\mu \left(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \right) \\ &= 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (1.33)$$

e assim, a Eq. (1.31) pode ser reescrita na forma,

$$\rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \frac{Dq}{Dt} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (1.34)$$

Observe que o último termo no lado direito na equação (1.34) é sempre positivo e representa o aquecimento viscoso.

É importante notar que, se o fluxo de calor ocorrer como consequência do transporte molecular entre porções contíguas de fluido através da superfície de controlo, observando que o transporte molecular de calor é proporcional ao gradiente local de temperatura T (que é uma medida da energia cinética do movimento molecular aleatório) do fluido, tem-se a seguinte formulação,

$$\int_V \frac{Dq}{Dt} dx = \oint_S \kappa \nabla T \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.35)$$

e usando o Teorema de Green, a Eq. (1.35), esta torna-se,

$$\int_V \frac{Dq}{Dt} dx = \int_V \nabla \cdot (\kappa \nabla T) dV, \quad (1.36)$$

de modo que, se a condutividade térmica κ for constante, tem-se finalmente a equação da energia, representada na forma diferencial por

$$\frac{Dq}{Dt} = \kappa \nabla^2 T. \quad (1.37)$$

1.4 A simulação numérica

A tarefa central da ciência natural consiste em descrever a realidade com a maior precisão possível, a fim de compreender melhor os fenômenos naturais e, assim, obter uma visão mais ampla do comportamento dos objetos em investigação sob determinadas condições. Isso envolve a verificação de fenômenos muito diferentes que ocorrem em escalas de variadas ordens de magnitude que vão desde a investigação da natureza da matéria na mecânica quântica até estudos da origem do universo. No passado, houve duas abordagens metodológicas para descobrir as leis da natureza: o *prático* e o *teórico*. A abordagem prática busca descobrir leis físicas através da observação auxiliada por experimentos e vários dispositivos e instrumentos de medição. Uma das grandes personalidades foi Galileo Galilei¹, sendo responsável pela revolução científica, com seus experimentos de queda conduzidos a partir da torre inclinada de Pisa, durante o qual ele disse ter descoberto que os corpos de diferentes pesos caem no chão com a mesma velocidade.

A abordagem *teórica* por sua vez, converte as leis da natureza em relação as grandezas matemáticas, empregando a linguagem do cálculo diferencial e integral para descrever como determinadas grandezas mudam dependendo de outras. De acordo com o conhecido episódio de Newton, uma maçã caindo o convenceu de que a mesma força da gravidade deve governar todo o cosmo; isso levou Sir Isaac Newton ao desenvolvimento da teoria da gravitação. Newton também descreveu o movimento de corpos sólidos com três leis que carregam seu nome. A James Maxwell² é creditado com a descoberta das equações que governam os campos eletromagnéticos, e a Albert Einstein³ o desenvolvimento de sua famosa teoria da relatividade enquanto estava

¹Galileu Galilei (físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano, 1564 - 1642.)

²James Clerk Maxwell (1831–1879) - Físico e Matemático escocês.

³Albert Einstein (1879–1955) - Físico teórico alemão.

sentado à sua mesa. As equações de Navier-Stokes e Euler formam a base do tratamento matemático do campo de escoamentos de fluidos, descrevendo a dependência da velocidade, pressão e temperatura no espaço e no tempo. Ambas as abordagens (*teórico* e *prática*), no entanto, têm suas limitações. Em certas áreas, realizar experimentos físicos, como investigar os efeitos de um derramamento de óleo ou um acidente em um reator nuclear, ocorre o impedimento de tais experimentos, a priori por razões de segurança. Muitas vezes, as medições desses experimentos não podem ser realizadas devido à duração, que, em geral, é extremamente longa, ou quando as grandezas envolvidas são muito pequenas (como a corrente elétrica em um microprocessador) ou muito grandes (como a origem das estrelas e galáxias). Além disso, muitas experiências implicam numa configuração variada e medidas em apenas alguns pontos, como é o caso, por exemplo, na previsão do tempo e de vários outros fenômenos atmosféricos, como tornados, furacões e tsunamis. Por outro lado, as equações matemáticas que descrevem o mundo físico com uma precisão razoável, geralmente são tão complexas que as soluções analíticas não podem mais ser obtidas. Muitas vezes, uma solução exata pode ser encontrada apenas para modelos consideravelmente simplificados. Além das abordagens práticas e teóricas, as *simulações numéricas* se estabelecem nos últimos anos como uma terceira abordagem que une as duas metodologias tradicionais comentadas anteriormente.

As simulações numéricas pretendem, idealmente, reproduzir as observações do mundo real, as quais, por sua vez, são modeladas por equações matemáticas válidas num certo intervalo de tempo e num certo domínio espacial. Estas equações são então discretizadas, ou seja, consideradas apenas em um número finito de pontos selecionados no espaço e no tempo. Nestes pontos, as soluções destas equações são aproximadas. Com as recentes melhorias e avanços computacionais em termos de memória e velocidade de processamento, as simulações numéricas têm sido cada vez mais "realistas", de modo que os usuários dessas ferramentas, são cada vez mais capazes de reproduzir as suas próprias experiências em um computador. É importante salientar que muitas falhas de abordagens experimentais e teóricas foram superadas através das simulações numéricas. O acesso à análise de fenômenos, que até então não poderiam ser examinados, pode tornar-se possível e viável e experiências dispendiosas podem ser evitadas. Além disso, uma série de testes podem ser otimizados por rápidas repetições, alternando-se parâmetros ou geometrias, favorecendo a disponibilidade de mais dados que possam ser coletados em experimentos tradicionais. Com isso, a simulação numérica oferece pelo menos um acesso aproximado à solução nas equações que compõem os modelos matemáticos de interesse.

Um modelo matemático deve descrever a realidade com a maior precisão possível. Além disso, o modelo discreto (ou discretizado) deve aproximar-se do modelo contínuo. O resultado, necessariamente de alta resolução, do espaço por pontos discretos leva à requisitos extremamente exigentes para a memória do computador e para o tempo de processamento computacional. Dependendo do problema, a solução pode requerer a execução de muitos ciclos, que pode envolver a chamada dependência temporal da não-linearidade e a resolução de sistemas de equações lineares de grandes dimensões.

Atualmente, as simulações numéricas são empregadas em muitas áreas científicas e industriais, como por exemplo, na engenharia mecânica, onde propriedades dos sólidos com certo grau de elasticidade são investigados para projetar veículos e/ou para analisar e melhorar a estabilidade de estruturas. Em aplicações químicas, a simulação numérica é utilizada para otimizar as reações de diferentes substâncias, que ocorrem, por exemplo, no processo de combustão. Outras aplicações incluem a investigação dos processos de fusão e de revestimento, e previsão do tempo. Uma visão geral das múltiplas aplicações podem ser encontradas no trabalho de Kaufmann and Smarr (1992). Com relação à discretização de equações diferenciais envolvidas, consultar o trabalho de Golub and Ortega (2014).

Com essa grande variedade de aplicações, pode-se afirmar que a simulação numérica é sem dúvida uma área de alta tecnologia, pois ela tem permitido nos últimos anos o estudo sobre questões relacionadas com o meio ambiente, além de tantas outras já mencionadas anteriormente. Estes são alguns exemplos reais envolvendo uma pequena amostragem de uma área do conhecimento que utilizam a simulação numérica, agora conhecida como a *Dinâmica dos Fluidos Computacional* (em inglês, *Computational Fluid Dynamics – CFD*). Esta última, pode descrever com grande aproximação, os resultados relacionados aos processos de fenômenos físicos e/ou físico-químico que o escoamento pode apresentar. Essa ferramenta reúne internamente as equações de Navier-Stokes, onde estas equações, mesmo em uma formulação bidimensional, apresentam em sua composição termos não-lineares, onde a solução somente será possível para um determinado número de casos particulares, ou em outras palavras, importantes simplificações precisam ser realizadas para que o problema abordado possa então ser resolvido. A priori, essas equações são capazes de representar qualquer tipo de regime de escoamento, a saber, do laminar ao turbulento, compressíveis ou incompressíveis, internos ou externos. Em quaisquer casos, a necessidade de redefinir o campo de escoamento em torno do corpo em cada passo de tempo pode introduzir uma carga computacional adicional que precisa ser tratada e resolvida com uma aproximação numérica estável e confiável. Isso mostra como esta área do conhecimento é relevante, e como seus horizontes estão sendo cada vez mais ampliados.

A partir deste interesse, este livro apresenta as equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da energia, sob condições de contorno fisicamente apropriadas. Do ponto de vista numérico, as equações da continuidade (conservação da massa), da quantidade de conservação do movimento (momentum) e da energia, além das condições de contorno apropriadas, são geralmente substituídas por sistemas de equações algébricas, utilizando técnicas de discretização eficientes. Assim, com o auxílio de algoritmos computacionais, o sistema resultante é processado numericamente, obtendo assim, precisão e estabilidade numérica nas soluções. Neste trabalho, optou-se em realizar a simulação numérica para análise e compreensão de alguns fenômenos físicos, como é o caso da turbulência juntamente com a transferência de calor considerando a convecção mista (forçada e natural), sendo esta uma linha de investigação que em tempos atuais não precisa ser evitada, pelo contrário, as tentativas experimentais e numéricas na compreensão de sua eficiência do transporte de propriedades físicas e a presença de vorticidade distribuídas no campo do escoamento, são exemplos característicos desta sua natureza, já apresentado em trabalhos bem anteriores, como por exemplo, em Smagorinsky (1963), Tennekes and Lumley (1972) e Peskin (1977).

Entretanto, sem a pretensão de definir ou explorar profundamente neste trabalho o conceito e o fenômeno da turbulência, pode-se a priori mencionar que, neste trabalho, as simulações numéricas apresentam *estruturas turbilhonares* bidimensionais, que movimentam-se aleatoriamente na direção global do campo de escoamento, sendo que o *estado turbilhonar* ou as denominadas *estruturas turbilhonares* surgem no escoamento à medida que a velocidade do escoamento excede um determinado valor específico. Assim, vale mencionar a conhecida experiência de Reynolds, onde o escoamento torna-se instável quando este atinge um determinado valor crítico. Além deste valor, a turbulência se desenvolve muito rapidamente e de maneira caótica. Por outro lado, forças de amortecimento atenuam o comportamento irregular, onde o escoamento passa a apresentar o fenômeno denominado de "relaminarização", fenômeno este numericamente aproximado em trabalhos anteriores, como, por exemplo, Jones and Launder (1972).

Com relação a compreensão e a associação dos fenômenos térmicos considerando baixos e moderados números de Reynolds para o escoamento em torno de corpos imersos com fronteira fixa e/ou móvel, obtém-se a formação e o desprendimento de vórtices combinado

ao processo de transferência de calor, além do surgimento das estruturas turbilhonares já mencionadas anteriormente, produzindo um movimento aleatório para o fluido, alterando com isso totalmente sua dinâmica, além do facto de considerar a convecção mista, sendo neste trabalho denominado de *interação termo-fluido dinâmica*. Assim, em linhas gerais, obter soluções numéricas envolvendo os processos de transferência de calor por convecção mista adicionando os processos iniciais da turbulência ao escoamento é uma tarefa extremamente árdua e desafiadora em decorrência da não-linearidade de termos que representam mecanismos no transporte de propriedades físicas. Em outras palavras, o processo de implementação e/ou de desenvolvimento de um código computacional significa a construção de um eficiente algoritmo destinado à simulação do campo de escoamento com determinadas características em torno de corpos imersos, onde estes corpos possam apresentar ou não movimento de fronteira. E isto não é algo simples de se fazer, pois independentemente do tipo de metodologia utilizada, seja do tipo analítica, experimental ou numérica, o desenvolvimento desse(s) algoritmo(s) utiliza(m) importantes conceitos de ordem físico-matemática, que precisam ser considerados e levados até uma determinada linguagem de programação, onde esta por sua vez, será utilizada como "descodificador" dos fenômenos físicos envolvidos ou de interesse para a obtenção de uma aproximação de resultados estáveis e confiáveis, atendendo assim, as diferentes áreas e linhas de investigação, tanto para a indústria, ciência e/ou tecnologias.

Portanto, soluções numéricas aceitáveis envolvendo as propriedades físicas já mencionadas, dependem fundamentalmente de dois fatores: modelo(s) de turbulência e algoritmo(s) numérico(s). Onde ambos refletirão resultados baseados em uma modelagem apropriada para o problema, enquanto que o objetivo do método numérico será resolver as equações modeladas com eficiência e precisão. Assim, quando se fala em modelo numérico para os processos turbulentos ou modelação para a turbulência, é necessário estabelecer alguns princípios, como por exemplo:

- (a) Escolha de um conjunto de propriedades que venham a ser suficientes para qualificar a dinâmica do movimento turbulento;
- (b) Eficiência no processo de cálculo de derivação e/ou integração de um sistema de equações algébricas ou diferenciais que governam a distribuição dessas grandezas físicas pelo escoamento;
- (c) Análise dos dados experimentais e/ou numéricos oriundos da modelagem matemática do problema a ser estudado.

É importante considerar que, atualmente, há uma grande quantidade de códigos comerciais disponíveis no mercado com este objectivo, mas a pesquisa de novas formas de modelação através do desenvolvimento/implementação de algoritmos constitui uma alternativa também atraente e eficiente para determinados casos; mas isso é uma "via de mão-dupla", porque os programas (softwares) comerciais possuem um custo elevado, sendo que vários deles necessitam de renovação periódica de sua licença e porque tais programas possuem também os chamados "closed source" (fonte fechada), destinados à avaliação de parâmetros, não permitindo que seja alterada sua estrutura interna de programação, onde muitas das vezes isso precisa ocorrer. Não é o objetivo desta investigação propor críticas aos códigos comerciais, pelo contrário, os mesmos são poderosas ferramentas para avaliação de diversos casos, em diferentes aplicações.

Neste trabalho, a simulação numérica utiliza uma metodologia que foi implementada para descrever a interação termo-fluido dinâmica em torno de corpos rígidos (sem elasticidade), com fronteira fixa e móvel (sem rotação), que leva em consideração os processos de transferência de calor e da turbulência, considerando o efeito de flutuabilidade, que em geral é ortogonal

à direção do fluxo. A simulação numérica apresentada nesta tese vai do regime laminar ao moderado (quase que totalmente turbulento) de um fluido Newtoniano incompressível bidimensional, com diferentes configurações geométricas, para corpos isotérmicos, isto é, considerando a temperatura constante na superfície dos corpos imersos, levando em conta importantes coeficientes aerodinâmicos, além de outros números adimensionais que serão apresentados e tratados durante este trabalho. Assim, apenas estas características para a simulação numérica do escoamento em torno de corpos imersos, já apresentam um grau elevado de complexidade em seu desenvolvimento/implementação computacional, pois os fenômenos físicos envolvidos nesta investigação precisam necessariamente serem modelados considerando sua natureza não-linear. O código desenvolvido foi implementado para utilizar o Método da Fronteira Imersa (MFI), desenvolvido por Charles S. Peskin (1972) acoplado ao Modelo Físico Virtual (MFV), proposto por Silva et al. (2003). Em linhas gerais, o MFI é ao mesmo tempo um modelo matemático e numérico, desenvolvido inicialmente para a análise do fluxo sanguíneo no interior do coração humano. Este método possui características próprias, diferente das comumente encontradas na Dinâmica dos Fluidos Computacional, pois ao contrário de utilizar malhas computacionais que se adaptam à forma do corpo imerso, o MFI discretiza as equações que modelam o escoamento em uma malha cartesiana, adicionando um termo fonte (também denominado de termo forçante ou de força) nas equações governantes de Navier-Stokes, a saber, na quantidade de movimento e energia, sendo responsável por indicar/informar ao escoamento a localização e a fonte térmica do obstáculo imerso.

Esta metodologia, vem sendo introduzida em muitas aplicações, tanto no meio industrial quanto acadêmico. O autor do método, Charles S. Peskin (1972), em relação a outros autores, não fez nenhuma hipótese específica com relação ao corpo imerso para observar o movimento do fluido. As observações realizadas pelo autor basearam-se somente nas leis de Newton e nas características físicas e fisiológicas do fluido, neste caso, a investigação do autor esteve relacionada apenas ao músculo cardíaco. Essa abordagem foi bastante inovadora, pois foi responsável pela análise de escoamentos em torno de geometrias complexas e móveis, usando uma malha computacional fixa (Euleriana) e outra arbitrária (Lagrangiana), sem a necessidade de utilizar o processo denominado de "remalhagem". Com o desenvolvimento de novas metodologias para as simulações numéricas, a maioria das aplicações de natureza industrial passaram então a reduzir esse elevado custo computacional, passando então a utilizar uma abordagem mais otimizada, onde a finalidade é a total exploração da análise do escoamento e dos fenômenos envolvidos, permitindo que geometrias simples ou complexas possam ser tratadas da melhor forma possível considerando o baixo custo computacional.

Com relação ao Modelo Físico Virtual (MFV), que será apresentado no Capítulo 3, pode-se adiantar que é um modelo alternativo para o cálculo da densidade da força Euleriana com base na interação fluido-corpo. O termo "*Virtual*" faz referência à condição de não-deslizamento que deve ser modelada sem a imposição direta de velocidade na interface. Neste modelo, a densidade da força é calculada sobre um ponto Lagrangiano, usando os termos da equação de Navier-Stokes para a quantidade de movimento, sendo necessário conhecer a priori os campos de velocidade, pressão e temperatura; maiores detalhes em Santos (2014). Em síntese, este modelo numérico avalia dinamicamente a força que o fluido exerce sobre a superfície sólida imersa (sobre a parede do corpo imerso) no escoamento. Trabalhos importantes produziram resultados utilizando o MFI/MFV, como por exemplo, os trabalhos de Arruda (2004), Remigio (2005), Oliveira (2006), Bornschlegell (2008), Santos (2014) e Vieira (2017). Este último, baseou-se no trabalho de Santos (2014) e Reis (2016) para o caso de um cilindro circular rotativo com diferentes números de Reynolds e diferentes taxas de rotação específica, onde o objetivo foi comparar os resultados com a literatura disponível nas referências utilizando dois diferentes softwares, validando assim a metodologia. Em linhas gerais, todos estes autores apresentaram excelentes resultados.

Com relação aos interesses e aplicações de cunho científico e industrial, uma compreensão com relação à formulação físico-matemática dos fenômenos envolvidos sempre será necessária e importante, pois existem questões relacionadas com o escoamento em torno de corpos, que ainda não estão totalmente resolvidos e que merecem uma atenção especial. Entre vários aspectos que dificultam essa análise, é possível citar duas. A primeira está relacionada com a apresentação da esteira de vórtices que se forma a jusante destes corpos. A segunda está relacionada com o caráter térmico e turbulento do escoamento. A definição de geometria complexa está relacionada com a forma da geometria e a quantidade de corpos múltiplos imersos na malha do domínio (por exemplo, dois ou mais cilindros). Não será foco deste trabalho a simulação numérica de escoamentos não-newtonianos em torno de corpos, mas pode-se mencionar que a sua simulação pode ser feita basicamente com uma abordagem híbrida, a saber, Euleriana e a Lagrangiana. Na utilização dessas formulações, a formulação Lagrangiana nos processos de convecção e de difusão, envolvem grandezas de interesse (por exemplo, vorticidade e transferência de calor) tendo como objetivo superar dificuldades encontradas em situações específicas quando se utilizam métodos Eulerianos, mas isso não significa que a metodologia Euleriana possua menos ou mais importância que a Lagrangiana, pelo contrário.

Com relação às dificuldades a superar neste trabalho, mencionamos as relacionadas com (i) a geração de vórtices e as chamadas bolhas de recirculação junto à superfícies do corpo imerso, (ii) a reflexão dos vórtices junto às fronteiras da região de interesse, (iii) a simulação da convecção e difusão, que em geral, consome a maior parte do tempo computacional, e (iv) o regime de turbulência, considerando números de Reynolds moderados.

As equações governantes de Navier-Stokes utilizadas foram escritas na forma adimensional com um termo forçante (ou de força), especificamente nas equações da quantidade de movimento e energia, considerando o efeito de flutuabilidade e de turbulência no escoamento. Considerou-se nesta investigação, o desprezo pelo termo de geração de energia, assim como os efeitos de energia interna. Isso é válido para a humidade, pois poderia ser responsável pelo calor latente. Os efeitos de força de Coriolis e de rotação do sistema de coordenadas também foram desprezados.

1.5 Organização deste livro

A construção do texto deste livro está dividida em 7 (sete) Capítulos. O Capítulo 1 apresenta as contribuições e as motivações que levaram ao desenvolvimento da presente investigação, a notação matemática, os principais teoremas e definições, o balanço das equações fluido-dinâmicas e os equipamentos computacionais utilizados. O Capítulo 2 apresenta o estado-da-arte, com os principais trabalhos acerca do tema, onde as referências bibliográficas investigadas fazem uso de metodologias semelhantes para o estudo do escoamento em torno de corpos estacionários e não-estacionários com aquecimento para diferentes números de Reynolds. No Capítulo 3, é apresentado a modelação matemática das equações governantes para o fluido e para a interface, e a formulação para os modelos de turbulência adotados. O Capítulo 4 é dedicado aos métodos numéricos utilizados, às discretizações das equações governantes e ao cálculo numérico para os modelos de turbulência empregados. O Capítulo 5 é consagrado aos resultados, e o último às conclusões e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Estado da arte

Sumário

2.1	Introdução	17
2.2	Trabalhos envolvendo o método da fronteira imersa	18
2.3	Trabalhos envolvendo o modelo físico virtual	25
2.4	Características da modelação turbulenta	27
2.4.1	A imprevisibilidade	28
2.4.2	A influência dos efeitos advectivos	29
2.4.3	A capacidade de mistura	29
2.4.4	A vorticidade	29
2.4.5	A multiplicidade de escalas	30
2.5	Análise de Fourier nos aspectos fundamentais da turbulência	30
2.5.1	A dissipação viscosa da energia	30
2.5.2	A troca de energia entre movimentos	30
2.5.3	O espectro da energia turbulenta	32

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar, de forma sequencial, as principais referências bibliográficas e respectivos resultados associando o método da fronteira imersa na análise dos processos térmicos (transferência de calor) em conjunto com os chamados fenômenos iniciais de turbulência para um escoamento bidimensional de um fluido Newtoniano, incompressível, em torno de um corpo isotérmico com temperatura constante e definida na superfície do corpo. Consideramos baixos e moderados números de Reynolds, no intervalo $1 \leq Re \leq 5000$, sem que haja um condicionamento entre ambos os fenômenos (térmico e turbulento) e nem relação entre a forma geométrica do corpo imerso e os respectivos fenômenos mencionados anteriormente. Pretende-se aqui, considerar a relevância do presente trabalho, comparando e validando os resultados obtidos com a literatura existente, promovendo assim, sua parcela de contribuição para a corrente científica.

Inicialmente, fazendo-se referência a uma frase de um dos principais nomes da matemática, da física e da filosofia do século XVIII, o grande D'Alembert¹, este que, no ano de 1752,

¹Jean le Rond d'Alembert foi um filósofo, matemático e físico francês (1717-1783).

fez a seguinte afirmação em uma de suas palestras: "*O arrasto sobre um corpo imerso num escoamento sem fricção interna é nulo*". Este aparente e simples paradoxo tem encorajado ao longo dos séculos muitos outros cientistas a um estudo mais avançado sobre questões relacionados com a dinâmica de fluidos, onde a análise dos efeitos viscosos e a interferência de corpos e demais fenômenos externos foram então considerados e avaliados. A partir disto, na tentativa de aproximar esses efeitos e fenômenos, uma análise puramente potencial tem sido utilizada como fundamentação teórica para uma aproximação computacional, utilizando metodologias numéricas desenvolvidas ao longo de décadas.

Sabe-se que diversos estudos têm sido desenvolvidos no sentido de compreender melhor a dinâmica dos escoamentos em torno de corpos considerando sua complexidade e os fenômenos que possam estar envolvidos. Com relação a esta classe de problemas envolvendo transferência de calor e turbulência em fluidos Newtonianos mesmo utilizando a metodologia inovadora como é o caso da fronteira imersa, mesmo assim, ainda são poucos os trabalhos que procuram relacionar ambos os fenômenos, em sua esmagadora maioria, trazem diferentes números de Reynolds, mas dificilmente apresentam convecção mista. Em geral, são apresentados apenas trabalhos contendo a transferência de calor sem considerar a turbulência, ou vice-versa. Em outras palavras, ocorre um estudo analítico ou numérico segregado entre os fenômenos. Portanto, existe a necessidade de uma investigação mais aprofundada onde importantes números adimensionais, como por exemplo, os números de Reynolds (Re), Richardson (Ri), Grashof (Gr), Strouhal (St), Péclet (Pe) e Nusselt (Nu), possam ser considerados e analisados. Assim, um corpo imerso com alguma estrutura ou parte contendo singularidade requer um tratamento numérico, como é o caso do cilindro circular ou cilindro quadrado, onde ainda assim, são poucos os trabalhos que investigam tais relações entre os parâmetros adimensionais mencionados. Logo, uma análise de ambos os fenômenos (convecção natural e forçada) é considerada na presente tese, sabendo-se que estes fenômenos irão influenciar diretamente a dinâmica de escoamentos, modificando as suas propriedades e o comportamento fluido-dinâmico.

Na Seção a seguir, será apresentado alguns dos principais trabalhos envolvendo o Método da Fronteira Imersa com transferência de calor com diferentes processos de convecção.

2.2 Trabalhos envolvendo o método da fronteira imersa

Nesta seção, apresentamos alguns dos principais trabalhos envolvendo o Método da Fronteira Imersa relacionando-o com o processo de transferência de calor por convecção forçada e natural. O objetivo deste conjunto de referências é a preparação para a fundamentação teórica da metodologia, trazendo ao leitor maior familiaridade com relação à metodologia denominada *Fronteira Imersa*, extraindo importantes pontos conceituais físico-matemático, que serão aplicados na metodologia de interesse aqui apresentado.

Entre as principais referências envolvendo a parte térmica, podem-se listar algumas importantes, como, por exemplo, Badr and Dennis (1985) e Badr et al. (1990). Estes trabalhos não apresentam o método da fronteira imersa, mas são um excelente precursor com relação ao escoamento em torno de cilindro circular rotativo envolvendo convecção forçada, sendo a sua base teórica utilizada em outros importantes trabalhos para implementação da parte térmica. Em síntese, os importantes trabalhos experimental e numérico dos autores Badr and Dennis (1985) e Badr et al. (1990), consideraram o problema do escoamento laminar com transferência de calor por convecção forçada a partir de um cilindro circular rotativo em torno do seu próprio eixo, inicialmente para o número de Reynolds igual a 100, com taxa de rotação específica, (α), para o intervalo variando entre $0,5 \leq \alpha \leq 3,0$. Enquanto isso, o segundo trabalho, utiliza

o intervalo de número de Reynolds variando entre $10^3 \leq Re \leq 10^4$, com rotação específica igual a 4, ou seja, $\alpha = 4,0$. Em ambos os trabalhos, o cilindro está localizado em um escoamento uniforme. Com isso, os autores relatam que em ambos os trabalhos, os campos de temperatura são fortemente influenciados pela vorticidade de rotação do cilindro. Os autores descobriram, em ambos os trabalhos, que o coeficiente de transferência de calor tende a diminuir à medida que a rotação do cilindro aumenta. Foi verificado uma atribuição da presença de uma camada de fluido rotativo em torno do cilindro, separada da corrente principal do escoamento. Assim, os resultados demonstraram convergência e estabilidade numérica comparados com outros disponíveis na literatura (ver, por exemplo, Lai and Peskin (2000), Sharma et al. (2012)).

Saiki and Biringen (1996) utilizaram o Método da Fronteira Imersa com o objetivo de simular escoamentos em torno de cilindros móveis e estacionários, com Reynolds variando no intervalo $0 \leq Re \leq 400$. A discretização espacial de Navier-Stokes foi realizada utilizando o esquema de Cranck-Nicholson e as equações discretizadas resolvidas de forma explícita. O cálculo do campo de força, pertinente ao método, foi realizado utilizando o modelo proposto por Goldstein et al. (1993). Com os resultados, os autores obtiveram excelentes resultados com convergência numérica em validação com outras referências disponíveis, obtendo assim, o coeficiente de arrasto, o comprimento da bolha de recirculação e os valores do ângulo de deslocamento da camada-limite junto ao cilindro.

Lai and Peskin (2000) desenvolveram um esquema de segunda ordem para o Método da Fronteira Imersa para a simulação de escoamentos com a presença de cilindros estacionários. O cálculo do campo de força é feito explicitamente, utilizando uma função que depende de uma constante de rigidez e do deslocamento dos pontos de interface. Foram utilizados valores suficientemente altos desta constante a fim de impedir o movimento da interface e com isso, representar um corpo sólido arbitrário. Foram obtidos valores dos coeficientes de arrasto, de sustentação e do número de Strouhal e comparados os métodos de primeira e de segunda ordem, com os resultados experimentais. Foi então concluído que utilizando o método de segunda ordem os resultados numéricos ficaram mais próximos dos resultados experimentais.

Kim and Choi (2004), apresentam o Método da Fronteira Imersa utilizando o Método de Volumes Finitos, com uma malha escalonada, associado ao Método do Passo Fracionado para resolver as equações de Navier-Stokes juntamente com a equação da energia para simulação de problemas com transferência de calor, onde a geometria imersa é complexa. Uma fonte de calor foi aplicada sobre o corpo imerso, para satisfazer as condições térmicas sobre a fronteira imersa, explicado anteriormente no trabalho de Kim et al. (2001). Neste trabalho, uma fonte ou sumidouro de calor é introduzida na superfície ou no interior do corpo para satisfazer a mesma condição térmica sobre o corpo imerso. O método é aplicado em três diferentes problemas: convecção forçada em torno de um cilindro circular, convecção mista em torno de um par de cilindros circulares, e novamente convecção forçada em torno de um cilindro principal alinhado com um outro pequeno cilindro secundário. Os resultados apresentaram boa concordância, obtidos através de experimentos e simulação numérica realizados anteriormente, verificando assim, a precisão do método.

Su et al. (2007) apresentam uma nova técnica para a simulação do escoamento em torno de uma fronteira sólida. A presente formulação utiliza uma combinação de duas variáveis, uma Euleriana e outra Lagrangiana, onde a fronteira sólida é representada pela marcação ou discretização de pontos Lagrangianos que exercem uma força para o fluido de domínio Euleriano. Essas interações entre esses marcadores Lagrangianos e as variáveis de fluido, são ligadas por uma simples função discreta. A integração numérica é baseada em um método de etapa fracionária de segunda ordem, sob uma estrutura espacial de malha escalonada. Os autores com base na aplicação de um termo forçante nas malhas Eulerianas, propuseram uma

nova formulação de força Lagrangiana, o que garante a condição de não-escorregamento na fronteira imersa no intervalo de tempo intermediário. Este procedimento para este termo forçante, promove a resolução de um sistema de equações lineares com variáveis desconhecidas cujas incógnitas consistem nas forças de fronteira nos marcadores Lagrangianos. Os resultados numéricos mostraram que a estabilidade da fronteira não foi alterada pela formulação proposta. Foram simulados quatro diferentes problemas, usando a técnica numérica proposta, a saber, para um fluxo de anel rotativo, cavidade com tampa e fluxo sobre um cilindro estacionário e finalmente, para um cilindro oscilante em linha. Os resultados foram comparados com resultados experimentais e numéricos anteriores, obtendo convergência e validação do esquema numérico. Estas evidências, mostraram a precisão e a capacidade do método proposto para resolver problemas de escoamento em torno de geometrias complexas tanto para fronteiras estacionárias ou móveis.

Zhang et al. (2008) desenvolveram uma nova abordagem para a metodologia da fronteira imersa em relação à modelação e a simulação de problemas de transferência de calor com interação fluido-estrutura. Os autores tiveram como objetivo estudar problemas com convecção forçada, o efeito de flutuabilidade e o escoamento incompressível em torno de um cilindro apresentando oscilação. Foi desprezada a geração de calor interno e os efeitos viscosos. A metodologia proposta pelos autores foi desenvolvida para problemas com baixo número de Reynolds, isto é, para $Re \leq 200$, e para fluidos de baixa viscosidade onde os efeitos de aquecimento são muito pequenos, podendo com isso, serem desprezados. Evidências de uma boa aproximação numérica entre os resultados obtidos e dados apresentados em trabalhos anteriores foram garantidos. O estudo apresentado pelos autores apresentou grandes vantagens, como por exemplo, a fácil implementação computacional e boa precisão numérica sem o uso de grandes esquemas de ordem mais elevada. Verificou-se que, ao aplicar o movimento de oscilação para o cilindro, a transferência de calor aumentava sempre, e este aumento ocorre devido o crescimento da amplitude de oscilação. Foi também realizada uma análise de verificação da precisão numérica obtida em comparação com outros problemas de transferência de calor com soluções analíticas conhecidas, disponíveis na literatura. As soluções numéricas apresentadas pelos autores foram validadas através da comparação entre os resultados obtidos na distribuição de temperaturas, onde estas foram simuladas ao longo de um cilindro circular estacionário oscilatório, garantindo assim uma boa convergência numérica.

Huang and Sung (2009) propuseram o Método de Fronteira Imersa para a simulação da interação fluido-estrutura flexível. Neste método, um *solver* eficiente é utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes, a saber, o Método do Passo Fracionado (do inglês, *Fractional Step Method*), em um sistema de malha cartesiana escalonada. Por outro lado, uma malha Lagrangiana móvel é usada para discretizar o domínio da estrutura. A equação do movimento da estrutura é derivada pelo Método de Energia², sendo então resolvida por um processo iterativo. A interação fluido-estrutura é formulada por um termo adicional forçante de momentum, que é obtido na malha Lagrangiana usando a equação de movimento de estrutura, onde é espalhado para células Eulerianas próximas, aplicando uma aproximação contínua da função delta de Dirac. Desta maneira, a fronteira é tratada facilmente sem qualquer abordagem especial, enquanto que para o caso onde a flutuação é nula, a abordagem torna-se equivalente ao processo anterior. Nas simulações, é usada principalmente uma pequena fronteira adicional de massa específica para aplicações em biofluidos. Foram simulados três casos: uma cavidade conduzida pela tampa contendo um volume de controle deformável na parte inferior, o movimento de natação de uma água-viva e um anel circular elástico deformável que se deslocam através de um canal com contração. Verificou-se que ambas as taxas de convergência temporal e espacial estavam entre a

²Método utilizado no estudo da mecânica dos sólidos. Em síntese, utiliza-se os conceitos fundamentais de tensão e deformação.

primeira e segunda ordem no presente método. Verificou-se ainda que a simulação de vibração do anel circular elástico para validar o *solver*, além do cilindro circular rígido estacionário ou transversalmente oscilante em um escoamento uniforme, foi também validado em combinação com o esquema contendo o termo forçante. Os autores compararam os resultados com outros disponíveis na literatura, obtendo convergência e a validação da metodologia.

Wang et al. (2009) utiliza um processo iterativo baseado no método de diferenças finitas para resolver problemas de transferência de calor. Na forma explícita, este método utiliza um esquema de fonte de calor denominado fonte de calor multi-direto, que é aplicado para assegurar a condição de Dirichlet e de temperatura na fronteira imersa. A precisão numérica utilizada é de segunda ordem, e para as simulações dos vórtices e da convecção natural, o escoamento ocorre em torno de um cilindro circular estacionário. Em seguida, a metodologia é utilizada para um banco de tubos escalonados com transferência de calor, destinado à validação do método envolvendo geometrias complexas. Os autores concluíram que as simulações validaram o método tanto para resolução de problemas de transferência de calor quanto para geometrias complexas. Verificaram ainda que o erro entre os valores calculados para a velocidade/temperatura utilizando o esquema multi-direto de forçamento/fonte de calor na fronteira imersa, é reduzido. E ainda, com relação cálculo de Taylor-Green para os vórtices e para a convecção natural entre cilindros concêntricos, a metodologia juntamente com os resultados que por sua vez, foram comparados com outros disponíveis na literatura, demonstraram estabilidade e confiabilidade no método.

Page et al. (2011) investigaram o comportamento térmico de um conjunto de cilindros alinhados e sujeitos a convecção natural, com o objetivo de maximizar a taxa de transferência de calor. Um método numérico foi utilizado para resolver as equações que descrevem os campos de temperatura e do escoamento. A distância entre os cilindros foi otimizado para cada regime de escoamento juntamente com a velocidade de rotação do cilindro. Os resultados demonstraram que ocorre um aumento na taxa de transferência de calor dos cilindros rotativos em relação aos cilindros estacionários, sendo comparados com outros disponíveis na literatura, apresentando convergência e precisão.

Ren et al. (2013) apresentaram problemas envolvendo condição de fronteira para o número de Reynolds variando no intervalo de $20 \leq Re \leq 100$, onde é implementado o Método da Fronteira Imersa. Os autores aplicam um procedimento de correção para a velocidade e para o fluxo de calor. Com esse método, a velocidade corrigida é atualizada para a condição de Dirichlet, juntamente com a correção para a temperatura sob condição de Neumann para o fluxo de calor. A principal característica desse trabalho é satisfazer com precisão as equações governante e as condições de contorno, velocidade e temperatura introduzindo um termo forçante nas equações de conservação de movimento e da energia, onde ambos os termos forçantes consideram a fronteira imersa. O termo forçante e a fonte de calor são determinados de tal modo que as condições físicas de contorno, velocidade e temperatura sejam satisfeitas e garantidas. Os autores comprovaram a aplicabilidade do método para a simulação de problemas relacionados aos processos de convecção forçada e natural. Os experimentos numéricos apresentaram boas aproximações entre os resultados obtidos e os disponíveis na literatura, indicando que o presente método proporciona uma ferramenta útil para resolver problemas de transferência de calor com condições de fronteira de Neumann.

Elghnam (2014) apresentou um estudo experimental da dinâmica do escoamento sobre um cilindro rotativo. Os cálculos numéricos foram realizados usando o software comercial denominado *FLUENT*[®], baseado no Método de Volumes Finitos. O autor analisou a dinâmica do escoamento obtendo linhas isotérmicas, bem como a distribuição de temperaturas ao longo do corpo do cilindro. Os resultados da análise da transferência de calor foram obtidos em função dos parâmetros adimensionais, que neste caso foram os número de Nusselt (Nu), Reynolds

(Re) e o número de Grashof (Gr). As medições experimentais foram realizadas no intervalo variando entre $1.880 \leq Re \leq 6.220$ e $14.285 \leq Gr \leq 714.285$, enquanto os cálculos numéricos foram realizados para Reynolds no intervalo de $0 \leq Re \leq 10^5$ e para os números de Grashof, no intervalo de $10^2 \leq Re \leq 10^6$. Segundo o autor, foi utilizado uma malha computacional gerada pelo software comercial *GAMBIT*[®]. Para os números de Reynolds maiores que 8×10^3 , onde as taxas de transferência de calor se tornaram independentes do número de Grashof (para $Gr \leq 10^5$), o autor verificou que tanto os números adimensionais de Grashof quanto de Reynolds, influenciaram na taxa de transferência de calor. Além disso, verificou-se que a influência da rotação sobre o processo de transferência de calor, apresenta padrões isotérmicos, como por exemplo, as linhas de corrente e isolinhas térmicas para o número de Nusselt. Já para o cilindro circular rotativo, os valores máximos e mínimos deslocam-se na direção da própria rotação, onde essa diferença entre esses valores, tende a desaparecer tornando o número de Nusselt constante. Como observação final, verificou-se que a relação de dependência entre os números de Nusselt e Grashof reduzia à medida que o valor do número de Reynolds aumentava, e a medida que esse último número aumentava, essa dependência era totalmente inibida. Os resultados numéricos demonstraram boa convergência em comparação ao experimental e com outros disponíveis na literatura.

Liao and Lin (2014) realizaram estudos numéricos envolvendo convecção natural e forçada (convecção mista) em domínios contendo um cilindro estacionário e rotativo com diferentes taxas de rotação específica – (α), usando o Método da Fronteira Imersa. O método utilizado pelos autores foi avaliado para escoamentos em um anel entre um cilindro circular concêntrico em uma cavidade quadrada. Um dos parâmetros investigados pelos autores incluem o número de Rayleigh – (Ra), que descreve uma relação entre a flutuabilidade e viscosidade no fluido. A influência da rotação sobre a instabilidade do escoamento para diferentes números de Prandtl – (Pr) foi verificada para rotações específicas que variaram no intervalo de 0,7 a 7,0. Observou-se que para um elevado número de Rayleigh, isto é, para $Ra > 2 \times 10^6$, ocorreu uma transição de um estado estável para instável. Com base nos resultados obtidos, os autores concluíram que há uma relação de influência entre o número de Rayleigh e a transferência de calor que ocorre no interior da cavidade. Já a variação no número de Nusselt foi pequena, diferente do que ocorreu para o número de Richardson (Ri). No entanto, para $Ra = 10^5$ e $Ra = 10^6$, o número de Nusselt (Nu) diminuiu com a redução do número de Richardson. Quando o número diminui para valores menores que 1 (um), o número de Nusselt tornou-se independente do número de Rayleigh, e isso resultou em taxas de rotação que variou entre 34,7% a 63,4%. Observou-se também que o número de Nusselt permaneceu constante para elevados número de Richardson. Em contra partida, a rotação exerceu influência na média temporal do número de Nusselt. Os autores ressaltaram a necessidade de uma análise para o escoamento com presença de instabilidade em torno de um cilindro estacionário. Concluíram que um estudo mais aprofundado para analisar a influência entre os números Ra e Pr em relação à instabilidade do escoamento, necessita ser feita. Os resultados numéricos apresentaram boa convergência e estabilidade, os resultados convergiram bem com outros dados disponíveis na literatura.

Park et al. (2017) apresentam o Método da Fronteira Imersa desenvolvido para o estudo de interações fluido e corpo flexível com transferência de calor. O movimento do fluido e a temperatura são definidos em uma malha Euleriana fixa, enquanto o movimento flexível do corpo é definido em uma malha Lagrangiana móvel. As equações governantes para o movimento do fluido, a temperatura e o movimento do corpo flexível são resolvidos de forma independente em cada malha. Para lidar com a transferência de momentum entre o corpo flexível e o fluido, um termo forçante é adicionado às equações de movimento do fluido com a imposição da condição de não-deslizamento do fluido no corpo flexível. Uma fonte de calor é adicionada entre o corpo aquecido e o fluido circundante, podendo ser calculada de forma semelhante à utilizada para obter

a quantidade de movimento, inpondo as condições térmicas sobre o corpo. As transformações de momentum e calor entre as variáveis Euleriana e Lagrangiana foram estabelecidas usando a função delta de Dirac.

Para a validação da metodologia utilizada por Park et al. (2017), foram simulados os problemas de convecção natural e forçada para um cilindro circular rígido. Para a convecção natural do cilindro rígido aquecido com a condição de fronteira isotérmica, obteve-se uma boa aproximação com os dados referenciados. Para a convecção forçada, um escoamento em torno do cilindro circular rígido também foi simulado com ambas as condições de contorno do fluxo de calor isotérmico e constante. Os números de Nusselt locais e médios para o cilindro, obtiveram boa convergência com relação à literatura. Finalmente, foi simulado um escoamento em torno do cilindro flexível aquecido, sendo avaliado a transferência de calor em comparação com o cilindro rígido. Observaram-se dois estados distintos para o cilindro flexível, dependendo do número de Reynolds e da característica flexível do cilindro. Para $Re = 10$ e $Re = 20$, o cilindro apresentou o estado "estendido-estável" independentemente da propriedade flexível, onde a transferência de calor foi deteriorada em relação ao cilindro rígido. O cilindro flexível experimentou a variação de uma forma circular inicial para uma forma de leque no estado estendido-estável. O alongamento longitudinal aumentou o número de Nusselt perto do ponto fixado, mas diminuiu as dissipações térmicas transversais a montante do cilindro à forma aerodinâmica em vez da circular, isto resultou na diminuição do número de Nusselt. Em $Re = 40$, o cilindro apresentou ambos os comportamentos, dependendo da propriedade flexível. Outras análises foram realizadas e validadas, dentre elas a estabilidade para as constantes de interação fluido-corpo e as transferências de calor. Os problemas de convecção natural e forçada com as condições de fronteira do fluxo térmico e isotérmico são simulados com uma boa aproximação comparado à estudos anteriores. As simulações para a transferência de calor por convecção forçada em torno de um cilindro circular flexível foram realizadas e validadas.

Ashrafizadeh and Hosseini (2017) apresentam uma extensão do Método de Fronteira Imersa para a análise do processo de convecção natural e mista, para o caso de dois cilindros lado-a-lado com velocidade de rotação alternados com aquecimento, ambos em uma cavidade fria e quadrada contendo ar com o número adimensional de Prandtl, Pr , igual a 0,7. As variáveis nesse estudo envolvem as diferentes taxas de rotação específicas, α , para diferentes números de Rayleigh, Ra , e Richardson, Ri , ou seja, os autores realizaram os cálculos para $Ra \in \{10^4, 10^5, 10^6\}$, e para $Ri = 0.1$ e $Ri \in \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. Casos de convecção natural pura também foram considerados. Linhas isotérmicas (ou isothermas), linhas de corrente, números de Nusselt, Nu , local e médio em torno da fronteira do sólido foram estudados e apresentados em cada caso. Uma extensão do Método da Fronteira Imersa foi utilizada para as condições de contorno e na resolução das equações governantes, para um escoamento bidimensional utilizando uma malha cartesiana ortogonal. Um total de 36 casos (aplicações) foram investigados, considerando os casos envolvendo convecção mista que também foram resolvidos. Assim, os resultados verificaram um padrão do escoamento no interior da cavidade, onde devido a rotação os fluxos induzidos apresentaram flutuabilidade. Verificou-se a existência no interior da cavidade quadrada vários fluxos, denominados de ascendentes e descendentes e circulatórios. A localização das chamadas "plumas" ascendentes e descendentes foram fortemente afetadas pela rotação dos cilindros. Os números médios de Nusselt $\overline{Nu}$ nas paredes internas laterais do recinto são geralmente mais elevados do que os valores nas paredes superiores e inferiores. O Nusselt local, $Nu(\theta)$, na superfície de um cilindro, é uma função contendo múltiplos pontos (máximos e mínimos). Esses pontos extremos dependem tanto do número de Richardson, Ri , quanto do número de Rayleigh, Ra , assim como da rotação específica. Com relação a convecção térmica, a rotação apresentou um efeito menor, em comparação com os efeitos dos números de Richardson, Ri , e Rayleigh, Ra . Na análise para $Ra = 10^6$, os padrões do escoamento passaram a ser

instáveis e oscilantes, resultante das diferentes taxas de rotação e do número de Richardson, Ri . Foi verificado ainda a existência de regimes de convecção mista, onde para números de Richardson, Ri , maior que 1, ocorre um decaimento na taxa de transferência de calor em comparação com o regime de convecção natural para o número relevante de Rayleigh, Ra . Os resultados demonstraram boa aproximação com outros disponíveis na literatura.

É importante deixar registrado que métodos que utilizam malhas que se ajustam ao corpo imerso promovem uma maior flexibilidade no controle da resolução da malha nas regiões de parede, isto é um fator sempre necessário quando se envolve escoamento com altos números de Reynolds. Assim, de forma equivalente, as metodologias envolvendo o Método de Fronteira Imersa, ganham em praticidade no processo de geração de malha e principalmente em escoamentos de fronteiras móveis, pois acautelam-se do denominado processo de "remalhagem" já comentado anteriormente, a cada novo passo de tempo iterativo. Logo, o método denominado Fronteira Imersa, apesar de sua simplicidade conceitual que pode estar relacionada a problemas de interfaces simples ou complexas, rígidas, móveis e/ou deformáveis, vem tornando-se um método atrativo, especialmente na compreensão da física de grandes escalas para fluidos.

