

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ESTRATÉGIAS INTERDISCIPLINARES NO ENSINO DE LOGARITMOS

Walter Martins Rodrigues
Elmer Rolando Llanos Villarreal

$$\begin{aligned} & (\log_2(2)) - \log_2(2) \\ & - \log_2 2 - \log_2 2 \\ & 2^n \log_2 2^n - \log_2(2^n) \\ & n 2^n - \log_2(2^n) \end{aligned}$$



Walter Martins Rodrigues
Elmer Rolando Llanos Villarreal

História da Matemática e estratégias interdisciplinares no ensino de Logaritmos

1ª ed.

Piracanjuba-GO
Editora Conhecimento Livre
Piracanjuba-GO

1ª ed.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Rodrigues, Walter Martins
R146H História da Matemática e estratégias interdisciplinares no ensino de Logaritmos
/ Walter Martins Rodrigues. Elmer Rolando Llanos Villarreal. – Piracanjuba-GO

Editora Conhecimento Livre, 2023

151 f.: il

DOI: 10.37423/2023.edcl809

ISBN: 978-65-5367-388-5

Modo de acesso: World Wide Web

Incluir Bibliografia

1. ensino-contextualizado 2. história-da-matemática 3. ação-interdisciplinar I. Rodrigues, Walter
Martins II. Villarreal, Elmer Rolando Llanos III. Título

CDU: 510

<https://doi.org/10.37423/2023.edcl809>

O conteúdo dos artigos e sua correção ortográfica são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

EDITORIA CONHECIMENTO LIVRE

Corpo Editorial

MSc Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior

MSc Humberto Costa

MSc Thays Merçon

MSc Adalberto Zorzo

MSc Taiane Aparecida Ribeiro Nepomoceno

PHD Willian Douglas Guilherme

MSc Andrea Carla Agnes e Silva Pinto

MSc Walmir Fernandes Pereira

MSc Edisio Alves de Aguiar Junior

MSc Rodrigo Sanchotene Silva

MSc Wesley Pacheco Calixto

MSc Adriano Pereira da Silva

MSc Frederico Celestino Barbosa

MSc Guilherme Fernando Ribeiro

MSc. Plínio Ferreira Pires

MSc Fabricio Vieira Cavalcante

PHD Marcus Fernando da Silva Praxedes

MSc Simone Buchignani Maigret

Dr. Adilson Tadeu Basquerote

Dra. Thays Zigante Furlan

MSc Camila Concato

PHD Miguel Adriano Inácio

MSc Anelisa Mota Gregoleti

PHD Jesus Rodrigues Lemos

MSc Gabriela Cristina Borborema Bozzo

MSc Karine Moreira Gomes Sales

Dr. Saulo Cerqueira de Aguiar Soares

MSc Pedro Panhoca da Silva

MSc Helton Rangel Coutinho Junior

MSc Carlos Augusto Zilli

MSc Euvaldo de Sousa Costa Junior

Dra. Suely Lopes de Azevedo

MSc Francisco Odecio Sales

MSc Ezequiel Martins Ferreira

MSc Eliane Avelina de Azevedo Sampaio

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	5
DA GÊNESE DA INVENÇÃO À FORMULAÇÃO CONCEITUAL DOS LOGARITMOS	
Iran Abreu Mendes	
Evanildo Costa Soares	
DOI 10.37423/231008313	
CAPÍTULO 2	37
PROPOSTA DE AÇÃO DIDÁTICA: EXPLORANDO A CONSTRUÇÃO DOS LOGARITMOS	
Walter Martins Rodrigues	
José Eduardo Colle	
William Rodrigues da Silva	
Elmer Rolando Llanos Villarreal	
DOI 10.37423/231008299	
CAPÍTULO 3	57
LOGARITMOS : HISTÓRIA, APLICAÇÕES E VÍDEOS ANIMADOS	
Renato Mucciaccito	
Lúcio Tunes dos Santos	
DOI 10.37423/231008279	
CAPÍTULO 4	91
LOGARITMOS: HISTÓRIAS DE UM CONCEITO VIVO	
Walter Martins Rodrigues	
Jackson Jonas da Silva Costa	
José Eduardo Colle	
William Rodrigues da Silva	
DOI 10.37423/231008289	
CAPÍTULO 5	111
APLICAÇÕES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA EM TRANSFORMAÇÃO DE DADOS NA ESTATÍSTICA	
Walter Martins Rodrigues	
Elmer Rolando Llanos Villarreal	
Janilson Pinheiro de Assis	
Roberto Pequeno de Sousa	
Joelma de Assis França	
Robson Pequeno de Sousa	
Paulo César Ferreira Linhares	
DOI 10.37423/230908262	

CAPÍTULO 6 133

ALGUMAS REFLEXÕES A RESPEITO DO ENSINO DE LOGARITMOS HOJE E

AGRADECIMENTOS

Walter Martins Rodrigues

Jackson JonasSilva Costa

Santos Demétrio Miranda Borjas

Antônio Ronaldo Gomes Garcia

Franceliza Monteiro da Silva Dantas

DOI 10.37423/231008321

Capítulo 1



10.37423/231008313

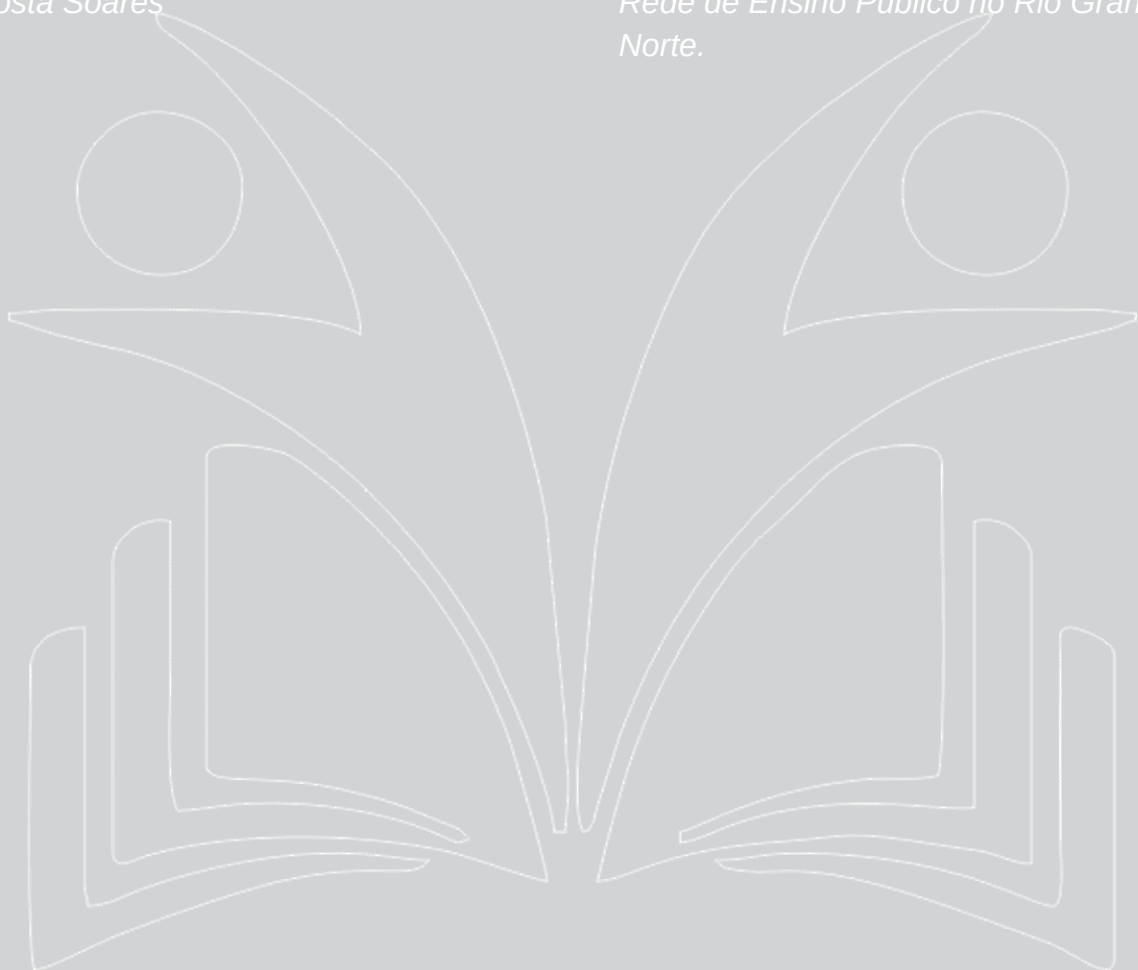
DA GÊNESE DA INVENÇÃO À FORMULAÇÃO CONCEITUAL DOS LOGARITMOS

Iran Abreu Mendes

Universidade Federal do Pará - UFPA

Evanildo Costa Soares

*Rede de Ensino Público no Rio Grande do
Norte.*



NOTA INICIAL

Este capítulo trata de uma descrição histórico-analítica sobre a formulação conceitual dos logaritmos com vistas a ampliar e complementar os estudos sobre o tema, que podem estar presentes nos livros didáticos do Ensino Médio. Neste sentido, interpretamos que a descrição apresentada poderá contribuir para fundamentar o trabalho do professor de Matemática no que diz respeito à abordagem conceitual do assunto em sala de aula, tendo como foco o desenvolvimento histórico-conceitual, que sugere esclarecimentos acerca da gênese e dos processos operacionais que envolvem os logaritmos e suas interconexões com outros campos da Matemática, em seu sentido transversalizante e interdisciplinar, que tem implicações na efetivação de uma aprendizagem compreensiva deste assunto.