Um dos principais pontos positivos do Métodos da Fronteira Imersa é a *imposição indireta* da condição de contorno. Em outras palavras, esta imposição é realizada considerando a necessidade da obtenção de uma força que, ao ser inserida nas equações de Navier-Stokes, resulte na condição de contorno específica para a fronteira. Nesta classe de métodos, esta imposição indireta é realizada usando modelos simplificados de força para "frenar" o fluido, pois as equações de Navier-Stokes não podem ser integradas analiticamente. Surge então, uma alternativa para resolver este problema, a solução foi apresentada por Mohd-Yusof (1997) que propôs uma formulação discreta para o tempo utilizando a metodologia fronteira imersa. O método desenvolvido foi denominado de Método de Força Direta, (em inglês, *Direct Force Method*). Nele o termo de força (ou termo forçante) denominado Lagrangiano é determinado a partir da solução numérica do escoamento. Neste método, inicialmente são resolvidas apenas as equações de Navier-Stokes, sem a presença do modelo da fronteira imersa, e então calcula-se o termo de força baseando-se nas equações de movimento, utilizando o campo estimado na solução numérica. Esse termo de força é calculado pela diferença entre o campo estimado (ou aproximado) e a condição de contorno que se deseja para a fronteira. Assim, no próximo instante de tempo, o termo de força calculado é inserido como termo fonte nas equações discretizadas de Navier-Stokes. A vantagem disto é que o termo de força é calculado espontaneamente, sem o uso de constantes *ad-hoc* que precisam sofrer ajustes pelo usuário.

Ao contrário desta abordagem, pode-se discretizar as equações governantes sem levar em conta a fronteira imersa. Logo, surge a *imposição direta* da condição de contorno. Isto refere-se à utilização das denominadas células fantasmas (do inglês, *ghost cells*), que são definidas como sendo as células no sólido que possuem como vizinhança pelo menos uma célula na região do fluido. O método consiste em impor a condição de contorno desejada sobre a interface, onde (por via de regra) não coincide com os pontos da malha. Isto é feito através de uma função que extrapola o valor necessário para referida célula fantasma, localizada dentro do corpo. Trabalhos como, por exemplo, Tseng and Ferziger (2003), apresentaram uma formulação de fronteira imersa com células fantasmas com precisão de segunda ordem. Nesse trabalho, os autores apresentaram uma precisão para o método, que foi validada para a simulação de escoamentos sobre um canal ondulado. O código computacional utilizado foi baseado em volumes finitos, permitindo a conservação local da quantidade de movimento e da continuidade. Essas características foram encontradas nos trabalhos de Udaykumar et al. (2001) e Ye et al. (1999), que utilizaram uma formulação denominada *cutt-cell*, que considera apenas a parcela da célula que contém o fluido, e portanto, resulta na origem de novos volumes de controle sobre a interface.

O cálculo para o campo de escoamento, a massa estimada e os gradientes de pressão, serão necessários para a discretização por volumes finitos, e isso deve ser realizados nestes novos volumes. Então, funções de interpolação são utilizadas para o cálculo apropriado das variáveis.

2.3 Trabalhos envolvendo o modelo físico virtual

O modelo de força utilizado no presente trabalho, é denominado Modelo Físico Virtual - (MFV), proposto por Silva et al. (2003), é um modelo de força discreta com imposição indireta da condição de contorno. A força sobre a interface é determinada dinamicamente através das equações de conservação da quantidade de movimento e da energia sobre uma partícula de fluido na interface. O processo para o cálculo da força se dá ao inserir um termo fonte nas equações de Navier-Stokes para a quantidade de movimento e da energia. Assim, a imposição ocorre de forma indireta para a condição de contorno desejada para a fronteira. O presente modelo ajusta-se automaticamente ao escoamento uma vez que a força necessária para o processo de "frenagem" das partículas de fluido próximas a interface é calculada sem a necessidade de ajustes com o uso de constantes *ad-hoc*.

Detalhando um pouco mais sobre o MFV, pode informar-se que utiliza as equações do movimento de Navier-Stokes, resolvidas nos pontos Lagrangianos, onde o cálculo do campo de força interfacial é distribuído para as malhas Eulerianas na vizinhança da interface fluido-corpo. No trabalho de Silva et al. (2003), os autores simularam escoamentos incompressíveis, bidimensionais sobre um cilindro circular estacionário, utilizando diferentes métodos de discretização temporal, para fins comparativos. As simulações foram feitas a diferentes números de Reynolds, com diferentes refinamentos de malha. Os autores obtiveram os campos de velocidade, pressão e vorticidade, bem como os valores médios dos coeficientes de arrasto e do número de Strouhal. Os autores concluíram que o Método da Fronteira Imersa junto com o Modelo Físico Virtual, vem apresentando bons resultados para a simulação numérica de escoamentos sobre geometrias complexas, móveis e/ou deformáveis ou compostas, mostrando-se bastante promissora na simulação de problemas de interação fluido-estrutura. Os resultados encontrados apresentaram uma boa convergência numérica em comparação com outros disponíveis na literatura.

Oliveira (2006) apresenta a simulação de escoamentos turbulentos em problemas de fronteiras móveis. O autor realizou simulações sobre um corpo deformável, um cilindro com diâmetro variável no tempo e um aerofólio tipo NACA 0012. A avaliação foi realizada utilizando-se uma lei de deformação imposta aos pontos da malha Lagrangiana que representam o cilindro. O autor avaliou também o efeito da velocidade de movimentação da fronteira sobre o escoamento, considerando diferentes velocidades, coeficientes de arrasto e sustentação, comprimento de bolha de recirculação e coeficiente de pressão na superfície do cilindro. Uma outra contribuição foi validar o MFI/MFV sendo apropriado para simulação de escoamentos para altos números de Reynolds. Os resultados simulados apresentaram boa convergência, considerando simplificações bidimensionais, foram comparados com resultados numéricos e experimentis de outras fontes literárias. Segundo o autor, de um modo geral, o método MFI/MFV mostrou-se adequado à simulação de escoamentos com a presença da turbulência em torno de corpos complexos e estacionários, onde os resultados apresentam uma boa aproximação numérica com relação à outros disponíveis nas referências.

Silva et al. (2007) apresentaram uma simulação numérica bidimensional em torno de diferentes corpos rombudos, para $Re = 100$ e $Re = 200$, usando o método da fronteira imersa com o modelo físico virtual. Simulações foram realizadas para dois cilindros estacionários circulares de diferentes diâmetros em *tandem* (em fila), dois cilindros de mesmo diâmetro em *tandem* e dois

cilindros lado-a-lado. Ocorreu também uma simulação para uma configuração de sete cilindros em forma de "V", para ângulos variando $40^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Uma configuração de 23 diferentes corpos rombudos, representando um corte transversal de uma torre central de uma estrutura offshore³ também foi simulada e os resultados foram comparados e validados. O número de Strouhal, os coeficiente de arrasto e de sustentação também foram calculados. A representação dos campos de vorticidade e pressão e das linhas de fluxo apresentadas para cada simulação, apresentam a dinâmica do escoamento e seus padrões. Os autores concluíram que o método da fronteira imersa com o modelo físico virtual é uma poderosa metodologia para simular escoamentos na presença de geometrias complexas.

Santos (2014) apresentou o Método da Fronteira Imersa com o Modelo Físico Virtual baseando-se na aplicação das equações de conservação da quantidade de movimento, massa e da energia que modelam a física dos escoamentos incompressíveis de natureza laminar. A motivação para o desenvolvimento deste trabalho foi dar continuidade aos trabalhos desenvolvidos por Silva et al. (2003) e Silva et al. (2007), buscando contribuir na resolução de problemas em engenharia, para o escoamento em torno de obstáculos, implementando um código computacional destinado a apresentar o aquecimento em um cilindro rotativo sujeitos à convecção forçada, em outras palavras, para a simulação do escoamento em torno de um cilindro não-estacionário, rotativo com diferentes valores para a rotação específica, isto é, para valores onde a rotação específica variando no intervalo $0 \leq \alpha \leq 4,0$, e o número de Reynolds variando no intervalo $47 \leq Re \leq 250$. Foram obtidos os campos de vorticidade, temperatura e de pressão, bem como os parâmetros que caracterizam o escoamento como os valores médios dos coeficientes de arrasto, de sustentação, de pressão, números de Strouhal e Nusselt. Os resultados foram comparados baseando-se no trabalho experimental de Carvalho (2003) e outros importantes trabalhos numéricos, a fim de validar o uso da metodologia para problema de fronteiras móveis, bem como para validar o efeito de transferência de calor por convecção forçada. Além da validação da metodologia, outro objectivo foi o de melhor compreender todos os fenômenos presentes neste escoamento através de uma análise bidimensional, avaliando-se a influência térmica do cilindro sobre o escoamento, a emissão de vórtices e a dinâmica de formação e supressão da esteira. Verificou-se a influência da rotação na redução do arrasto e no aumento do coeficiente de sustentação, assim como a distribuição do campo térmico próximo ao cilindro. Com o movimento de rotação, a esteira de vórtices é deslocada em relação à linha horizontal do escoamento. Com o aumento da rotação a amplitude de oscilações dos coeficientes fluidodinâmicos, tendem a um valor nulo, isto é, o processo de geração de vórtices tende a diminuir com o aumento do valor da rotação específica. Finalmente, foi verificado que o número de Strouhal é pouco influenciado para baixo valores da rotação específica, mas que depende do número de Reynolds. Os resultados quantitativos apresentaram boa concordância numérica em relação aos resultados disponíveis na literatura. Com base nisto, a metodologia da fronteira imersa com o modelo físico virtual se mostrou promissor para a simulação de escoamentos com convecção forçada.

Reis (2016) desenvolveu um programa para a solução de problemas bidimensionais com o Método da Fronteira Imersa e Modelo Físico Virtual para o estudo e análise de escoamentos compressíveis externos. O autor estudou o escoamento subsônico e laminar sobre um perfil circular para diferentes números de Reynolds. Aplicou-se também a metodologia para a resolução do problema da difração de uma onda de choque. Verificou-se os coeficientes de arrasto, sustentação e o número de Strouhal, comparando todos estes com outros resultados disponíveis na literatura, apresentando boa convergência numérica.

³Termo em inglês para indicar estruturas metálicas afastadas da costa terrestre, instaladas no oceano. Geralmente, essas estruturas são desenvolvidas por empresas que utilizam prospecção, perfuração e exploração petrolífera.

Vieira (2017) apresentou um estudo numérico considerando a influência do termo de empuxo em escoamentos transversais sobre cilindros aquecidos estacionário e rotativos em fluido bidimensional Newtoniano, baseando-se em alguns trabalhos, como o de Silva et al. (2003), Santos (2014) e Reis (2016). O autor dá ênfase aos problemas com convecção forçada. Foram utilizados dois programas computacionais baseados em diferentes metodologias numéricas. Um dos softwares utilizados foi o denominado OpenFOAM, onde foi utilizado malhas adaptativas, e onde as discretizações foram realizadas pelo Método de Volumes Finitos e as condições de contorno foram impostas diretamente sobre o corpo imerso no escoamento. Outro código computacional denominado (IBM-VPM), serviu de parâmetro de comparação, utilizou diferentes malhas para o fluido e o corpo, baseando-se na metodologia Fronteira Imersa com o Modelo Físico Virtual para calcular as forças sobre o corpo. As discretizações no foram realizadas utilizando o Método de Diferenças Finitas, com solução explícita das equações da quantidade de movimento, onde todas as simulações foram realizadas em um domínio bidimensional. O trabalho levou em consideração a rotação horária e anti-horária e considerou algumas situações, como a simulação para diversos valores de Reynolds, a priori para $Re = 40$, objetivando a investigação da influência do termo de empuxo na desestabilização do escoamento e no desprendimento de vórtices na esteira. A posteriori, foi simulado a influência do aquecimento e do número de Richardson, Ri , com relação ao número de Reynolds, Re , variando no intervalo de $100 \leq Re \leq 200$, considerando a influência do número de Nusselt, Nu . Nesse contexto, verificou-se que neste intervalo do número de Reynolds proposto, o aquecimento foi mais significativo quando se varia o Reynolds. Já com relação a observação para o regime turbulento estudado, os programas utilizados obtiveram boa concordância numérica entre si, indicando uma mesma tendência com relação ao crescimento do coeficiente de sustentação e ao decréscimo do arrasto. Considerou-se a variação para o número de Richardson, no intervalo $0,5 \leq Ri \leq 2,5$. O autor obteve uma boa convergência numérica com a literatura consultada.

2.4 Características da modelação turbulenta

A maior parte dos escoamentos que possuem aplicações prática e que estão disponíveis na natureza são turbulentos. Um escoamento pode ser entendido como turbulento se as grandezas que o caracterizam (velocidades, pressão, temperatura, etc.), apresentam instabilidades e flutuações que dependem do tempo e de sua posição espacial. Em síntese, o escoamento turbulento apresenta movimento aleatório e/ou caótico. As questões referentes ao movimento caótico dos fluidos são analisados ao aplicar forças num volume de controlo infinitesimal de fluido, sendo regido por equações matemáticas que governam seu movimento, as chamadas equações de Navier-Stokes que, em sua forma primitiva, são suficientes para modelar escoamentos em qualquer regime e para diferentes número de Reynolds. Em outras palavras, elas modelam os movimentos aleatório dos fluidos por completo. Vale lembrar que se está a falar estritamente de escoamentos em fluidos Newtonianos, ou seja, em situações onde vale a proporcionalidade entre tensão e a taxa de deformação (gradiente de velocidade).

A questão relevante no processo de modelação da turbulência é o aumento do número de Reynolds, que por sua vez, amplia o espectro de energia do escoamento, fazendo surgir uma quantidade maior de escalas a serem resolvidas, exigindo-se a alocação de uma malha e de um passo de tempo extremamente refinados de forma a capturar a menor escala do espectro, o que na maioria dos modelos comerciais existentes impõe custos computacionais elevados. São questões como estas, relacionadas ao elevado custo computacional que direcionam os experimentalistas numéricos à utilização de modelos de turbulência mais viáveis, permitindo análises mais detalhadas da turbulência e sua melhor utilização e/ou compreensão em aplicações

consideradas práticas e complexas. Dessa maneira, o tratamento teórico de problemas reais pode ser alcançados com mais precisão e confiabilidade.

Os principais trabalhos relacionados com o estudo da turbulência, surgem com as investigações desenvolvidas por Osborne Reynolds e Lord Rayleigh no século XIX. Reynolds (1883), nos seus trabalhos relacionados com os escoamentos no interior de tubos, estabeleceu claramente a existência de dois regimes fundamentais de escoamentos: laminar e turbulento (denominado anteriormente por Reynolds como "movimento sinuoso"). Reynolds estabeleceu também a existência de um parâmetro de controlo da transição à turbulência, que recebe seu nome. Outra descoberta importante foi a existência de regiões turbulentas intermitentes, sendo uma propriedade estabelecida como comum a escoamentos próximos de paredes. Outras contribuições, como as equações médias para escoamentos turbulentos, surgiu quando introduziu as chamadas tensões de Reynolds, no ano de 1884. Em paralelo aos trabalhos experimentais de Reynolds, Lord Rayleigh desenvolvia suas investigações teóricas sobre instabilidades de escoamentos paralelos de fluidos invíscidos. Suas investigações, resultaram em muitas outras, permitindo determinar pequenas perturbações na forma de infinitas ondas e de amplitude uniforme, amortecendo-se com o tempo, (Rayleigh, 1878).

De acordo com o trabalho de Rodi (1993), a turbulência está relacionada com movimentos turbilhonares que, para elevados números de Reynolds, apresentam um grande espectro de dimensões e de velocidades. Sendo ainda mais objetivo, Lesieur (2012) apresenta três características importantes da turbulência: a *imprevisibilidade*, a *elevada capacidade de mistura* e a *multiplicidade de escalas*. Nessa direção, ocorre uma busca por características que possam ser comuns ao escoamento turbulento. Agora, conforme o trabalho de Neto (2003), qualquer tentativa de definição seria incompleta, sendo de mais valia caracterizar a turbulência em vez de defini-la. De facto, na ausência de uma ampla definição sobre a turbulência, a compreensão das suas características apresentadas por Lesieur (2012), permite uma melhor compreensão física desse fenómeno.

A seguir, apresenta-se algumas dessas características relevantes à escoamentos turbulentos de maneira resumida, já que não é o objetivo desta tese uma investigação aprofundada da turbulência.

2.4.1 A imprevisibilidade

Inicialmente, a previsão de fenómenos, que pode ser decodificados matematicamente, parecem ser algo contraditório. Apesar disto, o termo *imprevisibilidade*, em escoamentos turbulentos, está associado a duas condições. A primeira delas, é a incapacidade de descrever de forma analítica ou numérica, as condições iniciais e de contorno existentes nos escoamentos, tornando restrita a capacidade de apresentar a realidade das soluções das equações governantes. Estas equações são aquelas que impõem que pequenas diferenças, em condições iniciais, sejam amplificadas rapidamente pelas interações não-lineares. Deste modo, quaisquer variações nas condições iniciais e de contorno resultam em diferentes previsões numéricas e experimentais. Um exemplo, seria se duas partículas são lançadas num escoamento turbulento, muito próximas uma da outra, as interações não-lineares apresentarão gradativamente trajetórias distintas para essas partículas ao longo do tempo. O segundo factor, que corrobora com esse conceito de *imprevisibilidade*, são os recursos computacionais disponíveis, mas ainda insuficientes para capturar (simular) todas essas estruturas turbulentas que aparecem no campo de escoamento, em grande parte desenvolvido de maneira experimental.

2.4.2 A influência dos efeitos advectivos

Todo o escoamento real (existente na natureza) pode ser interpretado como a composição de dois importantes mecanismos de transporte: *advecção* e *difusão*. O transporte advectivo da quantidade de movimento impele o escoamento a seguir uma direção preferencial, geralmente determinada por um factor externo, podendo ser uma injeção de fluido, gradiente de pressão ou diferença entre densidades. Esse efeito aparece nas equações governantes de Navier-Stokes, como parcelas não-lineares que agem na geração de instabilidades e no aumento das perturbações injetadas no escoamento. Sendo assim, a questão da *imprevisibilidade* da turbulência está relacionada ao transporte advectivo da quantidade de movimento, o qual induz diferentes soluções para condições de entrada quase próximas.

Já a difusividade, que age no equilíbrio de diferenças entre quantidades de movimento, atua entre as regiões do escoamento, isto é, procura distribuir a quantidade de movimento das regiões com elevada velocidade para sítios de baixa velocidade. Esses efeitos são responsáveis pela inibição e amortecimento das instabilidades. A relação existente entre os efeitos advectivos e difusivos é o parâmetro usualmente tomado para verificar se um escoamento é ou não turbulento, utilizando um critério numérico. É, assim, que surge a definição do número de Reynolds, Re . Quanto maior for o efeito advectivo, maior será o grau de instabilidade, produzindo, como consequência, um maior grau de turbulência no escoamento. De maneira oposta, quanto maior forem os efeitos da difusividade, maior será a inibição de instabilidades, fazendo com que o escoamento turbulento tenda a se tornar laminar (Frisch (1995)).

2.4.3 A capacidade de mistura

Os escoamentos turbulentos são capazes de misturar quantidades (substâncias, energia, quantidade de movimento) de maneira mais rápida e eficaz do que os escoamentos laminares, onde prospera a difusão molecular. O trabalho de Neto (2003) destaca que, no regime turbulento, a presença de flutuações térmicas e de concentração, além do transporte de parcelas de fluido para diferentes regiões, desenvolve a ocorrência de fortes gradientes locais, trazendo maior eficiência ao processo difusivo. Mesmo embora sejam dominantes os efeitos advectivos, um escoamento turbulento também possui capacidade difusiva intensificada.

2.4.4 A vorticidade

Um escoamento turbulento é obrigatoriamente rotacional, de forma que existe a tendência das parcelas de fluido girarem em torno de um ou vários eixos. De acordo com o trabalho de Lesieur (2012), a presença de paredes impõe aos escoamentos regiões de velocidade nula que, de forma inevitável, produz rotação, ou seja, vorticidade. Escoamentos turbulentos podem apresentar estruturas organizadas ou desorganizadas. Estruturas organizadas ou coerentes são aquelas que apresentam certo grau de organização em relação a qualquer quantidade referente ao escoamento. Essas tais estruturas podem ocorrer na forma de turbilhão coerentes. Os maiores turbilhões que surgem num escoamento podem ser geralmente designados como coerentes, uma vez que conseguem manter sua forma definida por um tempo superior a um tempo característico (associado com a supressão da correlação de eventos subsequentes) como por exemplo, o seu tempo de rotação. Essas estruturas promovem a anisotropia⁴ do escoamento, uma vez que apresentam direção preferencial pelo escoamento médio.

⁴Anisotropia é a característica que uma substância possui em que uma certa propriedade física varia com a direção.

2.4.5 A multiplicidade de escalas

Um escoamento pode ser constituído por estruturas de dimensões variadas, desde as grandes escalas de comprimento, produzindo normalmente estruturas coerentes, até as pequenas escalas dissipativas. A multiplicidade de escalas induz à constatação de que turbilhões menores coexistem com turbilhões maiores. A concepção da coexistência de estruturas turbilhonares com várias escalas de comprimento é princípio de diversas formas de modelação de escoamentos turbulentos.

Na Seção a seguir, a proposta é apresentar os aspectos fundamentais da turbulência com um perfil matemático com relação à dissipação viscosa, a troca de energia entre os movimentos e a turbulência no seu espectro da energia.

2.5 Análise de Fourier nos aspectos fundamentais da turbulência

2.5.1 A dissipação viscosa da energia

Se a energia injectada num sistema ocorrer a uma taxa fixa, o sistema está num estado denominado estacionário. A dissipação viscosa é um mecanismo disponível para um meio fluido dissipar a entrada de energia e garantir o balanço da mesma (a existência de fricção, choques, nanoplâncton em biofluidos, etc., são outras formas de dissipação de energia). Logo, é fisicamente claro que a turbulência para existir, requer a presença da viscosidade (pequena) e da dissipação viscosa, sendo o caso correspondente à viscosidade zero (fluido invíscido), que correspondem a fluidos formalmente descritos pelas equações de Euler, o limite mais extremo da turbulência.

2.5.2 A troca de energia entre movimentos

A existência da turbulência em uma situação física implica na coexistência de estágios de movimento, que representam várias soluções para as chamadas equações da continuidade e de Navier-Stokes, sendo sujeitas às condições apropriadas de contorno. Se esses estágios de movimento não interagissem de alguma forma, o problema da turbulência resolveria (ou degeneraria) o problema em questão. No entanto, ocorre uma troca contínua de energia. Esses são aspectos fundamentais para o problema da turbulência, pois podem ser enquadrado em mecanismos que descrevem o fenómeno da turbulência.

É possível demonstrar essa propriedade da turbulência, em que a energia é continuamente trocada entre os vários estágios do movimento fluidodinâmico, sendo utilizando para isto, a Análise de Fourier. Então, considerando que o fluido é incompressível, contido num volume finito, faz-se a representação de Fourier no campo de velocidade média, representado por

$$\mathbf{u}(r, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

onde, $\mathbf{k}$ é o vector de onda, que corresponde ao comprimento de onda, sendo representado por

$$\lambda = \frac{\pi}{|\mathbf{k}|}, \quad (2.2)$$

e a transformada de Fourier $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ é a velocidade da componente representada por $\mathbf{k}$ na resolução.

Da equação da continuidade de um fluido incompressível, a Eq. (1.11), é imediato que ao aplicá-la na Eq. (2.1), pode-se observar que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = i \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0. \quad (2.3)$$

A Eq. (2.3) será verdadeira, se e somente se

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (2.4)$$

onde a ortogonalidade de $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{k}$ implica que a variação do tempo em $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ resulta numa rotação no plano ortogonal de $\mathbf{k}$.

Seja

$$\varpi = \frac{p}{\rho}. \quad (2.5)$$

Efetuada uma transformada de Fourier em função de ϖ , obtém-se a seguinte formulação

$$\varpi(r, t) = \sum_{\mathbf{k}} \varpi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.6)$$

Estando já definido a equação de Navier-Stokes para a quantidade de movimento e escrevendo na forma vectorial, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \varpi + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

A seguir, introduzindo a Eq. (2.1) e (2.6) em (2.7), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] + \sum_{\mathbf{k}} (u_j)_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} = \\ -i \sum_{\mathbf{k}} \varpi_{\mathbf{k}} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \nu \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O segundo termo do lado esquerdo da Eq. (2.8) pode ser simplificado. Neste termo, o somatório indicado pelo índice repetido j não deve ser ignorado. Após algumas manipulações algébricas, esse termo pode ser reescrito da seguinte forma

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (2.9)$$

Em seguida, com o uso da fórmula do produto de séries, tem-se

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} z^n.$$

Finalmente, com relação a Eq. (2.4), o segundo termo torna-se

$$i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.10)$$

Com isso, a forma final da Eq. (2.7) é

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{\partial t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ = -i \sum_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\varpi}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \nu \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

de onde resulta

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}) = -i \boldsymbol{\varpi}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} - \nu |\mathbf{k}|^2 \mathbf{u}_{\mathbf{k}}. \quad (2.12)$$

Multiplicando ambos os lados da Eq. (2.12) por $u_{\mathbf{k}}^*$ para obter a taxa de variação de energia cinética para um dado $\mathbf{k}$, obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = -i \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* - i \boldsymbol{\varpi}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* - \nu |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2. \quad (2.13)$$

Portanto, a taxa de variação da energia para um dado $\mathbf{k}$ é visto como soma de três termos, a saber:

O termo

$$\sum_{\mathbf{k}'} Q(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -i \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*,$$

que resulta da taxa de troca de energia entre a componente $\mathbf{k}$ de Fourier e todas as demais componentes $\mathbf{k}'$. A grandeza $Q(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ é uma espécie de probabilidade de transição, promovendo forças relativas de tendência de troca de energia com $\mathbf{k}$ por vários $\mathbf{k}'$. Esse termo de interação vem do termo inercial da equação de Navier-Stokes, com isso, não pode alterar o balanço energético, seu efeito médio sobre todo $\mathbf{k}$ deve ser nulo.

O termo $-i \boldsymbol{\varpi}_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*$ não possui propriedades de interação, mas pode causar a troca de energia entre as várias posições espaciais da mesma componente de Fourier. Em outras palavras, esse termo irá espalhar a energia espacialmente. É intuitivamente provável que este termo tende a promover a isotropia. Por exemplo, se assumirmos a isotropia, esta desprezada.

O termo $-\nu |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2$ representa a dissipação viscosa pela componente $\mathbf{k}$. Se a conservação da massa e a quantidade de movimento, não estivessem presente na Eq. (2.13), este termo teria uma solução da forma

$$u_{\mathbf{k}}(t) = u_{\mathbf{k}}(0) e^{-\nu |\mathbf{k}|^2 t}.$$

Resumindo, apenas o termo inercial contribui para a troca de energia. O balanço de energia para qualquer componente $\mathbf{k}$ é governado, no caso da isotropia, pela equação

$$\frac{1}{2} \frac{d|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2}{dt} = \sum_{\mathbf{k}'} Q(\mathbf{k}', \mathbf{k}) - \nu |\mathbf{k}|^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2. \quad (2.14)$$

2.5.3 O espectro da energia turbulenta

É possível obter a energia cinética do movimento (o quadrado da velocidade) avaliando $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*$. Então, obtém-se

$$|\mathbf{u}|^2 = \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}''} e^{-i\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}''}^* e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}} \quad (2.15)$$

A média da velocidade ao quadrado no volume V é

$$\overline{|\mathbf{u}|^2} = \frac{1}{V} \int_V \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}''} e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{r}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}'} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}''}^* dV = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}''} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}''}^* \int_V e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{r}} dV, \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{k}'$ foi substituído por $\mathbf{k}$. A integral do último termo desaparece para $\mathbf{k}' - \mathbf{k}'' \neq 0$, então

$$\overline{|\mathbf{u}|^2} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \int_V dV, \quad (2.17)$$

ou na forma,

$$\overline{|\mathbf{u}|^2} = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2. \quad (2.18)$$

O somatório de (2.18) pode ser convertido em uma integração, se $V \rightarrow \infty$. A média do quadrado da velocidade, calculada em todo o espaço, é então, para o caso da turbulência isotrópica, é dado por

$$\overline{|\mathbf{u}|^2} = \overline{u^2} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi k^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 dk, \quad (2.19)$$

e a energia cinética média por unidade de massa é escrita como

$$\frac{1}{2} \overline{u^2} = \frac{V}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 dk. \quad (2.20)$$

A função

$$F(k) = \frac{V}{(2\pi)^2} k^2 |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2, \quad (2.21)$$

é o espectro (isotrópico) da turbulência. Para o caso não-isotrópico, um espectro tridimensional pode ser empregado. Então, vale que

$$\overline{|\mathbf{u}|^2} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k}} |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 dk_x dk_y dk_z, \quad (2.22)$$

e o espectro geral da turbulência é representado matematicamente por

$$F(k) = \frac{V}{(2\pi)^3} |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2. \quad (2.23)$$

Capítulo 3

Modelo matemático

Sumário

3.1	Introdução	36
3.2	Método de fronteira imersa	36
3.3	As equações governantes	38
3.4	A adimensionalização das equações	39
3.4.1	O acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e de transporte . . .	40
3.4.2	A adimensionalização das equações da continuidade e de Navier-Stokes .	40
3.4.3	A adimensionalização da equação de transporte da temperatura	40
3.4.4	Equações adimensionais para convecção mista	42
3.5	A função indicadora	43
3.6	Modelo físico virtual	44
3.6.1	O cálculo do parâmetro L_2	51
3.6.2	O cálculo da distribuição da força Lagrangiana e da fonte térmica . . .	52
3.7	Outros importantes parâmetros adimensionais	53
3.7.1	O tempo adimensional	53
3.7.2	O coeficiente de pressão	53
3.7.3	A força e o coeficiente de arrasto	53
3.7.4	A força e o coeficiente de sustentação	54
3.7.5	O número adimensional de Strouhal	54
3.7.6	O número adimensional de Nusselt	54
3.8	A modelação matemática da turbulência	55
3.8.1	A formulação RANS para a turbulência	56
3.8.1.1	Equações médias de Reynolds	56
3.8.1.2	Equações de Navier-Stokes filtradas	57
3.8.1.3	A hipótese de Boussinesq	58
3.8.2	A formulação URANS para a turbulência	60
3.8.3	A modelação de Smagorinsky para a turbulência	61
3.8.4	A modelação de Spalart-Allmaras para a turbulência	64

3.1 Introdução

Muitos fenômenos físicos em mecânica dos fluidos podem ser descritos pela modelagem matemática, utilizando um conjunto de equações diferenciais parciais, muitas vezes não lineares, conhecidas como as leis de conservação da mecânica dos fluidos, são elas: conservação da quantidade de movimento (momentum), conservação da massa (continuidade) e da energia. Estas leis em conjunto modelam a dinâmica das forças que atuam no fluido, assim como as trocas de energia que ocorrem nas diferentes regiões do escoamento. Neste livro, este conjunto de equações foram discretizadas pelo Método de Diferenças Finitas, para um fluido Newtoniano, onde este relaciona o termo das tensões viscosas com as taxas de deformação do campo de velocidade, simulando, assim, a dinâmica do escoamento com as chamadas equações de Navier-Stokes.

Os métodos tradicionais de discretização de domínios apresentam certa dificuldade em termos de implementação e tempo de cálculo, sendo necessário sucessivos processos de remalhagem a cada novo processo iterativo, além da necessidade de introduzir um novo sistema de coordenadas generalizadas. Assim, considerando estes problemas de natureza físico-matemática, um código computacional foi desenvolvido para metodologia fronteira imersa para a interação termo-fluido dinâmica. Portanto, na seção a seguir, o Método de Fronteira Imersa é apresentado no presente trabalho.

3.2 Método de fronteira imersa

O Método de Fronteira Imersa (do inglês, *Immersed Boundary Method*), é um método numérico de captura de interface(s), (que pode representar tanto o limite entre as regiões ocupadas por dois fluidos diferentes, como também interfaces elásticas ou sólidas, exceto no primeiro caso, onde todo domínio é simulado como se fosse ocupado por um único fluido), destinado a estudar a interação fluido-corpo que possam ou não apresentar movimento ou deformação. As condições de contorno na interface são impostas virtualmente através de um campo de força que é aplicado ao escoamento. Este campo de forças altera o vector velocidade das partículas de fluido, quando essas se aproximam da interface imersa.

Assim, em linhas gerais, o Método de Fronteira Imersa consiste na estimativa de um termo fonte de força que sugere a reação da interface sobre o fluido. Esse termo fonte (também chamado de termo forçante) é adicionado às equações de Navier-Stokes, a saber, nas equações de quantidade de movimento e energia, "forçando" a condição de não-deslizamento sobre a interface, induzindo velocidade num elemento de fluido situado sobre a interface, de modo que esta velocidade seja igual a velocidade localizada na interface. Como já mencionado anteriormente, o método foi inicialmente desenvolvido por Charles S. Peskin (1972), para o estudo do escoamento sanguíneo em válvulas cardíacas. Dentro desta metodologia, faz-se o uso de duas malhas, uma denominada Euleriana sendo regular em todo o domínio, e uma segunda, denominada Lagrangiana, voltada para representar a interface do corpo imerso, como apresentado na Fig. (3.1).

As malhas são geometricamente independentes, não havendo maiores dificuldades em representar geometrias simples e/ou complexas, móveis e/ou deformáveis. A *malha Euleriana* é sempre fixa, sendo gerada de forma independente da fronteira do corpo imerso, construída em coordenadas cartesianas, com o objetivo de simplificar ao máximo o sistema de equações a serem resolvidas. Distribuem-se pontos com espaçamento conhecido (Δs) sobre o contorno ou fronteira, ($\partial\Omega_b$), sendo então este conjunto de pontos denominado de *malha Lagrangiana*.

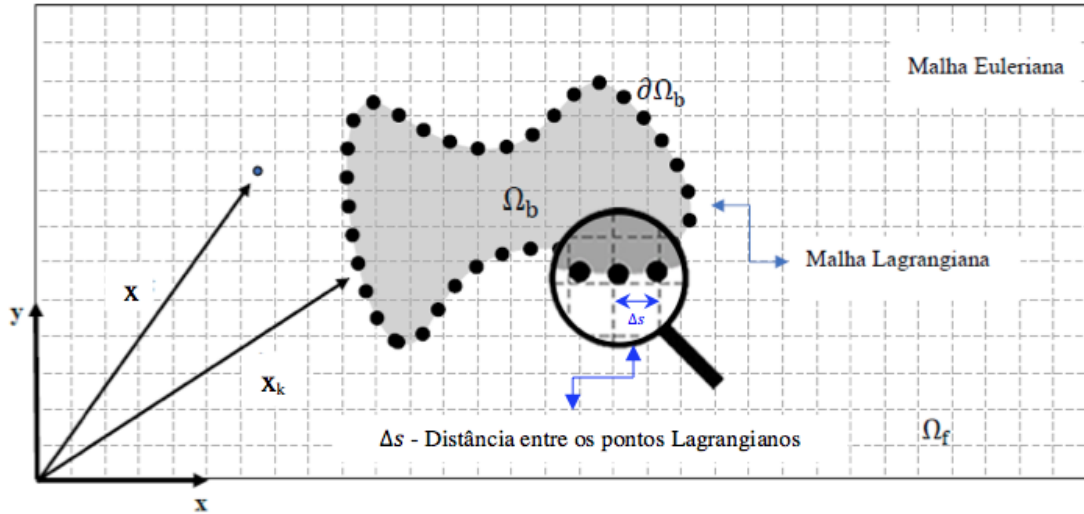


Figura 3.1: Ilustração das malhas Eulerianas e Lagrangianas para um corpo imerso de geometria arbitrária

A *malha Lagrangiana* é formada por pontos discretos sobrepostos à *malha Euleriana*, os quais demarcam a posição ocupada pelas interfaces da geometria ao longo do tempo. Os pontos Lagrangianos podem mudar continuamente de posição durante o processo de cálculo, simulando movimentação de fronteira, sem que a *malha Euleriana* precise ser alterada. Na Fig. (3.1) é ainda possível verificar que a malha do fluido é representada por (Ω_f), e dentro da fronteira, na cor cinza escuro, encontra-se o domínio representado pelo corpo (Ω_b); enquanto que os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_k$ são, respectivamente, as coordenadas de um ponto Euleriano e Lagrangiano no domínio de cálculo. Ainda sobre a *malha Lagrangiana*, vale dizer que as forças de superfície que atuam, levarão o fluido a se desviar ou contornar o obstáculo (corpo imerso). Entre as malhas Euleriana e Lagrangiana ocorre uma "comunicação" entre elas, sendo realizada por esquemas de interpolação, escolhidos de maneira adequada, visando minimizar as imprecisões inerentes a este processo. Em linhas gerais, pode-se também compreender que o Método de Fronteira Imersa baseia-se nas equações de Navier-Stokes acrescidas de um "termo forçante" ou "termo de força". Este "termo de força", atua para que o fluido "sinta" ou "perceba", a existência da interface imersa, realizando a troca de informações entre o fluido e o corpo (entre as malhas).

A malha Euleriana não precisa estar em conformidade com a superfície do corpo, as informações entre as duas malhas ocorre através de uma discretização com o uso da função delta de Dirac, a qual assume o valor infinito sobre a fronteira e valor zero em outros pontos. Entretanto, a função delta de Dirac não pode ser discretizada, e como alternativa, outras funções mais suaves são utilizadas para aproximá-la em uma malha discreta, um exemplo são as Gaussianas. A condição de não-escorregamento é aplicada nos pontos Lagrangianos, introduzindo forças de superfície apropriadas nas equações. Logo, uma das grandes vantagens na utilização do Método da Fronteira Imersa, é a rápida geração de malhas computacionais, pois nesse método um corpo não precisa necessariamente ajustar-se a uma malha cartesiana. Uma outra vantagem, é o facto da complexidade e a qualidade da malha não serem significativamente afetadas pela forma da geometria imersa ao realizar uma simulação numérica. Com a observação dos resultados em vários trabalhos científicos utilizando essa metodologia, verificou-se que menos memória e menos tempo de máquina são necessários em comparação com outros métodos que utilizam, por exemplo, malhas curvilíneas ou estruturadas, pois as malhas cartesianas utilizadas

no Método da Fronteira Imersa reduzem a contagem de operações por ponto de malha, devido à ausência de termos adicionais associados à transformações de malha ou ao denominado processo de remalhagem.

Agora, uma desvantagem para o método em questão, que pode ocorrer, é o facto que a imposição das condições de contorno não é algo totalmente simples de se implementar, mesmo se comparado a métodos tradicionais. Em outras palavras, o tratamento relacionado à aproximação numérica e a conservação de propriedades para o fluido utilizando esquemas numéricos, não é algo totalmente trivial, ou seja, há uma complexidade para essas questões que precisaram ser consideradas e tratadas. Uma outra problemática não menos importante que pode surgir (mas que não ocorreu no presente trabalho), está relacionada ao controlo das malhas computacionais, que é responsável pelo alinhamento das linhas da malha e a superfície discretizada do corpo imerso, esta possível problemática pode surgir, sendo conhecida como "entrelaçamento de malhas", que por um lado pode até permitir um melhor controlo da resolução da malha na fronteira do corpo, mas por outro lado, também pode resultar no aumento do tamanho da malha se o número de Reynolds (Re) crescer demasiadamente. Com isso, se uma pequena fração ou uma parte substancial de pontos da malha entrarem no corpo imerso discretizado, poderá ocorrer inconsistências físicas, e isso matematicamente significa que a formulação utilizada e a sua resolução mesmo utilizando poderosos recursos em *CFD*, resultará em dados questionáveis, tornando a resolução nada confiável.

3.3 As equações governantes

Considerando um escoamento incompressível e bidimensional para um fluido Newtoniano, com domínio representado por (Ω) , e fronteira representada por $(\partial\Omega_b)$, com a superfície do corpo imerso sendo aquecida com temperatura constante, podendo esta ser modelada através de pontos discretizados, já denominada anteriormente por pontos Lagrangianos. Sendo que o efeito de fronteira é levado em consideração através da introdução do termo forçante nas equações de quantidade de movimento e energia, as equações que descrevem a convecção mista (natural e forçada) no contexto Fronteira Imersa, são expressas da seguinte forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho g (1 - \beta (T - T_\infty)) \mathbf{j} + \mathbf{f}, \quad (3.3)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + q, \quad (3.4)$$

onde as Eqs. (3.1), (3.2), e (3.4), são utilizadas para convecção forçada, enquanto (3.1), (3.3) e (3.4), são aplicadas para convecção natural, e na Eq. (3.3), a aproximação de Boussinesq é utilizada. As grandezas, $\mathbf{u}$, p , T e T_∞ representam o vetor velocidade, pressão, temperatura e temperatura de referência, respectivamente. Enquanto, ρ , μ , β , k e c_p são a massa específica, viscosidade dinâmica, difusividade térmica, coeficiente de expansão térmica e calor específico com pressão constante. A grandeza g , presente na Eq. (3.3), é a aceleração gravitacional direcionada para baixo, $\mathbf{j}$ é o vetor unitário que representa a direção gravitacional na direção oposta ao sentido positivo do eixo x .

Os termos de força $\mathbf{f}$ nas Eqs. (3.2) e (3.3) são os campos de forças Euleriano, onde esses termos fonte modelam a existência da interface imersa no escoamento, "visualizando" o corpo imerso no escoamento, possuindo valor não-nulo nas malhas Eulerianas próximas da malha Lagrangiana, sendo expresso por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial\Omega_b} F(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (3.5)$$

onde $F(\mathbf{X}_k, t)$ é a densidade de força Lagrangiana, calculada sobre os pontos de interface, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{X}_k$ são as posições de uma partícula de fluido Euleriano e Lagrangiano sobre a interface, respectivamente. O termo $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k)$ é a função delta de Dirac, que representa a interação entre o fluido e a fronteira imersa. De maneira semelhante, a fonte térmica representada por q é adicionada a Eq. (3.4), sendo responsável por fazer o escoamento "sentir" a presença da interface sólida aquecida, em outras palavras, é a fonte de aquecimento no ponto Lagrangiano na fronteira imersa, podendo ser expressa por

$$q(\mathbf{x}, t) = \int_{\partial\Omega_b} Q(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (3.6)$$

onde $Q(\mathbf{X}_k, t)$ é o fluxo de calor na fronteira, sendo a diferença entre a derivada de temperatura específica e a aproximada. Assim, as Eqs. (3.2), (3.3) e (3.4), podem ser reescritas de maneira mais completa, na forma dimensional, representadas por

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \int_{\partial\Omega_b} F(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (3.7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho g (1 - \beta (T - T_\infty)) \mathbf{j} + \int_{\partial\Omega_b} F(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (3.8)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + \int_{\partial\Omega_b} Q(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k. \quad (3.9)$$

3.4 A adimensionalização das equações

Muitas das experiências realizadas em laboratório, visam reproduzir fenômenos físicos que ocorrem na natureza através de modelos reduzidos. A questão que surge é como relacionar os resultados obtidos em modelos de laboratório em escala real. As características dos escoamentos estão contidas nos parâmetros físicos que os define, tais como a viscosidade dinâmica (μ) e valores característicos para o comprimento (L_∞), velocidade (u_∞) e a massa específica (ρ_∞). Combinando-se esses parâmetros convenientes de forma a produzir quantidades adimensionais, é então possível relacionar os escoamentos em grandes e pequenas escalas. Assim, pode-se obter uma quantidade adimensional qualquer, representada por φ^* , a partir da sua contrapartida dimensional φ da seguinte forma

$$\varphi^* = \frac{\varphi}{\varphi_\infty}, \quad (3.10)$$

onde φ_∞ é o valor de referência da quantidade expressa na mesma unidade de φ . Mais informações com relação às características necessárias para obtenção de escoamentos dinamicamente similares, podem ser vistos em Griebel et al. (1998).

3.4.1 O acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e de transporte

Quando consideram-se as variações da massa devido a mudança no campo do escalar transportado, as forças de corpo devido à ação da aceleração da gravidade, acoplam as equações de Navier-Stokes e a de transporte. Essas forças podem representar os efeitos gravitacionais devido à distribuição não uniforme de concentração de determinado componente no escoamento de dois ou mais fluidos ou em escoamentos não-isotérmicos, onde efeitos de flutuação são causados pela expansão térmica. A consideração desses efeitos na solução de um problema de dinâmica dos fluidos conduz a não-linearidade entre a solução do escoamento (campos de velocidade, temperatura e pressão) e a do escalar transportado, dificultando ainda mais a solução do sistema de equações. Portanto, é conveniente realizar algumas simplificações (hipóteses), tais como:

H1 : A massa específica é constante, exceto no vetor de forças de corpo;

H2 : Todas as outras propriedades do fluido são assumidas constantes.

A primeira hipótese (H1) garante que a equação da continuidade preserve a incompressibilidade, enquanto a segunda (H2), restringe o foco de interesse apenas aos efeitos gravitacionais. O exemplo de aplicação mais tradicional de tais considerações acontece quando adota-se a aproximação de Boussinesq. De acordo com o trabalho de Griebel et al. (1998), essa aproximação "emula" os efeitos das forças de flutuação devido às variações na massa específica com a temperatura. Matematicamente, a aproximação de Boussinesq assume a relação linear entre a massa específica (ρ) e a temperatura (T), sendo representada por

$$\rho(T) = \rho_{\infty} (1 - \beta (T(x, t) - T_{\infty})) , \quad (3.11)$$

onde ρ_{∞} e T_{∞} representam, respectivamente, a massa específica e a temperatura de referência e β , o coeficiente de expansão térmica.

3.4.2 A adimensionalização das equações da continuidade e de Navier-Stokes

Desconsiderando-se o acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e de Transporte no primeiro momento, introduz-se as seguintes variações adimensionais

$$u = \frac{u^*}{u_{\infty}}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_{\infty} u_{\infty}^2}, \quad t = \frac{t^* u_{\infty}}{L_{\infty}}, \quad \Theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_c - T_{\infty}}, \quad (3.12)$$

sendo os valores das constantes escalares de referência L_{∞} , u_{∞} e ρ_{∞} , são grandezas conhecidas a priori ¹, e u^* , p^* e t^* são as velocidades, pressão e tempo dimensionais, respectivamente. Consequentemente, T_{∞} é a temperatura ao longe (do escoamento uniforme na entrada do domínio) e T_c é a temperatura da superfície do corpo imerso.

3.4.3 A adimensionalização da equação de transporte da temperatura

Para viabilizar a dedução da adimensionalização da equação de transporte, convém especificar qual é a grandeza escalar que está sendo transportada. Por conveniência, adota-se a temperatura adimensional devido à grande quantidade de problemas em engenharia que envolvem escoamentos não-isotérmicos. Por completude, a seguir apresenta-se a equação da

¹Em problemas de laboratório, L_{∞} pode ser uma dimensão característica principal de um obstáculo, e u_{∞} , ρ_{∞} e p_{∞} valores a montante (ou de entrada) da velocidade, massa específica e pressão, respectivamente.

energia (que equivale à equação de advecção-difusão (ou transporte) de temperatura advectada pelo escoamento e difundida uniformemente nas direções) para propriedades térmicas constantes e isotrópicas com uma fonte de energia escalar, representada por

$$q = \frac{Q}{\rho_{\infty} c_p}, \quad (3.13)$$

onde c_p é o calor específico à pressão constante que pode ser determinado a partir da entalpia h através de

$$c_p = \left. \frac{\partial h(p, t)}{\partial T} \right|_{p=\text{constante}}. \quad (3.14)$$

A difusividade térmica fica definida por

$$\gamma = \frac{\kappa}{\rho_{\infty} c_p}, \quad (3.15)$$

onde κ é condutividade térmica, ρ_{∞} é a massa específica de referência e c_p o calor específico. De maneira semelhante à dimensionalização das equações de Navier-Stokes, introduz-se algumas grandezas adimensionais, a saber

$$\Theta = \frac{T - T_{\infty}}{\Delta T}, \quad (3.16)$$

$$q = \frac{L_{\infty}}{\Delta T u_{\infty}} q^*,$$

onde T_{∞} é a temperatura de referência e $\Delta T = (T_c - T_{\infty})$ é uma diferença de temperatura no interior do domínio. Todos esses valores de temperatura são constantes e devem ser previamente conhecidos. Assim, substituindo os valores dimensionais a partir da Eq. (3.16) e a velocidade adimensional sendo definida por $\mathbf{U} = u^*/u_{\infty}$. A definição de difusividade térmica para a equação da energia adimensional torna-se

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta - \frac{\gamma}{L_{\infty} u_{\infty}} \nabla^2 \Theta = q. \quad (3.17)$$

Em seguida, multiplicando-se e dividindo-se o termo difusivo da Eq. (3.17) pela viscosidade cinética, sendo definida por $\nu = \mu/\rho_0$, chega-se então a forma final adimensionalizada da equação da energia, escrita na forma

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta - \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \nabla^2 \Theta = q, \quad (3.18)$$

ou ainda na forma,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \Theta + q. \quad (3.19)$$

Assim como nas equações de Navier-Stokes adimensionalizadas, as características físicas da equação de transporte adimensionalizada também são descritas apenas por números adimensionais. A nova grandeza adimensional que aparece nas Eqs. (3.18) e (3.19) é conhecida como número de *Prandtl* (Pr), definido por

$$Pr = \frac{\gamma}{\nu}, \quad (3.20)$$

o qual descreve a relação entre a difusão de quantidade de movimento e de calor. É uma propriedade que leva em conta apenas características do fluido. Já o produto entre os números

de Reynolds (Re) e de Prandtl (Pr) que aparecem nas Eqs. (3.18) e (3.19) é conhecido como o número de *Péclet* (Pe), definido por

$$Pe = Re Pr = \frac{u_\infty L_\infty}{\gamma}, \quad (3.21)$$

que representa a relação entre o calor advectado e o difundido. O número de Reynolds (Re) será definido na próxima secção.