DA GÊNESE: INVENÇÃO E DESENVOLVIMENTO DOS LOGARITMOS

A fundamentação histórica e epistemológica dos logaritmos conforme defende Mendes e Soares (2019) é construída a partir da invenção de mecanismos e instrumentos de cálculo que buscaram simplificar os enormes e cansativos cálculos empregados nos estudos envolvendo a astronomia e a navegação entre os séculos XVI e XVII. Três personagens foram importantes para o desenvolvimento dos logaritmos no século XVI: John Napier (1550 – 1617), Henry Briggs (1561-1630) e Jobst Burgi (1552-1632).

A invenção dos logaritmos foi um tema que entre os séculos XVII e XX se tornou muito íntimo dos estudiosos em Matemática, bem como dos professores de Matemática e, consequentemente, de seus estudantes da Educação Básica e Superior. Talvez essa intimidade seja reflexo de uma identidade que mereceu um destaque histórico entre os pequenos grupos de matemáticos e pensadores sobre a Matemática que, por suas descobertas, substancialmente aumentou a capacidade de exercício intelectual da mente humana como um agente prático em operações aritméticas. Muitos fatos históricos conhecidos do público a respeito do trabalho de Napier foram se tornando comuns na medida em que seu trabalho foi se incorporando às novas abordagens e soluções de problemas matemáticos no decorrer dos séculos XVI e XVIII, e posteriormente no tratamento de conteúdos escolares nos séculos XIX e XX.

Desses três ícones da história dos logaritmos, Napier foi um dos que mais obteve críticas positivas e negativas durante sua existência como intelectual. Dentre os diversos trabalhos produzidos por ele, o destaque foi sua invenção dos logaritmos, que ocasionou a organização de novas propostas de abordagem para as operações aritméticas, e que se desdobraram posteriormente em diversas possibilidades para se realizar práticas aritméticas e

Figura 1: Imagem extraída de Napier



Fonte: Horsburgh (1914)

trigonométricas com facilidade e rapidez, com implicações posteriores em diversas áreas científicas como a física, a biologia, a química, a astronomia e a própria matemática.

Nossos estudos realizados entre 2004 e 2019 (Mendes; Soares, 2019) tomaram como base diversos autores, inclusive Napier, para refletir sobre os modos como os historiadores interpretam a pessoa de Napier como o principal matemático a formular a ideia dos logaritmos e suas operacionalizações práticas. De certa forma, outros estudiosos compreenderam essa ideia e ampliaram seus estudos a respeito desse tema, mas não apagaram o pioneirismo e a eficácia do trabalho de Napier para o período em que lançou as bases da teoria dos logaritmos. Sendo assim é importante fazermos pelo menos uma menção sintética dos principais aspectos acerca das bases da sua formulação matemática.

ANTECEDENTES DOS LOGARITMOS DE JOHN NAPIER

De acordo com Trompler (2002), diversos estudos sobre a arqueologia ou a genealogia dos logaritmos têm mostrado que antes de Napier, a ligação de uma série de potências de um número com a sequência correspondente de expoentes, ou seja, a base fundamental da teoria logarítmica, parece remontar ao período paleobabilônico (século XVIII a.C.) e não, como alguns historiadores alegaram, que essa matriz poderia estar no Arenário¹ de Arquimedes. A contribuição babilônica pode ter sido, em alguns aspectos, mais rica que a de Arquimedes porque considerava as potências sucessivas de diferentes números.

Neste sentido, Trompler (2002) comenta, ainda, sobre a existência de um tablete didático encontrado em pesquisas arqueológicas sobre os povos babilônios, que inclui aspectos relacionados às potências de 225, de 2 a 7 e onde é solicitado para completar até 10. Outro tablete mostra a exploração das potências de 9. Além desses, também foram identificados tabletes para as potências de 16 e 100. Em outra situação foi localizado um tablete que responde a seguinte pergunta: para quanto é necessário aumentar um certo número para obter um número determinado?

Apesar do mau estado do tablete, os pesquisadores conseguiram traduzir claramente informações sobre as seguintes potências de 16 registradas no artefato:

$16^{1/4} = 2$	$16^1 = 16$
$16^{1/2} = 4$	$16^{5/4} = 32$
$16^{3/4} = 8$	$16^{3/2} = 64$

Pesquisadores concluíram que o ponto de partida de todo o problema tratado pelos babilônios provavelmente deve ser encontrado em cálculos de interesse.

Embora não conheçamos nenhuma informação concreta sobre indícios relacionados às noções de logaritmos nas pesquisas arqueológicas sobre os babilônios e nos trabalhos de Arquimedes que demonstrem evidências acerca de operações similares ao uso dos logaritmos, no Arenário, Arquimedes desenvolveu amplamente uma sequência de potências de 2, com base em seus pressupostos, supondo o número de grãos de areia que estaria dentro de uma esfera do tamanho do nosso "Universo" e, a partir daí concluiu que era bem menor que 1000 unidades da 7ª ordem dos números, ou seja, aproximado a 10^{51} (Mendes; Soares, 2019).

Sendo assim, outros métodos de cálculos que surgiram durante os séculos XIII e XIV foram importantes para o surgimento dos logaritmos idealizado no século XVII por John Napier. A manipulação e suas relações com o cálculo de potências. Assim, era possível estabelecer relações aritméticas que evidenciaram conclusões acerca do produto entre duas potências de mesma base, de uma forma ligeiramente diferente, que nós poderíamos assim traduzir, em nossa notação moderna como $a^m \times a^n = a^{m+n}$, esclarecendo que:

Nos seguintes números proporcionais $1, a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, a^n, \dots, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+n}, \dots$ onde a posição de cada número é igual ao seu expoente aumentado em 1, a distância do produto $a^n \times a^m = a^{m+n}$ para a^m é medida por números $(n+1)$ e sua distância à unidade por números $(m+n+1)$ (Mendes; Soares, 2019, p.42).

Com base nessa ideia sobre a manipulação de potências e suas relações entre soma e produto, o sistema de numeração posicional decimal, que migrou da Índia por ação dos árabes, e se espalhou em toda a Europa, possibilitou ao cálculo tornar-se muito mais fácil e prático, e um novo desenvolvimento de estudos sobre os números passou a ser possível. Neste sentido, Nicolas Chuquet (1445-1488), em seu *Triparty* na Ciência dos Números (1484)², manipulou os expoentes, pouco fixos e raramente usados cotidianamente, e até mesmo apresentou expoentes fracionários e negativos.

Em seus estudos encontrou uma relação mencionada por Arquimedes que pode ser descrita assim: "Em uma progressão geométrica, o produto do número de classe n pelo número de classe m dá como resultado o número de classe $n + m$ ". Ele tinha tudo que era preciso para introduzir os logaritmos, mas parou por aí, acrescentando: Esta consideração é obviamente um segredo que pertence aos números. Tratava-se do problema do Barril Vazio, segundo o qual cada dia de $1/10$ da sua capacidade, problema em que se perguntava se depois de quantos dias estará meio vazio. Ele observou que o problema da interpolação linear entre o 6º e o 7º dia, admitida pelos matemáticos de seu tempo, era falsa, mas não via como resolver o problema.

Como Chuquet não foi seguido em suas ideias e proposições, foi necessário que se esperasse o passar do tempo até que aparecesse o trabalho de Michael Stifel (1486-1567)³, publicado em Nuremberg em 1544, com o nome de tratado matemático *Arithmetica Integra*. No referido tratado, seu autor não hesitou em utilizar números negativos para escrever as progressões aritméticas e geométricas:

...-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2...
...1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4...

Nesta abordagem Stifel não só combinava $(3 + 5)$ com (8×32) , mas também $(-2 + -3 = -5)$ para $(1/4 \times 1/8 = 1/32)$.

A esse respeito, Naux (1966) conclui que o pensamento geométrico de Stifel não passava desse nível, uma vez que não buscava atrair a atenção do leitor sobre um possível uso de sua observação. Todavia, o autor considera que este julgamento talvez tenha sido apenas o resultado de uma falta de uma análise mais pormenorizada da sua parte, e Stifel pode ter ido muito mais longe, em direção à abordagem dada por John Napier, porque terminava seu capítulo afirmando que naquelas circunstâncias poder-se-ia escrever um novo livro quase inteiramente dedicado às maravilhas daqueles números.

Igualmente, Naux (1966) assevera que Stifel se questionou o seguinte: em que as relações digitais alcançariam a forma de uma doutrina logarítmica ainda a ser desenvolvida? todos os pressupostos eram permitidos sem uma conclusão firme sobre os méritos do caso, mas uma coisa permanecia certa: sua *Arithmetica Integra*, trabalho este que foi uma obra-prima para seu tempo, pois ela alcançou um grande sucesso com o mundo acadêmico, foi muito difundida, teve a reputação de um clássico muito grande no tempo em que Napier foi educado, e talvez possa ter exercido influência direta ou indireta na criação final dos logaritmos.