3.4.4 Equações adimensionais para convecção mista

Assim, realizando a mesma substituição nas variáveis dimensionais das equações de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia, representada pelas Eqs. (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4), tem-se as seguintes equações adimensionais na forma vetorial utilizadas na presente investigação

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla p + (Re^{-1}) \nabla^2 \mathbf{U} + \int_{\partial\Omega_b} F(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla p + (Re^{-1}) \nabla^2 \mathbf{U} + \left(\frac{Gr}{Re^2}\right) \Theta \mathbf{j} + \int_{\partial\Omega_b} F(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\Theta) = (Pe^{-1}) \nabla^2 \Theta + \int_{\partial\Omega_b} Q(\mathbf{X}_k, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k, \quad (3.25)$$

onde $\mathbf{U}$, p e Θ são os campos de velocidade, pressão e temperatura adimensionais, respectivamente, e $\mathbf{j}$ é o vector unitário que representa a direcção gravitacional (assumimos que $\mathbf{j}$ aponta no sentido oposto ao sentido positivo do eixo das abscissas). Na Eq. (3.24), além dos parâmetros adimensionais já conhecidos, o número de Reynolds (Re) e o de Grashof (Gr) são definidas por

$$Re = \frac{u_\infty D}{\nu}, \quad Gr = \frac{g\beta(T_c - T_\infty) D^3}{\nu^2}. \quad (3.26)$$

O número de Reynolds (Re) é um número adimensional destinado a caracterizar o tipo de escoamento sobre uma superfície. O seu significado físico representa a relação entre o quociente de forças: forças de inércia e forças de viscosidade. O número de Reynolds permite avaliar o tipo do escoamento, podendo este ser laminar ou turbulento. Outro adimensional importante é o número de Richardson (Ri), sendo representado por

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\frac{g\beta(T_c - T_\infty) D^3}{\nu^2}}{\left(\frac{u_\infty D}{\nu}\right)^2} = \frac{g\beta(T_c - T_\infty) D}{u_\infty^2}. \quad (3.27)$$

O número de Richardson (Ri) expressa a relação entre flutuabilidade de um fluido em relação à sua viscosidade, representado por $Ri = Gr/Re^2$. Neste trabalho, o número de Richardson é baseado na distância entre duas placas isotérmicas, $Gr = g\beta(T_c - T_\infty) D^3/\nu^2$, que representam as paredes de um domínio de cálculo, separadas por uma distância característica

D. Essa relação envolve o números de Grashof (Gr) e o Reynolds (Re), que representa a relação entre a sustentação e a viscosidade de um fluido. De seguida, apresentamos algumas considerações para o número de Richardson. Se $Gr/Re^2 \approx 1$, estamos perante a coexistência de efeitos de convecção natural e forçada. Se $Gr/Re^2 \gg 1$, os efeitos de convecção forçada podem ser desprezados. Se $Gr/Re^2 \ll 1$, os efeitos de convecção forçada podem ser desprezadas. Nesta investigação, o número de Richardson considerado em todas as simulações numéricas, levou em conta os efeitos de convecção mista.

3.5 A função indicadora

A função indicadora, representada por $I(x, t)$ tem como objetivo assinalar e identificar a posição do corpo imerso. Esta função foi proposta por Unverdi and Tryggvason (1992), sendo um método de acompanhamento de interface, onde a função é calculada em todo o domínio ou em parte dele, com a atribuição do valor unitário para pontos internos à interface, e zero para os valores externos e valores entre 0 e 1 para os denominados pontos de transição, em outras palavras, para os pontos sobre a interface. Na presente investigação, a função indicadora é calculada de acordo com o trabalho de Unverdi and Tryggvason (1992), sendo representada por uma função $G(x, t)$ da seguinte forma

$$\nabla^2 I(x, t) = \nabla \cdot G(x, t). \quad (3.28)$$

Observa-se que ao aplicar o operador divergente na Eq. (3.28), obtém-se o Laplaciano da função indicadora. Desta forma, após resolver a equação de Poisson, obtém-se o campo da função indicadora, $I(x, t)$, em todo o domínio de cálculo. Para resolução do sistema linear resultante da discretização da Eq. (3.28), foi utilizado o método MSIP (Modified Strongly Implicit Procedure). De maneira analítica pode-se compreender melhor o processo de cálculo da função indicadora na forma bidimensional da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{\partial G(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial G(y, t)}{\partial y}, \quad (3.29)$$

onde a função $G(x, t)$ pode ser calculada como

$$G(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N D_{ij} (\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) \mathbf{n}(\mathbf{X}_k) \Delta s(\mathbf{X}_k), \quad (3.30)$$

onde N é o número de pontos Lagrangianos, $D_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k)$ é uma função interpolação/ distribuição (a ser definida por conveniência), $\mathbf{n}(\mathbf{X}_k)$ é o vector normal à interface no ponto Lagrangiano $\mathbf{X}_k$, e $\Delta s(\mathbf{X}_k)$ é a distância entre dois pontos Lagrangianos consecutivos. Nota-se que a Eq. (3.28), quando desmembrada na forma bidimensional, apresenta um sistema linear da seguinte forma

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N D_i (\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) \mathbf{n}_x(\mathbf{X}_k) \Delta s(\mathbf{X}_k) \\ G(\mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^N D_j (\mathbf{y} - \mathbf{Y}_k) \mathbf{n}_y(\mathbf{Y}_k) \Delta s(\mathbf{Y}_k) \end{cases}, \quad (3.31)$$

onde em síntese, a metodologia descrita permite simular virtualmente o escoamento.

No que diz respeito à simulação envolvendo interfaces sólidas (aquelas em que os pontos discretos estão rigidamente interligados), a literatura apresenta diferentes metodologias relacionadas ao Método de Fronteira Imersa. Relacionando as semelhanças entre cada uma delas,

podem-se destacar aquelas que utilizam constantes ajustáveis, os modelos de reconstrução local e os modelos de força interfacial no interior do escoamento. Isto, contudo, não impede o possível caráter transiente dessas interfaces, as quais podem apresentar diferentes configurações para cada processo iterativo. Trabalhos clássicos envolvendo constantes como os de Goldstein et al. (1993) e Saiki and Biringen (1996) calculam a força interfacial por meio de uma função que anula a diferença de velocidades entre a fronteira e as parcelas de fluido que estão sobre a interface. Assim, surge a tendência de impor a condição de não-deslizamento, onde duas constantes são utilizadas como pesos nessa função. Essas constantes são ajustadas de forma a contribuir com a estabilidade e a convergência da solução.

Trabalhos anteriores, como os modelos de reconstrução local de Tseng and Ferziger (2003) e Ferziger and Peric (1997), dividem o domínio de cálculo em duas regiões, a saber, o domínio físico ou região externa à interface e o domínio das células fictícias. Nesse contexto, as denominadas células fictícias, que são células situadas em regiões onde não há escoamento (dentro da fronteira) são cortadas parcialmente pela interface imersa. Assim, o campo de força a ser adicionado nas equações de Navier-Stokes é calculado apenas nessas células. Um esquema de reconstrução local da solução (extrapolação) permite estimar qual seria o valor assumido pela velocidade e pressão, dentro da célula fictícia através dos valores das células vizinhas no domínio físico, além da condição de contorno sobre a interface, a qual é conhecida. Um modelo semelhante a este último foi apresentado por Ye et al. (1999). Essa metodologia mapeia as regiões de fluido cortadas pela interface, de forma a determinar células trapezoidais externas, onde é aplicado o campo de força. Este dois últimos modelos apresentam uma certa desvantagem em relação ao Método de Fronteira Imersa, que é a possibilidade de tratar todo o domínio como se estivesse ocupado por um único fluido. De facto, a necessidade de dividir o domínio em regiões que estão fora e regiões que estão dentro da interface é um complicador a mais nos processos que envolvem implementações numéricas.

Diante desse complicador, os modelos de primeira ordem calculam a força sobre os pontos da interface (pontos Lagrangianos) e depois disseminam essa força para todo o domínio de escoamento, esses modelos possuem uma implementação mais direta ou sem muitos entraves. Além disso, tais metodologias seguem a idéia original de Peskin (1977). Dentre esses modelos está o chamado Modelo Físico Virtual - (MFV) (em inglês, *Virtual Physical Model - VPM*), utilizado nesta investigação sendo apresentado na próxima Seção.

3.6 Modelo físico virtual

O modelo físico virtual é uma metodologia destinada para ao cálculo das forças que atuam sobre os pontos discreto de uma determinada fronteira, também denominada de *força interfacial* ou *força Lagrangiana*. A caracterização da força Lagrangiana, representa a diferença entre as várias metodologias de Fronteira Imersa. Nesta investigação foram tratadas apenas as fronteiras rígidas (sem elasticidade), mas o modelo pode ser utilizado ou estendido para outros tipos de interface, como por exemplo, para as fronteiras elásticas, fronteiras entre diferentes fluidos, etc. O modelo físico virtual utiliza o espalhamento/difusão das forças interfaciais sobre o interior do escoamento. Assim, o campo de força Euleriano é aplicado nas proximidades da fronteira imersa, tendo seu valor atenuado à medida que a distância à interface aumenta. Nesta tese, este modelo avalia dinamicamente não apenas a força que o fluido exerce sobre a superfície sólida imersa no escoamento mais a troca térmica entre eles. A força Lagrangiana, $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t)$, e a fonte térmica $Q(\mathbf{X}_k, t)$, são avaliados separadamente, isto é, para a força Lagrangiana foi realizado um balanço de quantidade de movimento sobre uma partícula de fluido que se encontra junto à interface fluido-sólido, enquanto que para a parte térmica, aplicou-se a equação adimensional

da energia, Eq. (3.25), que mostra a interação entre a partícula-fluido e a interface, conforme a Fig. (3.2) a seguir, que leva em consideração todos os termos da equação de Navier-Stokes.

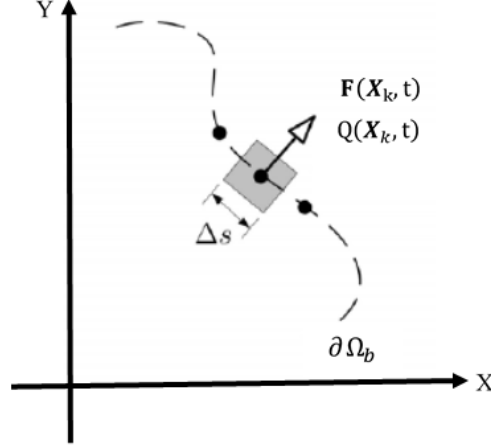


Figura 3.2: Ilustração do volume de controle localizado sobre uma partícula de fluido Lagrangiana.

Então, partindo do pressuposto que todas as partículas fluido, incluindo as que se encontram sobre a interface, devem satisfazer o balanço de quantidade de movimento e da energia, a densidade de força interfacial pode ser avaliada utilizando o princípio da conservação da quantidade de movimento e da energia, aplicando-se sobre qualquer partícula de fluido que compõe o escoamento. Com isso, tomando-se a partícula fluido ilustrada na Fig. (3.2), por onde passa uma interface imersa arbitrária, chega-se a seguinte formulação

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t) = \underbrace{\rho \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}_k, t)}{\partial t}}_{\mathbf{F}_a} + \underbrace{\rho \nabla [\mathbf{U}(\mathbf{X}_k, t) \mathbf{U}(\mathbf{X}_k, t)]}_{\mathbf{F}_i} + \underbrace{\nabla \mathbf{p}(\mathbf{X}_k, t)}_{\mathbf{F}_p} - \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{U}(\mathbf{X}_k, t)}_{\mathbf{F}_v} \quad (3.32)$$

onde as parcelas referente aos termos da Eq. (3.32), da esquerda para a direita, são denominadas de força de aceleração ($\mathbf{F}_a$), força inercial ($\mathbf{F}_i$), força de pressão ($\mathbf{F}_p$) e força viscosa ($\mathbf{F}_v$), respectivamente. Na mesma Eq. (3.32), os termos ($\mathbf{F}_a$), ($\mathbf{F}_i$), ($\mathbf{F}_p$) e ($\mathbf{F}_v$) são avaliados sobre os pontos de interface usando os campos de pressão e velocidade, calculados em malha Euleriana através de interpolação. Além disso, esses cálculos levam em consideração que na interface, a velocidade do fluido deve ser igual à velocidade na interface devido à condição de não-deslizamento/escorregamento.

Portanto, de maneira análoga ao realizado na Eq. (3.32), para o cálculo da fonte térmica na partícula fluido em contacto com a interface, um balanço de energia é realizado da seguinte forma

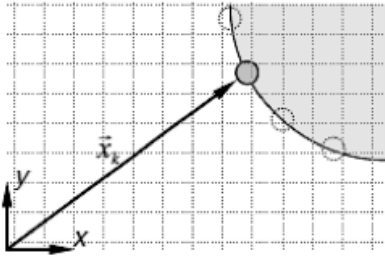
$$Q(\mathbf{X}_k, t) = \frac{\partial \Theta}{\partial t}(\mathbf{X}_k, t) + \nabla [\mathbf{U}(\mathbf{X}_k, t) \Theta(\mathbf{X}_k, t)] - Pe^{-1} \nabla^2 \Theta(\mathbf{X}_k, t) , \quad (3.33)$$

onde as parcelas, referente aos termos da Eq. (3.33), da esquerda para a direita, são denominadas de taxa de variação local da temperatura, taxa de dissipação térmica decorrente da convecção e taxa do transporte difusivo da energia térmica. Os termos $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t)$ e $Q(\mathbf{X}_k, t)$ são calculados nos pontos de interface, através de interpolações dos campos de pressão, velocidade e de temperatura,

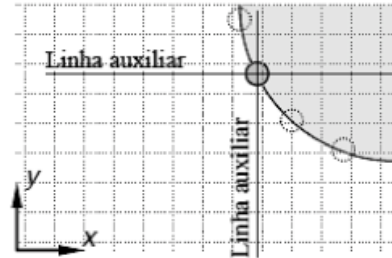
sendo calculados na malha Euleriana, já mencionada anteriormente. Na Eq. (3.32), cada termo é avaliado com base nos valores das variáveis (velocidade, pressão e temperatura), da malha Euleriana, interpolados para a malha Lagrangiana e para os pontos auxiliares utilizados na obtenção de derivadas espaciais. Este processo é detalhado a seguir.

O primeiro passo consiste em arbitrar um ponto Lagrangiano inicial para o cálculo de força interfacial $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t)$. Em seguida, traça-se sobre este ponto duas linhas auxiliares mutuamente ortogonais, sendo cada um delas paralelo a um dos eixos Eulerianos. Dois pontos auxiliares são assinalados sobre cada uma das linhas, no lado externo do corpo sólido, a uma distância Δx e $2\Delta x$ do ponto Lagrangiano considerado. Esta distância é necessária a fim de evitar que dois pontos auxiliares sejam alocados dentro de uma mesma célula Euleriana. As malhas que estiverem a uma distância superior a $2\Delta x$ do ponto Lagrangiano, não contribuem para a interpolação. As regiões interna e externa ao corpo sólido podem ser identificadas com o auxílio do vector normal unitário à superfície, que tem seu sentido positivo voltado para o lado de fora do corpo imerso. Para facilitar e compreensão, são apresentadas algumas ilustrações, conforme Fig. (3.3).

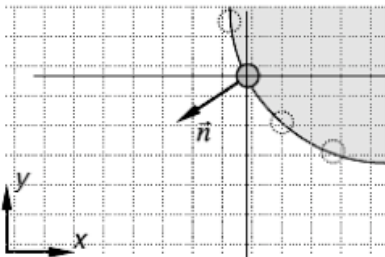
(a) Passo 1: Definir o primeiro ponto lagrangiano da interface.



(b) Passo 2: Traçar duas linhas auxiliares, paralelas aos eixos x e y, cruzando-se no ponto lagrangiano arbitrado.



(c) Passo 3: Determinar o vetor unitário normal à superfície, apontando para fora do cilindro.



(d) Passo 4: Posicionar os pontos auxiliares 1, 2, 3 e 4 sobre as linhas anteriormente traçadas.

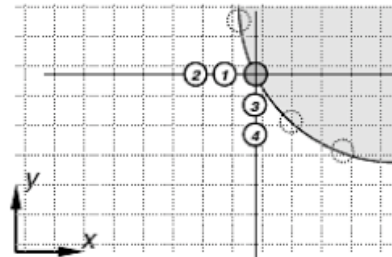


Figura 3.3: Ilustração da alocação dos pontos auxiliares utilizados no cálculo de derivadas espaciais da pressão e da velocidade.

É conveniente deixar registrado que os pontos auxiliares (1, 2, 3 e 4) estão sempre situados na região de interesse do escoamento, ou seja, na região que se deseja simular. Os valores de velocidade, pressão e temperatura nesses pontos, em geral, não são conhecidos, mas podem ser obtidos, a partir das células vizinhas, com o auxílio de uma função de distribuição/interpolação.

Assim, a equação geral para a obtenção da velocidade nos pontos Lagrangianos e nos auxiliares é expressa na seguinte forma

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}_k) = \sum_i D_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_k) \mathbf{U}(\mathbf{x}_i), \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{U}(\mathbf{X}_k)$ são as velocidades Lagrangianas, calculadas nos pontos auxiliares e no ponto $\mathbf{X}_k$ pela interpolação das velocidades Eulerianas $\mathbf{U}(\mathbf{x}_i)$. De maneira análoga, para o cálculo das derivadas da pressão e da temperatura em cada ponto Lagrangiano, foi necessário obter o valor da pressão e da temperatura sobre a interface, no ponto $\mathbf{X}_k$. Assim, para o cálculo da pressão e da temperatura utiliza-se um ponto auxiliar (P), que se encontra em uma posição normal à uma distância Δx do ponto Lagrangiano. Na Fig. (3.4), observa-se que a pressão (representado na cor azul) e a temperatura (representada na cor vermelha) no ponto auxiliar (P) pertencem a uma célula Euleriana, sendo ambas transportadas para a interface.

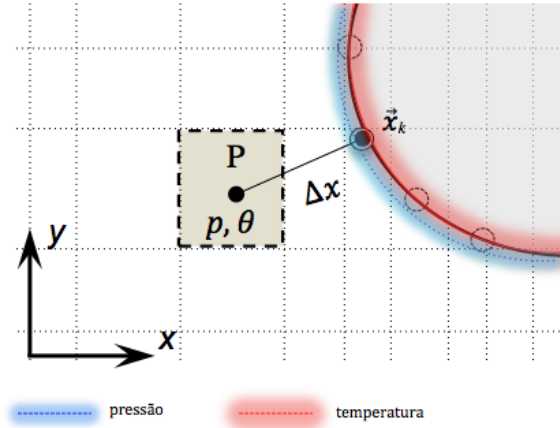


Figura 3.4: Ilustração para a interpolação da pressão (p) e da temperatura (θ).

As equações gerais para obtenção da pressão e temperatura nos pontos auxiliares ou sobre a interface e no ponto Lagrangiano, são dadas por

$$p(\mathbf{X}_k) = \sum_i D_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_k) p(\mathbf{x}_i), \quad (3.35)$$

$$\Theta(\mathbf{X}_k) = \sum_i D_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_k) \Theta(\mathbf{x}_i), \quad (3.36)$$

onde $p(\mathbf{X}_k)$ são valores de pressão sobre a interface ou nos pontos auxiliares e $p(\mathbf{x}_i)$ são valores de pressão nas malhas Eulerianas mais próximas. De maneira análoga, $\Theta(\mathbf{X}_k)$ são as temperaturas nos pontos auxiliares ou no ponto k e $\Theta(\mathbf{x}_i)$, as temperaturas nos pontos Eulerianos mais próximos. No caso da simulação bidimensional, a direção transversal é desconsiderada, de forma que os pontos auxiliares (1, 2, 3 e 4) somente são fixados nas direções longitudinal (pontos 1 e 2) e vertical (pontos 3 e 4).

Com as velocidades, pressão e temperaturas dos pontos Lagrangianos e auxiliares (1, 2, 3 e 4), é possível efetuar o cálculo das derivadas espaciais e temporais presentes nos termos da Eq. (3.32) e da Eq. (3.33) utilizando uma aproximação adequada para estas derivadas. Assim, as Eqs. (3.34), (3.35) e (3.36), foram escritas em notação vectorial para evitar confusão com os índices. A função de distribuição/interpolação D , adotada neste trabalho, é utilizada para a interpolação de variáveis da malha Euleriana, a Eq. (3.37) exemplifica o processo de cálculo da massa específica na posição $\mathbf{X}_k$.

$$\rho(\mathbf{X}_k, t) = \sum_{i,j}^{n_x, n_y} D(\mathbf{x}_{i,j} - \mathbf{X}_k) \rho(\mathbf{x}_{i,j}, t) dx dy, \quad (3.37)$$

onde, n_x e n_y representam a totalidade das células nas direções x e y , respectivamente. Em relação ao custo computacional envolvido, o mesmo pode ser reduzido ao se considerar D não-nulo para distâncias menores que $2\Delta x$ do ponto de interpolação, sendo isto também válido para a distribuição de $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t)$. Portanto, neste trabalho, é utilizada a proposta de Peskin (1977), modificada por Juric (1996), sendo definida por

$$D(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k) = \prod_{m=1}^N \frac{g(r_x) g(r_y)}{h^2}, \quad (3.38)$$

onde

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r), & \text{se } \|r\| < 1 \\ 0,5 - g_1(2 - \|r\|), & \text{se } 1 < \|r\| < 2 \\ 0, & \text{se } \|r\| > 2 \end{cases} \quad (3.39)$$

em que, $g_1(r) = (3 - 2\|r\| \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2})/8$, e r é o denominado raio de influência da função distribuição, sendo aqui representado por $[(x - x_k)/h]$ ou $[(y - y_k)/h]$. O termo $h = \Delta x = \Delta y$ é o tamanho da malha euleriana e (x, y) as coordenadas de um ponto Euleriano do domínio. De acordo com a definição da função (3.39), a interpolação abrange uma distância de, no máximo, duas malhas do ponto considerado, uma vez que o valor da função D é anulada para distâncias maiores. Isto pode ser explicado porque a região de abrangência da função D deve ser finita de forma a manter razoável o custo computacional. Sem essa observação, haveria contribuição de muitos pontos, causando um elevado custo computacional. Esta função de distribuição é do tipo Gaussiana.

Para o processo de cálculo de cada parcela da densidade de força Lagrangiana, Eq. (3.32), é necessário determinar, a priori, os campos de velocidade, pressão e temperatura do escoamento. Sabendo que esses campos são calculados na malha Euleriana, deve-se obtê-los sobre os pontos Lagrangianos, onde não necessariamente precisa haver coincidência com os pontos da malha Euleriana. Portanto, a priori, os campos de velocidade e pressão são interpolados em pontos auxiliares próximos à interface. A Fig. (3.5) ilustra como são definidos os pontos auxiliares utilizados no esquema de interpolação da velocidade para o cálculo das derivadas que compõem os termos da Eq. (3.32). Tendo como base um ponto arbitrário qualquer $(\mathbf{X}_k)$, adota-se mais dois pontos distantes de Δ e 2Δ em direções paralelas da malha Euleriana; na direção X os pontos 1 e 2, e na direção Y , os pontos 3 e 4. Os pontos extras A, B, C e D são necessários para calcular os termos cruzados da componente viscosa ($\mathbf{F}_v$) da força Lagrangiana.

É importante deixar registrado que a função D permite também a transferência de quantidades entre as malhas Euleriana e Lagrangiana. Esta função atua como uma função de interpolação, distribuindo a força Lagrangiana para fora da interface. Um procedimento conveniente para fixar a região de interpolação, consiste em alocar um quadrado centrado em cada ponto auxiliar (uma "caixa pontilhada"), representada por linhas pontilhadas nas Figs. (3.6 – (a) e (b)), para obtenção das velocidades, pressão e temperatura, já comentada anteriormente.

Assim, somente os pontos no interior dessa "caixa pontilhada" da Fig. (3.6) são importantes no processo de cálculo. Como resultado, uma contribuição de pontos distantes até duas células da malha, auxilia na redução do custo computacional, pois para pontos Eulerianos muito distantes do ponto $(\mathbf{X}_k)$ analisado, esta função é nula. O uso de pontos internos à interface, durante o procedimento de interpolação, é fisicamente coerente, uma vez que o escoamento

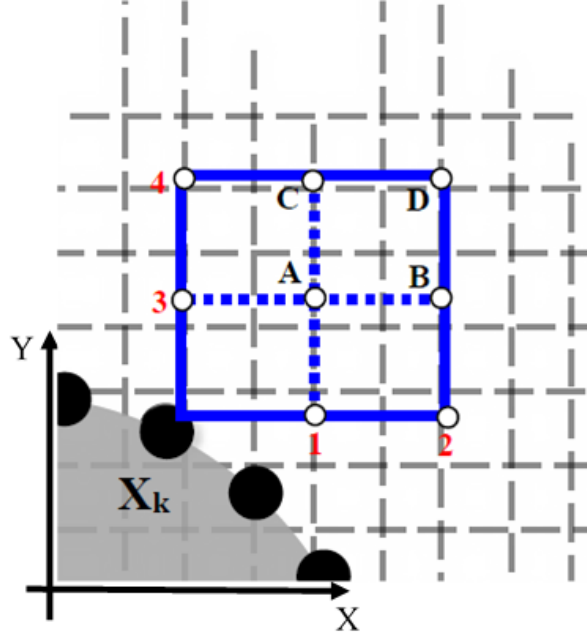


Figura 3.5: Ilustração dos pontos auxiliares no esquema de interpolação para o cálculo das forças Lagrangianas.

interno é também resolvido pelas equações de Navier-Stokes. Este por sua vez, sendo contrário ao escoamento externo, atua de modo a recuperar a condição de não-deslizamento. Nas Figs. (3.6 – (a) e (b)), são apresentados esquemas ilustrativos do procedimento de interpolação das duas componentes da velocidade sobre o ponto auxiliar 3.

Como já comentado anteriormente, a interpolação das velocidades, pressões e temperaturas para os pontos auxiliares possui uma particularidade, em que somente são utilizados pontos da zona de abrangência que estão na região de interesse do escoamento. Esta restrição, contudo, não atinge o procedimento de interpolação de velocidades para os pontos Lagrangianos, uma vez que tanto as regiões acima quanto abaixo da interface podem contribuir para o processo. Calculadas as velocidades, pressão e temperatura nos pontos auxiliares (1, 2, 3 e 4) e também no ponto Lagrangiano, juntam-se os elementos para estimar as derivadas que compõe cada parcela de força da Eq. (3.32). Para o gradiente de pressão na direção normal, foi considerado como sendo nulo e, portanto, a pressão no ponto Lagrangiano é igual à pressão no ponto auxiliar (P), sendo esse ponto utilizado para o cálculo da pressão e da temperatura na superfície, apresentado na Fig. (3.4). As derivadas para o cálculo da força de pressão são realizadas através do Método de Diferenças Finitas, conforme apresentado a seguir

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{p_4 - p_3}{y_4 - y_3} \end{cases} \quad (3.40)$$

Para o cálculo da temperatura a cada passo de tempo no processo iterativo sobre a fronteira imersa, foi utilizada a Eq. (3.36). Assim, após a interpolação das velocidades, da pressão e da temperatura na interface e nos pontos auxiliares, determinam-se as derivadas que

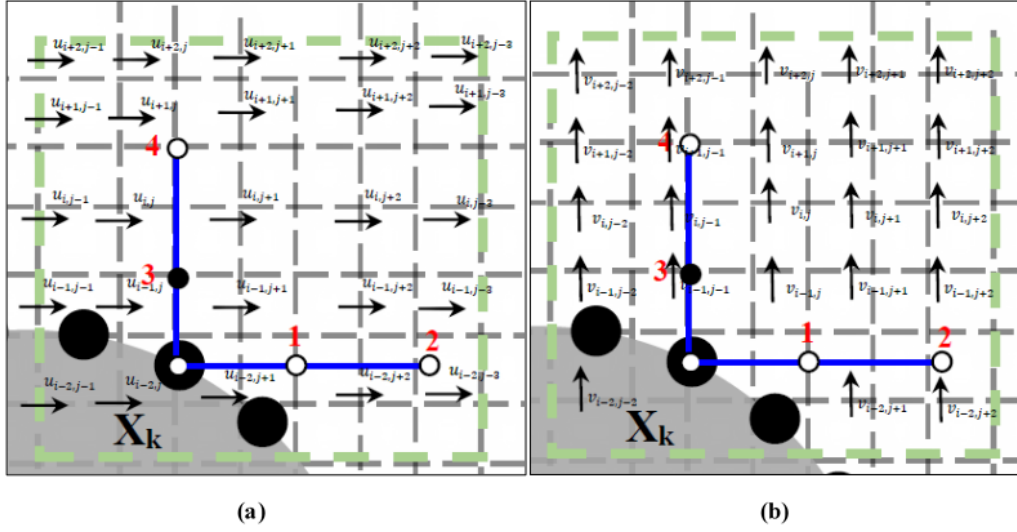


Figura 3.6: Esquema ilustrativo do procedimento de interpolação da velocidade sobre o ponto auxiliar 3: (a) – para a componente u na direção X e (b) – para a componente v na direção Y .

compõe os termos para o cálculo dos termos fontes Lagrangianos nas Eqs. (3.32) e (3.33) nas direções x e y , com os denominados *polinômios de Lagrange* de primeira e de segunda ordem. Denominando genericamente as componentes da velocidade ou pressão, definida pela função de interpolação ϕ , sendo dada pela combinação linear dos polinômios de Lagrange (q_i)

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^m \phi_i q_i(x), \quad (3.41)$$

onde,

$$q_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^m \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (3.42)$$

Com isso, na direção x para os pontos k , 1 e 2 da Fig. (3.6), tem-se a seguinte função de interpolação para uma propriedade qualquer (ϕ):

$$\phi = \frac{(x_i - x_1)(x_i - x_2)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)} \phi_k + \frac{(x_i - x_k)(x_i - x_2)}{(x_1 - x_k)(x_1 - x_2)} \phi_1 + \frac{(x_i - x_k)(x_i - x_1)}{(x_2 - x_k)(x_2 - x_1)} \phi_2. \quad (3.43)$$

O processo de cálculo da primeira e da segunda derivada nas direções x e y , respectivamente, se dá da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{(x_i - x_1) + (x_i - x_2)}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)} \phi_k + \frac{(x_i - x_k) + (x_i - x_2)}{(x_1 - x_k)(x_1 - x_2)} \phi_1 + \frac{(x_i - x_k) + (x_i - x_1)}{(x_2 - x_k)(x_2 - x_1)} \phi_2 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{2\phi_k}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)} + \frac{2\phi_1}{(x_1 - x_k)(x_1 - x_2)} + \frac{2\phi_2}{(x_2 - x_k)(x_2 - x_1)} \end{array} \right., \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial y} \approx \frac{(y_i - y_3) + (y_i - y_4)}{(y_k - y_3)(y_k - y_4)} \phi_k + \frac{(y_i - y_k) + (y_i - y_4)}{(y_3 - y_k)(y_3 - y_4)} \phi_3 + \frac{(y_i - y_k) + (y_i - y_3)}{(y_4 - y_k)(y_4 - y_3)} \phi_4 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \frac{2\phi_k}{(y_k - y_3)(y_k - y_4)} + \frac{2\phi_3}{(y_3 - y_k)(y_3 - y_4)} + \frac{2\phi_4}{(y_4 - y_k)(y_4 - y_3)} \end{array} \right., \quad (3.45)$$

onde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 são obtidos através da interpolação das variáveis Eulerianas mais próximas, como comentado anteriormente. As coordenadas dos pontos auxiliares 1, 2, 3, 4 e as coordenadas do ponto Lagrangiano são, respectivamente, os pares $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ e (x_k, y_k) . Os pontos auxiliares são localizados fora da interface, para que o cálculo da força seja independente das propriedades do escoamento em seu interior. A distância entre os pontos 1, 2, 3 e 4 da Fig. (3.4) é fixada em Δx . Com isso, os cálculo da força inercial, viscosa e da pressão são independentes do escoamento no interior da interface. O mesmo processo é válido para a equação da energia. A força de aceleração, que é um dos termos da força Lagrangiana (ou de interface) total, sendo a primeira parcela da Eq. (3.32), foi obtida através de uma aproximação utilizando o Método de Diferenças Finitas, de acordo com a expressão

$$\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}_k, t)}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_{fk}}{\Delta t}, \quad (3.46)$$

onde $\mathbf{U}_k$ representa o vector de velocidade da interface e $\mathbf{U}_{fk}$, representa o vector de velocidades do fluido na mesma posição da interface, Esta força de aceleração é denominada de aceleração forçante e representa a parcela de maior influência no cálculo da força Lagrangiana total, podendo ser interpretada como a parcela que garante a condição de não-deslizamento. De forma análoga, a derivada temporal para a temperatura é dada por

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial t} \approx \frac{\theta_k - \theta_{fk}}{\Delta t}. \quad (3.47)$$

Portanto, as Eqs. (3.32) à (3.47), descritas nesta seção, permitem calcular a força interfacial em cada ponto da malha Lagrangiana.

3.6.1 O cálculo do parâmetro L_2

Outro cálculo importante é a determinação do parâmetro L_2 , que fornece a diferença entre a velocidade adimensional do fluido na interface e a própria velocidade da interface. Fisicamente, isso significa que a norma deve ser nula para que a condição de não-deslizamento seja satisfeita. O cálculo de L_2 é dado pela Eq. (3.48), e seu valor está em torno de 10^{-3} , sendo um valor coerente e aceitável, conforme Vedovoto et al. (2007), sendo representado pela seguinte formulação

$$L_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_p} \frac{(u_k(x_k) - u_{fk}(x_k))^2 + (v_k(x_k) - v_{fk}(x_k))^2}{n_p |\mathbf{U}_\infty|^2}}. \quad (3.48)$$

De forma análoga, o parâmetro L_2 é determinado para a temperatura, sendo representado pela expressão

$$L_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n_p} \frac{(\theta_k(x_k) - \theta_{fk}(x_k))^2}{n_p |\mathbf{U}_\infty|^2}}, \quad (3.49)$$

onde, (u_k, u_{fk}) , (v_k, v_{fk}) , (θ_k) e (θ_{fk}) são as componentes das velocidades e da temperatura na interface e da velocidade do fluido na interface, respectivamente; n_p é o número de pontos Lagrangianos na interface imersa para as Eqs. (3.48) e (3.49); U_∞ é a velocidade de referência no escoamento, que assumimos ser igual a 1.

3.6.2 O cálculo da distribuição da força Lagrangiana e da fonte térmica

Após o cálculo dos termos das Eqs. (3.32) e (3.33), e obtendo os valores para $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k, t)$ e $Q(\mathbf{X}_k, t)$, são em seguida calculados os termos Eulerianos para $\mathbf{f}$ e q , a Fig. (3.7) ilustra a distribuição da força interfacial e do campo térmico.

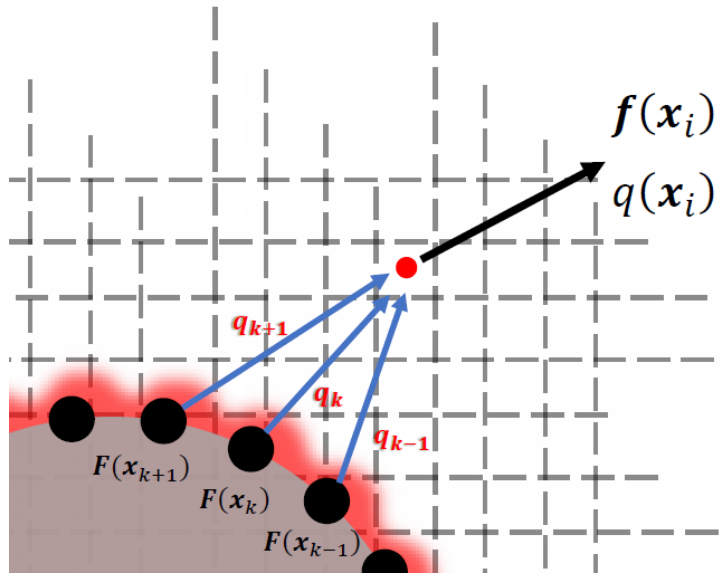


Figura 3.7: Distribuição da força interfacial $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ e da fonte térmica $q(\mathbf{x}_i)$ em cada nó Lagrangiano no corpo imerso no escoamento, resultando num campo de força interfacial aquecido, permitindo que a partícula de fluido reconheça a fronteira sólida e o corpo aquecido.

O processo de cálculo para os termos $\mathbf{f}$ e q é apresentado a seguir por

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = \sum_k D_{i,j}(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_k) \mathbf{F}(\mathbf{X}_k) \Delta s(\mathbf{X}_k), \quad (3.50)$$

$$q(\mathbf{x}_i) = \sum_k D_{i,j}(\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_k) Q(\mathbf{X}_k) \Delta s(\mathbf{X}_k), \quad (3.51)$$

onde, na Eq. (3.50), $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ é a força em cada nó Euleriano, enquanto $\mathbf{F}(\mathbf{X}_k)$ é a força de cada nó Lagrangiano sendo distribuído para os nós Eulerianos.

A distância média entre dois pontos adjacentes Lagrangianos é representado por $\Delta s(\mathbf{X}_k)$, e $D_{i,j}$ é uma função de distribuição. Na Eq. (3.51), é apresentado o termo de fonte térmica $q(\mathbf{x}_i)$ para cada nó Euleriano, devido a presença do corpo imerso aquecido, e $Q(\mathbf{X}_k)$ são os termos de fonte térmica em cada nó Lagrangiano, sendo distribuídos para os nós Eulerianos, formando, assim, um campo térmico de força Euleriana que atua sobre as partículas de fluido próximas da fronteira. Finalmente, após a obtenção dos termos de força $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ e térmico $q(\mathbf{x}_i)$, as Eqs. (3.22) a (3.25) são resolvidas.

É importante deixar registrado que no processo de resolução das chamadas equações de Navier-Stokes, é necessário que seja apresentado as condições inicial e de fronteira (ou de contorno). Há diversos tipos de condições de contorno para as equações de Navier-Stokes, mas na presente investigação, são utilizadas as condições de Dirichlet e Neumann. Em síntese, a condição de Dirichlet fixa valores de variáveis na fronteira, um exemplo é a imposição da velocidade do fluido sendo nula em paredes, o que representa a condição de não-deslizamento. Enquanto Neumann fixa os valores das derivadas nas variáveis na fronteira. As condições de Dirichlet e Neumann são utilizadas nesta investigação para especificar a pressão, a temperatura e as componentes do vector velocidade nas fronteiras do domínio de cálculo. Em todas as simulações realizadas, a condição de Neumann para a temperatura, é imposta indiretamente para o corpo imerso durante o cálculo dos termos fontes.

3.7 Outros importantes parâmetros adimensionais

Nesta seção, são apresentados alguns outros importantes parâmetros adimensionais, que caracterizam o escoamento em torno de corpos estudados na presente investigação. A importância em utilizar esses parâmetros dá-se pela facilidade de reduzir a quantidade de variáveis, viabilizando assim, a comparação dos resultados obtidos com outros importantes trabalhos disponíveis na literatura. Com isso, foi considerado o coeficiente de pressão, o número de Strouhal, os coeficientes aerodinâmicos, denominados de arrasto e sustentação, e os números de Reynolds e Nusselt.

3.7.1 O tempo adimensional

Primeiramente, define-se a escala para o tempo adimensional, sendo dado por

$$T_{ad} = \frac{U_{\infty} t}{D}, \quad (3.52)$$

onde T_{ad} é o tempo adimensional e t é o tempo dimensional (ou físico).

3.7.2 O coeficiente de pressão

O coeficiente de pressão é definido como sendo

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2}, \quad (3.53)$$

onde p_{∞} é a pressão da corrente livre, ao longe da interface imersa.

3.7.3 A força e o coeficiente de arrasto

A força de arrasto sobre um corpo imerso em um fluido surge da distribuição de pressão e da tensão de cisalhamento ao longo do corpo. A força de arrasto, por unidade de comprimento, pode ser calculada utilizando a componente x da força Lagrangiana que está na direção do escoamento, sendo representada por

$$F_d = - \int_0^L f_x ds, \quad (3.54)$$

onde F_d é a força de arrasto por unidade de comprimento, calculada utilizando a componente da força Lagrangiana f_x , atuante sobre o fluido, e ds é o elemento de comprimento na qual o ponto $\mathbf{X}_k$ está centrado, e L é o comprimento da interface. O sinal "(-) – negativo" se deve ao facto do arrasto ser resultante de forças externas à interface, exercidas pelo fluido sobre o corpo. Com isso, o coeficiente de arrasto é definido por

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D}, \quad (3.55)$$

onde F_d é a força de arrasto e ρ é a massa específica do fluido.

3.7.4 A força e o coeficiente de sustentação

De maneira análoga à força e ao coeficiente de arrasto, a força de sustentação, também por unidade de comprimento, e o coeficiente de sustentação podem ser calculados, respectivamente por

$$F_l = - \int_0^L f_y ds, \quad (3.56)$$

$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 D}, \quad (3.57)$$

onde F_l é a força de sustentação, e f_y é a componente y da força Lagrangiana, transversal à direção principal do escoamento. A força de sustentação surge pela oscilação dos vórtices formados a jusante do corpo imerso.

3.7.5 O número adimensional de Strouhal

O número de Strouhal é definido como a frequência adimensional de desprendimentos de vórtices, sendo muito utilizado para validações em análises numéricas, este número é associado ao coeficiente de arrasto. O número de Strouhal é assim definido por

$$St = \frac{fD}{U_\infty}, \quad (3.58)$$

sendo f a frequência dimensional de formação e desprendimentos de vórtices. Um dos métodos utilizados para a determinação da frequência de desprendimento de vórtices é através da aplicação de uma Transformada Rápida de Fourier (TRF) no sinal do coeficiente de sustentação.

3.7.6 O número adimensional de Nusselt

Outro importante número adimensional para avaliação dos processos térmicos é o número de Nusselt, sendo utilizado para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção em relação à transferência de calor por condução. Assim, é habitual expressar o número de Nusselt na forma adimensional como

$$Nu = \frac{hD}{k_f}, \quad (3.59)$$

onde h é o coeficiente de transferência de calor por convecção e k_f a condutividade térmica do fluido, sendo D uma dimensão característica da geometria. Já o número de Nusselt local,

é obtido numericamente a partir do gradiente de temperatura na direção normal à superfície, conforme a expressão

$$Nu_\theta = \frac{\Theta_{p'} - \Theta_p}{\Delta x}, \quad (3.60)$$

onde $\Theta_{p'}$ é a temperatura adimensional na direção normal em um ponto com distância $2\Delta x$ da interface, e Θ_p é a temperatura adimensional da interface em um ponto p , com distância Δx da interface.

Com relação ao cálculo do valor médio do número de Nusselt local em torno da superfície imersa, foi utilizado de acordo com Santos (2014), a seguinte formulação matemática

$$\overline{Nu} = \frac{1}{H} \int_0^H Nu(X_k, t) dX_k, \quad (3.61)$$

onde o número de Nusselt médio da superfície imersa possui um valor em cada processo iterativo. Todos esses valores para o número de Nusselt são importantes para avaliar as características térmicas na interação fluido-corpo no campo do escoamento durante a simulação numérica. Na presente investigação, além do regime laminar, foram simulados escoamentos com o início dos processos turbulentos para números de Reynolds até 10^3 , sendo então necessário a utilização de modelos de turbulência para o fechamentos das equações de Navier-Stokes. Dois modelos foram implementados, a saber, o modelo de Smagorinsky, com metodologia *LES* (*Large Eddy Simulation*) e o modelo de Spalart-Allmaras (S-A), com metodologia *URANS* (*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation*). Estes modelos serão apresentados na próxima seção.

3.8 A modelação matemática da turbulência

A multiplicidade de escalas representa o número de graus de liberdade (N_{gl}) de um escoamento turbulento, sendo este dado por

$$N_{gl} \sim Re^{9/4}, \quad (3.62)$$

o que implica em resolver, simultaneamente, um sistema de equações da mesma ordem, que, em geral, resulta em um custo computacional extremamente elevado. A estimativa (3.62) é válida para fluidos tridimensionais, tendo esta sido proposta por Kolmogorov na sua teoria K41 (Kolmogorov (1941); ver Frisch (1995) para uma discussão mais detalhada). Para fluidos bidimensionais, a estimativa (3.62) é substancialmente diferente, sendo, neste caso, dada por

$$N_{gl} \sim Re. \quad (3.63)$$

Os argumentos fenomenológicos conducentes a (3.63) baseiam-se na teoria KLB, desenvolvida por Kraichnan (1967), Leith (1968) e Batchelor (1969), que foram os primeiros a estudar a turbulência bidimensional, (ver Lesieur (2012) para mais detalhes).

Dentre as metodologias disponíveis para a resolução numérica dos modelos de turbulência, a mais comum é a Simulação Numérica Direta (em inglês, *Direct Numerical Simulation* - *DNS*). O *DNS* fornece a resolução integral das equações, de tal forma que todos os graus de liberdade ou todo o espectro de energia associado ao escoamento é calculado. Em termos gerais, o DNS consiste na solução numérica das equações de Navier-Stokes, resolvendo-se todo o espectro de energia associado ao movimento do fluido, e ainda exige-se alta resolução temporal e espacial para simulação de escoamentos relativamente simples. Como consequência disto,

malhas extremamente refinadas devem ser empregadas, a fim de que todas as escalas presentes no escoamento possam ser devidamente calculadas. Por este motivo, as investigações envolvendo DNS, em geral, são restritas a configurações geométricas muito simples e a escoamento envolvendo baixos ou moderados números de Reynolds.

Desta forma, surgiu a proposta de separação ou decomposição das escalas de turbulência. O processo de decomposição deu origem a duas abordagens para as equações de transporte (Silveira-Neto (2002)):

1. Equações médias de Reynolds (ver, por exemplo, Pope (2001)), para as quais as escalas da turbulência são separadas em escalas relativas ao comportamento médio e em escalas relativas às flutuações em relação a esta média;
2. Equações de Navier-Stokes filtradas (Smagorinsky (1963)), para as quais as escalas da turbulência são separadas em dois grupos: o grupo das grandes escalas e o grupo das pequenas escalas ou escalas sub-malha.

3.8.1 A formulação RANS para a turbulência

3.8.1.1 Equações médias de Reynolds

Uma metodologia bastante empregada, é baseada nas equações médias de Reynolds (em inglês, *Reynolds Averaged Navier-Stokes - RANS*), que envolve a solução de todas as instabilidades físicas, filtrando-as por um processo de média. Desta forma, este modelo de turbulência que não possui a finalidade de representar com exatidão todas as complexidades físicas dos escoamentos, é considerado o mais prático e usual modelo existente. A metodologia *RANS* permite contornar o chamado "problema de fechamento", decorrente da presença de tensões de Reynolds, que surgem como incógnitas adicionais à solução do problema. O *RANS* é menos exigente que a metodologia *DNS*, tanto em tempo de processamento quanto em armazenamento de dados na memória de um computador. Uma desvantagem do modelo, em via de regra, é sua imprecisão para análise com detalhes mais precisos, como por exemplo, no emparelhamento de vórtices ou a formação de dipolos, ou de outras estruturas turbilhonares. A seguir, é detalhado o processo analítico para obtenção das equações médias de Reynolds utilizado no presente trabalho.

Para a dedução das equações médias de Reynolds, separa-se uma função genérica $f(\vec{x}, t)$ na sua parte média temporal representada por $\bar{f}(\vec{x}, t)$, e na sua parte flutuante, dada por $f'(\vec{x}, t)$, onde combinando as partes tem-se a seguinte formulação

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t) . \quad (3.64)$$

O processo de cálculo, inicia-se a partir da equação da conservação da massa, Eq. (3.1), aplicando o operador média, aqui representado por uma barra ($-$) sobre a Eq. (3.1); em seguida, utilizando a propriedade comutativa entre o operador média e operador derivada parcial, obtém-se a equação da conservação da massa (em notação indicial) para as médias das componentes da velocidade, representado por

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.65)$$

Em seguida, substraindo-se a Eq. (3.1) da Eq. (3.65), obtém-se uma equação de conservação da massa para as flutuações das componentes da velocidade, sendo representada a seguir como

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.66)$$

Da mesma maneira, partindo das equações de balanço da quantidade de movimento linear, Eq. (3.2) e Eq. (3.3), e aplicando-se o operador média $(-)$ sobre estas equações e realizando algumas manipulações algébricas, obtêm-se as seguintes equações para a convecção mista

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) \bar{\theta}_i + f_i. \quad (3.68)$$

Nas Eqs. (3.67) e (3.68), verifica-se a priori, que não podem ser resolvidas de maneira imediata, sendo que, no termo não-linear, surge, a saber, a média do produto de duas variáveis desconhecidas. É realizado, então, a decomposição de escalas, usando a Eq. (3.64), onde a função $f(\vec{x}, t)$ é a velocidade $u_i(\vec{x}, t)$, em outras palavras, faz-se

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i. \quad (3.69)$$

Assim, substituindo a Eq. (3.69) nas Eqs. (3.67) e (3.68), obtêm-se as novas equações, sendo reescritas da seguinte forma

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) \bar{\theta}_i + f_i, \quad (3.71)$$

como consequência desse processo de decomposição de escalas, e da transformação das equações originais em equações médias, surge um tensor adicional denominado tensor de Reynolds, sendo representado por $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$. Nesse processo, transpondo o tensor de Reynolds para o segundo membro da equação e agrupando-o com o tensor viscoso, obtêm-se a denominada equação média de Boussinesq-Reynolds, onde as Eqs. (3.70) e (3.71), assumem as seguintes formulações

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right] + f_i, \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right] + \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) \bar{\theta}_i + f_i, \quad (3.73)$$

onde de posse destas novas incógnitas, faz-se necessário modelar o tensor global de Reynolds, que será tratado na próxima seção.

3.8.1.2 Equações de Navier-Stokes filtradas

Nas equações de Navier-Stokes filtradas separe-se uma função qualquer genérica $f(\vec{x}, t)$ na sua parte filtrada $\bar{f}(\vec{x}, t)$ e na sua parte flutuante $f'(\vec{x}, t)$:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t). \quad (3.74)$$

A parte filtrada $\bar{f}(\vec{x}, t)$ é representada por

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}', \quad (3.75)$$

existindo na literatura várias funções filtro, definida de muitas formas. Neste trabalho, adotou-se a mais comum, sendo definida por

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & , \quad |\vec{x}| \geq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & , \quad |\vec{x}| < \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (3.76)$$

em que Δ é o tamanho característico do filtro, o qual caracteriza a frequência de corte da filtragem.

De maneira análoga, verifica-se que as Eqs. (3.70) e (3.71), não podem ser resolvidas para a variável filtrada, uma que o termo não-linear aparece no produto filtrado e não como o produto das variáveis filtradas. Assim, é necessário definir o tensor global sub-malha da turbulência, como sendo

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (3.77)$$

Em seguida, substituindo-se a Eq. (3.77) nas Eqs. (3.67) e (3.68), obtém-se, respectivamente as equações

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right] + f_i, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right] + \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) \bar{\theta}_i + f_i. \quad (3.79)$$

Assim, de maneira análoga às equações médias de Reynolds, conclui-se que o tensor global de Reynolds, τ_{ij} , deve ser modelado para as equações de Navier-Stokes filtradas. Esse procedimento é realizado com a denominada *hipótese de Boussinesq* (Frisch (1995); Lesieur (2012); Pope (2001)) para a viscosidade turbulenta, o que será tratado na próxima seção.

3.8.1.3 A hipótese de Boussinesq

Como abordado em secções anteriores, uma solução para casos envolvendo elevados números de Reynolds, apresentando, portanto, uma quantidade elevada de pequenas escalas associadas frequências altas, precisam de ser resolvidas. Isto é, a decomposição de escalas e a dedução de equações médias, ou filtradas, precisam de ser estabelecidas, resolvendo, assim, o denominado problema de "fechamento da turbulência", onde ocorre uma relação entre as tensões de Reynolds e o campo filtrado de velocidade.

A primeira tentativa de modelar fenómenos turbulentos foi proposto por Boussinesq², onde surge o conceito de viscosidade turbulenta, introduzido por Prandtl, para o tensor de Reynolds para o fechamento das equações, estabelecendo um paralelo com o modelo de Stokes para as tensões viscosas moleculares. Em outras palavras, Boussinesq sugeriu para o núcleo

²Joseph Valentin Boussinesq (1842–1929), físico e matemático francês.

turbulento uma analogia entre as tensões turbulentas e as taxas existentes no regime laminar. Então, para escoamentos unidirecionais, típicos de camada-limite, Boussinesq propôs que as tensões turbulentas de Reynolds sejam proporcionais às taxas de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado com a energia cinética turbulenta, k , representada por

$$-\bar{u}'_i \bar{u}'_j = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (3.80)$$

onde,

$$k \equiv \frac{1}{2} \left(\overline{u'_j u'_j} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right), \quad (3.81)$$

em que o termo ν_t da Eq. (3.80) é denominado de viscosidade turbulenta (que é uma função do escoamento) que, por sua vez, atua como um coeficiente de proporcionalidade para a taxa de deformação. Em geral, a viscosidade turbulenta é maior que a viscosidade molecular, dependendo da região e do tipo de escoamento do fluido. A energia cinética turbulenta, k , é outra variável que faz parte do modelo de fechamento proposto por Boussinesq. Contudo, essa variável depende do traço do tensor de Reynolds, possui uma natureza semelhante à pressão e pode ser incorporada ao gradiente de pressão (Pope (2001); Silveira-Neto (2002)). Das Eqs. (3.78) e (3.79), e substituindo-se o modelo de Boussinesq nestas equações, tem-se o fechamento através da hipótese de viscosidade turbulenta, representada pelas equações

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] + f_i, \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] + \\ & \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) \bar{\theta}_i + f_i. \end{aligned} \quad (3.83)$$

O divergente do último termo das Eqs. (3.82) e (3.83), associada a energia cinética turbulenta, resulta no gradiente da energia cinética turbulenta com δ_{ij} , o que permite incorporar este termo ao termo de pressão, gerando uma pressão modificada ($\bar{p}^* = \bar{p} + 2/3 \rho k$) na equação modelada, resultando nas equações

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \left(\frac{Gr}{Re^2} \right) \bar{\theta}_i + f_i. \quad (3.85)$$

Em seguida, com relação à equação média da energia com difusividade turbulenta, aplica-se a média, adicionando-se um escalar adicional Q_j , sendo representado por

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{\Theta})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \right) + Q_j \right], \quad (3.86)$$

sendo

$$Q_j = \overline{u_j \Theta} - \bar{u}_j \bar{\Theta}, \quad (3.87)$$

onde o escalar adicional representado por Q_j pode ser modelado através de um modelo de gradiente-difusão, ou seja,

$$Q_j = -\alpha_t \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j}. \quad (3.88)$$

O termo $\bar{\Theta}$ é o campo de temperatura resolvido e α_t é o coeficiente de difusão turbulento, sendo determinado com a seguinte equação

$$\alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t}, \quad (3.89)$$

onde Pr_t é o número de Prandtl turbulento, que controla a magnitude da difusão turbulenta média. Assim, a equação de energia média pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{\Theta})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\alpha + \alpha_t) \left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \right) \right]. \quad (3.90)$$

Com isso, verifica-se que as equações médias da quantidade de movimento e da energia estão fechadas. Isto significa que ambas contêm o mesmo número de equações e incógnitas. O último problema encontrado será destinado à solução da viscosidade turbulenta nas equações mencionadas. Para o processo de solução da viscosidade turbulenta, há inúmeros modelos para esta finalidade. Neste trabalho, serão utilizados dois modelos baseados na hipótese de Boussinesq: (i) o modelo de sub-malha de Smagorinsky, e (ii) o modelo contendo apenas uma equação de transporte, Spalart-Allmaras (S-A), que utiliza o conceito de Equações Médias Transientes de Reynolds (*URANS*).

3.8.2 A formulação URANS para a turbulência

No método URANS, os vórtices turbulentos não são resolvidos diretamente e todo o comportamento da turbulência é então modelado. De facto, com a técnica da média temporal, apenas as variações de frequência relativamente baixas do campo de fluxo são capturadas pela abordagem URANS, em contraste com as flutuações turbulentas de alta frequência, sendo totalmente modeladas por outros métodos. A este respeito, o seguinte operador de média temporal é aplicado nas variáveis de fluxo e nas equações de Navier-Stokes

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(\mathbf{x}, t) dt, \quad (3.91)$$

onde T é uma medida da escala temporal de variação lenta do campo de fluxo e t_0 é um tempo de referência. Ao aplicar este operador média à velocidade turbulenta e usando a decomposição tripla dos campos variáveis de fluxo, pode-se obter

$$u_i(t) = \bar{u}_i^m + u_i^\ell(t) + u_i'(t), \quad (3.92)$$

onde $\bar{u}_i^m$ representa a velocidade média do campo de velocidades, sendo que $u_i^\ell(t)$ e $u_i'(t)$ indicam as partes flutuantes de baixa frequência (periódicas) e de alta frequência da velocidade turbulenta, respectivamente.

Equivalentemente,

$$u_i(t) = \bar{u}_i(t) + u_i'(t), \quad (3.93)$$

onde $\bar{u}_i(t)$ representa a parte coerente do sinal de velocidade no fluxo turbulento que envolve todos os movimentos organizados de baixa frequência no campo de fluxo, excluindo o conhecimento prévio sobre turbulência semi-aleatória. A estratégia de decomposição tripla também pode ser aplicada para o sinal de pressão. Ao aplicar a média temporal nas equações de Navier-Stokes (continuidade e quantidade de movimento) e a substituição de sinais de velocidade e pressão de decomposição tripla, as equações de URANS para fluxos incompressíveis em notação indicial são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{array} \right., \quad (3.94)$$

onde τ_{ij} representa o tensor das tensões de Reynolds. Importa mencionar que a origem deste termo se refere à parte não-linear da equação da quantidade de movimento (momentum) de Navier-Stokes e atua como uma tensão sobre o elemento fluido. Fisicamente, é interpretado como uma correlação da flutuação de velocidade e pode ser indicado da seguinte forma

$$\tau_{ij} = \overline{\rho u'_i u'_j} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

O primeiro termo do membro esquerdo da Eq. (3.94) representa a variação temporal do campo de velocidade; na formulação *RANS* (em contraste com a formulação *URANS*), este termo temporal é omitido. Além disso, a pressão de τ_{ij} no *RANS* e *URANS*, na Eq. (3.94), leva ao fechamento do problema, o que significa que o número de variáveis e equações não são balanceadas.

Para remediar o problema e tornar as equações solucionáveis (τ_{ij}) devem ser expresso com base em variáveis de fluxo coerentes, ou seja, médias. Os modelos de viscosidade turbulenta, tentam relacionar o tensor de tensão de Reynolds com uma nova variável, definida como viscosidade turbulenta (ν_t), em contraste com o modelo de tensão de Reynolds que resolve equações de transporte para componentes independentes do tensor de tensão de Reynolds. Os modelos lineares de viscosidade turbulenta são construídos sobre a hipótese de Boussinesq, já vista anteriormente, onde afirma que o tensor de tensão de Reynolds depende linearmente do tensor da taxa de deformação média.

3.8.3 A modelação de Smagorinsky para a turbulência

A modelação algébrica de Smagorinsky (1963) é baseada na hipótese de equilíbrio local para as pequenas escalas, de tal modo que a energia injetada no espectro, definida, como (ver (3.103))

$$\xi = -\overline{u'_i u'_j} \bar{S}_{ij} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}, \quad (3.96)$$

seja igual à energia dissipada pelos efeitos viscosos, dada por (c_1 é uma constante empírica para o modelo de Smagorinsky, com valor de 0.18)

$$\varepsilon = -c_1 \frac{\left(\overline{u'_i u'_i} \right)^{\frac{3}{2}}}{\ell}. \quad (3.97)$$

Em outras palavras, $\xi = \varepsilon$. Nas Eqs. (3.96) e (3.97), os termos $u'_i u'_j$ e ℓ são, respectivamente, as escalas características de velocidade e do comprimento da sub-malha. Supõe-se que a viscosidade turbulenta sub-malha seja proporcional a essas escalas características, conforme a equação

$$\nu_t = C_s \ell (u'_i u'_i)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.98)$$

Em seguida, combinando-se as Eqs. (3.96), (3.97) e (3.98), pode-se exprimir a viscosidade turbulenta como uma função da escala característica de comprimento e da taxa de deformação, segundo a expressão

$$\nu_t = (C_s \ell)^2 |\bar{S}|, \quad (3.99)$$

onde $|\bar{S}|$ representa o módulo da taxa de deformação, dado por

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}. \quad (3.100)$$

A espessura global do filtro ($\mathcal{L}$) é comumente calculada pela média geométrica dos lados da célula de discretização. Assim, numa formulação mais geral, a espessura global do filtro pode ser calculado da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \left(\prod_{i=1}^N \ell x_i \right)^{\frac{1}{N}}, \quad (3.101)$$

onde N é o número de dimensões do problema.

A viscosidade turbulenta, Eq. (3.102), pode ser expressa em função do tensor taxa de deformação $\bar{S}_{ij}$, da escala de comprimento característico ℓ , associado com o tamanho da malha e da constante C_s , denominada constante de Smagorinsky, a viscosidade turbulenta é então representada por

$$\nu_t = (C_s \ell)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}, \quad (3.102)$$

onde o seu valor depende das características do programa computacional utilizado e da natureza do escoamento simulado, devendo ser ajustado para cada problema em questão. O valor para a constante de Smagorinsky é $C_s = 0,18$, tendo sido determinado analiticamente por Lilly (1967), para turbulência homogênea e isotrópica. Porém, na prática, esta constante pode ser calibrada para valores entre $0,05 \leq C_s \leq 0,30$, dependendo do comportamento do escoamento turbulento. O tensor taxa de deformação $\bar{S}_{ij}$ é representado por

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.103)$$

Um tratamento especial deve ser dado em posições próximas às paredes, regiões onde a dissipação da turbulência é maior e a turbulência se torna menos homogênea e isotrópica. Como consequência, a constante de Smagorinsky deve ser menor. Uma forma de resolver este problema é implementar uma função que amortiza o valor da viscosidade em regiões de parede. No trabalho de Van Driest (1956), o autor apresenta uma função de amortecimento, a qual pode ser aplicada à constante de Smagorinsky. Esta função é dada por

$$C_s = C_{so} \left(1 - \exp \left(\frac{-d^+}{A^2} \right) \right), \quad (3.104)$$

onde $d^+ = du_\tau/\nu$ representa a distância relativa e d é a distância do volume Euleriano analisado até a parede mais próxima. Aqui, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ é a velocidade de cisalhamento, sendo τ_w

a tensão de cisalhamento junto à parede. A quantidade $A = 25$ é uma constante empírica determinada por Ferziger and Peric (1997), C_{so} é a constante de Smagorinsky, limitada entre $0,05 \leq C_{so} \leq 0,30$. Apesar de solicitar o ajuste de uma constante *ad-hoc*, o simples modelo contribuiu como ferramenta de simulação para escoamentos turbulentos, sendo útil como ponto de partida para o desenvolvimento de modelos mais aprimorados. A implementação relacionada à função de amortecimento foi implementada de tal forma à amortecer a viscosidade turbulenta próxima às paredes da fronteira imersa, independentemente do tipo de geometria a ser considerada.

As variáveis foram calculadas da seguinte forma: d é a distância do centro da célula Euleriana ao centro da célula Lagrangiana mais próximo. A tensão τ_w é determinada a partir do vector (u, v) da célula Euleriana onde o centro da célula Lagrangiana está contido, sendo essa célula Lagrangiana a mais próxima da célula Euleriana analisada. Para o cálculo de τ_w é necessário projetar o vector velocidade (u, v) na direção normal da fronteira imersa. Pela álgebra linear, pode-se dizer que o vector projetado (u_{Proj}, v_{Proj}) é representado por

$$\begin{bmatrix} u_{Proj} \\ v_{Proj} \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad (3.105)$$

em que (n_x, n_y) são as componentes do vector unitário normal à superfície Lagrangiana nas duas direções. Assim, τ_w é calculado pela seguinte equação

$$\tau_w = \mu \frac{\sqrt{u_{Proj}^2 + v_{Proj}^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \quad (3.106)$$

sendo $(\Delta x^2, \Delta y^2)$ o quadrado das arestas da célula Euleriana onde o centro do volume Lagrangiano está contido.

Apesar do modelo de Smagorinsky ser de rápida implementação, o modelo possui pontos interessantes que comprovam sua eficácia. Dentre eles, pode-se citar:

- Rápida implementação computacional;
- Apesar de realizar ajuste em constantes, o modelo conserva sua essência com relação à modelação da turbulência;
- A transferência da energia cinética entre diferentes escalas pode ser modelado para diferente tipos de escoamentos turbulentos.

Em relação as desvantagens do modelo de Smagorinsky, pode-se citar algumas:

- A permanente necessidade de ajustar a constante (C_s) para diferentes programas;
- É inviável no processo de transferência de energia das menores para as maiores escalas;
- Deficiência no processo de cálculo da viscosidade junto às paredes, havendo a necessidade de realizar novas implementações computacionais com a utilização de funções de amortecimento, com o objetivo de contornar essa situação.

3.8.4 A modelação de Spalart-Allmaras para a turbulência

O modelo de turbulência de Spalart-Allmaras (S-A) surgiu na década de 90 após uma convergência coerente entre ideias sobre um modelo empírico que resolvesse a turbulência, ou seja, que com apenas uma única equação, a modelação ocorresse de forma direta, resolvendo a questão do principal parâmetro turbulento: a viscosidade turbulenta, sem envolver cálculos com a energia turbulenta e nem da dissipação ou vorticidade, onde em outros modelos existentes, esses parâmetros característicos são necessários para definir o comportamento da turbulência no escoamento. Com isso, o modelo S-A, embora apresente apenas uma equação, ele consegue transmitir esse comportamento da turbulência, sendo então classificado como um modelo fechado.

No modelo de uma equação de Spalart-Allmaras, uma equação de transporte para a viscosidade turbulenta é estabelecida, usando empirismo e argumentos de análise dimensional, invariância de Galileana³, e uma seletiva dependência na viscosidade molecular, de acordo com os trabalhos de Spalart et al. (1997). A equação inclui um termo de destruição não-viscosa que depende da distância até a parede. A recomendação para o uso do modelo de Spalart-Allmaras é que o ponto mais próximo da parede seja tal que se tenha $y^+ = 1$. Diferentemente de modelos algébricos, os primeiros modelos de uma equação é local, no sentido que a equação em um ponto não depende da solução em outros pontos. Sendo portanto, compatível com malhas de qualquer natureza. A solução próxima à parede é menos difícil de se obter.

As condições de parede e de escoamento não-perturbado são elementares. O modelo produz transição laminar-turbulenta relativamente suave, em pontos especificados pelo usuário. Um simples índice de turbulência é fornecido para determinar as regiões da camada-limite em que o modelo é ativado. O modelo foi calibrado em camadas-limites com gradiente de pressão. A viscosidade turbulenta ν_t é calculada a partir da variável auxiliar de trabalho de Spalart-Allmaras, $\tilde{\nu}$, e amortecida pela função f_{v_1} junto as paredes,

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v_1}, \quad (3.107)$$

sendo que

$$f_{v_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v_1}^3}, \quad (3.108)$$

com

$$\chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}. \quad (3.109)$$

Assim, a denominada variável auxiliar de trabalho do modelo de Spalart-Allmaras, $\tilde{\nu}$, obedece a seguinte equação de transporte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \tilde{\nu}) = c_{b_1} (1 - f_{t_2}) \tilde{S} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + c_{b_2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] \\ - \left[c_w f_w - \frac{c_{b_1}}{k^2} f_{t_2} \right] \left[\frac{\tilde{\nu}}{d_w} \right]^2 + f_{t_1} \Delta U^2, \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde os termos do lado direito da Eq. (3.110) representam, respectivamente: (i) a produção de viscosidade turbulenta, (ii) as difusões molecular e turbulenta de $\tilde{\nu}$, (iii) a dissipação de $\tilde{\nu}$, (iv) a

³Denomina-se invariância de Galileu o princípio de relatividade segundo o qual as leis fundamentais da Física são as mesmas em todos os sistemas de referências inerciais, isto é, a forma das equações físicas não podem depender do estado de movimento de um observador, uma vez que o movimento é relativo.

destruição de $\tilde{\nu}$ que reduz a viscosidade turbulenta junto à parede, e, finalmente, (v) os termos que modelam efeitos de transição para a turbulência, indicados pelo subscrito t .

Para as regiões distantes das paredes, a função f_{v1} não exerce nenhuma influência no cálculo da viscosidade turbulenta, sendo o seu valor unitário e, portanto, tornando $\nu_t = \tilde{\nu}$.

O termo de produção da equação de transporte, Eq. (3.110), também precisa de uma correção junto à parede, que é realizado substituindo-se o parâmetro S por uma variável modificada $\tilde{S}$, que também sofre influência da uma função de amortecimento f_{v2} , definida de forma semelhante a f_{v1} . Assim, $\tilde{S}$ e f_{v2} são apresentados a seguir pelas seguintes formulações

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{(k d_w)^2} f_{v2}, \quad (3.111)$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (3.112)$$

onde d_w , da Eq. (3.111), é a distância até a parede mais próxima, e S é o módulo da taxa de deformação calculada com as variáveis do campo filtrado, sendo calculado por

$$S = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}. \quad (3.113)$$

O termo de destruição originalmente formulado apresenta problemas, sendo que esse termo decresce muito lentamente em certas regiões da camada-limite. Então, para corrigir essa deficiência, foi definida uma função adimensional f_w , que ajusta o termo de destruição.

A função f_w é definida como valor unitário para a região da camada-limite logarítmica, intensificando o termo de destruição à medida que se aproxima da parede, tendendo à zero para as regiões mais distantes da parede, ficando assim definida como sendo

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right), \quad (3.114)$$

sendo

$$g = r + c_{w2} (r^6 - r), \quad (3.115)$$

e

$$r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k^2 d_w^2}. \quad (3.116)$$

Como já foi informado anteriormente, os termos indicados pelo sub-índice t estão relacionados ao início da transição do regime laminar para o turbulento ainda dentro da camada-limite. A influência destes termos permitem o controlo da transição em dois diferentes aspectos: a manutenção do escoamento laminar nas regiões desejadas ou dando início a região de transição.

O controlo é realizado com a adição de um termo fonte, sendo controlado pela função f_{t1} , e a aplicação de uma redução no termo de produção de viscosidade turbulenta controlada pela função f_{t2} , sendo ambas definidas pelas formulações a seguir

$$f_{t1} = c_{t1} g_t \exp \left(-c_{t2} \frac{\omega_t^2}{\Delta U^2} [d_w^2 + g_t^2 d_t^2] \right), \quad (3.117)$$

$$f_{t2} = c_{t3} \exp (-c_{t4} \chi^2), \quad (3.118)$$

onde d_t é a distância até o ponto de início da transição, ω_t é a vorticidade no ponto de transição da camada-limite e ΔU é a norma da diferença da velocidade entre o escoamento e o ponto de

transição. A função g_t da Eq. (3.117) é definida como $\min\{0, 1; \Delta U/(\omega \Delta x_t)\}$, onde Δx_t é o tamanho da malha ao longo da parede na região de transição.

Neste trabalho, os termos fontes f_{t_1} e f_{t_2} foram descartados, pois as simulações foram realizadas apenas para turbulência moderada. As demais constantes do modelo são: $\sigma = 2/3$, $c_{b_1} = 0,1355$, $c_{b_2} = 0,622$, $k = 0,41$, $c_{w_1} = c_{b_1}/k^2 + (1 + c_{b_2})/\sigma$, $c_{w_2} = 0,3$, $c_{w_3} = 2$ e $c_{v_1} = 7,1$, sendo que estas constantes foram determinadas empiricamente. No caso da equação de energia, Eq. (3.4), apesar de não ser considerada no modelo original, neste trabalho a mesma foi considerada e implementada para o modelo de Spalart-Allmaras com a formulação *URANS*, assim como para o modelo de Smagorinsky, onde na versão original proposta por Smagorinsky (1963), o autor não a leva em consideração.

Na Eq. (3.90), o valor de difusividade térmica turbulenta, α_t , é usualmente calculado a partir do conceito de Prandtl turbulento, que está presente nos modelos de Spalart-Allmaras e Smagorinsky, Pr_t , de acordo com o intervalo empírico, definido por

$$0,6 \leq Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \leq 0,9, \quad (3.119)$$

onde, no presente trabalho, o valor de 0,9 foi considerado em todas as simulações.

Capítulo 4

Método numérico

Sumário

4.1	Introdução	67
4.2	Método de solução de sistemas lineares	68
4.3	Discretização do domínio Euleriano	70
4.3.1	Acoplamento entre pressão e velocidade	70
4.3.2	Discretização temporal	71
4.3.2.1	Método de Runge-Kutta de segunda ordem	72
4.3.2.2	Método de Adams-Bashforth de segunda ordem	72
4.3.3	Critério de estabilidade e a condição de CFL	73
4.3.4	Cálculo da variação temporal	73
4.4	Discretização espacial das equações	74
4.4.1	Discretização das equações de Navier-Stokes	74
4.4.2	Discretização da equação para correção da pressão	76
4.4.3	Discretização do modelo de Smagorinsky	76
4.4.4	Interpolação das propriedades para malhas não-uniformes	77
4.4.5	Discretização do modelo de Spalart-Allmaras	78
4.4.6	Discretização da função indicadora	79
4.4.7	Discretização da equação da energia	80

4.1 Introdução

Através das leis de conservação de massa, quantidade de movimento e energia obtêm-se as equações diferenciais que funcionam como um "decodificador", tornando possível a interpretação e compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Em geral, soluções exatas destas equações diferenciais são somente conhecidas em situações restritivas, pois, em geral, as equações envolvem termos não-lineares. Ao utilizar um método analítico, a resolução das equações apresenta uma solução geralmente fechada. Em relação à utilização dos métodos numéricos, que têm por objetivo resolver uma ou mais equações diferenciais, estes substituem as derivadas existentes nas equações por, por exemplo, expressões algébricas que envolvem a discretização da função incógnita. Neste caso, deve ser escolhida uma região de estudo (domínio computacional) que será discretizado, ou seja, dividido em volumes de controlo, sendo que para cada volume

está associado um ponto nodal. Ao conjunto de pontos discretos (pontos nodais) dá-se o nome de malha, onde a solução será obtida para cada um dos pontos pertencentes à malha.

Então, fica claro que ao se optar em fazer uma aproximação numérica de uma determinada equação diferencial, obtém-se a solução para um número finito e discreto de pontos. Assim, o objetivo de um método de discretização é substituir as equações diferenciais por um conjunto de equações algébricas, o qual fornecerá o valor das quantidades de interesse em pontos discretos dentro do domínio no escoamento. Então, para o resultado, um conjunto de equações devem ser revolvidas a cada ponto do domínio em que se deseja encontrar a solução do problema, obtendo-se uma solução aproximada do problema em questão. É importante notar que, à medida que o número de pontos da malha aumenta, isso implica que a solução das equações discretizadas aproxima-se da solução exata da equação diferencial (Peyret (2013), Moukalled et al. (2016)).

Em termos de requisitos para uma boa aproximação numérica, é necessário que se tenha consistência, estabilidade e convergência. A consistência existe quando os erros de truncamento tendem para zero, à medida que o número de pontos da malha tende para infinito. A estabilidade existe quando não houver oscilações numéricas espúrias. A solução numérica obtida apresenta então a convergência numérica, sendo consequência da consistência e da estabilidade, considerando que os desvios com relação à solução exata sejam menores que um desvio máximo especificado. Como consequência final, os resultados numéricos serão satisfatórios, quando estes indicarem independência da malha.

Em relação ao código computacional desenvolvido neste trabalho, as sub-rotinas desenvolvidas e implementadas foram elaboradas para resolver cada etapa do código. O programa principal, onde as variáveis são declaradas, realiza a gestão das sub-rotinas. Graças a um arquivo de dados (do tipo .txt) é possível selecionar as condições iniciais e de contorno, assim como o tipo de interface (cilindro circular ou quadrado, cilindros em tandem com e sem angulação, que são as geometrias de interesse nesse trabalho). As variáveis Eulerianas foram implementadas na forma de matrizes e as variáveis Lagrangianas na forma de vetores. A estrutura do programa permite salvar arquivos de dados em qualquer instante (passo) de tempo e realizar a retomada o processo de cálculo caso, porventura, possa vir a ser interrompido por alguma circunstância, sem a necessidade de "começar do zero" novamente.

Nesta trabalho, as equações de conservação foram discretizadas pelo método de diferenças finitas. A solução para as equações não-lineares passa por um processo de acoplamento dos campos de pressão e velocidade. De entre os vários métodos numéricos existentes, optou-se pelo Método do Passo Fracionado (MPF), desenvolvido por Chorin (1968), e mais tarde aperfeiçoado por Kim and Moin (1985), para a discretização temporal.

4.2 Método de solução de sistemas lineares

Dentre os muitos métodos numéricos disponíveis, este trabalho optou por utilizar o *Modify Strongly Implicit Procedure - MSIP*, desenvolvido por Schneider and Zedan (1981). Este método de solução de equações algébricas apresenta uma elevada taxa de convergência e precisão nos cálculos da distribuição de temperatura em todos os pontos da malha. A sua forma matricial geral é do tipo

$$[a] \{T\} = [b] , \quad (4.1)$$

onde $[a]$ é a matriz dos coeficientes, $\{T\}$ é o campo de temperatura no domínio e $[b]$ é o termo fonte.

Nesse método, uma solução iterativa engloba a solução direta e simultânea do conjunto de equações formadas pela modificação da matriz global. A equação da matriz modificada tem a seguinte forma

$$[A + B] \{T\} = \{b'\} , \quad (4.2)$$

sendo,

$$\{b'\} = \{b\} + [B] \{T\} . \quad (4.3)$$

No método MSIP, uma decomposição LU deve ser realizada, de modo que

$$[L] [U] = [A'] , \quad (4.4)$$

sendo L e U as matrizes triangular inferior e superior, respectivamente, com a matriz U possuindo a diagonal principal igual à unidade. A matriz A' pode ser escrita como

$$[A'] = [A + B] . \quad (4.5)$$

As equações para a determinação dos coeficientes das matrizes L e U são encontradas em Schneider and Zedan (1981). A seguir, apresenta-se, respectivamente, as matrizes L e U para o método MSIP:

$$[L] = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ pa_{i,j} & pb_{i,j} & pc_{i,j} & pd_{i,j} & pe_{i,j} & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & pp_{i,j} & pr_{i,j} & ps_{i,j} & pu_{i,j} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A equação iterativa é dada por

$$[A + B] \{T\}^{p+1} = [A + B] \{T\}^p - ([A] \{T\}^p - b) . \quad (4.8)$$

Considera-se, agora, o vector diferença e o vector resíduo seguintes:

$$\{\delta\}^{n+1} = \{T\}^{n+1} - \{T\}^n \quad (4.9)$$

$$\{R\}^n = \{b\} - [A] \{T\}^n \quad (4.10)$$

A Eq. (4.8) torna-se

$$[A + B] \{\delta\}^{n+1} = \{R\}^n . \quad (4.11)$$

Substituindo a soma $[A + B]$ pela sua respectiva decomposição LU , tem-se

$$[L][U]\{\delta\}^{n+1} = \{R\}^n. \quad (4.12)$$

Definindo o vector auxiliar V_{int} por

$$\{V_{\text{int}}\}^{n+1} \equiv [U]\{\delta\}^{n+1}, \quad (4.13)$$

onde a solução do sistema (4.1) escreve-se nas seguintes duas etapas:

$$[L]\{V_{\text{int}}\}^{n+1} = \{R\}^n, \quad (4.14)$$

$$[U]\{\delta\}^{n+1} = \{V_{\text{int}}\}^{n+1}. \quad (4.15)$$

No processo representado pelas Eqs. (4.14) e (4.15), os coeficientes matriciais permanecem inalterados e, portanto, cada iteração requer o simples cálculo do novo vector residual, graças as substituições triangulares para frente e para trás.

Na seção seguinte, apresenta-se o Método do Passo Fracionado e da discretização do domínio Euleriano para o acoplamento da pressão e da velocidade.

4.3 Discretização do domínio Euleriano

4.3.1 Acoplamento entre pressão e velocidade

A solução numérica das Eqs. (3.22)–(3.24) foi realizada de maneira segregada, sendo necessário o tratamento do acoplamento entre a pressão e a velocidade. Para isto, foi utilizado o método dos passos fracionados (Kim and Moin (1985)).

O MPF é utilizado de maneira não iterativa, sendo inicialmente resolvidas as equações de quantidade de movimento, utilizando os campos de velocidade do tempo precedente, o que conduz a uma estimativa para o campo de velocidades, que, em geral, não satisfaz a equação da continuidade. A diferença dessa estimativa é utilizada como termo fonte para a solução de uma equação de Poisson destinada a correção de pressão, sendo utilizada para atualizar o campo de velocidades, finalmente garantindo a conservação da massa para a velocidade corrigida. A importância da equação de Poisson para a correção da pressão se dá pelo facto que a mesma realiza a ligação entre as equações do movimento e da continuidade.

A seguir, é apresentada a equação de Navier-Stokes da quantidade de movimento da forma adimensional para um fluido Newtoniano, considerando para dedução da formulação a convecção forçada, sendo que para a convecção natural o processo é análogo. Assim, a Eq. (3.23) pode ser reescrita na seguinte maneira

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^n u_j^n) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right] + f_i^n. \quad (4.16)$$

No MPF utiliza-se os campos de velocidades, pressão e o termo forçante do instante preditor (n) para calcular, no passo preditor, uma estimativa para a velocidade no tempo atual $\bar{u}_i^{n+1}$, representada pela equação:

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i^n u_j^n) \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \right] + f_i^n. \quad (4.17)$$

A etapa seguinte no MPF é subtrair a Eq. (4.17) da Eq. (4.16), resultando em

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (p^{n+1} - p^n) . \quad (4.18)$$

Aplicando o operador divergente em ambos os membros da Eq. (4.18), resulta

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'^{n+1}}{\partial x_i} \right) , \quad (4.19)$$

onde p'^{n+1} é a flutuação ou correção de pressão no instante atual

$$p'^{n+1} = p^{n+1} - p^n . \quad (4.20)$$

Sabe-se que o campo final de velocidade deve satisfazer a equação da continuidade. Assim, o segundo termo do membro esquerdo da Eq. (4.19) será nulo, o que conduz a equação

$$\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \bar{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} . \quad (4.21)$$

A Eq. (4.21) é uma equação de Poisson para a correção da pressão (p'). Note que o termo fonte está em função da velocidade estimada, a qual é conhecida do passo preditor, Eq. (4.17). Pode-se então resolver a Eq. (4.21), obtendo a correção da pressão. Finalmente, com o campo da pressão calculado, retorna-se à Eq. (4.18), obtendo-se, então, a equação corrigida para a velocidade na iteração atual (passo corretor), sendo representada por

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'^{n+1}}{\partial x_i} . \quad (4.22)$$

Uma vantagem de se utilizar o método MPF, que decorre da própria dedução, é a garantia de baixos resíduos da continuidade. Isto permite um avanço temporal mais rápido, ou seja, uma passagem rápida e direta para o próximo instante de tempo. No quesito referente aos avanços temporais explícitos, houve o cuidado na atribuição de valores dos incrementos de tempo. Nesse contexto, os cálculos foram suavemente elevados até valores na ordem 10^{-4} . Mais detalhes podem ser vistos em Santos (2014) e Santos et al. (2018).

Algoritmo - Método do passo fracionado

1. Estimar o campo de velocidades, Eq. (4.16).
2. Com o campo de velocidades estimado, resolver o sistema linear para a correção da pressão, Eq. (4.21).
3. Corrigir o campo de velocidades, Eq. (4.22), e o campo de pressão, Eq. (4.20).
4. Verificar a conservação da massa dentro da tolerância especificada.
5. Avançar para o próximo passo de tempo.

4.3.2 Discretização temporal

A seguir, são apresentadas as técnicas de discretização utilizadas no presente trabalho.

4.3.2.1 Método de Runge-Kutta de segunda ordem

Nas simulações bidimensionais em torno de um único corpo isotérmico imerso, apresentando ou não movimentação de fronteira, é utilizado o método de Runge-Kutta de segunda ordem, para discretização temporal das equações de Navier-Stokes. O método consiste de um passo preditor que avalia o campo em um instante de tempo intermediário, estimando assim cada componente para o passo seguinte, denominado de corretor, sendo então realizado o avanço temporal para o instante atual. A seguir, são apresentadas, respectivamente, as equações discretizadas para as componentes x e y da velocidade.

- Passo preditor:

$$\tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \left[-A_{x i,j}^n + D_{x i,j}^n - \frac{1}{\rho} P_{x i,j}^n + f_{x i,j}^n \right], \quad (4.23)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^{n+1/2} = v_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \left[-A_{y i,j}^n + D_{y i,j}^n - \frac{1}{\rho} P_{y u,j}^n + f_{y i,j}^n \right]. \quad (4.24)$$

- Passo corretor:

$$\tilde{u}_{i,j}^{n+1/2} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[-A_{x i,j}^{n+1/2} + D_{x i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} P_{x i,j}^{n+1/2} + f_{x i,j}^{n+1/2} \right], \quad (4.25)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^{n+1/2} = v_{i,j}^n + \Delta t \left[-A_{y i,j}^{n+1/2} + D_{y i,j}^{n+1/2} - \frac{1}{\rho} P_{y u,j}^{n+1/2} + f_{y i,j}^{n+1/2} \right]. \quad (4.26)$$

onde, A representa o termo advectivo, D o termo difusivo, P o gradiente de correção de pressão e f o termo fonte de força.

4.3.2.2 Método de Adams-Bashforth de segunda ordem

Este método é utilizado nas simulações para os casos de um corpo rombudo isotérmico (cilindro quadrado) e dois cilindros em *tandem* (em fila, com ou sem movimentação de fronteira), para o avanço temporal das equações de movimento. A obtenção dos campos de velocidade, no instante de tempo atual, é realizado através da informação de instantes precedentes. Para a primeira iteração, utiliza-se o método de Euler de primeira ordem. A discretização das componentes x e y da velocidade são realizadas pelas Eqs. (4.27) e (4.28), representadas a seguir

$$\tilde{u}_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \Delta t \left[1,5 \left(-A_{x i,j}^n + D_{x i,j}^n \right) - 0,5 \left(-A_{x i,j}^{n-1} + D_{x i,j}^{n-1} \right) \right] - \Delta t \left(\frac{1}{\rho} P_{x i,j}^n + f_{x i,j}^n \right), \quad (4.27)$$

$$\tilde{v}_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^n + \Delta t \left[1,5 \left(-A_{y i,j}^n + D_{y i,j}^n \right) - 0,5 \left(-A_{y i,j}^{n-1} + D_{y i,j}^{n-1} \right) \right] - \Delta t \left(\frac{1}{\rho} P_{y i,j}^n + f_{y i,j}^n \right). \quad (4.28)$$

4.3.3 Critério de estabilidade e a condição de CFL

É razoável fazer uma primeira suposição de que no instante de tempo t^n os fluxos médio nas faces de um volume de controlo sejam funções apenas das propriedades médias das células adjacentes. Com isto, espera-se que a propagações dos dados na malha ocorram a velocidades finitas, além do facto, de que o intervalo de tempo entre t^n e t^{n+1} , Δt , deve ser controlado para que os fluxos nas faces de um volume de controlo não sofram perturbações provenientes de células não adjacentes.

Para as equações de Navier-Stokes, considerando a velocidade máxima de propagação na célula como $\max(|u| + c)_{[x_{j-0.5}, x_{j+0.5}]}$ (c é a norma da magnitude de velocidade local), o passo de tempo Δt deve ser tal que

$$\max(|u| + c)_{[x_{j-0.5}, x_{j+0.5}]} \Delta t \leq \Delta x_j, \quad (4.29)$$

isto é,

$$\frac{\max(|u| + c)_{[x_{j-0.5}, x_{j+0.5}]} \Delta t}{\Delta x_j} \leq 1. \quad (4.30)$$

A desigualdade (4.30) é a denominada condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), ou simplesmente condição de Courant, sendo necessário neste trabalho para que haja estabilidade e convergência das soluções numéricas.

4.3.4 Cálculo da variação temporal

O cálculo da variação temporal é realizado explicitamente utilizando o método de Euler de primeira ordem, conforme a equação

$$\mathbf{T}_{i,j}(t + \Delta t) = \mathbf{T}_{i,j}(t) + \frac{\partial \mathbf{T}_{i,j}}{\partial t}(t) \Delta t, \quad (4.31)$$

onde $\mathbf{T}$ é vector das taxas de variação das variáveis em todo o domínio, dadas por $\partial \mathbf{T}_{i,j} / \partial t(t)$. Determinando-se o valor de $\mathbf{T}_{i,j}(t + \Delta t)$, é imediato a determinação dos valores de $u_{i,j}(t + \Delta t)$ e $v_{i,j}(t + \Delta t)$. O cálculo do intervalo de tempo é limitado pelo número de Courant máximo ($CFL_{\max}$) já comentado na seção anterior, assim a seguinte condição deve ser válida para todo o domínio

$$\left(\frac{|u| + c}{\Delta x} + \frac{|v| + c}{\Delta y} \right) \Delta t \leq CFL_{\max}. \quad (4.32)$$

Uma vez que neste trabalho, o cálculo temporal é realizado com um método de primeira ordem, isso não significa que a utilização de ordens mais elevadas sejam desconsideradas, pelo contrário. Caso isto fosse considerado, por hipótese, o processo de cálculo para a segunda ordem poderia ser feito com a utilização da Eq. (4.33) a seguir

$$\mathbf{T}_{i,j}(t + \Delta t) = \mathbf{T}_{i,j}(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{T}_{i,j}}{\partial t}(t) + \frac{\partial \mathbf{T}_{i,j}}{\partial t}(t + \Delta t) \right) \Delta t, \quad (4.33)$$

sendo que, $\frac{\partial \mathbf{T}_{i,j}}{\partial t}(t + \Delta t)$ é determinado através da discretização de $\mathbf{T}_{i,j}(t + \Delta t)$, que é determinado utilizando a Eq. (4.31).

4.4 Discretização espacial das equações

4.4.1 Discretização das equações de Navier-Stokes

A discretização das equações de Navier-Stokes e da energia utilizaram diferenças finitas centradas de segunda ordem para a discretização espacial e o método de Euler de primeira ordem explícito para a discretização temporal. As velocidades estão localizadas nas faces do volume de controlo. Na Fig. (4.1) é ilustrado um volume de controlo do ponto Euleriano (i, j) . Este esquema foi adotado para proporcionar mais estabilidade no acoplamento pressão-velocidade. Portanto, considerando uma célula com coordenada (i, j) , tem-se a distribuição:

- Pressão $(p_{i,j})$ e temperatura $(\theta_{i,j})$ no centro da célula Euleriana;
- Componentes x da velocidade e da força Euleriana na face lateral do lado esquerdo, que dista $\Delta x/2$ do centro da célula;
- Componente y da velocidade e da Força Euleriana na face inferior, que dista $\Delta y/2$ do centro da célula.

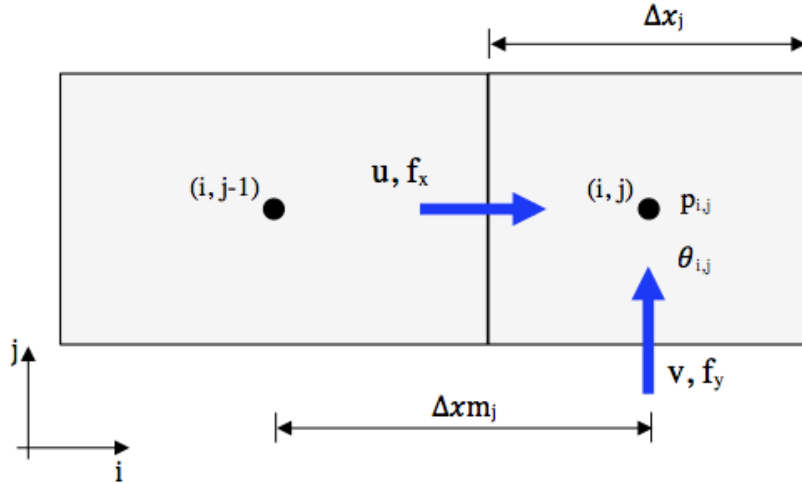


Figura 4.1: Esquema ilustrativo de uma malha deslocada.

Em seguida, é apresentado a discretização espacial dos termos das equações de Navier-Stokes, utilizando um esquema de segunda ordem, denominado de método de diferenças finitas centradas, sendo escritas para uma malha uniforme por uma questão de simplificação de cálculos, apesar de todas as simulações terem sido realizadas com uma malha não-uniforme. Foi utilizado um arranjo deslocado para a malha Euleriana, velocidades e forças nas faces da célula e demais propriedades no centro, como ilustrado na Fig. (4.2). O esquema ilustrativo para a malha não-uniforme, Fig. (4.2), é semelhante ao da malha uniforme, com exceção do comprimento de cada célula.

- Gradiente da correção de pressão:

$$\frac{\partial p'}{\partial x} \approx \frac{p'_{i,j} - p'_{i,j-1}}{\Delta x_{m_j}}. \quad (4.34)$$

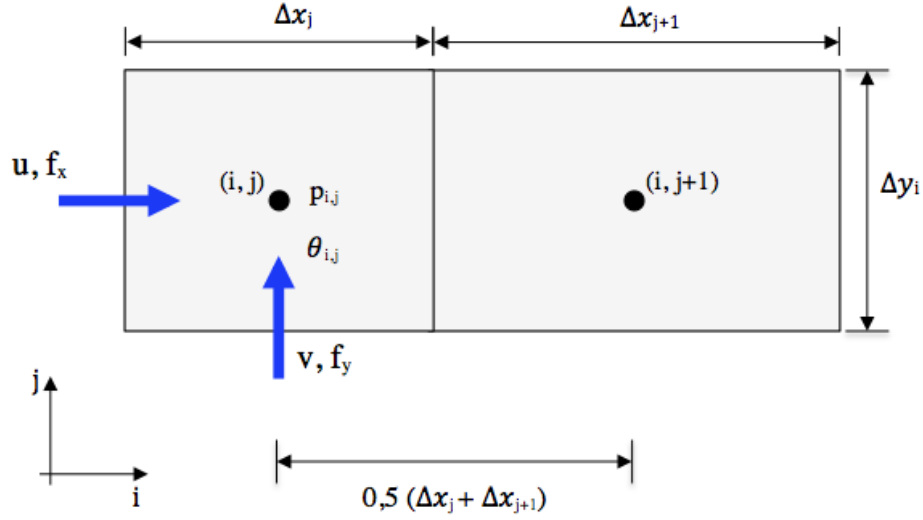


Figura 4.2: Esquema ilustrativo de duas células cartesianas não-uniforme.