No século XVII, o desenvolvimento da astronomia, o desejo de obter resultados científicos com maior e melhor precisão nas descobertas de relações explicativas de observações experimentais, levaram cientistas como Kepler a perceber a necessidade desses procedimentos aritméticos para se cálculos difíceis (intensamente demorados), por esses modos mais fáceis e mais práticos. Isto porque a multiplicação e, em especial, a divisão continuavam a ser árduas, a extração de raízes quadradas mais ainda difícil.

Entretanto, nos meios astronômicos daquele momento se conhecia uma maneira de substituir um multiplicação por uma adição, denominada *prostafereses* (Prosthaphaeresis)⁴, que correspondia a fazer com que, por exemplo, $\cos a \times \cos b = 1 / 2(\cos(a + b) + \cos(a - b))$. Essa relação foi estabelecida por um astrônomo de origem árabe conhecido pelo nome de Ibn- Yunis, por volta do ano 1000. No final do século XVI, Christopher Clavius ampliou o método para o caso de secantes e tangentes, quando, na verdade, mostrou como encontrar o produto de dois números, contribuindo assim para a antecipação do cálculo logarítmico.

Desse modo, outros instrumentos que facilitavam os cálculos aritméticos e especificamente os multiplicativos durante os séculos XVI e XVII, foram primordiais para que Napier pudesse desenvolver um estudo mais elucidativo sobre os logaritmos e seus uso operacionais. Podemos destacar alguns dos principais instrumentos operacionais que originaram os logaritmos: As barras de Napier ou Ossos de Napier formulado por John Napier (1550-1617) e o Método de Gelosia, atribuídos à Luca Paccioli (1445-1517), desenvolvidos a partir de considerações sobre métodos multiplicativos práticos e que se supõem terem influenciado a criação das barras de Napier e posteriormente os mecanismos operadores das calculadoras, conforme destacados por Horsburgh (2014).

Desse modo, Collette (1985, p.303), no final do século XVI, Napier, preocupado porque os cálculos que precisavam ser efetivados na época eram grandes e difíceis, e de certo modo poderiam impedir o progresso científico, concentrou seus esforços em desenvolver métodos que pudessem simplificá-los.

Assim, dedicou-se ao assunto até concluir a elaboração de seu livro *Rabdologia*⁵, no qual descreveu a utilização de barras e quadrinhos para efetuar somas de parcelas parciais. Esses quadrinhos de Napier eram tábuas de multiplicações montadas sobre barras de secções quadradas.

De acordo com Horsburgh (1914, p. 14), o referido livro foi dedicado a Alexander Seton, Conde de Dunfermline, e nele Napier afirma que foi estimulado a publicar uma descrição da construção e uso de suas *barras de numeração* (dos *ossos* de numeração), porque muitos de seus amigos para quem tinha mostrado o material, ficaram tão satisfeitos com o assunto porque já estavam habituados com o uso prático dessas barras por Napier de modo que as mesmas foram sendo divulgadas para países estrangeiros.

O princípio construtivo das barras pode ser facilmente explicado imaginando dez folhas retangulares de papelão, cada qual dividida em nove quadrados. No topo das áreas deslizam os dez algarismos que são escritos, e cada um contém em seu talão retangular nove quadrados, onde estão escritos os nove primeiros múltiplos do dígito colocado no quadrado inicial da parte superior do retângulo. A Figura 2 a seguir menciona como são organizadas as barras de Napier, ou seja, os números correspondentes a 2, 0, 8, 5, colocados lado a lado em contato com o outro, e ao lado dele é colocado um ao outro deslizando, contendo, sem diagonais em quadrado, os primeiros nove dígitos. As folhas, assim, colocada em contato nos concedem os múltiplos do número 2085, os dígitos em cada paralelogramo podem ser adicionados, por exemplo, correspondente ao número 6 sobre a mão-direita, denotando, $8+3, 0+4, 2, 1$; onde encontramos 0, 1, 5, 2, 1, como os algarismos, escrito por trás de 6×2085 .