- Termo advectivo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \approx \frac{1}{\Delta x_j} [(\bar{u}_P \bar{u}_P) - (\bar{u}_W \bar{u}_W)] + \frac{1}{\Delta y_i} [(\bar{u}_{nw} \bar{v}_{nw}) - (\bar{u}_{sw} \bar{v}_{sw})] . \quad (4.35)$$

As velocidades denotadas pelo operador média $(-)$, ver (3.64), devem ser interpoladas, sendo funções das velocidades nas faces da malha (sendo utilizado o esquema de deslocamento de malha) dadas por

$$\begin{aligned} \bar{u}_P &= f(u_{i,j+1}, u_{i,j}) , & \bar{u}_W &= f(u_{i,j}, u_{i,j-1}) , & \bar{u}_{nw} &= f(u_{i,j}, u_{i+1,j}) , \\ \bar{u}_{sw} &= f(u_{i,j}, u_{i-1,j}) , & \bar{v}_{nw} &= f(v_{i+1,j}, v_{i+1,j-1}) , & \bar{v}_{sw} &= f(v_{i,j}, v_{i,j-1}) . \end{aligned} \quad (4.36)$$

- Termo difusivo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] &\approx \frac{1}{\Delta x_j} \left(2\nu_{ef,i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta x_j} - 2\nu_{ef,i,j-1} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta x_j} \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta y_i} \left[\bar{\nu}_{ef,N} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta y_{m_{i+1}}} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta x_{m_j}} \right) - \bar{\nu}_{ef,S} \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta y_{m_i}} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta x_{m_j}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

A viscosidade efetiva, que deve ser interpolada nas faces, é função da viscosidade nas células vizinhas, ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{ef,N} &= f(\nu_{ef,i,j}, \nu_{ef,i,j-1}, \nu_{ef,i+1,j}, \nu_{ef,i+1,j-1}) , \\ \bar{\nu}_{ef,S} &= f(\nu_{ef,i,j}, \nu_{ef,i,j-1}, \nu_{ef,i-1,j}, \nu_{ef,i-1,j-1}) . \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.4.2 Discretização da equação para correção da pressão

A Eq. (4.21) para a correção da pressão num problema bidimensional é escrita da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right]^{n+1}, \quad (4.39)$$

que, na sua forma discretizada utilizando o esquema de diferenças finitas centradas, pode escrever-se como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{p'_{i,j+1} - p'_{i,j}}{\Delta x} - \frac{p'_{i,j} - p'_{i,j-1}}{\Delta x} \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{p'_{i+1,j} - p'_{i,j}}{\Delta y} - \frac{p'_{i,j} - p'_{i-1,j}}{\Delta y} \right] = \\ \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\bar{u}_{i,j+1} + \bar{u}_{i,j}}{2} - \frac{\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1}}{2} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{\bar{v}_{i+1,j} + \bar{v}_{i,j}}{2} - \frac{\bar{v}_{i,j} + \bar{v}_{i-1,j}}{2} \right) \right]^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A Eq. (4.40) apresenta os termos para a correção da pressão no mesmo instante de tempo $n + 1$. Desse modo, todas as equações estão acopladas, gerando um sistema linear de equações, que pode ser representado pela seguinte expressão

$$a_p p'_p + a_e p'_e + a_w p'_w + a_n p'_n + a_s p'_s = b_p, \quad (4.41)$$

onde $p'_p = p'_{i,j}$, $p'_e = p'_{i+1,j}$, $p'_w = p'_{i-1,j}$, $p'_n = p'_{i,j+1}$ e $p'_s = p'_{i,j-1}$. Os coeficientes a_p , a_e , a_w , a_n e a_s são constantes para toda a malha uniforme. Para a malha não-uniforme são variáveis ao longo do domínio, pois dependem das dimensões de cada célula. Os sub-índices p , e , w , n e s estão ilustrado na Fig. (4.3) e são dados, respectivamente, por

$$a_p = - \left[\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right], \quad (4.42)$$

$$a_e = a_w = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad (4.43)$$

$$a_n = a_s = \frac{1}{\Delta y^2}, \quad (4.44)$$

$$b_p = \frac{\rho}{\Delta t} \left[\frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\bar{v}_{i,j+1} - \bar{v}_{i,j}}{\Delta y} \right]^{n+1}. \quad (4.45)$$

Para a resolução do sistema linear (4.41) é utilizado o *MSIP*, proposto por Schneider and Zedan (1981).

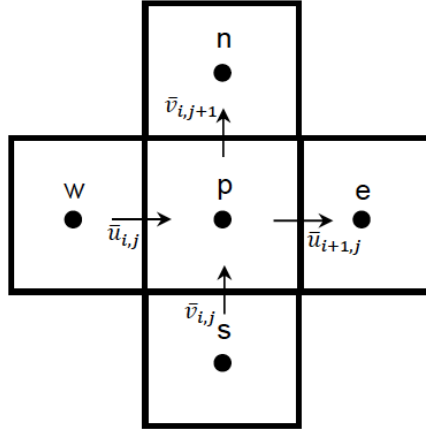
4.4.3 Discretização do modelo de Smagorinsky

A discretização espacial da equação algébrica para a viscosidade turbulenta do modelo sub-malha de Smagorinsky, Eq. (3.102), é

$$S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad (4.46)$$

onde,

$$S = \sqrt{2 \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}_{S_{11}} + \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}_{S_{12}} + 2 \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2}_{S_{22}}}, \quad (4.47)$$

Figura 4.3: Ilustração da localização dos pontos p , e , w , n e s .

com

$$S_{11} = \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta x} \right), \quad S_{12} = \left(\frac{u_{mn} - u_{ms}}{\Delta y} + \frac{v_{me} - v_{mw}}{\Delta x} \right), \quad S_{22} = \left(\frac{v_{i+1} - v_{i,j}}{\Delta y} \right),$$

onde

$$u_{mn} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i,j} + u_{i,j+1}), \quad (4.48)$$

$$u_{ms} = \frac{1}{4} (u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}), \quad (4.49)$$

$$v_{me} = \frac{1}{4} (v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} + v_{i,j} + v_{i,j+1}), \quad (4.50)$$

$$v_{mw} = \frac{1}{4} (v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} + v_{i,j}). \quad (4.51)$$

As Eqs. (4.48) a (4.51) são referentes às simulações numéricas para malha uniforme. Com relação a malha não-uniforme, a próxima seção apresenta de maneira compacta o processo de interpolação.

4.4.4 Interpolação das propriedades para malhas não-uniformes

Com o uso de malhas não-uniformes as propriedades sobre as faces devem ser interpoladas de maneira pertinente. Foi utilizado como esquema de interpolação, a proposta de Patankar (1980). Para a interpolação das velocidades e da densidade sobre as faces, utiliza-se uma aproximação linear entre os pontos da seguinte forma

$$\phi_e = f_e \phi_P + (1 - f_e) \phi_E, \quad (4.52)$$

onde o factor de interpolação f_e é a razão entre as distâncias mostradas na Fig. (4.4) a seguir dada por

$$f_e = \frac{(\delta x)_e^+}{(\delta x)_e}. \quad (4.53)$$

Para a viscosidade, utiliza-se:

$$\phi_e = \left(\frac{1 - f_e}{\phi_P} + \frac{f_e}{\phi_E} \right)^{-1}. \quad (4.54)$$

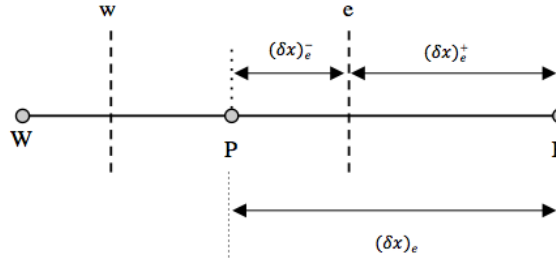


Figura 4.4: Malha não-uniforme e distâncias associadas a face e.

4.4.5 Discretização do modelo de Spalart-Allmaras

A discretização espacial da equação de transporte para a viscosidade turbulenta do modelo de Spalart-Allmaras, Eq. (3.110), é apresenta abaixo. Foi utilizado o mesmo método de discretização espacial utilizado na discretização da equação de Navier-Stokes.

- Termo advectivo:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\nu} u_j) \approx \frac{1}{\Delta x_j} (u_{i,j+1} \bar{\nu}_e - u_{i,j} \bar{\nu}_w) + \frac{1}{\Delta y_i} (v_{i+1,j} \bar{\nu}_n - v_{i,j} \bar{\nu}_s). \quad (4.55)$$

A variável auxiliar ($\tilde{\nu}$) está localizada no centro da malha. Assim, para calcular os valores sobre as faces deve-se interpolar com valores dos pontos vizinhos, representados por

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_e &= f(\tilde{\nu}_{i,j+1}, \tilde{\nu}_{i,j}), & \bar{\nu}_w &= f(\tilde{\nu}_{i,j}, \tilde{\nu}_{i,j-1}), \\ \bar{\nu}_n &= f(\tilde{\nu}_{i+1,j}, \tilde{\nu}_{i,j}), & \bar{\nu}_s &= f(\tilde{\nu}_{i,j}, \tilde{\nu}_{i-1,j}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

- Termo de produção:

O termo de produção de viscosidade turbulenta do modelo de Spalart-Allmaras é proporcional à norma do tensor das taxas de deformação:

$$S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad (4.57)$$

A discretização é apresentada a seguir

$$S_{ij}S_{ij} = S_{11}^2 + 2S_{12}^2 + S_{22}^2, \quad (4.58)$$

$$S_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta x_j}, \quad (4.59)$$

$$S_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \approx \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta y_i}, \quad (4.60)$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\bar{u}_N - \bar{u}_S}{\Delta y_i} \right) + \left(\frac{\bar{v}_E - \bar{v}_W}{\Delta x_j} \right) \right], \quad (4.61)$$

onde as velocidades interpoladas são funções das seguintes variáveis

$$\begin{aligned}\overline{u_N} &= f(u_{i,j}, u_{i,j+1}, u_{i+1,j}, u_{i+1,j+1}), & \overline{u_S} &= f(u_{i,j}, u_{i,j+1}, u_{i-1,j}, u_{i-1,j+1}), \\ \overline{v_E} &= f(v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j+1}), & \overline{v_W} &= f(v_{i,j}, v_{i+1,j}, v_{i,j-1}, v_{i+1,j-1}).\end{aligned}\quad (4.62)$$

- Termo difusivo (conservativo):

O termo difusivo conservativo para um escoamento bidimensional e incompressível pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial^2 \tilde{\nu}}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right] &\approx (\nu_{i,j} + \tilde{\nu}_{i,j}) \left[\frac{\tilde{\nu}_{i,j+1} - 2\tilde{\nu}_{i,j} + \tilde{\nu}_{i,j-1}}{\Delta x m_j^2} + \frac{\tilde{\nu}_{i+1,j} - 2\tilde{\nu}_{i,j} + \tilde{\nu}_{i-1,j}}{\Delta y m_i^2} \right] \\ &+ \left(\frac{\tilde{\nu}_{i,j+1} - \tilde{\nu}_{i,j-1}}{\Delta x m_j + \Delta x m_{j+1}} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}_{i,j+1} - \tilde{\nu}_{i,j-1}}{\Delta x m_j + \Delta x m_{j+1}} \right) + \left(\frac{\tilde{\nu}_{i+1,j} - \tilde{\nu}_{i-1,j}}{\Delta y m_i + \Delta y m_{i+1}} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}_{i+1,j} - \tilde{\nu}_{i-1,j}}{\Delta y m_i + \Delta y m_{i+1}} \right).\end{aligned}\quad (4.63)$$

- Termo difusivo (não-conservativo):

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \approx \left(\frac{\tilde{\nu}_{i,j+1} - \tilde{\nu}_{i,j-1}}{\Delta x m_j} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}_{i,j+1} - \tilde{\nu}_{i,j-1}}{\Delta x m_j} \right) + \left(\frac{\tilde{\nu}_{i+1,j} - \tilde{\nu}_{i-1,j}}{\Delta y m_i} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}_{i+1,j} - \tilde{\nu}_{i-1,j}}{\Delta y m_i} \right). \quad (4.64)$$

4.4.6 Discretização da função indicadora

Assim como para a pressão, a função indicadora e as variáveis G_x e G_y estão localizadas no centro da malha euleriana. A Eq. (3.28), para o caso bidimensional, pode ser reescrita por

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}. \quad (4.65)$$

Para a discretização da função indicadora também foi utilizado o esquema de diferenças centradas, sendo os termos da Eq. (4.65), discretizados dados por:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \approx \frac{I_{i+1,j} - 2I_{i,j} + I_{i-1,j}}{\Delta x m_j^2} = \frac{I_e - 2I_p + I_w}{\Delta x m_j^2}, \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \approx \frac{I_{i,j+1} - 2I_{i,j} + I_{i,j-1}}{\Delta y m_i^2} = \frac{I_n - 2I_p + I_s}{\Delta y m_i^2}, \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} \approx \frac{(G_{x_{i,j+1}} + G_{x_{i,j}}) - (G_{x_{i,j-1}} + G_{x_{i,j}})}{2\Delta x_j}, \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial y} \approx \frac{(G_{y_{i,j}} + G_{y_{i+1,j}}) - (G_{y_{i-1,j}} + G_{y_{i,j}})}{2\Delta y_j}. \quad (4.69)$$

Quando somadas as Eqs. (4.66) e (4.67), representam o termo fonte da Eq. (4.65) que pode ser representada por g_p . Agora, substituindo as Eqs. (4.66) e (4.67) na Eq. (4.65), obtém-se

$$\frac{I_e - 2I_p + I_w}{\Delta x m_j^2} + \frac{I_n - 2I_p + I_s}{\Delta y m_i^2} = g_p. \quad (4.70)$$

Ou ainda, substituindo as Eqs. (4.66)–(4.69) na Eq. (4.65), obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{I_{i,j+1} - 2I_{i,j} + I_{i,j-1}}{\Delta x m_j^2} + \frac{I_{i+1,j} - 2I_{i,j} + I_{i-1,j}}{\Delta y m_i^2} = \\ & \frac{(Gx_{i,j+1} + Gx_{i,j}) - (Gx_{i,j-1} + Gx_{i,j})}{2\Delta x_j} + \frac{(Gy_{i,j} - Gy_{i+1,j}) - (Gy_{i-1,j} + Gy_{i,j})}{2\Delta y_i}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

A discretização ainda pode ser feita da seguinte forma

$$d_p I_p + d_e I_e + d_w I_w + d_n I_n + d_s I_s = g_p, \quad (4.72)$$

cujos coeficientes são análogos ao da pressão e são dados por

$$d_e = d_w = \frac{1}{\Delta x m_j^2}, \quad (4.73)$$

$$d_n = d_s = \frac{1}{\Delta y m_i^2}, \quad (4.74)$$

$$d_p = d_e + d_w + d_n + d_s. \quad (4.75)$$

Para a solução do sistema linear representado pela Eq. (4.71), ou (4.72), também é utilizado o solver *MSIP*.

4.4.7 Discretização da equação da energia

A equação da energia, Eq. (3.25), pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial u \theta}{\partial x} + \frac{\partial v \theta}{\partial y} = \frac{1}{RePr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) + q. \quad (4.76)$$

Realizando a discretização da Eq. (4.76), obtém-se

- Termo temporal da equação da energia:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx \frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^n}{\Delta t}. \quad (4.77)$$

- Termo convectivo em x da equação da energia:

$$\frac{\partial u \theta}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[u_{i+1,j} \frac{\theta_{i+1,j} + \theta_{i,j}}{2} - u_{i,j} \frac{\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{2} \right]. \quad (4.78)$$

- Termo convectivo em y da equação da energia:

$$\frac{\partial v \theta}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y} \left[v_{i+1,j} \frac{\theta_{i+1,j} + \theta_{i,j}}{2} - v_{i,j} \frac{\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{2} \right]. \quad (4.79)$$

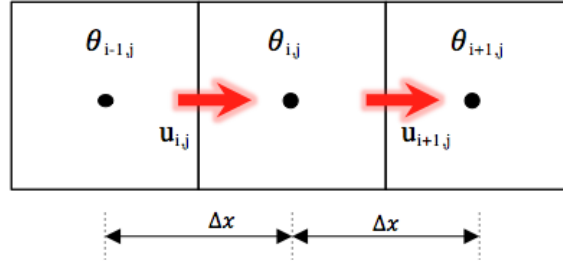


Figura 4.5: Ilustração para a discretização do termo convectivo da equação da energia em x .

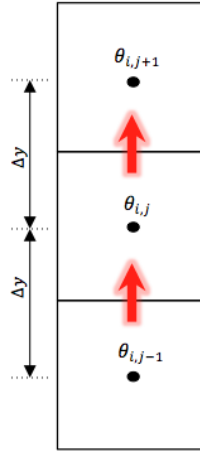


Figura 4.6: Ilustração para a discretização do termo convectivo da equação da energia em y .

- Termo difusivo em x da equação da energia:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}}{\Delta x} - \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{\Delta x} \right]. \quad (4.80)$$

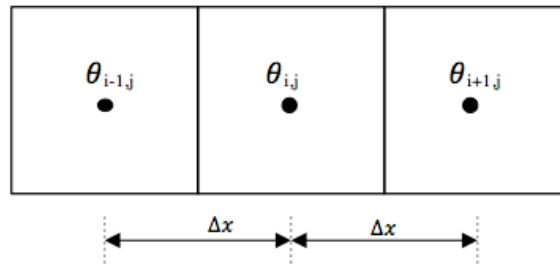


Figura 4.7: Ilustração para a discretização do termo difusivo da equação da energia em x .

- Termo difusivo em y da equação da energia:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta y} - \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i,j-1}}{\Delta y} \right]. \quad (4.81)$$

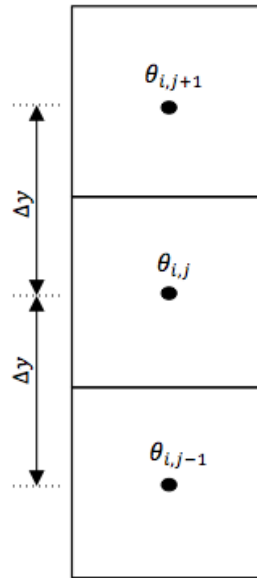


Figura 4.8: Ilustração para a discretização do termo difusivo da equação da energia em y .

- Termo fonte q da equação da energia:

O termo fonte q é localizado no centro da célula, sendo discretizado por

$$q \approx q_{i,j}. \quad (4.82)$$

Capítulo 5

Resultados e análise das simulações

Sumário

5.1	Introdução	83
5.2	Simulação e análise para um corpo rombudo isotérmico	84
5.2.1	Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 1$ a $Re = 40$ para diferentes números de Richardson	86
5.2.2	Validação do coeficientes médios de arrasto (C_d) e do Nusselt (Nu) . . .	98
5.2.3	Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 10^2$ para diferentes números de Richardson	99
5.3	Simulação para $Re = 500$ e $Re = 5000$ com convecção forçada	102
5.3.1	Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 500$ com $Ri = 0$	102
5.3.2	Visualização bidimensional dos campos de escoamento com turbulência para $Re = 5000$ com $Ri = 0$ - Modelos de Spalart-Allmaras e Smagorinsky	104
5.3.2.1	Frequência de desprendimento de vórtices para o cilindro quadrado isotérmico	107
5.4	Simulação em torno de cilindros isotérmicos em tandem	108
5.4.1	Cilindros circulares isotérmicos em tandem	110
5.4.1.1	Descrição do problema e condições de contorno	111
5.4.1.2	Campos do escoamento para $Re = 500$ e $Ri = 0$	116
5.4.1.3	Campos do escoamento para $Re = 500$ com diferentes valores de Ri	118
5.4.1.4	Variações do número local de Nusselt	122

5.1 Introdução

Este capítulo é dedicado às simulações e análises de três casos diferentes, envolvendo a modelação da turbulência associada a transferência de calor por convecção mista. Como metodologia, usa-se o Método de Fronteira Imersa, utilizando para isto as Equações Médias de Reynolds Transiente (em inglês, *Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation - URANS*) em conjunto com as Simulações de Grandes Escalas (em inglês, *Large Eddy Simulation - LES*).

Para o cálculo da viscosidade turbulenta, foi utilizado o modelo de sub-malha de Smagorinsky, implementado no contexto da metodologia *LES*, e o modelo de turbulência de

Spalart-Allmaras (S-A) no contexto *URANS*, sendo ambas adotadas para ao caso bidimensional. Para a validação da metodologia, foram realizadas simulações de escoamentos sobre os corpos rombudos e circulares isolados, e em *tandem* (em linha), estes últimos sem movimentação de fronteira (o caso envolvendo movimentação de fronteira está atualmente em estudo). O estudo dos principais parâmetros relacionados com a dinâmica do escoamento foi realizado, demonstrando assim, a confiabilidade, relevância e potencialidade da metodologia deste trabalho para problemas envolvendo a termo-fluido dinâmica em torno de corpos imersos em fluidos incompressíveis Newtonianos.

As simulações bidimensionais que se apresentarão em seguida estão, em parte, publicadas (Santos et al. (2018)). Para todas as simulações numéricas, um código computacional utilizando as linguagens C++ e *Matlab*[®] foram desenvolvidas e implementadas no contexto do Método de Fronteira Imersa, sendo denominado por IBM/Thermo-Turb, para o escoamento incompressível, bidimensional em torno de corpos aquecidos com temperatura constante em sua superfície (corpos isotérmicos) para fluidos Newtonianos, apresentando resultados para a simulação de escoamentos para baixos e moderados números de Reynolds, isto é, para um conjunto de simulações bidimensionais que variam no intervalo $1 \leq Re \leq 5000$, considerando o processo de transferência de calor por convecção mista (natural e forçada).

Os resultados numéricos obtidos foram comparados e validados com outros resultados numéricos e experimentais de diferentes autores disponíveis na literatura. As análises relacionadas com os escoamentos em torno de um cilindro quadrado de secção transversal, aquecido ou resfriado com seu eixo longitudinal alinhado com a direção do escoamento que se aproxima, têm atraído vários investigadores de diversas áreas científicas. Tais estudos foram motivados tanto pela sua natureza fundamental quanto pela sua relevância em muitas aplicações em engenharia como, por exemplo, no resfriamento de componentes eletrônicos, em trocadores de calor compactos, em câmaras de combustão de processos químicos, em aplicações envolvendo divisão do escoamento em processos de polímeros, em sistemas de energia, dentre outros.

Na secção a seguir, são apresentados os resultados obtidos em colaboração com os laboratórios LHV (Laboratório de Hidrodinâmica Virtual) da Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI/MG. Outra parte das simulações, foram realizadas em colaboração com o laboratório da Faculdade de Engenharia Civil - FECIV, da Universidade Federal de Uberlândia - UFU/MG. Todas as simulações foram realizadas até que o regime do campo do escoamento esteja estabelecido/desenvolvido. Cada simulação, requereu cerca de 48h de tempo de execução.

5.2 Simulação e análise para um corpo rombudo isotérmico

Nesta secção são apresentados resultados das simulações numéricas para baixos e moderados números de Reynolds, considerando o intervalo $1 \leq Re \leq 10^2$. Usámos a janela $1 \leq Re \leq 40$ para testar o código, tendo obtido os resultados existentes em Anjaiah et al. (2006), Dhiman et al. (2007) e Sharma (2003).

Para estas simulações, utiliza-se uma malha não-uniforme com 318×164 pontos. A malha mais refinada encontra-se nas regiões com gradiente mais elevado, próximas ao corpo rombudo imerso, onde esta por sua vez captura melhor os campos hidrodinâmicos, enquanto que nas regiões de baixo gradiente, foi utilizada uma malha menos refinada.

O uso de uma malha uniforme em todo domínio computacional, implicaria o aumento de forma considerável do custo computacional, inviabilizando as simulações, podendo até comprometer a física do problema. A simulação do escoamento desenvolve-se da esquerda para a direita. O perfil de velocidade na entrada do domínio é uniforme, com valor unitário. Na saída

do domínio, é imposta uma função de amortecimento no campo de velocidades para prevenir o processo de reflexão de vórtices. Em todas as simulações as dimensões do domínio foram $L_x = 55d$ e $L_y = 30d$. O corpo rombudo foi posicionado em $x = 16,5d$ e $y = 15,0d$, onde d representa o comprimento do lado do corpo imerso. A malha cartesiana utilizada está representada na Fig. (5.1).

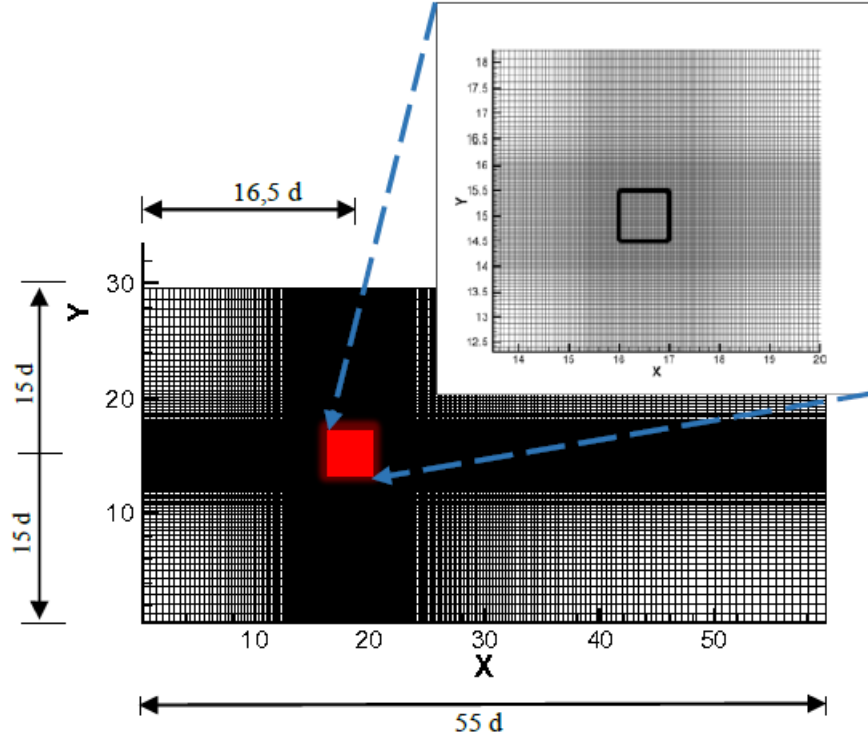


Figura 5.1: Ilustração da malha não-uniforme.

O número de pontos da malha, da Fig. (5.1), tem como objetivo capturar os efeitos térmicos e de movimentação da fronteira (sem elasticidade e rotação). Para todas as simulações, um total de 201 pontos foi utilizado para a malha Lagrangiana, sendo que a malha é não-uniforme na região do cilindro quadrado isotérmico, mantendo uma quantidade mínima de 30 malhas no seu interior.

Para todas as simulações, o passo de tempo utilizado no processo de cálculo é da ordem de 10^{-a} ($a = 4, 5, 6$), sendo calculado dinamicamente pelo critério de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy, conhecido como critério *CFL*. O número de Prandtl (Pr) foi mantido constante, a saber, 0,7 (no ar), para todas as simulações.

Para as fronteiras laterais do domínio, foram utilizadas as condições de contorno de fronteira livre, isto é, derivada nula para as velocidades na fronteira. Na entrada do domínio foi imposto um perfil uniforme de velocidade (U_∞) e, na saída, a derivada é nula para as velocidades. Em síntese, pode-se resumir as condições de contorno da seguinte forma:

- Entrada do domínio:

$$u = U_\infty; v = 0. \quad (5.1)$$

- Saída do domínio:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (5.2)$$

- Fronteiras superior e inferior do domínio:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (5.3)$$

Para a pressão, as condições de contorno utilizadas foram do tipo Neumann na entrada e Dirichlet na saída e nas laterais do domínio. As condições de contorno na entrada do domínio, na saída e nas fronteiras inferior e superior são dadas pelas Eqs. (5.5) e (5.4):

$$p = 0. \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (5.6)$$

Para a temperatura, as condições são análogas à velocidade, dadas pelas Eqs. (5.7), (5.8) e (5.9)

$$\theta = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (5.9)$$

5.2.1 Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 1$ a $Re = 40$ para diferentes números de Richardson

Na Fig. (5.2), são apresentados os padrões dos campos instantâneos simplificados (i.e. apresenta-se somente valores em $x \in [0, 33]$) de temperatura, pressão, linhas isotérmicas de temperatura, juntamente com os respectivos coeficientes aerodinâmicos (arrasto e sustentação) em torno do corpo romdubo isotérmico para $Re = 1$ e $Ri = 0$. (Recordar que a direção da gravidade $\mathbf{j}$ aponta no sentido oposto ao sentido positivo do eixo das abscissas – ver Secção 3.4.4, página 42.) Assim, para os casos envolvendo $Ri = 0$, verificou-se que não ocorre a flutuabilidade e/ou separação do escoamento em torno da geometria imersa, mesmo para casos envolvendo $Re = 1$ com $Ri = 0$.

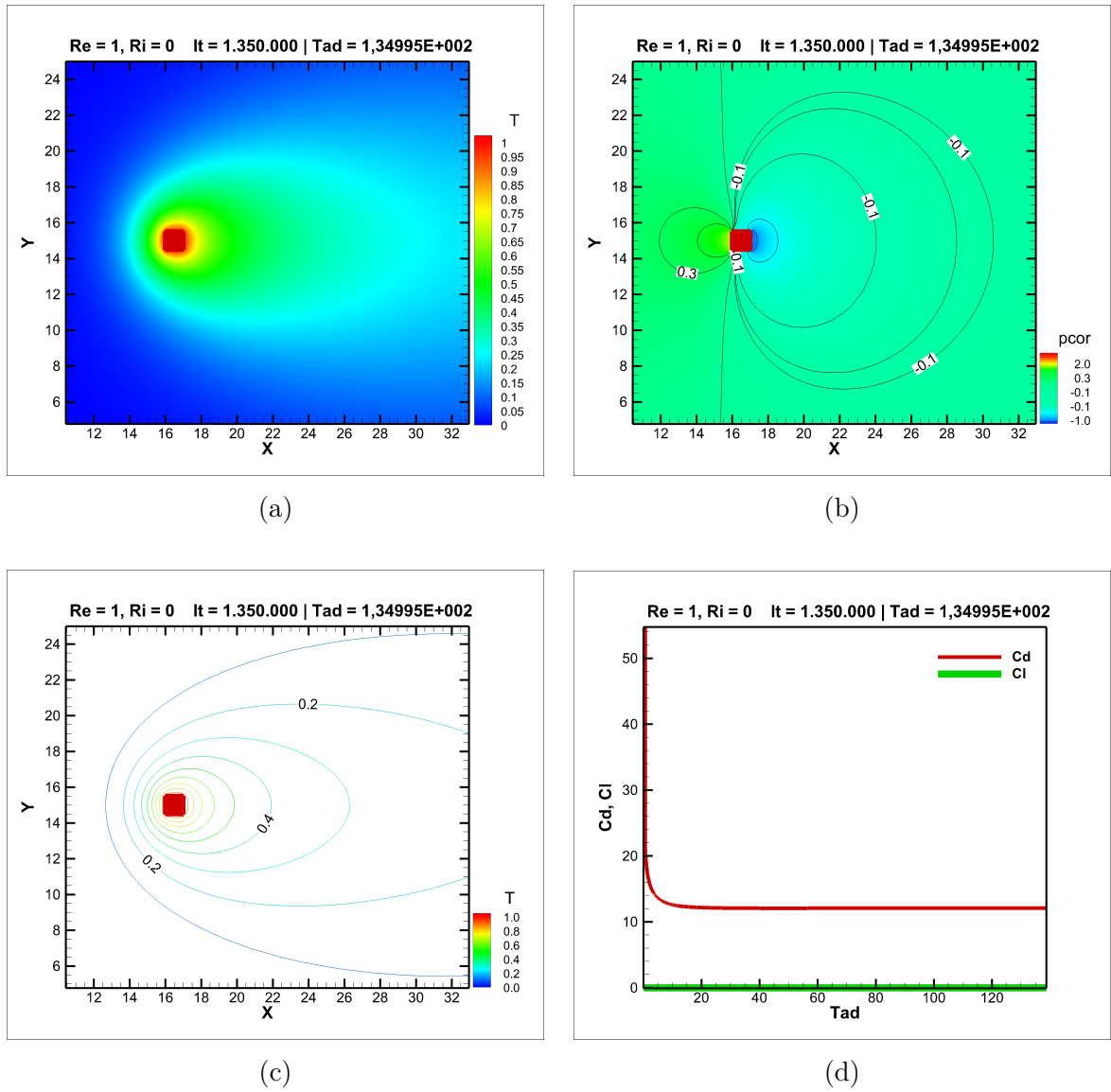
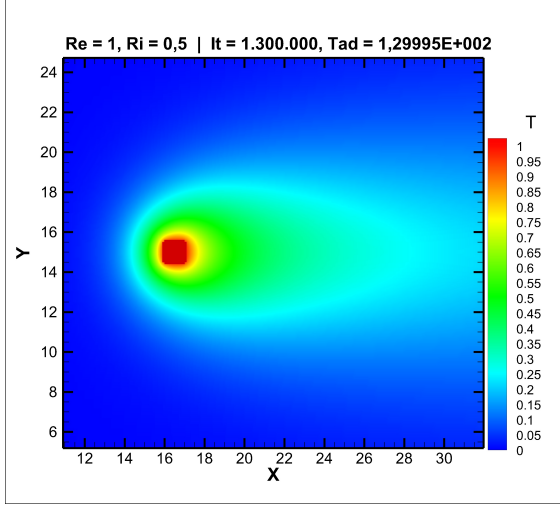
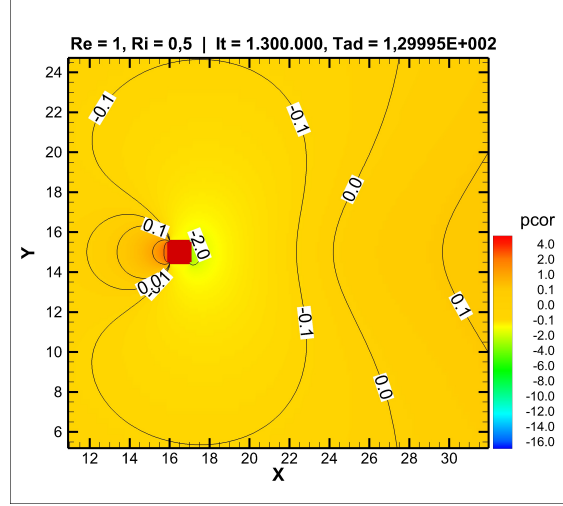


Figura 5.2: Campos simplificados de temperatura (a), pressão (b), linhas isotérmicas (c) e coeficientes de arrasto e sustentação (d) para $Re = 1$ e $Ri = 0$.

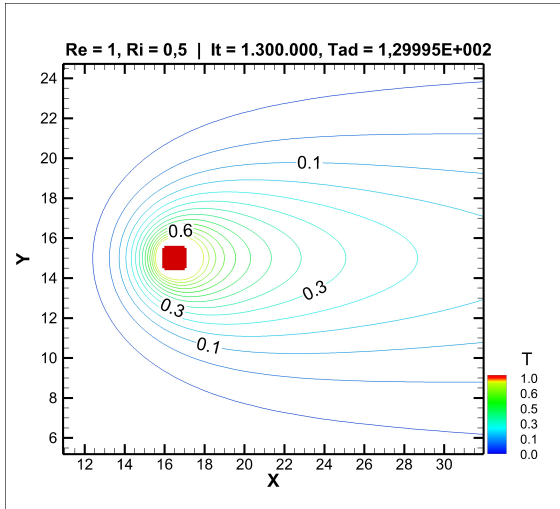
A seguir, nas Figs. (5.3) e (5.4), são apresentados os demais resultados para $Re = 1$ com $Ri = 0,5$ e $Ri = 1,0$. O objetivo é verificar a influência do aquecimento em torno do corpo imerso e na esteira a jusante ao cilindro quadrado isotérmico.



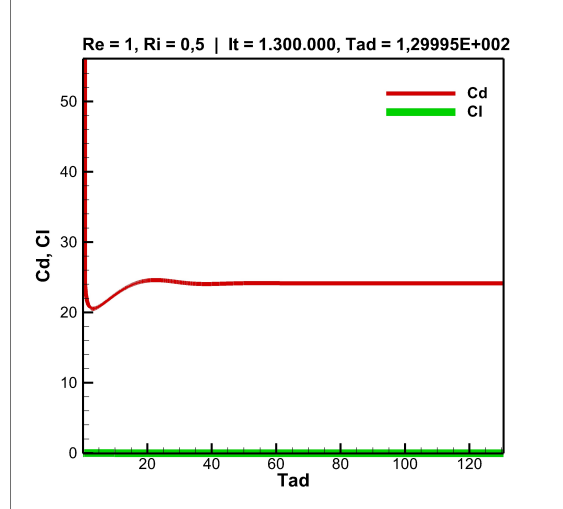
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.3: Campos simplificados de temperatura (g), pressão (h), linhas isotérmicas (i) e coeficientes de arrasto e sustentação (j) para $Re = 1$ e $Ri = 0,5$.

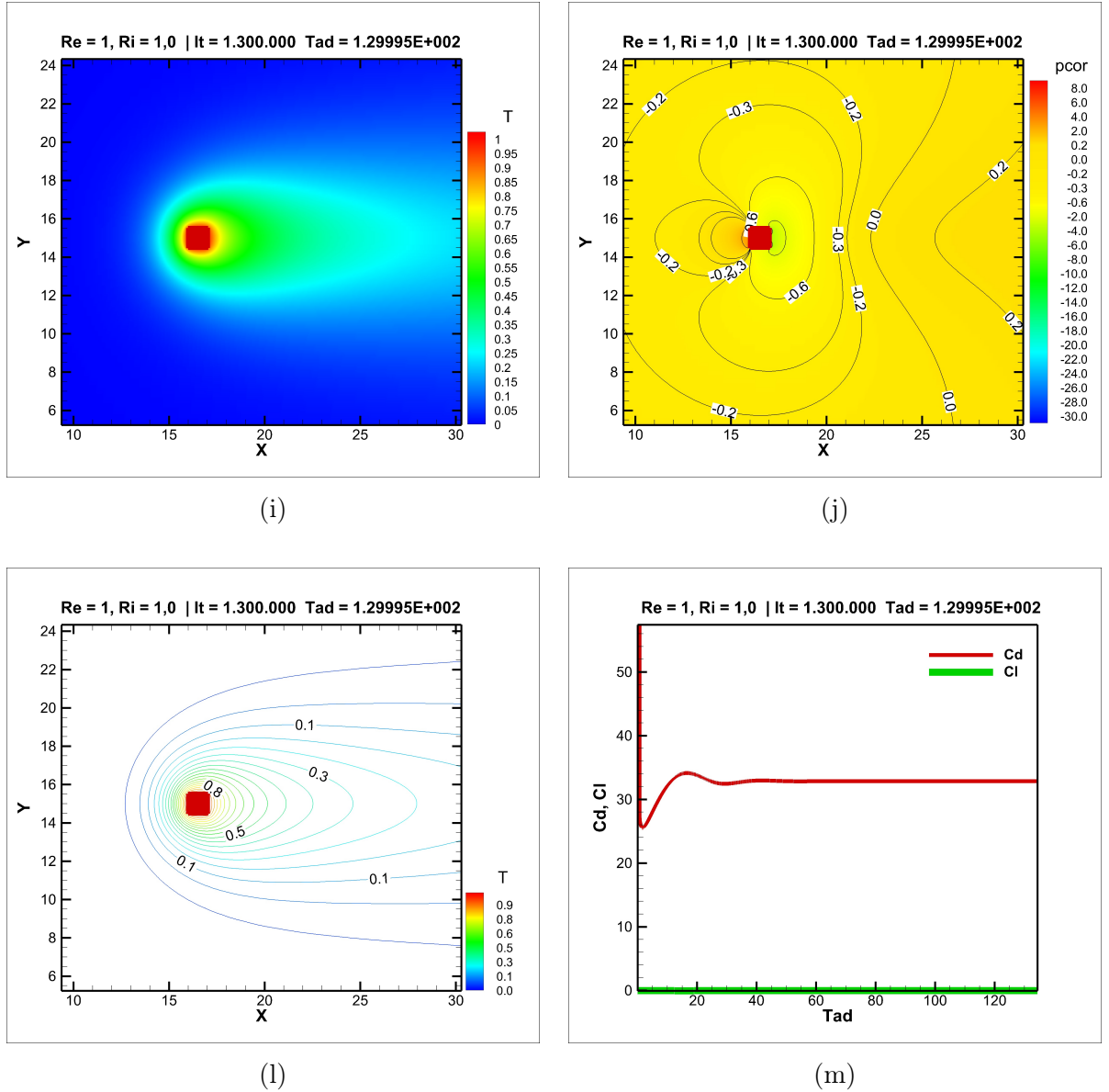


Figura 5.4: Campos simplificados de temperatura (i), pressão (j), linhas isotérmicas (l) e coeficientes de arrasto e sustentação (m) para $Re = 1$ e $Ri = 1,0$.

Ao longo destas simulações, verificou-se que o aquecimento pode resultar num breve "atraso" com respeito à separação do escoamento em torno do cilindro isotérmico. Por outras palavras, o escoamento é separado mais rapidamente (após observações numéricas) mesmo para baixos números de Reynolds, quando a transferência de calor é negligenciada nas simulações que, por sua vez, pode exigir mais aquecimento ao corpo imerso à medida que o número de Reynolds for aumentando, como observado, por exemplo, em $Re \geq 2$, para $Ri = 0.5$ e $Ri = 1$.

Observou-se ainda que, com aumento do número de Richardson Ri , para qualquer número de Reynolds fixado, a região da esteira diminui. Portanto, para estas simulações, mesmo fixando o número de Reynolds, Re , o comprimento da esteira, para o número de Richardson resultou em $Ri = 0$, sendo maior do que o comprimento para $0,5 \leq Ri \leq 1,0$; sendo isso verificado em todas as simulações. Apesar de não ocorrer desprendimento de vórtices, o que seria algo comum em simulações envolvendo moderados e altos números de Reynolds, a função de amortecimento utilizada no presente trabalho atua também para números de Reynolds pequenos, para diferentes

números de Richardson, onde essa função de amortecimento tem como objetivo destruir/inibir os vórtices, evitando as chamadas divergências numéricas, que, em geral, são causadas por reflexão e/ou recirculação dos vórtices na saída do domínio. Em relação aos campos de pressão, os mesmos foram obtidos para o mesmo tempo adimensional em todas as simulações realizadas, e que a montante do corpo isotérmico, no ponto de estagnação a velocidade é nula e a pressão estática é máxima. Com relação aos coeficientes aerodinâmicos (coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l)), observados nas Figs. (5.2- (d)), (5.3 - (h)) e (5.4 - (m)), os referidos apresentam variação com relação ao números Re e Ri . Com relação ao intervalo considerado sob as determinadas condições, verifica-se que o valor do coeficiente de arrasto (C_d) é bastante insensível ao valor Ri , enquanto que o coeficiente de sustentação (C_l) é visto como mais sensível ao Ri , especialmente para estes casos, onde foram considerados baixos valores para número de Prandtl, Pr . Presumivelmente, isso é devido à camada-limite ser mais espessa.

O valor do coeficiente de sustentação (C_l) em todas as simulações é diferente de zero, mesmo em um regime de escoamento estável (ou permanente). Isso ocorre devido à assimetria do campo do escoamento para $Ri \neq 0$, o que dá origem a forças de cisalhamento e de pressão de maneira desequilibrada, e isso não é um problema numérico, mas físico. Sobre o padrão das linhas isotérmicas apresentadas para os números de $Ri = 0$ a $Ri = 1,0$, para diferentes valores de Reynolds, sendo verificadas nas Figs. (5.2 - (c)) à (5.4 - (l)), vê-se que o campo de temperatura não somente torna-se assimétrico com a introdução da flutuabilidade Ri , mas a sua assimetria aumenta com o crescente número de Richardson, Ri . Além disso, a flutuação atua de maneira mais presente a jusante do cilindro quadrado isotérmico do que em outras partes de sua superfície.

Nestas simulações, verifica-se também que na superfície a montante do cilindro imerso, possui maior valor para o número de Nusselt, Nu , devido à aglomeração das linhas isotérmicas, em relação as outras partes da superfície do cilindro isotérmico.

O início da separação do escoamento em torno do corpo imerso, em uma configuração horizontal, sob a influência da flutuabilidade pode ser contemplado na Fig. (5.5), para alguns valores do número de Reynolds variando no intervalo de $1 \leq Re \leq 10$.

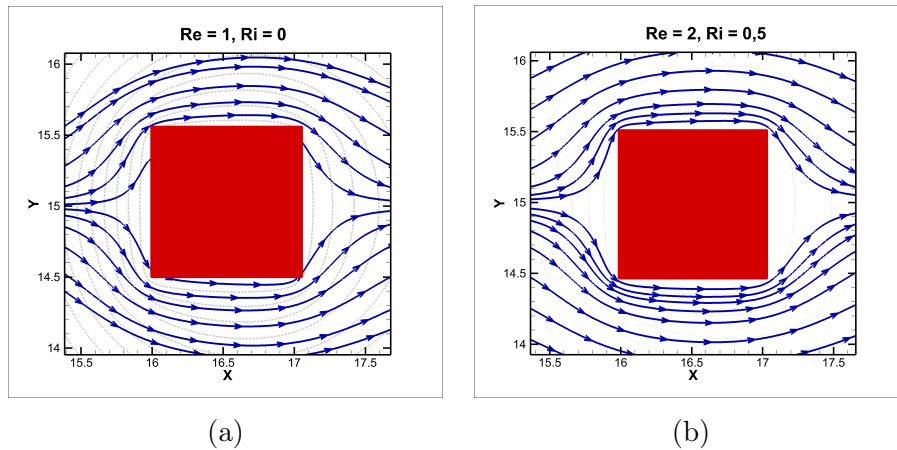


Figura 5.5: Linhas de corrente em torno de um cilindro quadrado isotérmico para $Re = 1$ e $Re = 2$ com diferentes números de Ri .