As barras de Napier ou ossos de Napier são compostos por dez quadrilongos pedaços de madeira ou outro material na forma quadrada. Cada uma das quatro faces da barra contém múltiplos de cada um dos nove dígitos, e é semelhante a uma das folhas acima descrita, a primeira contendo a barra dos múltiplos de 0, 1, 9, 8, a segunda do 0, 2, 9, 7, o terceiro de 0, 3, 9, 6, a quarta de 0, 4, 9, 5, o quinto de 1, 2, 8, 7, a sexta, de 1, 3, 8, 6, a sétima de 1, 4, 8, 5, a oitava de 2, 3, 7, 6, o nono, de 2, 4, 7, 5, e o décimo, de 3, 4, 6, 5. Para entender melhor o desenvolvimento das barras de Napier, observe este exemplo. O uso das folhas para o efeito de multiplicação é evidente, assim, ao multiplicar 2085 por 736 conforme mostra a Figura 3, retira-se deste modo os múltiplos correspondentes a 6, 3, 7 e estabelecidos os dígitos como são obtidas, da direita para a esquerda, deslocando-os novamente ao lugar e somando as colunas como em simples multiplicação, ou seja, como os números são anotados.

É perceptível que o trabalho proposto por Napier para a criação e uso aritmético de suas barras operacionais estava apoiado no trabalho de Luca Paccioli (1445 – 1517) sobre o método de Gelosia,

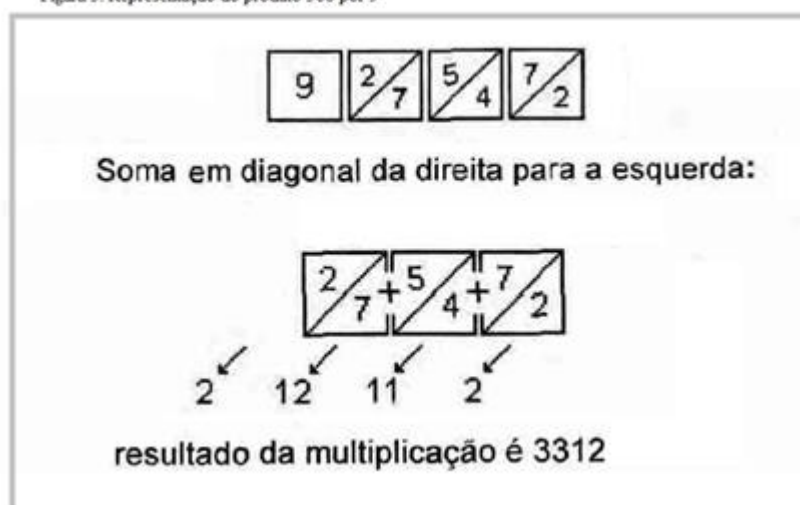
que consistia em resolver multiplicação usando somas parciais. Vários estudiosos sobre esse tema consideram que a tentativa de imitar métodos dos indianos antigos levou os italianos a se interessarem pela elaboração de esquemas para multiplicação e divisão e nesse sentido passaram a desenvolver alguns algoritmos.

Figura 2: As Barras de Napier

	3	6	8
1	0/3	0/6	0/8
2	0/6	1/2	1/6
3	0/9	1/8	2/4
4	1/2	2/4	3/2
5	1/5	3/0	4/0
6	1/8	3/6	4/8
7	2/1	4/2	5/6
8	2/4	4/8	6/4
9	2/7	5/4	7/2

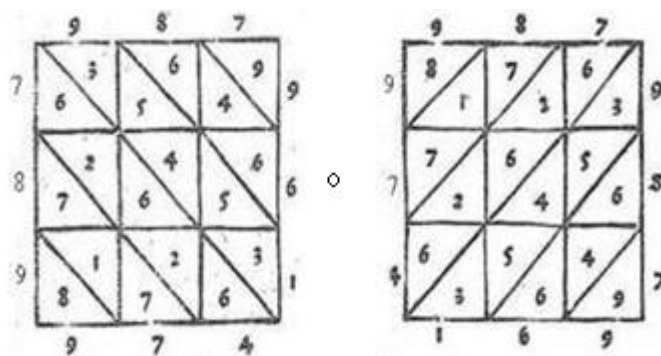
Historicamente termo *gelosia* aparece relacionado diretamente ao vocabulário italiano e tem significado muito próximo de *ciúme*, pois designa um dos dispositivos instalados na janela das residências, ou mesmo como um separador de ambientes no interior das residências, que permitiam às mulheres observarem o movimento das ruas ou de alguns ambientes da residência sem serem vistas. O termo expressava, também, a ideia de zelo no sentido do ciúme⁶, o que designou a criação de outros aperfeiçoamentos para as janelas com a criação das treliças ou urupemas, e posteriormente as venezianas, para possibilitar a articulação das janelas.

Figura 3: Representação do produto 368 por 9



Em seu *Summa* Luca Paccioli explicava este algoritmo árabe com por meio de duas maneiras de operar a multiplicação $987 \times 987 = 974169$. Em cada uma dessas formas de fazer a operação, ele constrói um quadrado de 3×3 unidades de lado, no qual cada uma das nove casas quadrangulares originadas se divide diagonalmente em duas partes e se escrevem o multiplicando e o multiplicador tal como se indica nos dois modos de representar apresentados na Figura 4, a seguir.

Figura 4: Dois modos de representar o método de



Fonte: Horsburgh (1914)

Outro aspecto importante a esse respeito é que historicamente, o método de rede de multiplicação aparece no livro *Aritmética*, impresso em Treviso (Itália), em 1478, no qual aparece um método exato e uma variação, bem como algumas variantes do algoritmo de multiplicação longo, geralmente ensinado atualmente (Gu, 2001). Por esse motivo, o livro ficou conhecido no meio acadêmico como *Aritmética de Treviso*. Assim, os primeiros calculistas, reconhecendo a sua simplicidade, começaram a trabalhar para criar métodos de multiplicação entre números. No entanto, só no final do século XV a aritmética começou a assumir uma forma mais ou menos moderna. Logo, foi somente depois da realização de uma série de estudos, que Napier propôs uma tábua de logaritmos em termos práticos e trigonométricos. Como os logaritmos inventados por Napier não possuíam base, ele dedicou pelo menos vinte anos na organização dessa teoria, tendo finalmente explorado os princípios em termos geométricos, publicando-os em 1614.

Não sabemos exatamente se naquele momento de transição entre os séculos XVI e XVII, o objetivo de Napier era criar ou inventar o que inventou, mas o que percebemos nos estudos históricos e matemáticos é que suas ideias avançaram conceitualmente na medida em que o problema inicial abraçado pelo matemático, se ampliou a partir da sua apresentação do assunto referente aos logaritmos, registrado em dois livros curtos: o *Descriptio*, publicado em 1614, e o *Constructio*, publicado após sua morte em 1619.

Ambas as obras foram escritas em latim, a língua comum dos aprendizes de sua época. Todavia, Napier presenciou e aprovou uma tradução para a língua inglesa do *Descriptio*, e cerca de 25 anos mais tarde foi publicado em Edimburgo uma tradução do *Constructio*. É com base em traduções inglesas desses livros que mencionaremos informações no decorrer de alguns capítulos deste nosso trabalho.

Inicialmente é importante destacarmos que foi no *Descriptio* que Napier explicitou seu raciocínio no qual os cálculos propostos por ele eram necessários para permitir que o mundo matemático pudesse apreciar a natureza e utilização das tábuas por ele propostas e demonstradas, de modo que suas tábuas fossem calculadas. A esse respeito, alguns historiadores suspeitam que o *Descriptio* pode ter sido escrito para servir como uma introdução e guia para as tábuas que seriam produzidas por Napier no livro seguinte: o *Constructio* (Mendes; Soares, 2019).

O *Constructio* foi considerado pelos estudiosos como um livro mais completo e valioso das duas obras de Napier, que foi evidentemente escrito em vários momentos diferentes, embora a ordem de seu conteúdo seja peculiar, e podem vê-los como uma evidencia de diferentes etapas da descoberta. Seu objetivo era explicar plenamente o modo que ele havia se baseado para a realização dos cálculos, no qual originaram as tábuas e, incidentalmente, a fundamentação em que se baseava sua construção. Todavia, não há referências históricas a respeito de uma maneira pela qual ele tenha chegado originalmente a ideia de uma tábua de logaritmos ou no método de construí-la. Atualmente nos é possível compreender o processo aritmético envolvido em tal construção.

As perguntas que nós fazemos sobre o assunto são: *como Napier definiu seu processo de cálculo ao trabalhar na criação das tábuas de logaritmos, de modo a criar um dispositivo matemático que permitisse que a multiplicação fosse realizada por um processo de adição?* Quem primeiramente lhe deu a ideia de tal situação? Imaginamos que seja muito difícil responder a estas perguntas. Todavia, não sabemos qual ou quais publicações que antecederam ao trabalho de Napier que tenha de sugerir tal coisa. Mas, há uma peculiaridade na forma de suas investigações que nos forneçam uma ideia satisfatória. Podemos pensar que ele possivelmente elaboraria suas proposições como se fosse aplicá-las exclusivamente em todos os eventos matemáticos, especialmente, para a determinação dos valores dos senos.

Entretanto, os fatos históricos parecem deixar evidente que entre o fim do século XVI e início do século XVII as preocupações sobre logaritmos deveriam estar relacionadas diretamente às operações aritméticas envolvendo, em geral, grandes números, e que possivelmente a determinação dos valores para os senos não tenha algum tipo de influência sobre o desenvolvimento do assunto. Daí a

confirmação de que o trabalho de Napier relacionado aos senos deve indicar que ele partiu primeiramente com a ideia de trabalhar sobre eles e apenas posteriormente, a invenção dos logaritmos, o que ocorreu somente em uma fase posterior, quando percebeu que seus resultados poderiam ser aplicados com sucesso nas operações com números, de modo geral.