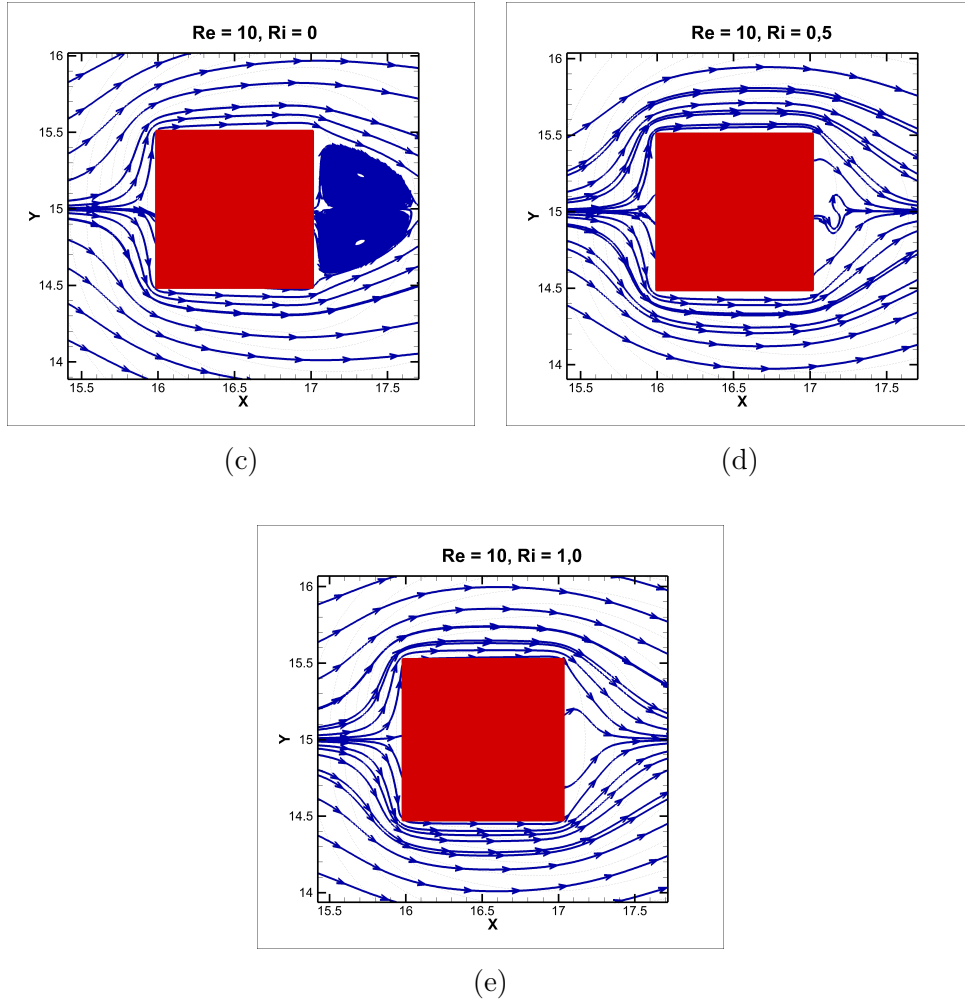


Figura 5.6: Linhas de corrente em torno de um cilindro quadrado isotérmico para $Re = 10$ com diferentes números de Ri .

Assim, para as Figs. (5.5) e (5.6) apresentadas anteriormente, um comportamento do escoamento em torno da vizinhança do corpo rombudo isotérmico para diferentes valores de Re ($Re = 1, 2$ e 10) para diferentes Ri ($Ri = 0, 0,5$ e 1) é verificado. O fluido inicia o processo de separação do cilindro já para $Re \geq 2$, para os diferentes Ri adotados. Um processo de desprendimento da bolha de recirculação também pode ser verificado na Fig. (5.6 - (c)) para $Re = 10$ com $Ri = 0$. Portanto, para casos envolvendo baixos valores de Ri a separação do escoamento é observada primeiramente para baixos valores de Re , e depois para a variação de valores de Ri juntamente com a variação de valores de Re .

Outros trabalhos utilizando diferentes metodologias numéricas têm apresentado uma situação semelhante, como, por exemplo, no trabalho de Chatterjee (2010), que realizou um estudo para um par de cilindros quadrados em uma configuração de canal vertical em *tandem* (cilindros em fila) para baixos números de Reynolds. O autor concluiu que o início da separação do escoamento ocorre para $1 \leq Re \leq 2$, $2 \leq Re \leq 3$ e $3 \leq Re \leq 4$, considerando os mesmos valores para o número de Richardson apresentados neste trabalho, isto é, para $Ri = 0$, $Ri = 0,5$ e $Ri = 1,0$, respectivamente. Assim, neste trabalho observou-se que, à medida que o número e Reynolds é aumentado gradualmente, a separação do escoamento ocorre no bordo de fuga do corpo rombudo isotérmico e os dois vórtices (simétricos) da bolha de recirculação, começam a ser formados a jusante do obstáculo (ver Fig. (5.6 - (c))), mesmo no regime de

escoamento permanente. No entanto, a tendência oposta é observada com o aumento do número de Richardson, fixando o número de Reynolds. Isto ocorre provavelmente devido ao facto de que, à medida que a flutuação (Ri) aumenta, o gradiente de velocidade na superfície do cilindro aumenta, resultando na redução da pressão sobre a superfície do corpo imerso.

Esse comportamento é semelhante aos padrões de escoamento em relação ao número de Reynolds e ao número de Richardson em torno de um cilindro circular sob a influência da flutuabilidade, sendo isto também observado nos trabalhos de Badr et al. (1990), Patnaik et al. (1999) e Patnaik et al. (1999). Outros trabalhos importantes, como os de Singh et al. (2007) e Moulay et al. (2017), além de apresentarem situações semelhantes, surge um valor crítico a ser estudado para o número adimensional de Ri , isto é, os autores levam em consideração o início do desprendimento de vórtices e passam a analisar a influência desse número com o aumento do número Re , considerando a influência da flutuabilidade num regime de escoamento instável.

A seguir, são apresentadas as linhas de contorno com relação à vorticidade, que promovem informações úteis sobre o comportamento do escoamento, especialmente próximo ao cilindro quadrado para o intervalo considerado na Fig. (5.7). A região de recirculação a jusante do cilindro quadrado aumenta com o número de Reynolds para o valor fixo do número de Richardson e diminui com o aumento de Richardson para o valor fixo (ou constante) do número de Reynolds.

Os pontos de separação também podem ser localizados com a ajuda das linhas de contorno da vorticidade. Logo, à medida que o valor do número de Reynolds e/ou do número de Richardson aumenta, ocorre o aumento do alongamento das linhas de contorno de vorticidade a jusante do cilindro quadrado isotérmico. Um aumento na magnitude da vorticidade próximo da superfície do cilindro com o aumento do número de Reynolds e/ou do número de Richardson também é observado nas Figs. (5.7) à (5.9).

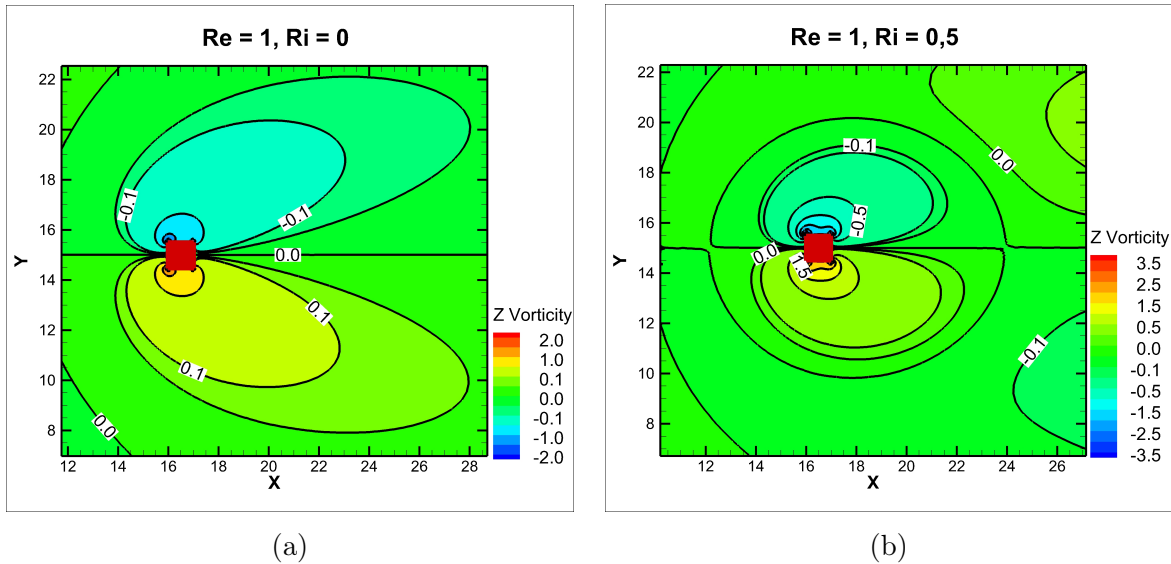
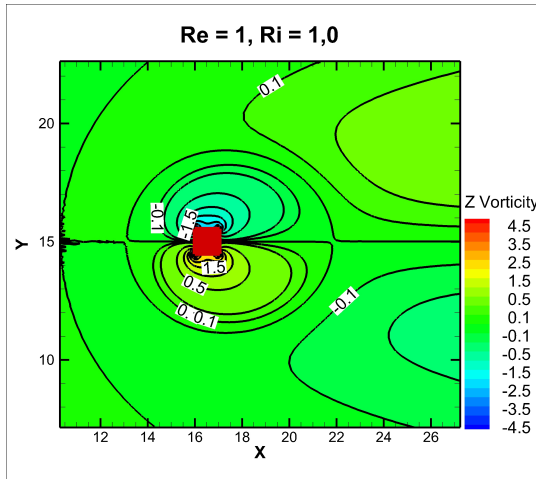
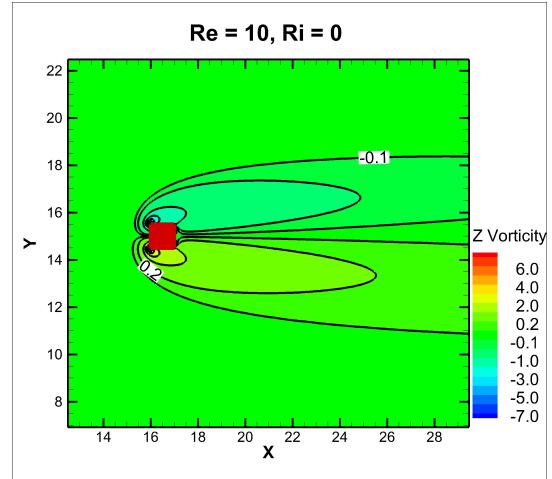


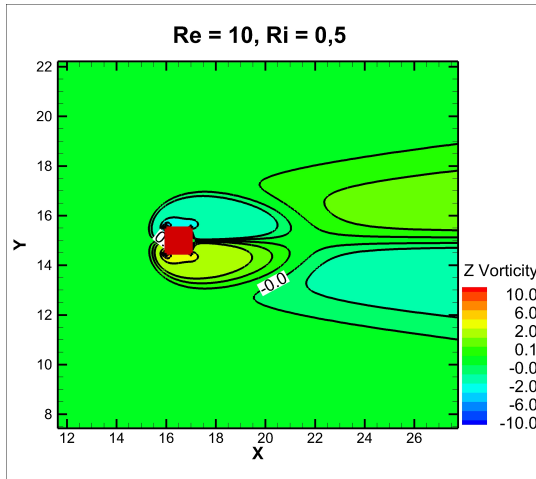
Figura 5.7: Campos simplificados de vorticidade para (a) $Re = 1, Ri = 0$, e (b) $Re = 1, Ri = 0,5$.



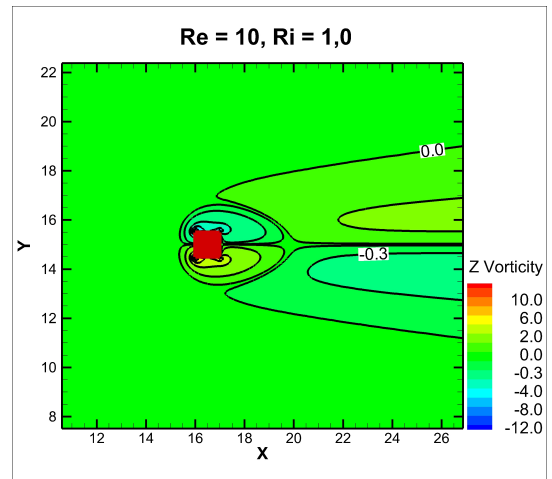
(c)



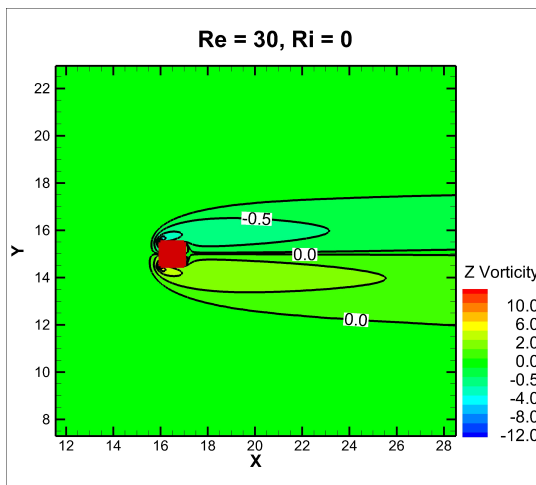
(d)



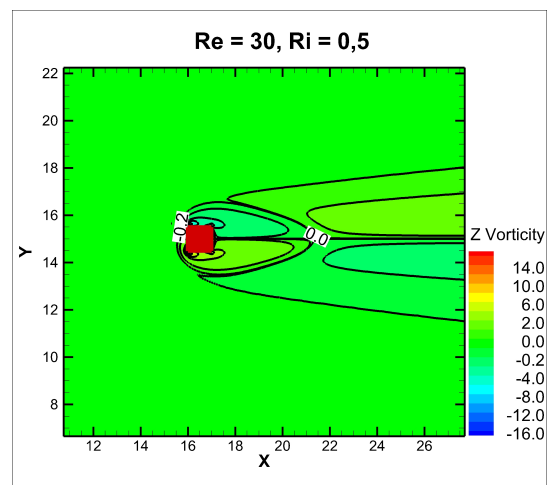
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.8: Campos simplificados de vorticidade para (c) $Re = 1, Ri = 1,0$; (d) $Re = 10, Ri = 0$; (e) $Re = 10, Ri = 0,5$; (f) $Re = 10, Ri = 1,0$; (g) $Re = 30, Ri = 0$, e (h) $Re = 30, Ri = 0,5$.

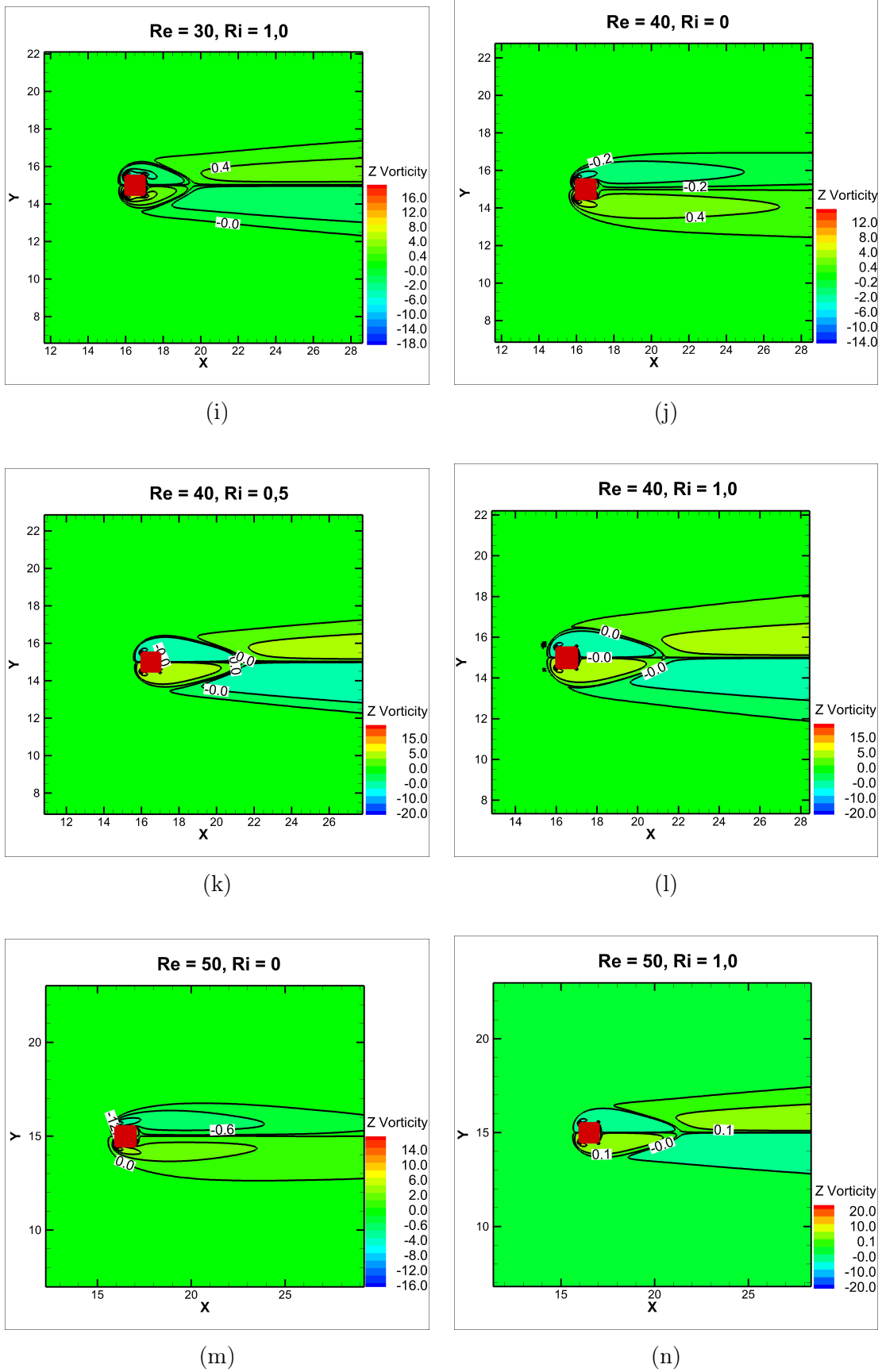


Figura 5.9: Campos simplificados de vorticidade para (i) $Re = 30, Ri = 1,0$; (j) $Re = 40, Ri = 0$; (k) $Re = 40, Ri = 0,5$; (l) $Re = 40, Ri = 1,0$; (m) $Re = 50, Ri = 0$, e (n) $Re = 50, Ri = 1,0$.

Com relação ao padrão isotérmico envolvendo os parâmetros Re e Ri próximo ao obstáculo imerso no escoamento, são apresentadas nas Figs. (5.10) a (5.12) para o número de Prandtl igual a 0,7 (no ar).

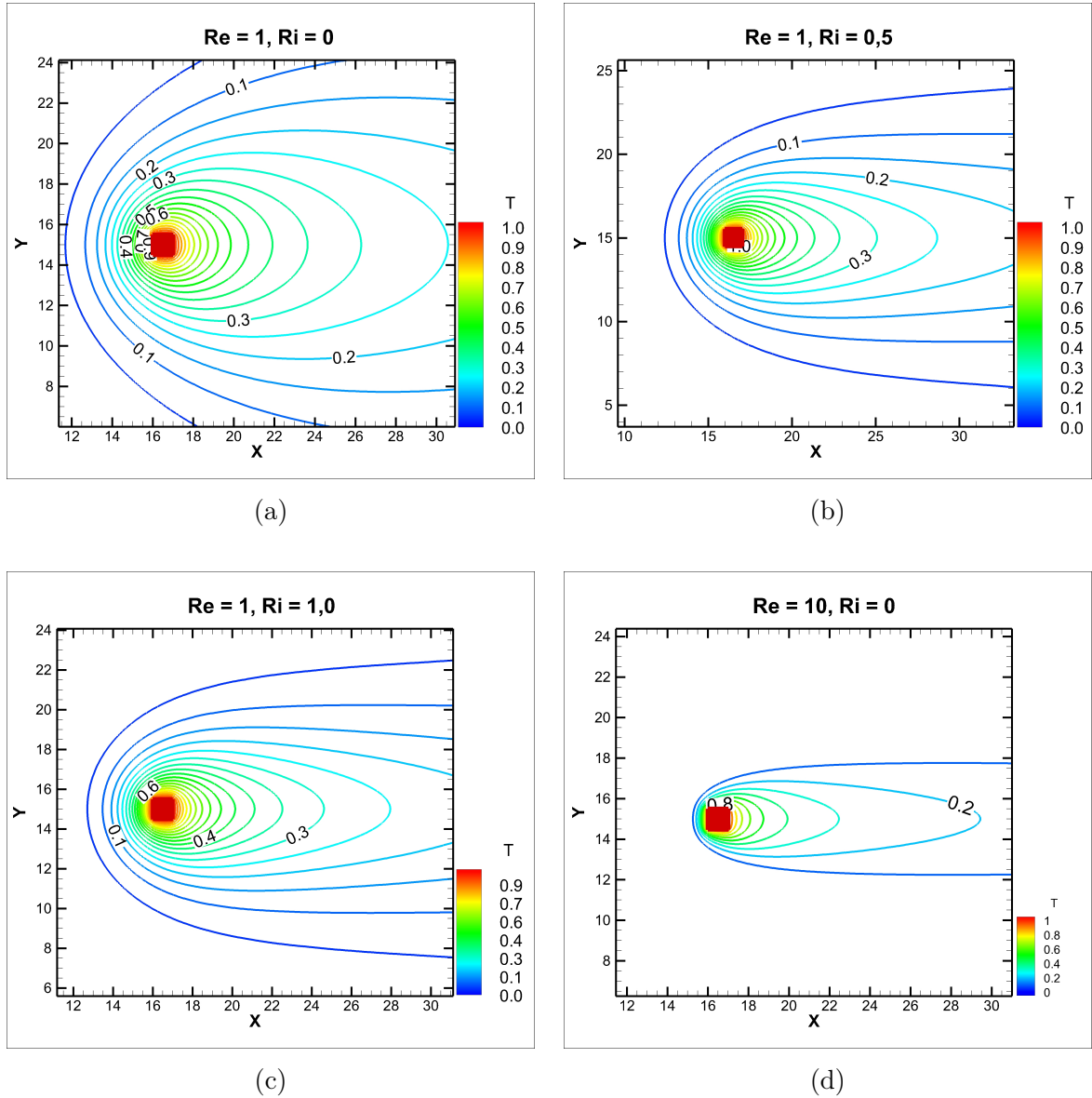
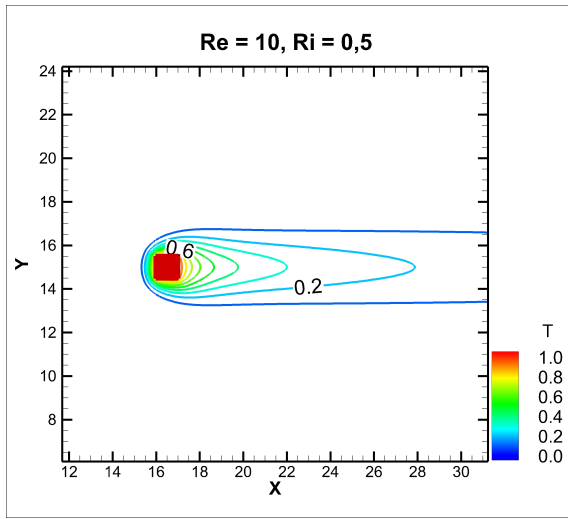
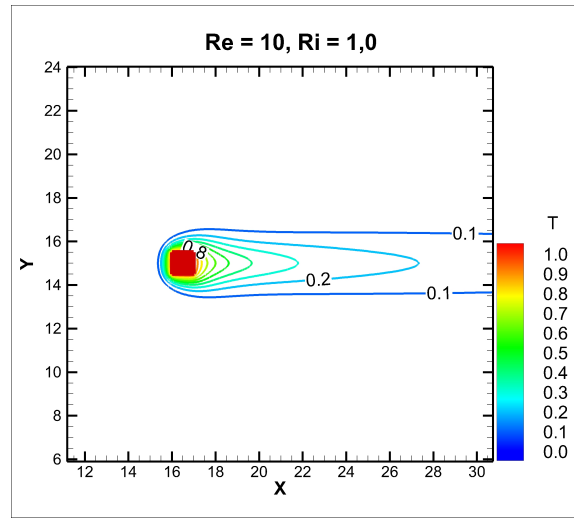


Figura 5.10: Padrão de linhas isotérmicas simplificadas para (a) $Re = 1, Ri = 0$; (b) $Re = 1, Ri = 0,5$; (c) $Re = 1, Ri = 1,0$, e (d) $Re = 10, Ri = 0$.

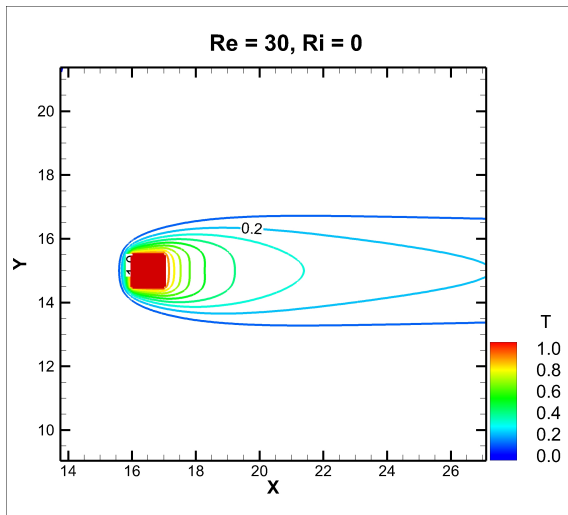
Verifica-se na Fig. (5.10) que os padrões térmicos são acentuados para baixos valores de Reynolds, como, por exemplo, para $Re = 1$, onde as forças viscosas são mais dominantes e nenhuma separação ocorre no escoamento para valores de unidades de Reynolds para diferentes valores de Richardson. Na Fig. (5.10 - (b)), os números de Reynolds e de Richardson são aumentados, onde a proposta é verificar e analisar a evolução das linhas isotérmicas.



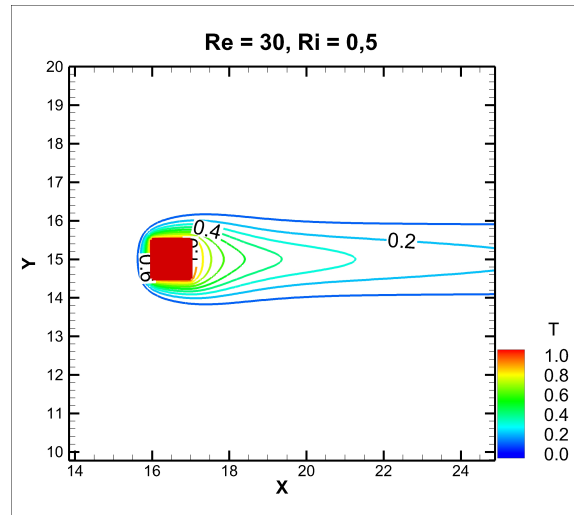
(e)



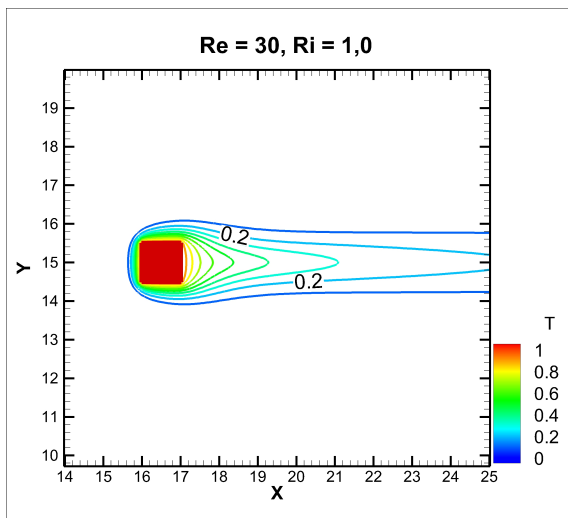
(f)



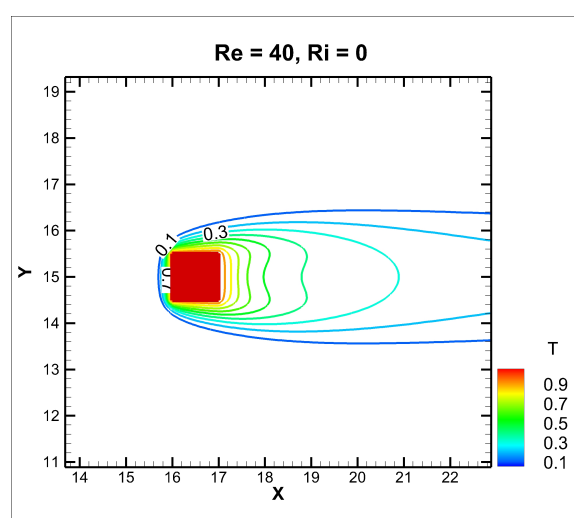
(g)



(h)



(i)



(j)

Figura 5.11: Padrão de linhas isotérmicas simplificadas para (e) $Re = 10, Ri = 0,5$; (f) $Re = 10, Ri = 1,0$; (g) $Re = 30, Ri = 0$; (h) $Re = 30, Ri = 0,5$; (i) $Re = 30, Ri = 1,0$, e (j) $Re = 40, Ri = 0$.

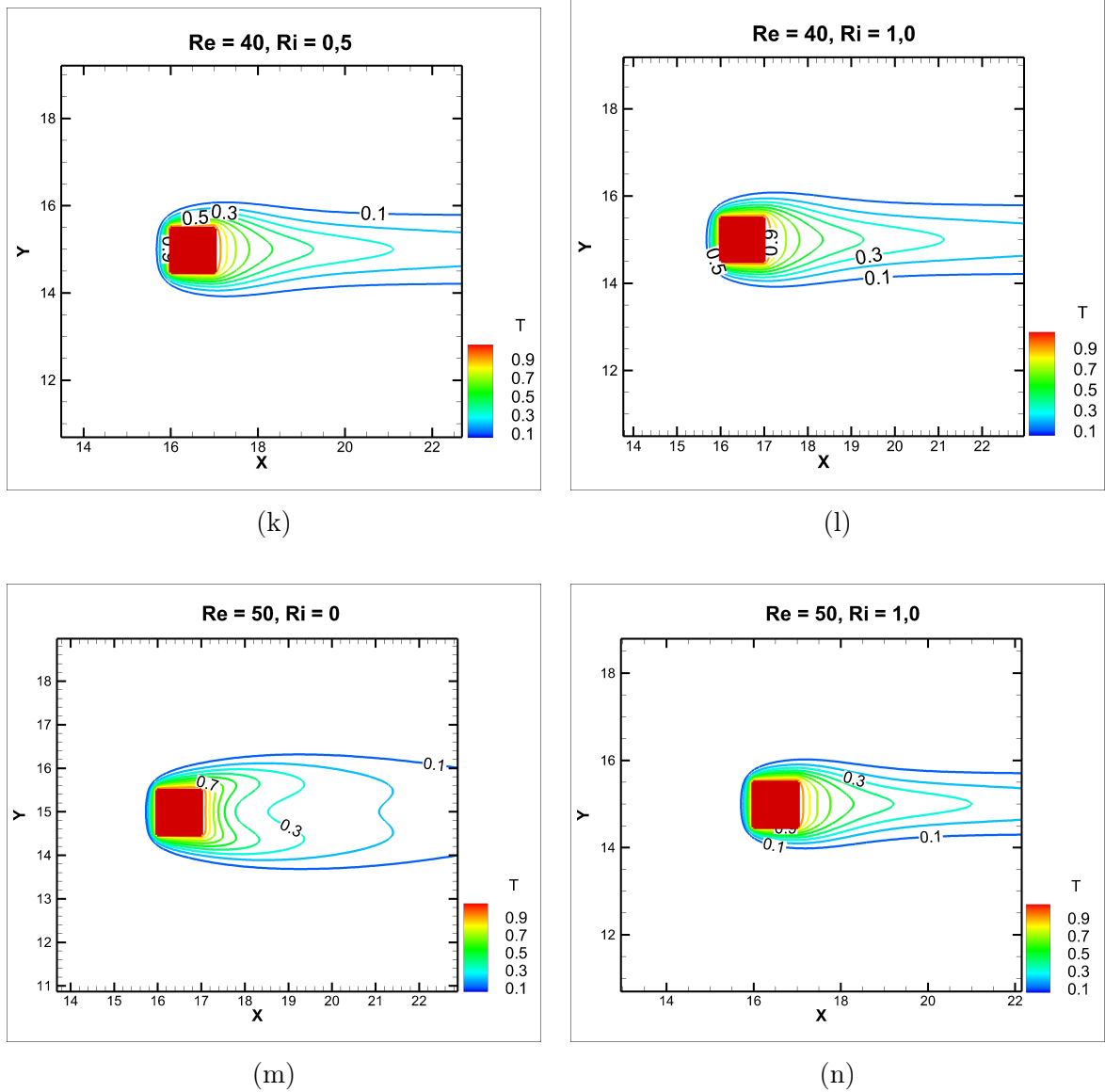


Figura 5.12: Padrão de linhas isotérmicas simplificadas para (k) $Re = 40, Ri = 0,5$; (l) $Re = 40, Ri = 1,0$; (m) $Re = 50, Ri = 0$, e (n) $Re = 50, Ri = 1,0$.

À medida que o número de Reynolds é aumentado gradualmente, verifica-se um "aumento", ou "aglomeração", ou um "congestionamento", de linhas isotérmicas no sentido ascendente à direita para o valor fixado na simulação. Portanto, a taxa de transferência de calor aumenta com o valor do número de Reynolds. Além disso, um estreitamento (ou afinamento) das linhas isotérmicas nas laterais superior e inferior do corpo isotérmico pode ser verificado com o aumento dos valores para o número de Reynolds. Isto pode se explicado como no menor número de Reynolds, onde o calor é transportando principalmente através da difusão, enquanto que para o maior número de Reynolds, o transporte convectivo se torna dominante e, assim, as linhas isotérmicas de temperatura se espalham ao longo da direção do escoamento com uma redução subsequente da largura lateral das linhas.

O agrupamento das linhas isotérmicas, próximo dos quatro lados da superfície do obstáculo imerso, também aumenta com o aumento do número de Richardson. Sob a influência da flutuação, observa-se com nitidez um aumento ou concentração das linhas isotérmicas em

direção ao plano médio na direção a jusante do corpo imerso, com o aumento do valor do número de Reynolds e/ou número de Richardson (ver Fig. (5.12)).

Durante as simulações, verifica-se que o agrupamento das linhas isotérmicas na superfície esquerda do cilindro é mais concentrada (ou maior) que a superfície da direita (ou na parte superior/inferior) do obstáculo imerso.

5.2.2 Validação do coeficientes médios de arrasto (C_d) e do Nusselt (Nu)

A Tab. (5.1) apresenta uma comparação dos valores médios (médias temporais) dos coeficientes de arrasto com $Ri = 0$ e $Pr = 0,7$, para diferentes números de Reynolds, simulados numericamente no presente trabalho, em comparação com os resultados numéricos de outros autores, para o caso de um cilindro quadrado isotérmico.

Fonte:	Re	Cd	Nu
Presente trabalho	1	4,8500	0,6915
Anjaiah et al. (2006)	1	4,8600	0,6916
Dhiman et al. (2007)	1	4,8714	0,6916
Sharma et al. (2012)	1	4,8714	0,6928
Presente trabalho	10	0,9300	1,5625
Anjaiah et al. (2006)	10	0,9437	1,5624
Dhiman et al. (2007)	10	0,9437	1,5624
Sharma et al. (2012)	10	0,9343	1,5573
Presente trabalho	40	0,2497	2,6968
Anjaiah et al. (2006)	40	0,2538	2,6969
Dhiman et al. (2007)	40	0,2538	2,6969
Sharma et al. (2012)	40	0,2493	2,6012

Tabela 5.1: Comparação dos valores médios dos coeficientes de arrasto e do número Nusselt para $Ri = 0$ e $Pr = 0.7$ com diferentes valores de Re .

Para a comparação e validação dos resultados são apresentados os trabalhos de Anjaiah et al. (2006), Dhiman et al. (2007) e Sharma et al. (2012). No trabalho de Anjaiah et al. (2006), os autores utilizam um esquema numérico denominado SMAC-Implicit, implementado em uma malha escalonada para resolver as equações de Navier-Stokes e da energia.

Nesta metodologia, ocorre o acoplamento dos campos de escoamento e de temperatura, onde um ciclo computacional calcula a velocidade, pressão e temperatura. No método, uma velocidade prevista é encontrada a partir da forma implícita da equação de momentum, utilizando uma "imposição" de valores ou utilizando o valor da pressão para o campo de temperatura no instante anterior, onde, a partir destes, os campos corrigidos de pressão e velocidade são obtidos pela pressão e velocidade de iteração por meio de equações de continuidade.

A partir do campo de temperatura inicial, ou anterior, e do campo de velocidade corrigido mencionado, uma distribuição de temperatura e os campos de velocidade e pressão corrigidos são utilizados para validar as velocidades para o próximo intervalo de tempo. O escalonamento do tempo é pseudo-transitório, partindo de uma condição inicial arbitrária; o escalonamento de tempo das equações é continuado até que a solução de estado estacionário seja alcançada.

No trabalho de Dhiman et al. (2007), os autores utilizam como metodologia numérica o método de volumes finitos para geometrias tridimensionais para uma malha não-escalonada para um escoamento bidimensional. Em síntese, um método semi-explícito foi utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes instáveis, nas quais as equações de momentum são discretizadas de maneira explícita, com exceção dos termos de gradiente de pressão que são tratados implicitamente. Consequentemente, o acoplamento pressão-velocidade reduz-se a uma equação de Poisson para a correção de pressão. As possíveis oscilações devido ao desacoplamento de pressão-velocidade na malha foram evitadas usando um esquema de interpolação de Rhie and Chow (1983).

Sharma et al. (2012), baseando-se no trabalho de Dhiman et al. (2007), utiliza uma malha computacional não-uniforme desenvolvida utilizando um código computacional em *Matlab*®. O método de volume finito semi-explícito foi implementado no arranjo de malha escalonada, utilizado para resolver as equações governantes nas quais as equações de momentum são discretizadas de maneira explícita; enquanto os termos do gradiente de pressão são tratados implicitamente.

Nesse método, duas etapas são implementadas para cada passo de tempo: primeiro, a etapa preditora, uma velocidade prevista é obtida da equação de momentum discretizada usando o campo de pressão para o tempo anterior; a segunda etapa corretora, consiste em solução iterativa da equação de correção de pressão para obter as correções de velocidade correspondentes, de tal forma que o campo de velocidade satisfaz a equação da continuidade para o limite prescrito.

Os termos convectivos são discretizados utilizando um esquema preciso de terceira ordem, denominado QUICK, enquanto que os termos difusivos são discretizados usando o esquema de diferenças finitas centradas. Portanto, com base nessas comparações, os resultados apresentados para $Pr = 0,7$ são considerados confiáveis com ótima convergência numérica, dentro do percentual de 2% a 3%.

5.2.3 Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 10^2$ para diferentes números de Richardson

A seguir, são apresentados nas Figs. (5.13) e (5.14) as simulações bidimensionais para a convecção mista em diferentes instantes de tempo, apresentando os campos simplificados de temperatura, pressão, linhas isotérmicas e vorticidade, para Reynolds igual a 100 com $Ri = 0$ e $Ri = 1,0$, em torno de um cilindro quadrado isotérmico.

Em síntese, assim como em cilindros circulares, os instantes iniciais são marcados pelo surgimento de uma bolha de recirculação, já observada na Fig. (5.6), que trata-se de uma região onde o fluido se encontra aprisionado, aumentando constantemente até a um comprimento máximo, resultando no processo de desprendimento dos vórtices (Figs. (5.13 - (a), (c) e (d))), que ocorre devido às instabilidades das camadas cisalhantes, que, por sua vez, dependem da geometria do corpo e do número de Reynolds.

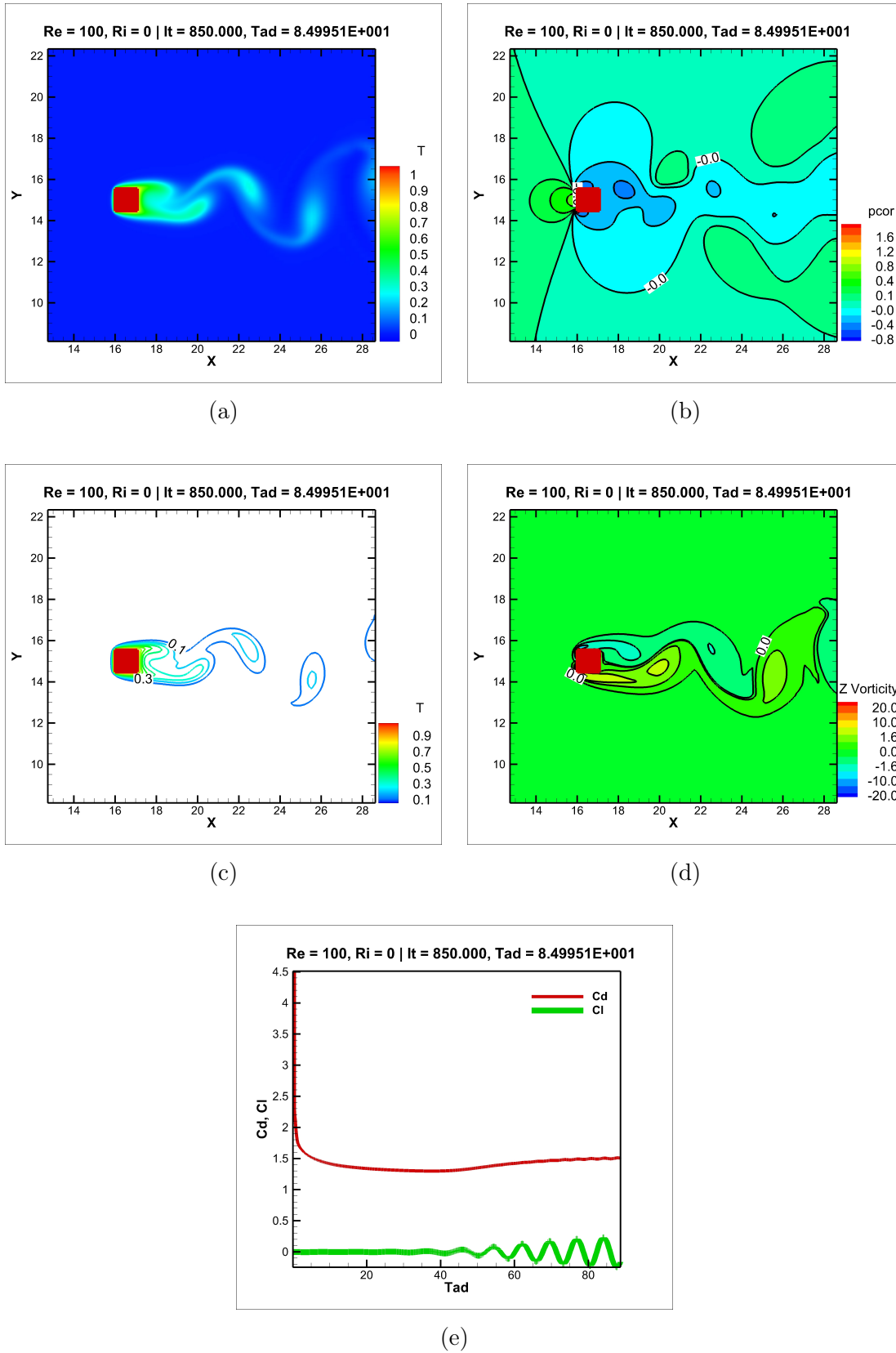


Figura 5.13: Campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) linhas isotérmicas, (d) vorticidade e (e) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para $Re = 100$ e $Ri = 0$.

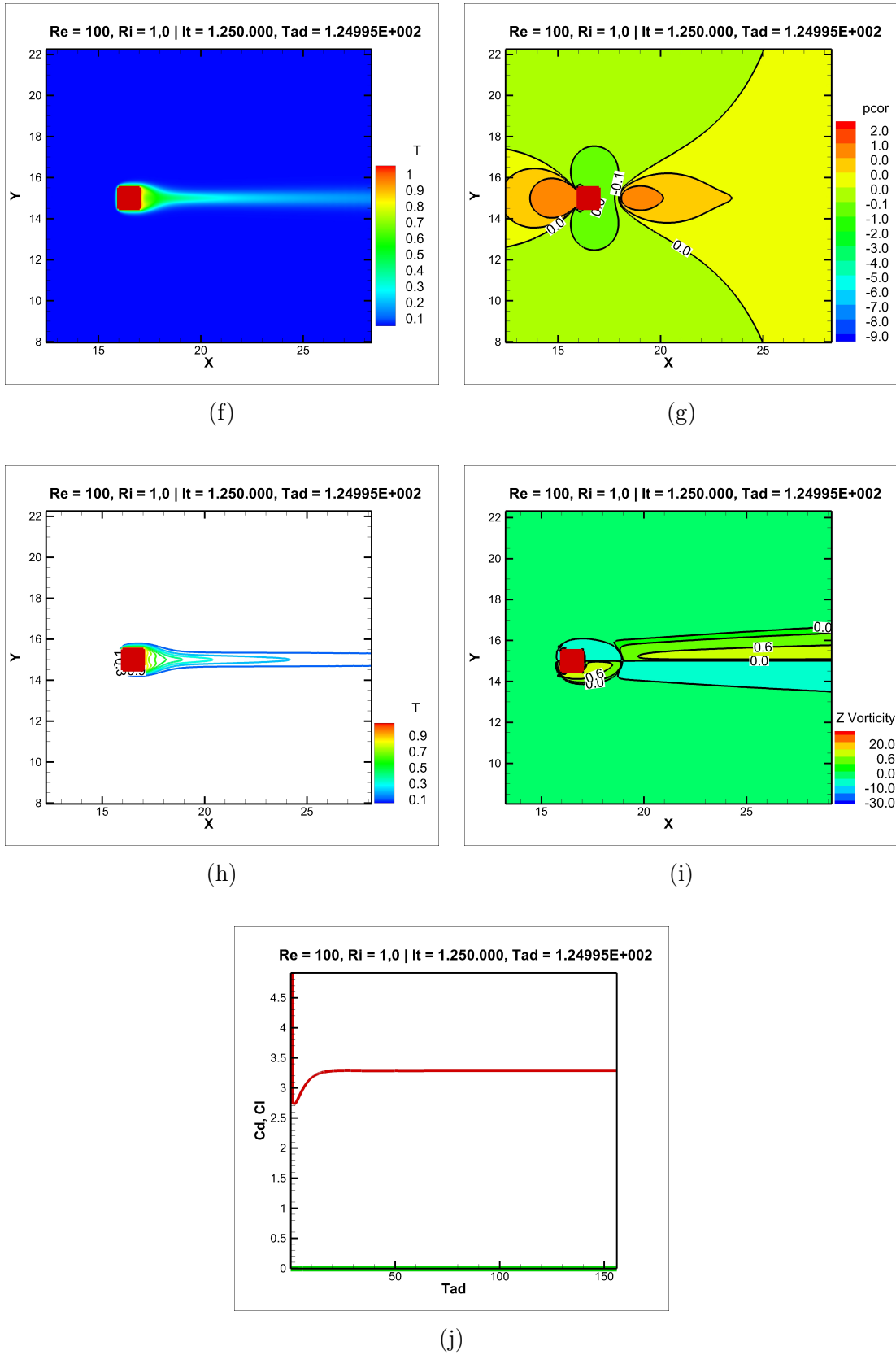


Figura 5.14: Campos simplificados de (f) temperatura, (g) pressão, (h) linhas isotérmicas, (i) vorticidade e (j) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para $Re = 100$ e $Ri = 1,0$.

A Tab. (5.2) apresenta resultados para os coeficientes médios de arrasto e do número de Nusselt para $Re = 100$, $Pr = 0,7$ e $Ri = 0,5 - 1,0$ para o escoamento na configuração horizontal. Os desvios relativos percentuais para os valores dos coeficientes médios de arrasto e do número de Nusselt são em torno de $0,90\% - 0,95\%$, respectivamente para $Ri = 0,5$. Entretanto, para $Ri = 1,0$, os desvios relativos percentuais estão em torno de $0,80\%$ para o coeficiente de arrasto e $0,67\%$ para o número de Nusselt, respectivamente.

Fonte:	C_d	Nu
Ri = 0,5		
Presente trabalho	2,03	4,55
Sharma and Eswaran (2004)	2,05	4,60
Ri = 1,0		
Presente trabalho	2,45	4,47
Sharma and Eswaran (2004)	2,65	4,80

Tabela 5.2: Comparação dos valores médios dos coeficientes de arrasto e do número Nusselt para $Re = 100$ e $Pr = 0.7$ para diferentes Ri .

Existem várias correlações empíricas que podem ser obtidas para o número de Nusselt médio. Em Bergman and Incropera (2011) a correlação adotada no presente caso foi a de Hilpert que considera as condições médias globais, sendo representada por

$$\overline{Nu} = c Re_D^m Pr^{\frac{1}{3}}, \quad (5.10)$$

onde $Re = 40 - 40^3$, $c = 0,683$ e $m = 0,466$. Portanto, observa-se na Tab. (5.2) uma boa concordância nos valores numéricos obtidos, o que confirma a validade do Método de Fronteira Imersa para o caso do cilindro quadrado isotérmico para diferentes valores de Reynolds e de Richardson, considerando o processo de transferência de calor por convecção mista. Assim, estes cálculos em geometrias estacionárias são validados no que diz respeito à escolha do refinamento da malha, dimensões do domínio, de forma a não influenciar nos valores obtidos dos coeficientes aerodinâmicos.

5.3 Simulação para $Re = 500$ e $Re = 5000$ com convecção forçada

Nesta secção, apresentamos os resultados de simulações numéricas de transferência de calor com convecção forçada para o número de Reynolds variando no intervalo $500 \leq Re \leq 5000$. Estes resultados também podem ser encontrados em Santos et al. (2018).

5.3.1 Visualização bidimensional dos campos de escoamento para $Re = 500$ com $Ri = 0$

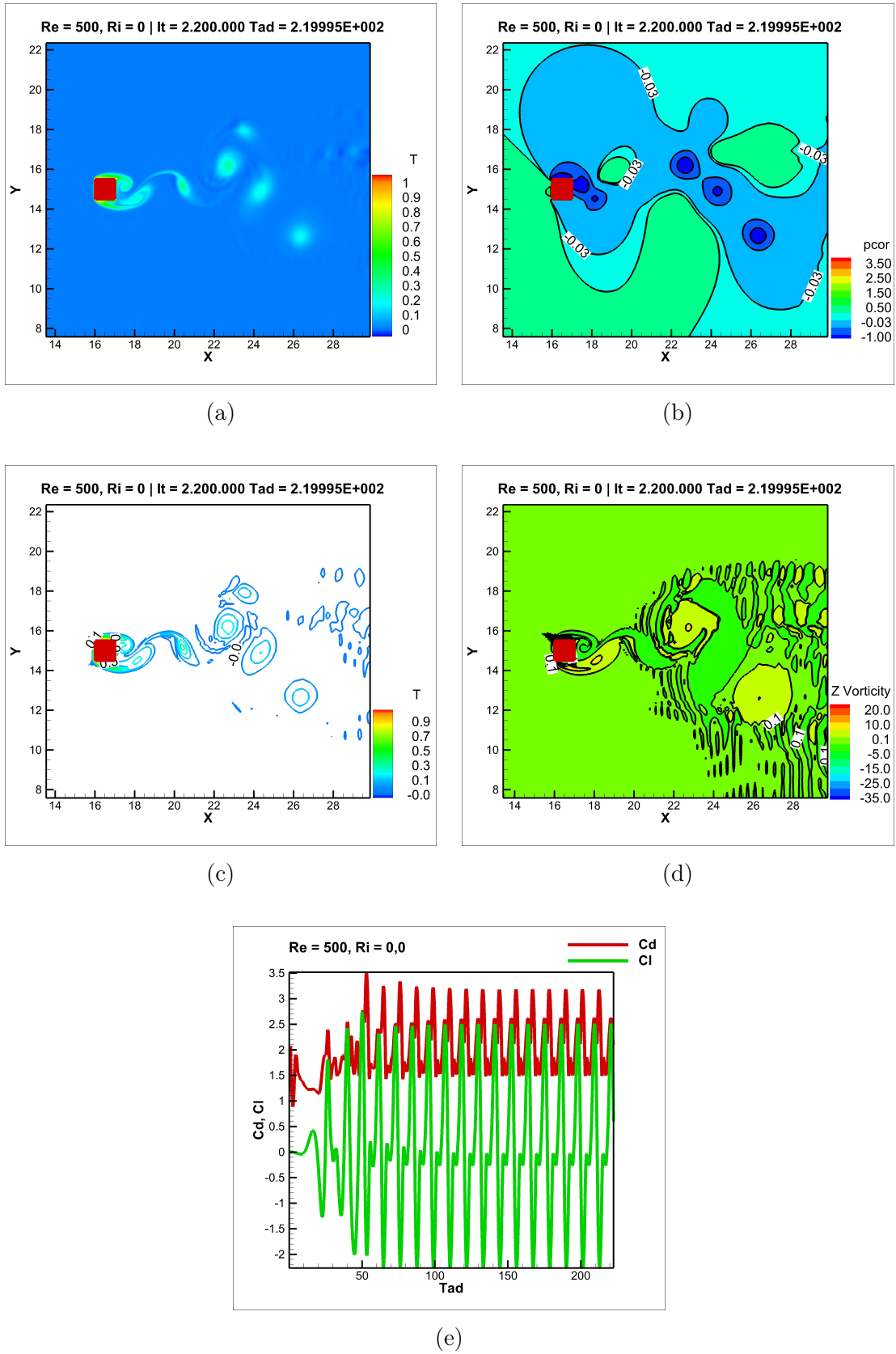


Figura 5.15: Campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) linhas isotérmicas, (d) vorticidade e (e) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para $Re = 500$ e $Ri = 0$.

Ao contrário do que foi observado até o momento, nas Figs. (5.2 - (d)), (5.3 - (h)) e (5.13 - (m)), para o número de Reynolds igual a 500 ocorre a chamada amplitude ou variação temporal para os coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l). Isto é uma consequência do descolamento periódico de vórtices nas superfícies superior e inferior do cilindro quadrado. O coeficiente de sustentação (C_l), também apresenta oscilações, ou seja, para este caso ocorre a presença de flutuabilidade no escoamento, demonstrado através da simulação numérica na Fig. (5.15 - (e)).

Assim, para este valor simulado, verifica-se a presença de grandes oscilações na chamada esteira de vórtices, uma consequência física causada pelo fenômeno da turbulência. Esse tipo de escoamento denominado turbulento é instável e contém flutuações que dependem do tempo e da posição no espaço.

Estas perturbações no escoamento apresentadas na Fig. (5.15 - (e)) são fortes. Seria necessário um estudo mais amplo e detalhado sobre a descrição completa das transições do escoamento laminar-turbulento, que, por sua vez, requer uma análise dos processos de amplificação dessas perturbações de natureza não-linear, o que não é o objetivo deste trabalho. Esta é uma questão teórica de difícil implementação computacional, mas não impossível de se realizar. Portanto, foi necessário nesse trabalho implementar modelos de turbulência dentro do contexto do Método de Fronteira Imersa que buscasse analisar e apresentar essas perturbações no escoamento e, com isso, realizar algumas análises de natureza físico-matemática. Assim, para o caso $Re = 500$, utilizamos o modelo de turbulência de Smagorinsky.

Além disso, a Fig. (5.13) do escoamento laminar para $Re = 100$ ao moderado $Re = 500$, como visto na Fig. (5.15), apresenta em ambos os casos, para $Ri = 0$, a influência da distribuição de pressão a jusante do cilindro, que é fortemente influenciado pela formação e desprendimento de vórtices nos lados superior e inferior do cilindro quadrado, conforme a Fig. (5.15 - (b)). O processo de flutuabilidade neste caso, está diretamente ligado à formação e desprendimento de vórtices e, portanto, seu valor varia entre máximos e mínimos de igual magnitude.

5.3.2 Visualização bidimensional dos campos de escoamento com turbulência para $Re = 5000$ com $Ri = 0$ - Modelos de Spalart-Allmaras e Smagorinsky

Nesta secção, são apresentadas as Figs. (5.16) e (5.17), onde os respectivos modelos de turbulência de Smagorinsky e Spalart-Allmaras são utilizados para o processo de transferência de energia das grandes para as pequenas escalas de turbulência, para moderados números de Reynolds. De maneira diferente em relação às outras figuras vistas até o momento, são apresentadas nesta secção as Figs. (5.16 - (c)) e (5.17 - (i)) que representam a viscosidade efetiva para as regiões parietais para o mesmo tempo adimensional nos diferentes casos.

Foi necessário ajustar o modelo original de Smagorinsky, pois no modelo original não ocorre o amortecimento da viscosidade turbulenta próximo das paredes, algo que não é fisicamente consistente, pois nas regiões de camada-limite, os modelos de turbulência devem apresentar velocidades relativamente baixas e, conseqüentemente, não devem apresentar valores elevados para a viscosidade efetiva, podendo resultar em um deslocamento prematuro da camada-limite.

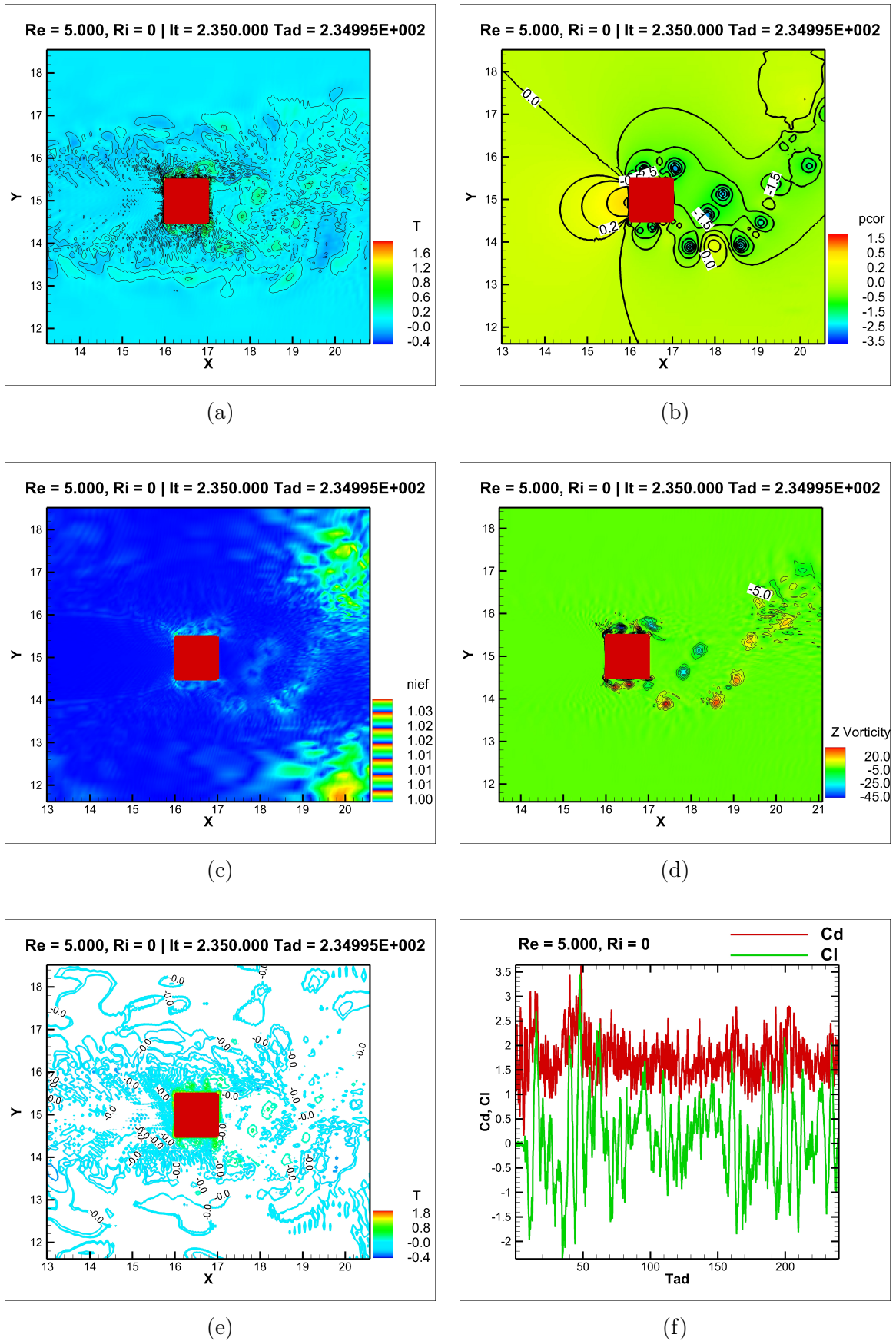


Figura 5.16: Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l), para $Re = 5000$ com $Ri = 0$.

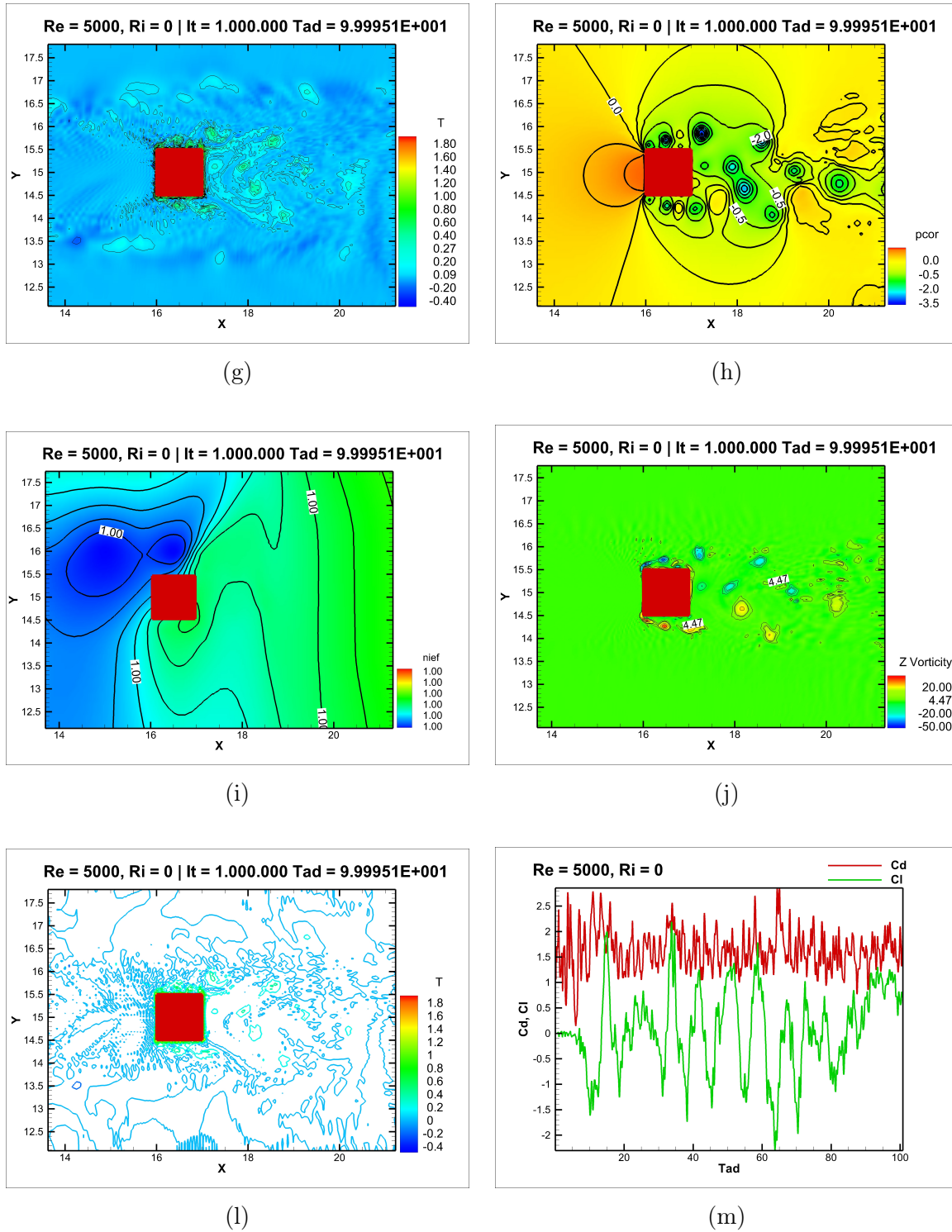


Figura 5.17: Modelo de Spalart-Allmaras para os campos simplificados de (g) temperatura, (h) pressão, (i) viscosidade efetiva, (j) vorticidade, (l) linhas isotérmicas, e (m) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l), para $Re = 5000$ com $Ri = 0$.

As Figs. (5.16 - (c) e (d)) e (5.17 - (i)) e (5.17 - (j)) apresentam a viscosidade efetiva total e os campos de vorticidade para $Re = 5000$. A viscosidade efetiva próximo da parede é calculada pelos modelos *LES* e *URANS* respectivamente, e possuem a mesma magnitude aproximada da viscosidade efetiva para as regiões à jusante do corpo imerso. Já nas regiões da esteira, a viscosidade efetiva pode assumir valores elevados, inibindo o desprendimento de vórtices como pode ser observado na Fig. ((5.17 - (j))).

Em relação aos coeficientes aerodinâmicos, apresentados pelas Figs. (5.16 - (f)) e (5.17 - (m)), observam-se oscilações mais nítidas no coeficiente de arrasto (C_d). Em outras palavras, isso significa que o processo de geração e desprendimento de vórtices é totalmente turbilhonar no escoamento. O mesmo acontece com o coeficiente de sustentação (C_l).

A Tab. (5.3) apresenta resultados para o coeficientes médio de arrasto (C_d), para diferentes números de Reynolds, e comparados com os coeficientes de arrasto dos trabalhos de Breuer et al. (2000) e Perumal et al. (2012), onde ambos os autores utilizam o método de Boltzmann com método de volumes finitos. Observou-se que, em ambas as metodologias, quando o número de Reynolds aumenta, o coeficiente de arrasto também aumenta.

O coeficiente de arrasto médio (C_d) foi calculado para todos os casos simulados, sendo utilizado o modelo *URANS*, apresentando uma boa concordância com relação à outras metodologias.

Fonte:	$Re = 40$	$Re = 50$	$Re = 100$	$Re = 500$	$Re = 5000$
$Ri = 0$					
Presente trabalho	1,34	1,36	1,36	1,38	1,57
Breuer et al. (2000)	-	1,48	1,37	-	-
Perumal et al. (2012)	-	1,21	1,80	-	-

Tabela 5.3: Coeficiente médio de arrasto para o escoamento em torno de um cilindro quadrado isotérmico para diferentes números de Re com $Ri = 0$.

Na seção a seguir é apresentado os resultados da variação no número de Strouhal (St) em função do número de Reynolds. Por outras palavras, trata-se da frequência de desprendimento dos vórtices, calculado através de um parâmetro adimensional, denominado número de Strouhal (St). Este parâmetro foi obtido através de uma implementação desenvolvida em *Matlab*[®], através da aplicação da *Transformada Rápida de Fourier* do sinal do coeficiente de sustentação e determinado com base no pico dominante do espectro.

5.3.2.1 Frequência de desprendimento de vórtices para o cilindro quadrado isotérmico

A frequência de desprendimento de vórtices é representada pelo número adimensional de Strouhal (St). Na Tab. (5.4) apresentamos alguns números de Strouhal que obtivemos e comparámos com os resultados apresentados no trabalho de Sohankar et al. (1999) para o cilindro quadrado isotérmico para números de Reynolds moderados. Estes autores utilizaram a correlação:

$$St \approx -3,7 + 0,18 \times Re. \quad (5.11)$$

Presente trabalho			Sohankar et al. (1999)
$Ri = 0$	<i>URANS</i>	<i>LES</i>	<i>DNS</i>
$Re = 500$	0,0910	0,0922	0,174
$Re = 5000$	0,1537	0,1540	-
Presente trabalho			Sohankar et al. (1999)
$Ri = 1,0$	<i>URANS</i>	<i>LES</i>	<i>DNS</i>
$Re = 500$	0,1227	0,1230	-
$Re = 5000$	0,1535	0,1537	-

Tabela 5.4: Números de Strouhal para diferentes Re e Ri .

Observar que os resultados comuns apresentados na Tab. (5.4), correspondente a $Re = 500$, apresentam uma boa concordância numérica. Durante as simulações numéricas, as metodologias *URANS* e *LES* revelam-se adequadas, quando se deseja analisar compartimentos do tipo transiente em escoamentos devido ao alto nível de viscosidade turbulenta produzida pelos modelos utilizados no presente trabalho.

O modelo *URANS* está mais destinado ao estudo envolvendo o comportamento médio do escoamento. Logo, este modelo captura menos informações ligadas a fenômenos físicos transientes. Em contrapartida, o modelo *LES* apresenta maior resolubilidade na captura dos fenômenos associados às grandes escalas. Logo, esta classe de modelos de turbulência caracteriza-se pelo cálculo de menores níveis de viscosidade turbulenta. Por esta razão, a frequência de desprendimento é ligeiramente maior no modelo *LES*, quando comparado com o modelo *URANS* para diferentes números de Re e Ri .

5.4 Simulação em torno de cilindros isotérmicos em tandem

Nesta secção, será estudado o escoamento em torno de um par de cilindros circulares aquecidos com diferentes configurações, onde o processo de transferência de calor em torno de obstáculos tem a sua importância e relevância em problemas de engenharia.

Os fenômenos de transporte, que ocorrem a jusante de vários corpos, são comuns em muitas aplicações tecnológicas, como em trocadores de calor, em torres de resfriamento, resfriamento eletrônico, dentre outras possibilidades. O fenômeno mais notável para esse tipo de escoamento é a geração de uma esteira de vorticidade complexa, que, eventualmente, se torna mais complexa, quando sofre a influência da transferência de calor.

Um volume considerável de trabalhos de investigação que envolvem a transferência de calor em torno de um ou mais cilindros circulares ou quadrados, estão disponíveis na literatura. Alguns trabalhos importantes, como os de Jafroudi and Yang (1986), Zdravkovich (1997), Sohankar et al. (1999), Yen et al. (2008), Chatterjee (2010), Laidoudi and Bouzit (2016), ou Santos et al. (2018). É importante aqui considerar que o estudo em torno de pares de cilindros tem recebido considerável atenção, tanto do ponto de vista acadêmico quanto industrial.

No presente caso, serão considerados apenas duas configurações dos cilindros, onde, em ambos os casos, os dois cilindros possuem os diâmetros iguais (d) e a mesma distância centro-a-centro (L_{cc}). No primeiro caso, o ângulo formado pelo segmento que une os centros dos dois cilindros e o eixo das abscissas é zero; no segundo caso, este ângulo é φ_m (ver Figs. (5.18)).

A Fig. (5.18)-(a) representa a configuração em tandem (alinhada) e a Fig. (5.18)-(b) representa a configuração deslocada, ou com angulação, sendo que a posição do par de cilindros é expressa através do espaçamento longitudinal (L_{cc}) e pelo espaçamento transversal T . O cilindro A, localizado a montante, está fixo, enquanto que o cilindro B, localizado a jusante, tem a sua posição variável em relação ao cilindro A, conforme o ângulo de montagem φ_m , que varia no intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

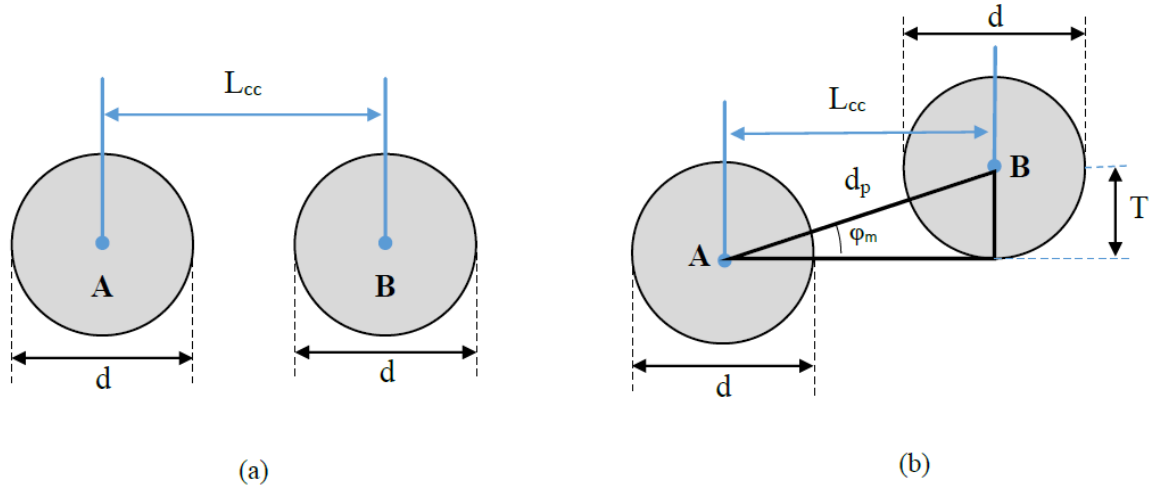


Figura 5.18: Ilustração da configuração de dois cilindros: (a) - Configuração de cilindros alinhados (cilindros em *tandem*, isto é, $\varphi_m = 0^\circ$) e (b) - Configuração de cilindros apresentando angulação, ou deslocamento, a jusante com $0^\circ < \varphi_m < 90^\circ$.

É importante considerar uma outra aplicabilidade para este caso em específico, pois ao se inibir o processo de transferência de calor, pode-se estender este estudo para o escoamento em torno de um conjunto de *risers*, o qual está também sujeito a escoamentos cisalhantes devido às correntes marítimas.

Um *riser* é uma tubulação utilizada por navios petroleiros, ou por plataformas denominadas de *off-shore*, destinada à drenagem e produção de petróleo e seus derivados obtidos no fundo do solo oceânico. A Fig. (5.19) ilustra um cenário representando os *risers* com estrutura flexível (saindo do navio petrolífero) num sistema de produção submarino. Este modelo flexível de *riser* facilita o processo de drenagem de petróleo, específico para condições marítimas e/ou meteorológicas adversas.

O escoamento em torno dos *risers* é muito complexo, pois deve-se considerar no problema a variação de intensidade e direção das correntezas marítimas com relação à profundidade oceânica.

A dinâmica do escoamento em torno dos chamados corpos rombudos, possui uma relação direta com as características relacionadas com as cargas fluido-dinâmicas que atuam em torno de corpos imersos, sendo isto, objeto de investigação em muitos trabalhos científicos. Assim, uma outra versatilidade do código desenvolvido no presente trabalho, denominado de *IBM/Termo-Turb*, é que pode-se inibir a equação da energia sem perdas de generalidades e robustez em sua estrutura, mantendo-se eficaz e confiável com relação aos seus dados. Por outras palavras, é possível realizar um estudo para diferentes geometrias com diferentes configurações. Portanto, diferentes análises podem ser obtidas para diferentes fenômenos (físicos) fluido-dinâmicos.

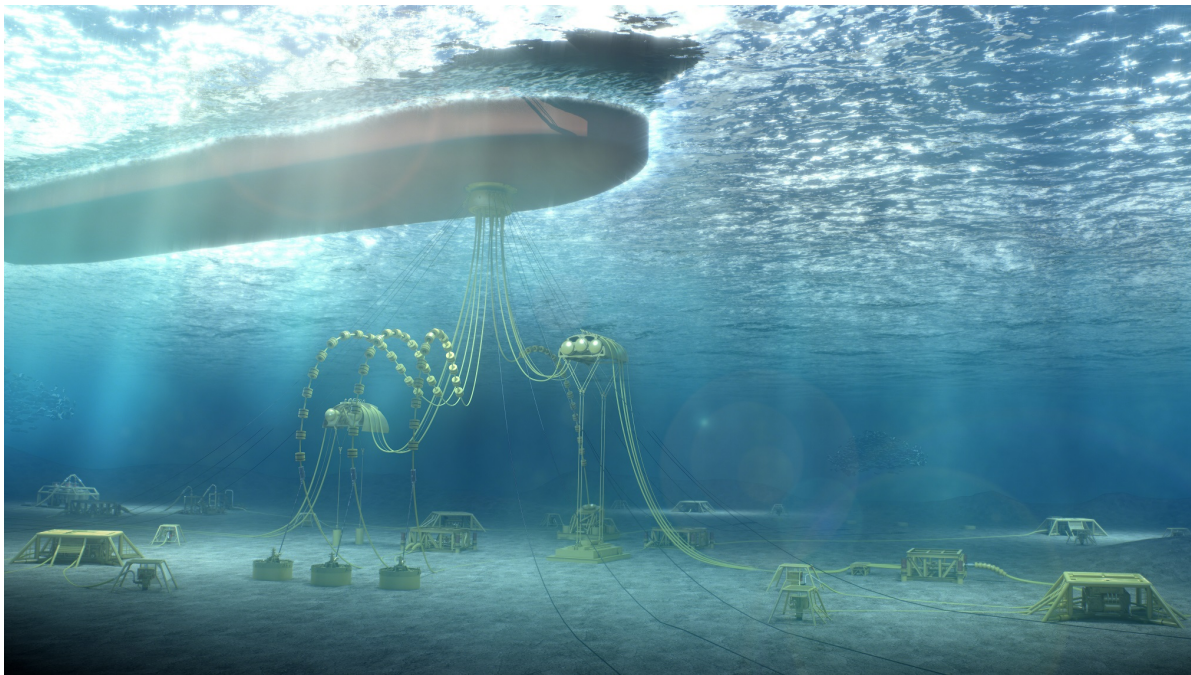


Figura 5.19: Ilustração de risers. Fonte: <https://www.nov.com/home.aspx>

Retornando aos casos simulados de interesse no presente trabalho, os dois cilindros, apresentados na Fig. (5.18), estão dispostos de tal modo que a distância mínima da superfície de cada cilindro até o fim da região da malha uniforme é de $1,25d$ na direção x e de $2d$ na direção y , conforme a Fig. (5.20), para a configuração alinhada e para a configuração com angulação.

A malha utilizada foi de 404×163 pontos e o domínio de cálculo com as dimensões $55d \times 30d$. Assim, como nas demais simulações, o escoamento desenvolve-se da esquerda para a direita, com perfil de velocidade uniforme, sendo imposta na entrada do domínio, levando-se em conta uma função de amortecimento na saída do domínio para evitar problemas decorrentes da reflexão de vórtices.

5.4.1 Cilindros circulares isotérmicos em tandem

Uma quantidade considerável de pesquisas tem sido direcionada para o escoamento de fluidos Newtonianos com transferência de calor em torno de um único cilindro circular e/ou quadrado. No entanto, não há resultados suficientes na literatura para o escoamento em torno de geometrias envolvendo transferência de calor com convecção mista associando fenômenos de turbulência, especialmente envolvendo cilindros com diferentes configurações, que por sua vez, podem causar diferentes regimes críticos na dinâmica do escoamento.

Além disso, os mecanismos de separação de vórtices, dependendo das frequências e das forças aerodinâmicas, também diferem significativamente para geometrias em *tandem*. A priori, parece haver algumas semelhanças entre os padrões de escoamento entre os corpos rombudos simples e em *tandem*, mas à medida que o número de Reynolds varia com número de Richardson, alterações importantes no escoamento surgem, alterando a sua dinâmica. Por outras palavras, para um arranjo em *tandem*, há mais complexidade no escoamento quando comparados ao escoamento em torno de corpos isolados (corpos simples) no escoamento, como por exemplo, a ocorrência de efeitos recíprocos sobre os padrões do escoamento.

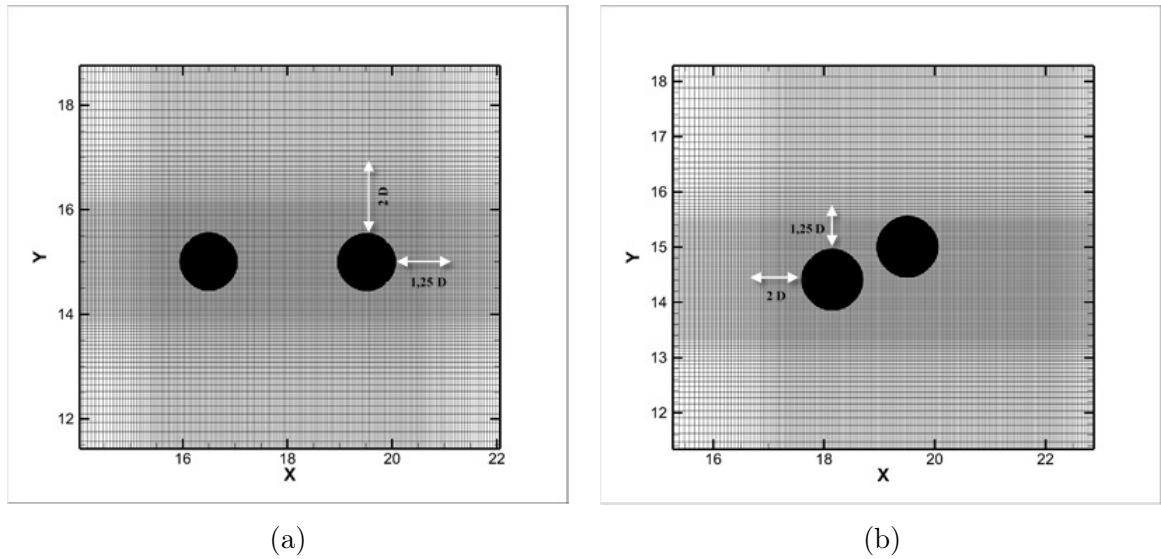


Figura 5.20: Ilustração da distância das superfícies dos cilindros aos limites da região da malha uniforme.

A partir das referências bibliográficas citadas anteriormente, é óbvio que há recursos computacionais limitados para o escoamento acoplado ao processo de transferência de calor em torno de cilindros circulares e/ou quadrados. Além disso, não há, de acordo com os nossos conhecimentos, trabalho(s) relatando sobre a transferência de calor com convecção mista implementando-se modelos de turbulência para o contexto de números de Reynolds elevados com a metodologia fronteira imersa, onde uma ampla gama de números de Reynolds e Richardson em torno de cilindros quadrados e circulares.

Assim, o objetivo desta aplicação é investigar numericamente a transferência de calor com convecção mista para dois cilindros em *tandem* com diferentes configurações, aquecidos com temperatura constante para diferentes números de Reynolds e de Richardson. Pode-se enfatizar que, quando se fala em fluidos Não-Newtonianos, como é o caso do petróleo e de outras misturas, tais como, o *etilenoglicol*¹, estes possuem vários valores para o número de Prandtl que podem variar no intervalo [10, 100]. No entanto, a proposta deste trabalho é examinar as características gerais do escoamento para o número de Prandtl específico ($Pr = 0.7$), em vez de o variar, e com isso estudar o comportamento de um fluido específico.

5.4.1.1 Descrição do problema e condições de contorno

O problema em consideração é mostrado esquematicamente nas Figs. (5.21) e (5.22), onde, em ambos os casos, os dois cilindros circulares são idênticos e fixos com o mesmo diâmetro (d), mantidos nas configurações em *tandem* e com *angulação* (ou inclinação angular) para o cilindro B a jusante do cilindro A, a montante.

¹Composto químico largamente utilizado como anticongelante automotivo.

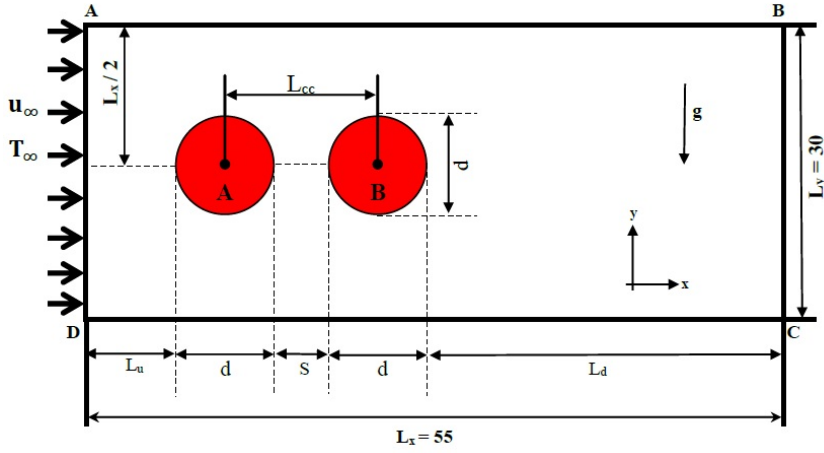


Figura 5.21: Ilustração do domínio computacional com configuração de dois cilindros em tandem.

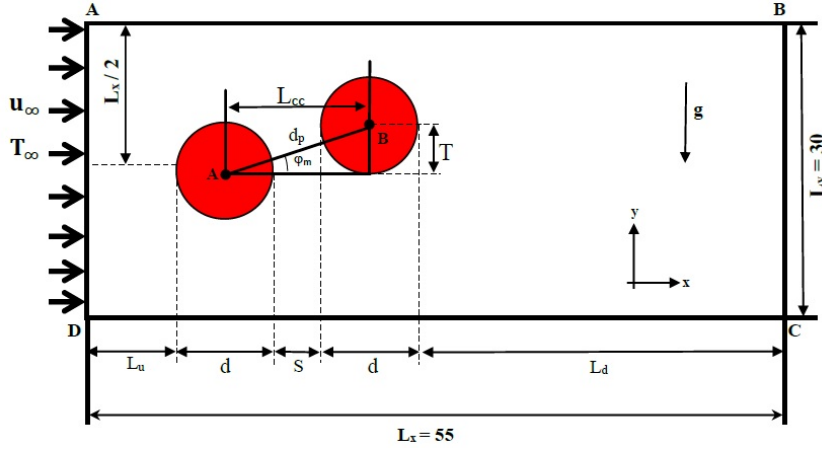


Figura 5.22: Ilustração do domínio computacional com configuração de dois cilindros em tandem com cilindro a jusante (B) apresentando angulação.

Em ambos os casos, os cilindros encontram-se confinados em um canal com escoamento livre e com velocidade uniforme (u_∞) e temperatura constante para ambos os cilindros. Por outras palavras, os cilindros estão a temperatura constante $T_c (> T_\infty)$. O espaçamento horizontal e vertical entre os cilindros são fixados em $S = 3d$. As distâncias a montante e a jusante do domínio computacional são fixadas em $L_u = 16,5d$ e $L_d = 19,5d$, respectivamente. Esses valores são escolhidos para reduzir o efeito das condições de contorno na entrada e na saída em relação ao padrão de escoamento na fronteira dos cilindros. Além disso, essas escolhas também são consistentes com outros trabalhos contemporâneos disponíveis na literatura como, por exemplo, Mahir and Altaç (2008), Sohankar and Etminan (2009), Santos (2014), Laidoudi and Bouzit (2016) e Santos et al. (2018).

Propõe-se investigar, neste caso, a transferência de calor para $100 \leq Re \leq 500$ com $Pr = 0,7$ para $Ri = 0$, considerando as configurações geométricas especificadas anteriormente. Uma distribuição de malha não-uniforme foi utilizada em torno da parede dos cilindros. A malha é mais refinada próximos dos cilindros com objetivo de capturar com precisão a esteira de vórtices a jusante do(s) cilindro(s).

O critério de convergência para as iterações internas (passo de tempo) foi de 10^{-6} para

as equações de continuidade, momentum e energia. O intervalo de tempo variou entre 0,01 a 0,1 para determinar um valor ótimo que resultou em menos tempo computacional, mas com soluções suficientemente precisas. Para $100 \leq Re \leq 500$, o número de Strouhal, St , coeficientes de arrasto, C_d , e sustentação, C_l , e o número de Nusselt médio foram obtidos.

A priori, de maneira gradual com relação à quantidade de cilindros, apresenta-se na Tab. (5.5), alguns resultados que obtivemos para um único cilindro circular isolado, sem movimentação de fronteira ou elasticidade, onde a frequência de desprendimento de vórtices é obtida pela Transformada Rápida de Fourier (*FFT*), da variação temporal, baseando-se nos dados obtidos do coeficiente de sustentação, para então calcular o número de Strouhal, o que é uma medida de fluido oscilante. O valor ótimo para o intervalo de tempo (Δt) foi determinado em 0,05, o qual foi adaptado para este estudo.

Δt	St	C_d	C_l	Nu
0,01	0,192	$1,365 \pm 0,052$	$\pm 0,700$	$7,467 \pm 0,030$
0,05	0,192	$1,374 \pm 0,048$	$\pm 0,678$	$7,474 \pm 0,028$
0,10	0,205	$1,380 \pm 0,046$	$\pm 0,715$	$7,481 \pm 0,025$

Tabela 5.5: A convergência do esquema do escalonamento temporal de primeira ordem para diferentes parâmetros para $Re = 200$.

O número de Strouhal, coeficientes de arrasto de sustentação foram calculados e tabelados comparativamente com os dados numéricos e experimentais disponíveis para $Re = 100$ (na Tab. (5.6)) e $Re = 200$ (na Tab. (5.7)). Para $Re = 100$ e 200, o número de Strouhal aproxima-se numericamente muito bem com relação aos dados experimentais de Roshko (1954), Tritton (1959), Norberg (2003) e Williamson (1991). Portanto, verifica-se que os números de Strouhal para ambas as condições de escoamento estão dentro do intervalo dos dados experimentais.

Os coeficientes de arrasto e sustentação são consistentes com os das simulações numéricas realizadas por Mahir and Altaç (2008), Meneghini (1993), Braza et al. (1986), Ding et al. (2007) e Liu et al. (1998) e os intervalos experimentais dos coeficientes de sustentação por Norberg (2003). Além de alguns déficits dos esquemas numéricos utilizados pelos autores, como estrutura da malha, etc., é atribuído essa diversidade nos valores numéricos e experimentais aos efeitos tridimensionais.

No presente caso, o coeficiente de transferência de calor local e o número de local de Nusselt são calculados a partir de

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_c = h_\theta (T_c - T_\infty), \quad (5.12)$$

$$Nu_\theta = \frac{h_\theta D}{k}, \quad (5.13)$$

onde n é a direção normal à superfície do cilindro; h_θ e Nu_θ são o coeficiente de transferência de calor local e o número Nusselt local, respectivamente, sendo θ o ângulo polar medido no sentido anti-horário em relação ao centro do cilindro. O número de Nusselt médio é avaliado por

$$\overline{Nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} Nu_\theta d\theta. \quad (5.14)$$

Com relação à transferência de calor, o número de Nusselt médio para um único cilindro isotérmico foi calculado e comparado com os valores disponíveis na literatura, a saber:

	St	C_d	C_l
Presente trabalho	0,156	$1,365 \pm 0,0026$	$\pm 0,337$
Mahir and Altaç (2008)	0,172	$1,368 \pm 0,0029$	$\pm 0,343$
Braza et al. (1986)	0,160	$1,364 \pm 0,015$	$\pm 0,25$
Ding et al. (2007)	0,166	$1,365 \pm 0,010$	$\pm 0,287$
Meneghini (1993)	0,162	1,52	-
Sa and Chang (1991)	0,155	1,23	-
Li and Humphrey (1995)	0,164	$1,35 \pm 0,012$	$\pm 0,339$
Saltara (1999)	0,160	1,33	-
Experimental			
Williamson (1991)	0,164	-	-
Roshko (1954)	0,16-0,17	-	-
Norberg (2003)	0,168	-	$\pm 0,18$ a $\pm 0,54$

Tabela 5.6: Comparação do coeficiente médio de arrasto e número de Strouhal para um único cilindro para $Re = 100$.

- A correlação de Žukauskas (1972), definida por

$$Nu = 0,51 Re^{0,5}. \quad (5.15)$$

- A correlação de Knudsen et al. (1958), definida por

$$Nu = 0,683 Re^{0,466} Pr^{\frac{1}{3}}. \quad (5.16)$$

- A correlação de Churchill and Bernstein (1977), definida por

$$Nu = 0,3 + \frac{0,62 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}{\left[1 + \left(\frac{0,4}{Pr}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{\frac{5}{8}}\right]^{\frac{4}{5}}. \quad (5.17)$$

A Tab. (5.8), apresenta o número médio de Nusselt calculado no presente trabalho com utilização do código IBM/Termo-Turb em comparação com o trabalho de Mahir and Altaç (2008), onde o autor utiliza o software *FLUENT* para as simulações a partir das correlações informadas anteriormente, isto é, para $Re = 100$, 150 e 200. O número médio de Nusselt para $Re = 100$ está de acordo com as três correlações. Como o número de Reynolds sofre um aumento, as soluções obtidas com o software *FLUENT* para os médios valores de Nusselt, resultam em torno de 2% a 4% em comparação com os resultados simulados através do IBM/Thermo-Turb. Em outras palavras, ocorre convergência numérica em comparação com as correlações empíricas, entre o software *FLUENT* e o código IBM/Thermo-Turb.

A Tab. (5.9) apresenta os parâmetros para $Re = 100$, 200 e 500 para vários arranjos em *tandem*. Para $Re = 100$, o parâmetro $L_{cc}/d = 2$ a 4 (Mittal and Iaccarino (2005)) também foi tabelado, uma vez que estes foram os únicos dados encontrados na literatura com uma variação maior para este parâmetro. Os números de Strouhal para os dois cilindros são os mesmos; assim, o número de Strouhal para o cilindro a montante é fornecido na Tab. (5.9). As

	St	C_d	C_l
Presente trabalho	0,187	1,362±0,016	±0,677
Mahir and Altaç (2008)	0,192	1,376±0,048	±0,698
Meneghini (1993)	0,196	1,25	-
Borthwick (1986)	0,188	1,02	
Braza et al. (1986)	0,200	1,40±0,05	±0,75
Arkell (1995)	0,196	1,30	-
Li and Humphrey (1995)	0,192	1,31±0,049	±0,69
Belov et al. (1995)	0,193	1,19±0,042	±0,64
Dhiman et al. (2007)	0,196	1,348±0,050	±0,659
Saltara (1999)	0,190	1,25	-
Experimental			
Williamson (1991)	0,196	-	-
Roshko (1954)	0,17-0,19	-	-
Norberg (2003)	0,18-0,197	-	±0,35 a ±0,70

Tabela 5.7: Comparação do coeficiente médio de arrasto e número de Strouhal para um único cilindro para $Re=200$.

Número médio de Nusselt				
Re	Presente trabalho	Eq. (5.15)	Eq. (5.16)	Eq. (5.17)
100	5,156±0,003	5,10	5,19	5,16
150	6,200±0,015	6,25	6,26	6,26
200	7,152±0,025	7,21	7,16	7,19

Tabela 5.8: Comparação do Nusselt médio para um único cilindro em função do número de Reynolds.

soluções numéricas de (a) - Mittal and Iaccarino (2005) são maiores aos do presente estudo. Para $Re = 200$, os parâmetros de escoamento obtidos no presente estudo são comparados com os (b) - Meneghini (1993) e (c) - Slaouti and Stansby (1992). Considerando as amplitudes de oscilação dos coeficientes de sustentação e arrasto, a concordância entre os parâmetros de escoamento, especialmente os números de Strouhal, apresentam uma boa convergência numérica.

Os coeficientes de arrasto e sustentação para cada cilindro são calculados da seguinte forma:

$$C_d = C_{dp} + C_{dv} = \frac{2 F_d}{\rho u_\infty^2 d}, \quad (5.18)$$

$$C_l = C_{lp} + C_{lv} = \frac{2 F_l}{\rho u_\infty^2 d}, \quad (5.19)$$

onde C_{lp} e C_{lv} representam os coeficientes de sustentação devido à pressão e forças viscosas, respectivamente.

De maneira semelhante, C_{dp} e C_{dv} representam os coeficientes de arrasto devido as forças de pressão e viscosas. F_l e F_d são as forças de sustentação e arrasto, respectivamente, atuando

Re	L_{cc}/d	$C_{d,1}$	$C_{l,1}$	St_m	$C_{d,2}$	$C_{l,2}$
100	2	1,222	$\pm 0,0072$	-	$\pm 0,0008$	$\pm 0,0255$
	2,5	$1,386 \pm 0,011^a$	$\pm 0,37$	0,169	-0,075	0
	3	1,202	0	-	-0,045	$0,0011 \pm 0,004$
	4	$1,342 \pm 0,0243$	$\pm 0,475$	0,153	$0,761 \pm 0,200$	$\pm 1,452$
200	2	$1,03 \pm 0,0004$	$\pm 0,031$	-	$-0,18 \pm 0,0033$	$\pm 0,14$
		$0,89 \pm 0,05^b$	$\pm 0,20$	0,130	$-0,21 \pm 0,15$	-
		$1,03^c$	-	0,130	-0,17	-
	3	$1,048 \pm 0,021$	$\pm 0,026$	0,130	$-0,53 \pm 0,012$	$\pm 0,266$
500	3	$0,8041 \pm 0,015$	$\pm 1,343$	0,216	$-0,357 \pm 0,008$	$-4,715 \pm 0,008$

Tabela 5.9: Parâmetros de escoamento do presente trabalho para $Re = 100, 200$ e 500 em comparação com dados disponíveis na literatura.

sobre a superfície do cilindro. Assim, os coeficientes de sustentação e arrasto ocorrem devido às forças viscosas e de pressão, podendo ser obtidos a partir das seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{dp} = 2 \int_0^1 (p_f - p_r) dy, \\ C_{dv} = \frac{2}{Re} \int_0^1 \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_s + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i \right\} dx + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_f + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_r \right\} dy \right], \end{array} \right. \quad (5.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{lp} = 2 \int_0^1 (p_i - p_s) dx, \\ C_{lv} = \frac{2}{Re} \int_0^1 \left[\left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_f + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_r \right\} dy + \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_s + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_i \right\} dx \right]. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Os sub-índices f, r, i e s fazem referência as partes "frontal", "posterior", "inferior" e "superior" das superfícies dos cilindros, respectivamente.

A transferência de calor entre o cilindro e o fluido circundante é calculada pelo número de Nusselt já definido anteriormente pela Eq. (5.14).

5.4.1.2 Campos do escoamento para $Re = 500$ e $Ri = 0$

A Fig. (5.23) apresentam os campos simplificados de temperaturas, pressões, viscosidades efetivas, vorticidades, linhas isotérmicas e os coeficientes aerodinâmicos de arrasto e de sustentação para o escoamento em torno de cilindros em *tandem* com $Re = 500$ e $Ri = 0$.

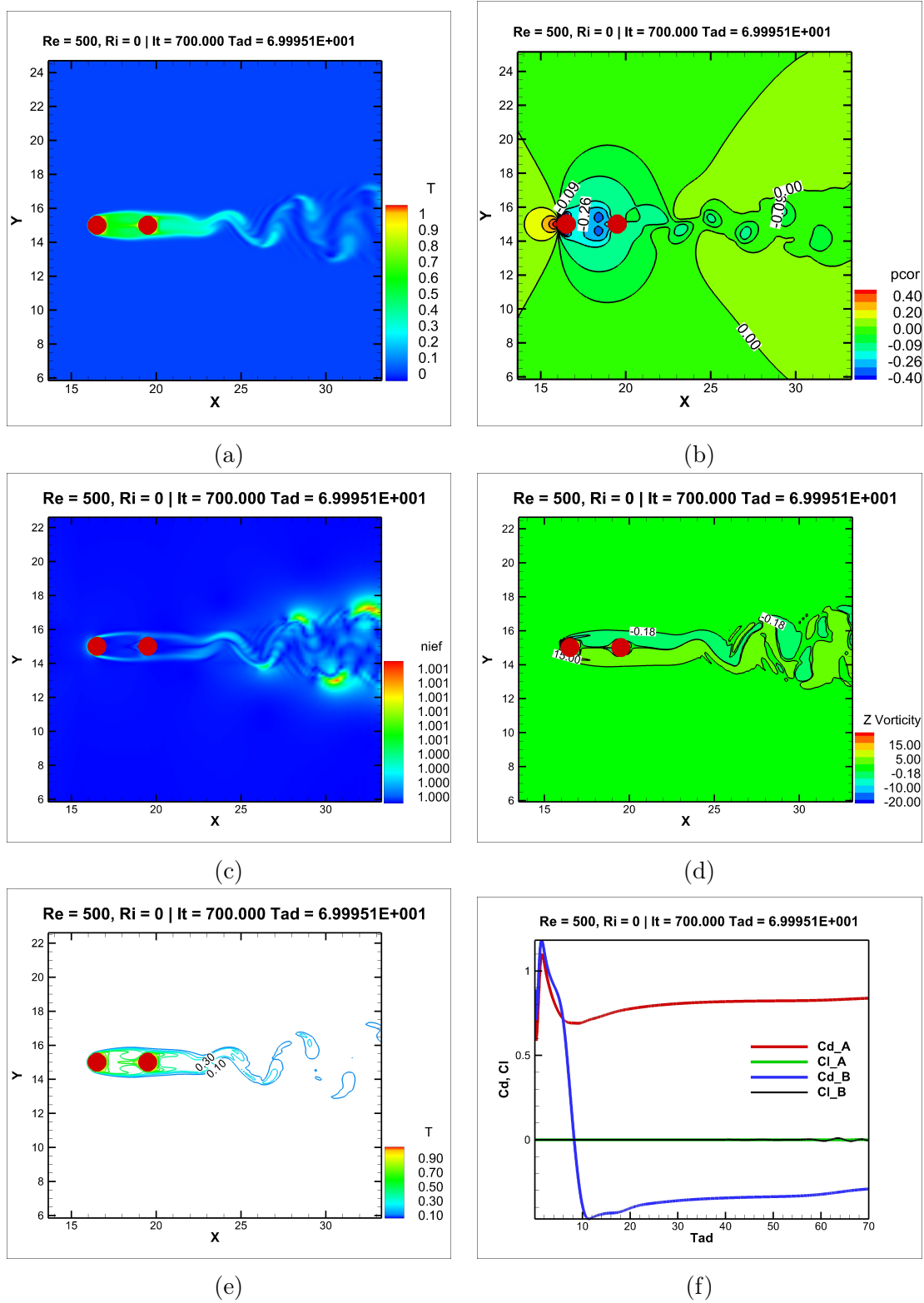


Figura 5.23: Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura e (b) pressão, (c) viscosidade efetiva, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para os respectivos cilindros A e B, para $Re = 500$ com $Ri = 0$.

5.4.1.3 Campos do escoamento para $Re = 500$ com diferentes valores de Ri

Nesta secção, a proposta é apresentar as simulações para diferentes valores de Richardson. Em outras palavras, apresentar o processo de convecção mista em torno de cilindros em *tandem* com deslocamento angular para o cilindro B em 65° em relação ao cilindro A a montante.

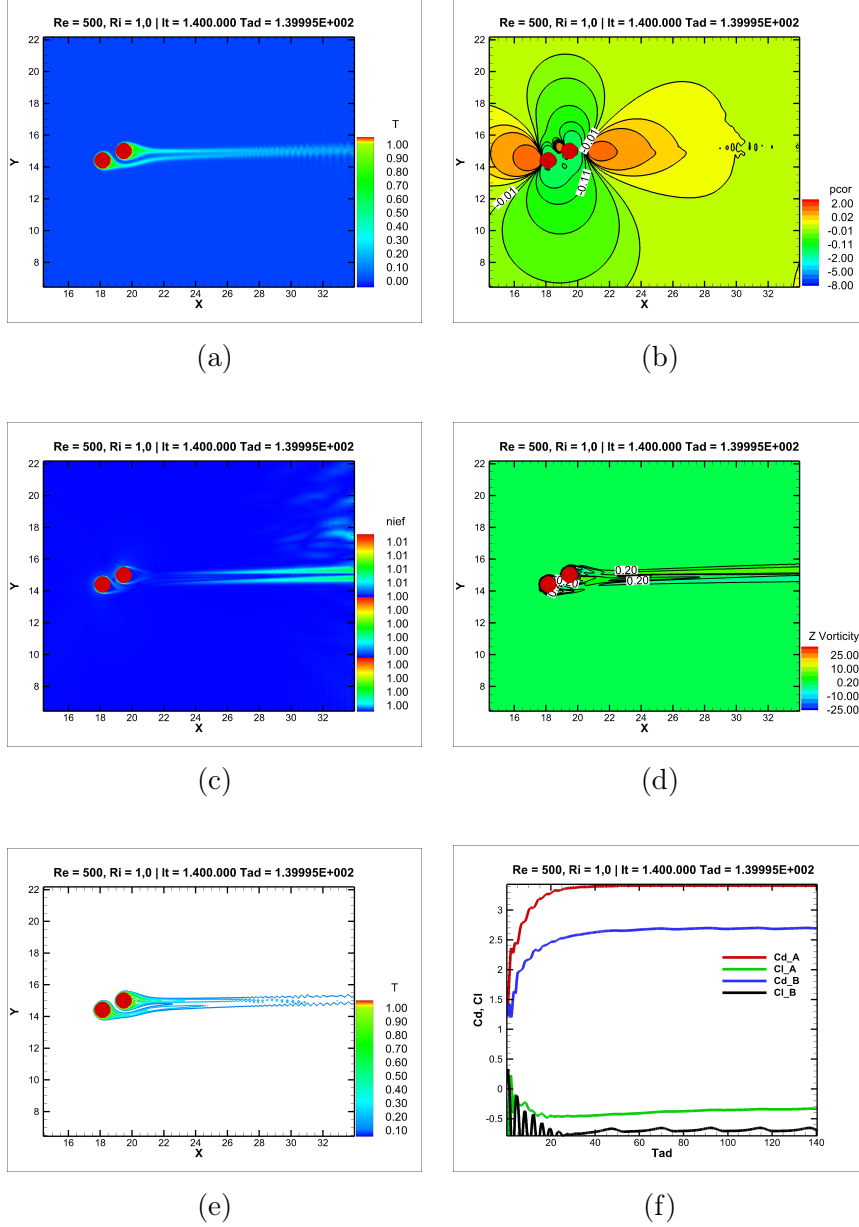


Figura 5.24: Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva total, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para cilindros com deslocamento angular de 65° , para $Re = 500$ com $Ri = 1,0$.

Para estas simulações, são apresentadas as visualizações do escoamento para o mesmo tempo adimensional, bem como as evoluções temporais dos coeficientes de arrasto e de sustentação e a frequência adimensional de desprendimento de vórtices.

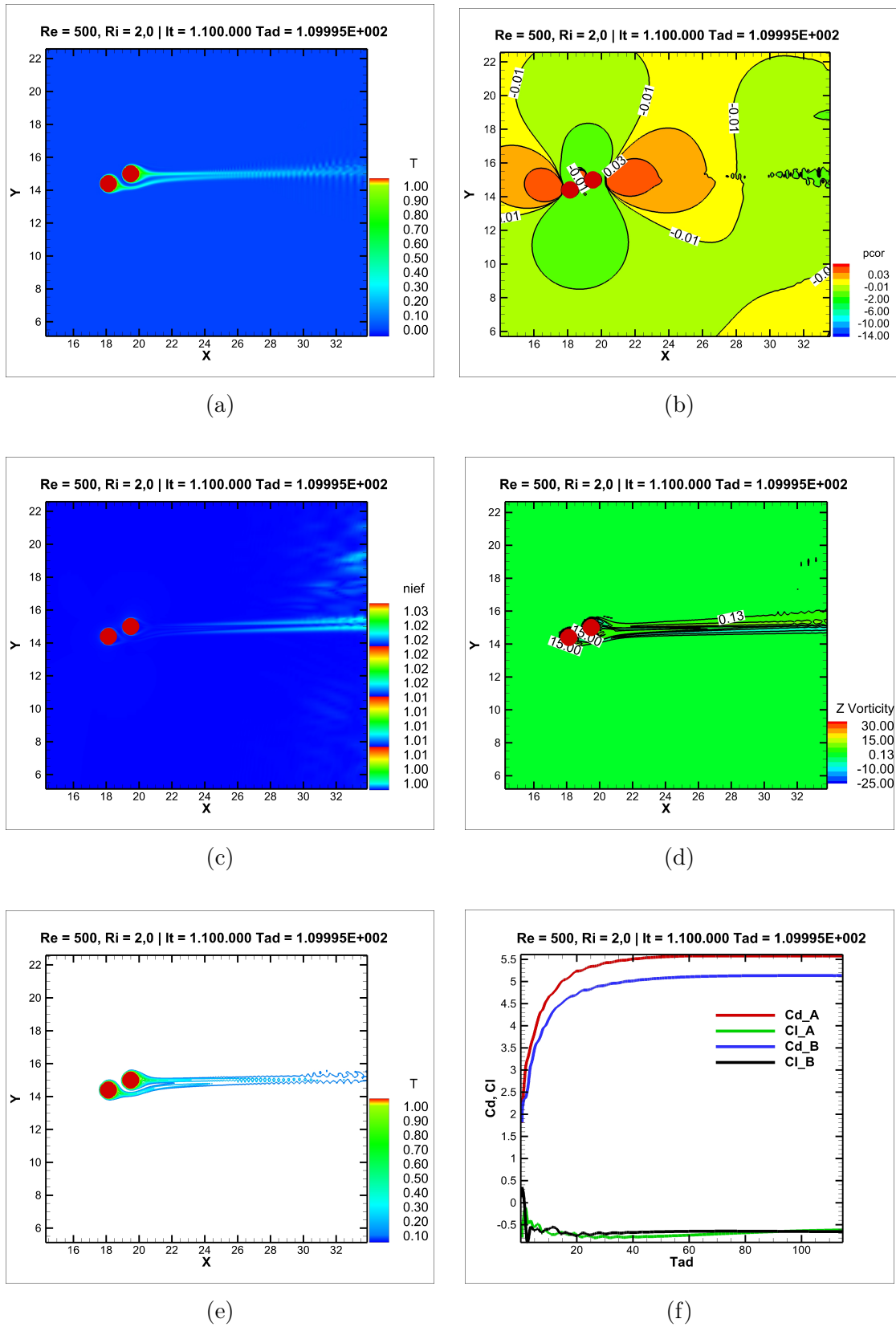


Figura 5.25: Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva total, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas, e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para cilindros com deslocamento angular de 65° , para $Re = 500$ com $Ri = 2,0$.

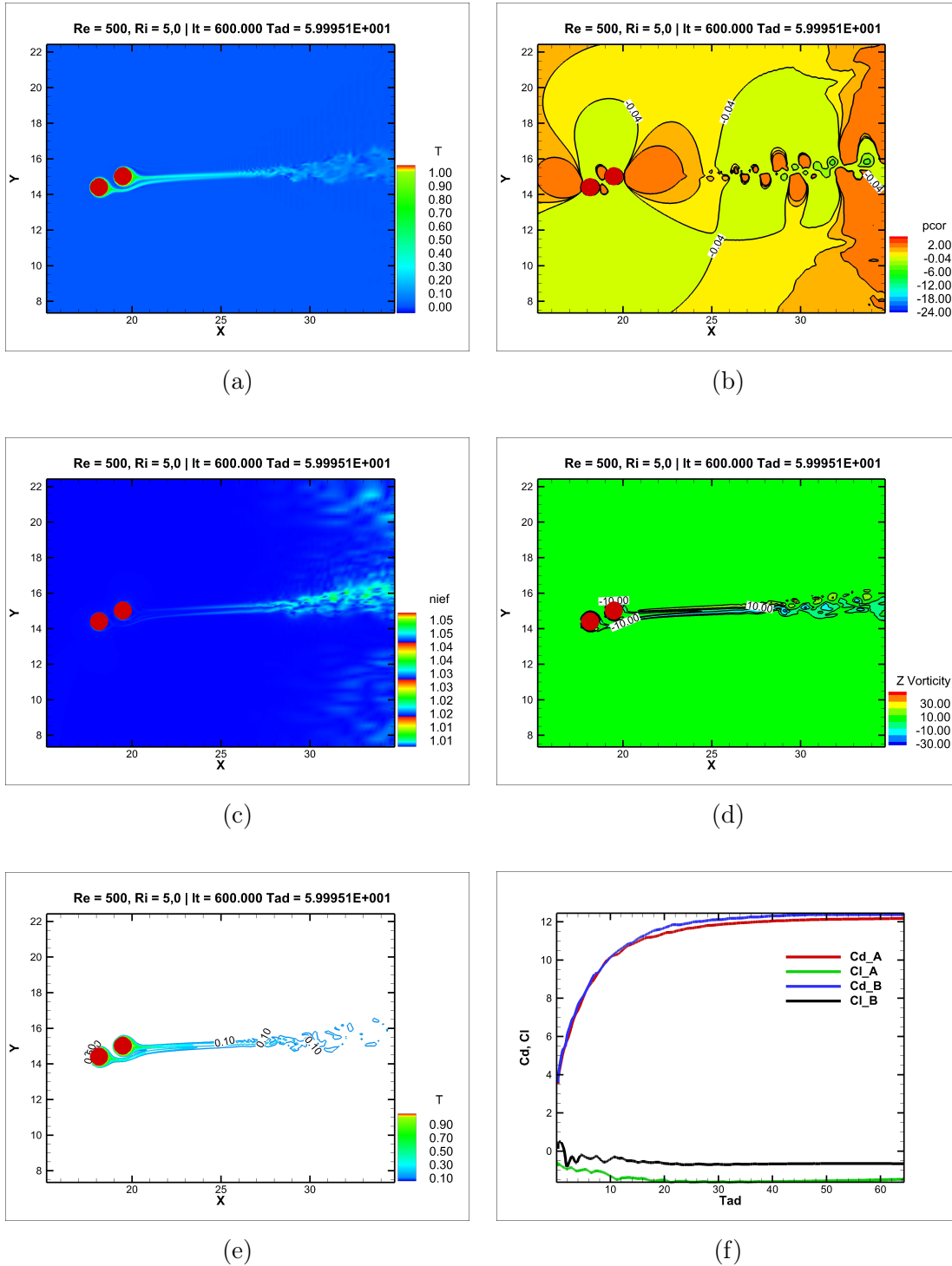


Figura 5.26: Modelo de Smagorinsky para os campos simplificados de (a) temperatura, (b) pressão, (c) viscosidade efetiva total, (d) vorticidade, (e) linhas isotérmicas e (f) coeficientes de arrasto (C_d) e de sustentação (C_l) para cilindros com deslocamento angular de 65° , para $Re = 500$ com $Ri = 5,0$.

A Tab. (5.10) representa a distribuição de alguns parâmetros importantes, como os números de Nusselt e Strouhal para diferentes números de Richardson ($Ri = 0 - 5$), fixando-se o valor da razão de espaçamento ($L_{cc}/d = 3$) entre os cilindros com ângulo de montagem igual a 65° . Em linhas gerais, é observado que o número médio de Nusselt referente ao cilindro A aumenta mais rapidamente em comparação ao cilindro B para o valor de Reynolds estabelecido, isso ocorre devido ao gradal estreitamento/afinamento das camadas-limites em torno da superfície do cilindro. No entanto, é provável que esse comportamento possa variar, se a distância entre os obstáculos aumentar.

Re	Ri	φ_m	$C_{d,1}$	$C_{l,1}$	St_{m_1}	$\overline{Nu}_{m_1}$	$C_{d,2}$	$C_{l,2}$	St_{m_2}	$\overline{Nu}_{m_2}$
500	0,0	0°	0,804	1,343	0,2165	8,8196	-0,357	-4,715	0,216	5,774
500	1,0	65°	3,354	-0,3814	-0,0333	10,147	2,571	-0,696	-0,349	8,977
500	2,0	65°	5,407	-0,689	0,0666	10,503	4,927	-0,645	0,349	9,277
500	5,0	65°	11,745	-1,547	0,079	11,131	11,998	-0,632	0,079	9,887

Tabela 5.10: Parâmetros de escoamento do presente trabalho para $Re = 500$ para diferentes valores de Ri .

Com relação a Fig. (5.23), esta simulação baseia-se no trabalho de Zdravkovich (1985), onde o autor relata três principais regimes de escoamento para cilindro em *tandem*. O autor avalia uma ampla gama de valores entre os espaçamentos entre cilindros e a formação de vórtices entre os mesmos.

Com relação às estruturas de vórtices e às linhas isotérmicas, estas são descritas para $Re = 500$ com $Ri = 0$ e $L_{cc}/d = 3$. Para $Re = 500$ com $Ri = 0$, uma formação de vórtice entre os dois cilindros não é observada; no entanto, o escoamento oscila mais a jusante do segundo cilindro, onde as oscilações aumentam formando uma esteira de vórtice na região a jusante. Como são transportados tanto a vorticidade e a energia térmica pelo campo de escoamento, os contornos de vorticidade e as isotérmicas exibem características similares. O espaçamento entre os centros ainda está abaixo do valor crítico. A camada de cisalhamento separada do cilindro a montante forma um vórtice atrás do cilindro a jusante. A energia é similarmente transportada pelo escoamento para a região a jusante.

Em seguida, o que se observa é a esteira de vórtices sendo estabelecida; no entanto, as interações dentro da esteira de vórtice com camada de cisalhamento separada do cilindro a jusante criam dois vórtices separados próximo do cilindro a jusante. A magnetude dos vórtices aumenta devido ao movimento mais rápido do fluido e ao desprendimento de vórtices.

Com respeito às simulações numéricas das Figs. (5.24) – (5.26), estas trazem o efeito da transferência de calor por convecção mista entre dois cilindros circulares isotérmicos em *tandem* com um deslocamento angular entre os cilindros, onde a flutuabilidade está presente em um canal no plano horizontal. Os principais resultados podem ser resumidos da seguinte maneira:

- Uma esteira forma-se a jusante do segundo cilindro, mas precisa verificar se esta pode ser diminuída ou suprimida com o aumento entre as distâncias entre os cilindros;
- As linhas isotérmicas refletem o mesmo comportamento físico a partir do padrão das linhas de corrente;
- O número médio de Nusselt aumenta para o $Re = 500$ para diferentes valores de Ri , mesmo mantendo a distância entre os cilindros;

- A flutuabilidade térmica é suprimida nas zonas de recirculação atrás dos cilindros em *tandem*, mesmo apresentando ângulo de montagem;
- A flutuabilidade térmica tem tendência a aumentar o coeficiente de força de arrasto (C_d) e o número médio de Nusselt do primeiro cilindro mais do que o segundo;
- Existe a necessidade de se verificar com mais detalhes a nível numérico o que ocorre no espaço entre os cilindros com relação ao efeito da diferença térmica entre a flutuação no primeiro e no segundo cilindro.

5.4.1.4 Variações do número local de Nusselt

Um dos principais objetivos dos cálculos de transferência de calor é determinar a transferência local e total (ou global) de cilindros isotérmicos. O efeito do escoamento, especialmente com relação à transferência de calor, pode ser melhor observado analisando o coeficiente de transferência de calor local, também conhecido como o número local de Nusselt.

Nas Figs. (5.27-(a)) e (5.27-(b)), para $L_{cc}/d = 3$, $Re = 100, 200$ e 500 para diferentes números de Richardson, as distribuições locais de números de Nusselt ao longo do perímetro dos cilindros a montante e a jusante são fornecidas. Para $L_{cc}/d = 3$, embora o perfil local do número de Nusselt do cilindro a montante seja semelhante ao de um cilindro isolado, o cilindro a jusante apresenta características completamente diferentes. Como a taxa de transferência de calor está intimamente relacionada com o escoamento, as taxas mínimas locais de transferência de calor aparecem nos pontos de estagnação da frente e de trás do cilindro a jusante, onde as magnitudes de velocidade são relativamente pequenas.

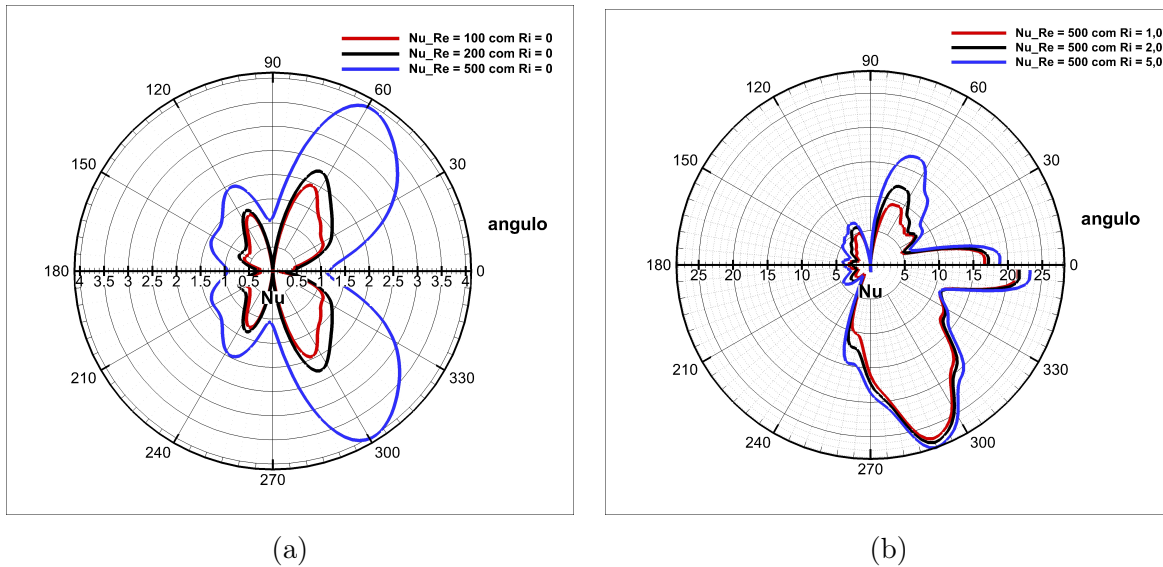


Figura 5.27: Variação local do número de Nusselt para o mesmo instante adimensional. (a) - $Re = 100, 200$ e 500 para $Ri = 0$ e (b) - $Re = 500$ para $Ri = 1, 0; 2, 0$ e $5, 0$.

Assim, na Fig. (5.27-(a)), a máxima transferência de calor do cilindro a jusante exibe-se com uma dupla protuberância ocorrendo em $\theta \approx 57^\circ$ e $\theta \approx 265^\circ$ da parede do cilindro, onde as camadas-limite térmicas (também conhecidas por plumas térmicas) e hidrodinâmicas tornam-se mais finas.

A formação de vórtices na região a jusante do cilindro coincide com a oscilação do número de Nusselt médio de grande amplitude para a baixa amplitude durante um período de libertação de vórtice para $L_{cc}/d = 3$ e $Re = 500$ para diferentes valores de Ri como visto na Fig. (5.27-(b)). É importante notar que, embora a distribuição local do número de Nusselt do cilindro a jusante se assemelhe à do cilindro a montante tipificado com uma grande protuberância, a sua magnitude é menor do que a do cilindro a montante, indicando menor transferência de calor do cilindro a jusante.

Na Tab. (5.11), para $Re = 100$ e $Re = 200$ para $Ri = 0$ (convecção forçada), os números médios de Nusselt para os cilindros a montante (Nu_A) e a jusante (Nu_B) com suas amplitudes oscilantes são tabelados em função da relação L_{cc}/d . Estes resultados são validados com o trabalho de Mahir and Altaç (2008).

Re		L_{cc}/d	Nu_A	Nu_B
100	Presente trabalho	3	4,72	$\pm 2,00$
	Mahir and Altaç (2008)	3	4,74	2,03
200	Presente trabalho	3	6,431	3,50
	Mahir and Altaç (2008)	3	6,560	3,54

Tabela 5.11: Os números médios de Nusselt para os cilindros a montante e a jusante em função do número de Reynolds e da relação L_{cc}/d .

Portanto, para $Re = 100$, o número médio de Nusselt para ambos os cilindros a montante e a jusante, não oscilam de maneira significativa. Por outras palavras, os valores médios de Nusselt para os dois cilindros são quase constantes. Por outro lado, para $Re = 200$, os números médios de Nusselt para os cilindros a montante e a jusante aumentam, onde uma oscilação significativa é observada no cilindro a jusante. Em termos numéricos, as perdas de calor convectivas do cilindro a jusante diminuem em torno de 20% devido à dinâmica do escoamento causada pelo cilindro a montante.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas futuras

Este livro foi desenvolvido e validado por um código computacional desenvolvido para a solução numérica de escoamentos bidimensionais de fluidos Newtonianos incompressíveis, considerando os processos de transferência de calor por convecção mista (natural e forçada) juntamente com o fenômeno de turbulência, sendo este último estando presente em moderados números de Reynolds para diferentes números de Richardson, sendo avaliados e validados.

Um dos objetivos deste livro é de familiarizar o leitor sobre a modelagem dos fenômenos físicos realizando uma descrição físico-matemática e computacional dos fenômenos envolvidos, sendo desenvolvido para isto um código com baixo custo computacional frente a outras metodologias existentes. Com isso, buscou-se dar continuidade ao desenvolvimento do Método de Fronteira Imersa acoplado ao Modelo Físico Virtual para a modelação, simulação e análise de escoamentos turbulentos combinado aos processos de transferência de calor por convecção mista em problemas de fronteiras estacionárias/móveis sem elasticidade. Nesse contexto diferentes resultados foram obtidos ao longo deste trabalho.

Em linhas gerais, a metodologia denominada de Fronteira Imersa utilizada no presente trabalho é baseada nas equações de Navier-Stokes acrescidas de um termo de força ou termo forçante que realiza a modelação da interface imersa.

As discretizações foram realizadas por Diferenças Finitas e as condições de contorno foram impostas de maneira apropriada sobre o domínio e sobre o corpo imerso no escoamento. A obtenção dos campos de velocidade, no instante de tempo atual, é realizado através da informação de instantes precedentes. Para a primeira iteração, utilizou-se o método de Euler de primeira ordem. Para o avanço temporal das equações de movimento foi utilizado o esquema de Adams-Bashforth de segunda ordem, com um método centrado espacial também de segunda ordem, sendo estes fundamentais para a estabilidade da metodologia.

Este pretendeu contribuir com a aplicação desta metodologia em problemas de escoamento em torno de corpos complexos, associando transferência de calor por convecção mista com modelos de turbulência para o processo de transferência de energia entre as pequenas e grandes escalas da turbulência, sendo que, sem esse procedimento numérico, a energia cinéticas das chamadas instabilidades físicas se acumularia resultando em uma divergência numérica.

Foram realizadas simulações de escoamentos em torno de um cilindro quadrado isotérmico (com temperatura constante em sua superfície) e em torno de cilindros circulares isotérmicos com e sem angulação em *tandem*. Constatou-se que as simulações apresentaram convergência numérica quando comparada com outros trabalhos disponibilizado nas referências deste trabalho. O diferencial desta investigação está no fato do desenvolvimento de um código computacional que apresenta baixo tempo de processamento, além do fato de agregar diferentes

fenômenos físicos, como é o caso da convecção mista e o processo inicial da turbulência. A maior parte dos trabalhos disponíveis na literatura, apresentam essa temática de maneira segregada, trazendo apenas baixos números de Reynolds na sua maioria, limitando-se apenas aos processos de transferência de calor por convecção forçada ou natural. Ainda nos dias atuais, poucos são os trabalhos que trazem escoamentos, onde a flutuabilidade no escoamento age de forma perpendicular à direção horizontal.

Neste trabalho, baixos e moderados valores para o número de Reynolds $1 \leq Re \leq 5000$ com diferentes números de Richardson foram considerados juntamente com os modelos de turbulência de Smagorinsky e Spalart-Allmaras. Os parâmetros do escoamento, como os números de Strouhal, os coeficientes de sustentação e de arrasto, são obtidos e comparados com a literatura disponível, verificando assim a robustez dos resultados obtidos pelo nosso código. Os campos simplificados de temperatura, pressão, turbulência, vorticidade e as linhas isotérmicas foram obtidos para entender e interpretar o escoamento e o transporte de calor. Além dos números médios de Nusselt, os números locais de Nusselt ao longo do perímetro dos cilindros, a montante e a jusante, foram obtidos. Observou-se que, para números de Reynolds moderados, os números locais de Nusselt do cilindro a jusante exibem uma geração de plumas térmicas que se movem no sentido ascendente, estando este facto relacionado com o aumento do número de Richardson.

Portanto, diante dos resultados apresentados no presente trabalho, a metodologia de Fronteira Imersa apresenta-se promissora para a simulação de escoamentos incompressíveis. Desta maneira, como perspectivas em relação a futuros trabalhos, podem ser listados os seguintes interesses:

- Análise da dinâmica do escoamento para os casos de rotação e rotação-oscilação em cilindros circulares para números de Reynolds mais elevados;
- Implementação de outros modelos de turbulência, uma vez que o modelo de Smagorinsky, no contexto *LES*, aumenta a viscosidade próxima ao corpo imerso, afetando dessa maneira os valores das forças fluido-dinâmicas e, conseqüentemente, os parâmetros da estrutura imersa;
- Simulação e análise da dinâmica do escoamento para interação fluido-estrutura, envolvendo dois cilindros isotérmicos, sendo um deles fixo e o outro ancorado a uma mola para a condição de um e dois graus de liberdade;
- Modelação híbrida tridimensional para combustão turbulenta em sistemas termo-químicos;
- Modelação e simulação numérica em meios porosos;
- Modelação da turbulência e das forças aparentes em sistemas não-inerciais em máquinas de fluxo radial ou axial;
- Modelação e simulação de escoamentos tridimensionais compressíveis, dentre outros importantes tópicos.

Referências Bibliográficas

- Anjaiah, N., Dhiman, A., and Chhabra, R. (2006). Mixed convection heat transfer from a square cylinder to power-law fluids in cross-flow. In *ASME 2006 2nd Joint US-European Fluids Engineering Summer Meeting Collocated With the 14th International Conference on Nuclear Engineering*, pages 1435–1444. American Society of Mechanical Engineers.
- Aris, R. (2012). *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Courier Corporation.
- Arkell, R. (1995). *Wake Dynamics of Cylinders Encountering Free Surface Gravity Waves*. PhD thesis, Ph. D. thesis, University of London, UK.
- Arruda, J. (2004). *Modelagem Matemática de Escoamentos Internos Forçados Utilizando o Método da Fronteira Imersa e o Modelo Físico Virtual*. PhD thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- Ashrafizadeh, A. and Hosseini, A. A. (2017). A phenomenological study on the convection heat transfer around two enclosed rotating cylinders via an immersed boundary method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 107:667–685.
- Badr, H., Coutanceau, M., Dennis, S., and Menard, C. (1990). Unsteady flow past a rotating circular cylinder at reynolds numbers 10³ and 10⁴. *Journal of Fluid Mechanics*, 220:459–484.
- Badr, H. and Dennis, S. (1985). Laminar forced convection from a rotating cylinder. *International journal of Heat and Mass Transfer*, 28(1):253–264.
- Batchelor, G. K. (1969). Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids*, 12(12):II-233.
- Belov, A., Martinelli, L., and Jameson, A. (1995). A new implicit algorithm with multigrid for unsteady incompressible flow calculations. In *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, page 49.
- Bergman, T. L. and Incropera, F. P. (2011). *Introduction to Heat Transfer*. John Wiley & Sons.
- Bornschlegell, A. S. (2008). *Implementação e Teste do Método da Fronteira Imersa para a Simulação do Escoamento em torno de Cilindros Estacionários e Rotativos*. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP), São Paulo, Brasil.
- Borthwick, A. (1986). Comparison between two finite-difference schemes for computing the flow around a cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6(5):275–290.
- Braza, M., Chassaing, P., and Minh, H. H. (1986). Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 165:79–130.

- Breuer, M., Bernsdorf, J., Zeiser, T., and Durst, F. (2000). Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-boltzmann and finite-volume. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(2):186–196.
- Carvalho, G. B. d. (2003). *Estudo Experimental do Escoamento em torno de Cilindros Circulares em Movimento de Rotação*. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP), São Paulo, Brasil.
- Chatterjee, D. (2010). Mixed convection heat transfer from tandem square cylinders in a vertical channel at low reynolds numbers. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 58(9):740–755.
- Chorin, A. J. (1968). Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104):745–762.
- Churchill, S. and Bernstein, M. (1977). A correlating equation for forced convection from gases and liquids to a circular cylinder in crossflow. *Journal of Heat Transfer*, 99(2):300–306.
- Dhiman, A., Anjaiah, N., Chhabra, R., and Eswaran, V. (2007). Mixed convection from a heated square cylinder to newtonian and power-law fluids. *Journal of Fluids Engineering*, 129(4):506–513.
- Ding, H., Shu, C., Yeo, K., and Xu, D. (2007). Numerical simulation of flows around two circular cylinders by mesh-free least square-based finite difference methods. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(2):305–332.
- Elghnam, R. I. (2014). Experimental and numerical investigation of heat transfer from a heated horizontal cylinder rotating in still air around its axis. *Ain Shams Engineering Journal*, 5(1):177–185.
- Ferziger, J. H. and Peric, M. (1997). *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer Science & Business Media.
- Frisch, U. (1995). *Turbulence: The Legacy of AN Kolmogorov*. Cambridge University Press.
- Giesekus, H. (2011). *Phänomenologische Rheologie: eine Einführung*. Springer-Verlag.
- Goldstein, D., Handler, R., and Sirovich, L. (1993). Modeling a no-slip flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, 105(2):354–366.
- Golub, G. H. and Ortega, J. M. (2014). *Scientific Computing and Differential Equations: An Introduction to Numerical Methods*. Academic Press.
- Griebel, M., Dornseifer, T., and Neunhoffer, T. (1998). *Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. SIAM.
- Huang, W.-X. and Sung, H. J. (2009). An immersed boundary method for fluid–flexible structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33):2650–2661.
- Jafroudi, H. and Yang, H. (1986). Steady laminar forced convection from a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, 65(1):46–56.
- Jones, W. and Launder, B. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(2):301–314.
- Juric, D. (1996). *Computations of Phase Change*. PhD thesis, University of Michigan.

- Kaufmann, W. J. and Smarr, L. L. (1992). *Supercomputing and the Transformation of Science*. WH Freeman & Co.
- Kim, J. and Choi, H. (2004). An immersed-boundary finite-volume method for simulation of heat transfer in complex geometries. *KSME International Journal*, 18(6):1026–1035.
- Kim, J., Kim, D., and Choi, H. (2001). An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 171(1):132–150.
- Kim, J. and Moin, P. (1985). Application of a fractional-step method to incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 59(2):308–323.
- Knudsen, J. G., Katz, D. L., and Street, R. E. (1958). Fluid dynamics and heat transfer. *Physics Today*, 12:40.
- Kolmogorov, A. N. (1941). Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. In *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, volume 32, pages 16–18.
- Kraichnan, R. H. (1967). Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids*, 10(7):1417–1423.
- Lai, M.-C. and Peskin, C. S. (2000). An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, 160(2):705–719.
- Laidoudi, H. and Bouzit, M. (2016). Mixed convection in poiseuille fluid from an asymmetrically confined heated circular cylinder. *Thermal Science*, (00):172–172.
- Leith, C. E. (1968). Diffusion approximation for two-dimensional turbulence. *The Physics of Fluids*, 11(3):671–672.
- Lesieur, M. (2012). *Turbulence in Fluids*, volume 40. Springer Science & Business Media.
- Li, G. and Humphrey, J. A. (1995). Numerical modelling of confined flow past a cylinder of square cross-section at various orientations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(11):1215–1236.
- Liao, C.-C. and Lin, C.-A. (2014). Transitions of natural convection flows in a square enclosure with a heated circular cylinder. *Applied Thermal Engineering*, 72(1):41–47.
- Lilly, D. K. (1967). The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. In *Proc. IBM Sci. Compt. Symp. Environ. Sci., White Plains, IBM, 1967*.
- Liu, C., Zheng, X., and Sung, C. (1998). Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *Journal of Computational physics*, 139(1):35–57.
- Mahir, N. and Altaç, Z. (2008). Numerical investigation of convective heat transfer in unsteady flow past two cylinders in tandem arrangements. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29(5):1309–1318.
- Meneghini, J. R. (1993). *Numerical Simulation of Bluff Body Flow Control Using a Discrete Vortex Method*. PhD thesis, University of London.
- Mittal, R. and Iaccarino, G. (2005). Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37:239–261.

- Mohd-Yusof, J. (1997). For simulations of flow in complex geometries. *Annual Research Briefs*, 317.
- Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M., et al. (2016). The finite volume method in computational fluid dynamics. *An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*, pages 3–8.
- Moulay, M. A., Belkadi, M., Aounallah, A., et al. (2017). Effect of opposing buoyancy on two-dimensional laminar flow and heat transfer across a confined circular cylinder. *Mechanics*, 23(6):859–865.
- Neto, A. S. (2003). *Turbulência nos Fluidos Aplicada*. Notas de aula. Uberlândia-MG.: Faculdade de Engenharia Mecânica Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- Norberg, C. (2003). Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *Journal of Fluids and Structures*, 17(1):57–96.
- Oliveira, J. E. S. (2006). *Método da Fronteira Imersa Aplicado à Modelagem Matemática e Simulação Numérica de Escoamentos Turbulentos sobre Geometrias Móveis e Deformáveis*. PhD thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- Page, L. G., Bello-Ochende, T., and Meyer, J. P. (2011). Maximum heat transfer density rate enhancement from cylinders rotating in natural convection. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38(10):1354–1359.
- Park, S. G., Chang, C. B., Kim, B., and Sung, H. J. (2017). Simulation of fluid-flexible body interaction with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 110:20–33.
- Patankar, S. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. CRC press.
- Patnaik, B. V., Narayana, P. A., and Seetharamu, K. (1999). Numerical simulation of vortex shedding past a circular cylinder under the influence of buoyancy. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(18):3495–3507.
- Perumal, D. A., Kumar, G. V., and Dass, A. K. (2012). Numerical simulation of viscous flow over a square cylinder using lattice boltzmann method. *ISRN Mathematical Physics*, 2012:1–17.
- Peskin, C. S. (1972). Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10(2):252–271.
- Peskin, C. S. (1977). Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25(3):220–252.
- Peyret, R. (2013). *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, volume 148. Springer Science & Business Media.
- Pope, S. B. (2001). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Reis, M. G. A. (2016). *Modelagem Numérica de Escoamentos Compressíveis Utilizando o Método da Fronteira Imersa*. Master’s thesis, Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais, Brasil.
- Remigio, S. A. E. (2005). *Simulação Numérica Bidimensional da Interação Fluido-Estrutura Através do Método Físico Virtual*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, Brasil.

- Ren, W., Shu, C., and Yang, W. (2013). An efficient immersed boundary method for thermal flow problems with heat flux boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 64:694–705.
- Rhie, C. and Chow, W. L. (1983). Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. *AIAA Journal*, 21(11):1525–1532.
- Rodi, W. (1993). *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics*. CRC Press.
- Roshko, A. (1954). On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies. *National Advisory Committee for Aeronautics*, pages 1–29.
- Sa, J.-Y. and Chang, K.-S. (1991). Shedding patterns of the near-wake vortices behind a circular cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12(5):463–474.
- Saiki, E. and Biringen, S. (1996). Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, 123(2):450–465.
- Saltara, F. (1999). *Numerical Simulation of the Flow about Circular Cylinders*. PhD thesis, University of Sao Paulo, Brazil.
- Santos, R. D., Gama, S. M., and Camacho, R. G. (2018). Two-dimensional simulation of the navier-stokes equations for laminar and turbulent flow around a heated square cylinder with forced convection. *Applied Mathematics*, 9(03):291.
- Santos, R. D. C. d. (2014). *Análise Bidimensional Termo-Fluido Dinâmica de Cilindros Rotativos com o Método da Fronteira Imersa/Modelo Físico Virtual*. Master’s thesis, Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais, Brasil.
- Schneider, G. and Zedan, M. (1981). A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. *Numerical Heat Transfer*, 4(1):1–19.
- Serrin, J. (1959). Mathematical principles of classical fluid mechanics. In *Fluid Dynamics I/Strömungsmechanik I*, pages 125–263. Springer.
- Sharma, A. (2003). *Numerical Investigation of Unconfined and Channel-Confined Flow Across a Square Cylinder with Forced and Mixed Convection Heat Transfer*. PhD thesis, PhD Thesis, Indian Institute of Technology Kanpur, India.
- Sharma, A. and Eswaran, V. (2004). Effect of aiding and opposing buoyancy on the heat and fluid flow across a square cylinder at $re = 100$. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 45(6):601–624.
- Sharma, N., Dhiman, A. K., and Kumar, S. (2012). Mixed convection flow and heat transfer across a square cylinder under the influence of aiding buoyancy at low reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(9-10):2601–2614.
- Silva, A. L. E., Silveira-Neto, A., and Damasceno, J. (2003). Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 189(2):351–370.
- Silva, A. L. F., Silva, A. R. d., and Silveira Neto, A. d. (2007). Numerical simulation of two-dimensional complex flows around bluff bodies using the immersed boundary method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 29(4):379–387.

- Silveira-Neto, A. (2002). Fundamentos da turbulência nos fluidos. *Turbulência*, 1:3–48.
- Singh, S., Panigrahi, P., and Muralidhar, K. (2007). Effect of buoyancy on the wakes of circular and square cylinders: a schlieren-interferometric study. *Experiments in Fluids*, 43(1):101–123.
- Slaouti, A. and Stansby, P. (1992). Flow around two circular cylinders by the random-vortex method. *Journal of Fluids and Structures*, 6(6):641–670.
- Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations: I. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3):99–164.
- Sohankar, A. and Etminan, A. (2009). Forced-convection heat transfer from tandem square cylinders in cross flow at low reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60(7):733–751.
- Sohankar, A., Norberg, C., and Davidson, L. (1999). Simulation of three-dimensional flow around a square cylinder at moderate reynolds numbers. *Physics of fluids*, 11(2):288–306.
- Spalart, P., Jou, W., Strelets, M., Allmaras, S., et al. (1997). Comments on the feasibility of les for wings, and on a hybrid rans/les approach. *Advances in DNS/LES*, 1:4–8.
- Spurk, J. (2013). *Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer-Verlag.
- Su, S.-W., Lai, M.-C., and Lin, C.-A. (2007). An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary. *Computers and Fluids*, 36(2):313–324.
- Tennekes, H. and Lumley, J. L. (1972). *A First Course in Turbulence*. MIT press.
- Tritton, D. (1959). Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 6(4):547–567.
- Tseng, Y.-H. and Ferziger, J. H. (2003). A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 192(2):593–623.
- Udaykumar, H., Mittal, R., Rampunggoon, P., and Khanna, A. (2001). A sharp interface cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 174(1):345–380.
- Unverdi, S. O. and Tryggvason, G. (1992). A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, 100(1):25–37.
- Van Driest, E. R. (1956). On turbulent flow near a wall. *J. Aeronaut. Sci.*, 23(11):1007–1011.
- Vedovoto, J. M. et al. (2007). *Modelagem Matemática e Simulação Numérica de Escoamentos Incompressíveis sobre Geometrias Complexas Tridimensionais Utilizando o Método da Fronteira Imersa*. PhD thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.
- Vieira, A. N. R. (2017). *Modelagem Numérica do Escoamento ao redor de Cilindros Aquecidos Rotativos em Regime Laminar e Turbulento*. Master’s thesis, Universidade Federal de Itajubá, Minas Gerais, Brasil.
- Wang, Z., Fan, J., Luo, K., and Cen, K. (2009). Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(19):4510–4518.
- Williamson, C. (1991). 2-d and 3-d aspects of the wake of a cylinder, and their relation to wake computations. *Lectures of Appl. Maths., Am. Math. Soc.*, 28:719.

- Ye, T., Mittal, R., Udaykumar, H., and Shyy, W. (1999). An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, 156(2):209–240.
- Yen, S., San, K., and Chuang, T. (2008). Interactions of tandem square cylinders at low reynolds numbers. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 32(4):927–938.
- Zdravkovich, M. (1985). Flow induced oscillations of two interfering circular cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 101(4):511–521.
- Zdravkovich, M. (1997). Flow around circular cylinders. fundamentals, vol. 1. *Oxford University Press, New York*, 3:133–198.
- Zhang, N., Zheng, Z., and Eckels, S. (2008). Study of heat-transfer on the surface of a circular cylinder in flow using an immersed-boundary method. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29(6):1558–1566.
- Žukauskas, A. (1972). Heat transfer from tubes in crossflow. *Advances in Heat Transfer*, 8:93–160.

Rômulo Damasclin Chaves dos Santos
Jorge Henrique de Oliveira Sales



conhecimentolivre.org/home



contato@conhecimentolivre.org



[editoraconhecimentolivre](https://www.instagram.com/editoraconhecimentolivre)

ANÁLISE E SIMULAÇÃO NUMÉRICA BIDIMENSIONAL EM C++ PARA A TERMOFLUIDODINÂMICA



EDITORA CONHECIMENTO LIVRE