Com base nas informações históricas mencionadas por estudiosos como Horsburgh (1914), Knott (1915) e Naux (1966; 1971), há evidências em seus estudos de que, na medida em que se pudesse ler os enigmas deixados por Napier seria possível desenhar um provável trajeto de sua criação matemática, que talvez esteja organizada em três momentos. O primeiro corresponde ao ato da percepção de que, a criação de suas tábuas logarítmicas permitiria operar com os números a serem multiplicados, sem realmente realizar a operação, é que esses termos não precisariam ser representados como resultantes de uma adição contínua de parcelas iguais, pois eles estavam postos nas tábuas em notação indu-árabe ou romana. Assim, eles deveriam ser representados como resultantes da multiplicação contínua.

Supomos, portanto, que pode ter sido assim, incidentemente, que em seus primeiros trabalhos, Napier pensando somente em senos, parece ter seguido no caminho certo. Senos considerados como índices são inferiores a unidade, e portanto, são normalmente representados com mais precisão por frações decimais, estendendo-se para muitas casas decimais. Todavia, quando essas frações decimais foram determinadas como soluções para problemas enfrentados por diversos profissionais da época (séculos XVI e XVII), eram desconhecidas para o mundo, e que era costume se considerar como medida dos senos calculados em um círculo com raio adequado, e cuja precisão necessária poderia ser obtida em um raio muito grande, por volta de 10 milhões.

Igualmente, daquele momento em diante ficou evidenciado pelos cálculos aritméticos realizados, que os valores das medidas do seno nunca seriam maiores que a unidade, mas poderiam variar de um número muito próximo do valor da medida do raio da circunferência trigonométrica, em um diferencial muito pequeno. Talvez esse tenha sido o motivo que levou Napier a ter inicialmente a ideia de começar a partir de um número grande como 10.000.000 e daí multiplicar várias vezes por um fator pouco menor que 1, escolhendo tal fator de forma que a primeira diferença seria a unidade e, portanto, todas as diferenças mais tarde seriam menores que a unidade. Isto garantiria a obtenção de uma série de números expressivos como os derivados pelo uso repetido de um mesmo multiplicador. Esses números se mostraram sempre muito próximos de 1, e que posteriormente deveriam vir entre cada dois números consecutivos, desde que esses números fossem menores do que 10.000.000.

Assim, ele esperava ser capaz de obter números da melhor maneira possível e necessária para poder representar todos os senos ao mesmo grau de aproximação como aqueles das tábuas já existentes, de terminadas com recursos de senos naturais (Mendes; Soares, 2019).

Originalmente, portanto, Napier buscou alcançar seus objetivos de alguma maneira, propondo multiplicações mais do que repetidas por um fator muito próximo da unidade, de modo que cada multiplicação reduzisse rapidamente o número de operações. Neste sentido ele iniciou com o número escolhido pela medida do raio da circunferência trigonométrica, ou seja, 10 milhões. Para tanto, o fator que proposto para uso foi de

$$1 - \frac{1}{10000000}.$$

Percebe-se, portanto, que esta seria apenas a primeira redução ao raio da unidade, e depois a redução produzida por cada operação repetida seria ainda menor. Se os resultados de tal operação suficientemente repetidos muitas vezes poderiam ter sido calculados, ele teria originalmente apresentado: as duas progressões com números correspondentes, ou seja, cada membro de uma teria um membro correspondente a ele na outra. A primeira progressão consistiu dos números naturais 0, 1, 2, 3, ... , e indicou o número de vezes multiplicando continuamente pelo fator escolhido ao ter sido realizada a operação. A segunda progressão consistiu de números iniciados com o valor do raio e diminuindo em progressão geométrica, o que indicou os resultados obtidos pelo raio sobre a multiplicação contínua pelo fator escolhido 0, 1, 2, 3,... vezes. Estes últimos números se mostraram muito próximos um do outro como de modo a não ser possível diferir um do outro por mais que a unidade. Posteriormente, os estágios operacionalizados possibilitaram se diferir um do outro, em valores muito menores que a unidade.

Neste sentido, consideramos importante fazer uma reflexão sobre um fato decisivo nesse processo: o plano de Napier era, por meio das potências do fator escolhido, evidenciar a proporção do raio do seno, isto é, a condição para o seno ser considerado uma razão trigonométrica. Na medida em que os fatores escolhidos fossem menores que a unidade (mesmo sendo muito próximo dela), e as potências elevadas correspondessem aos senos pequenos e vice-versa. O índice da potência do fator escolhido que é igual a um dado seno denominou-se de *logaritmo dos senos*.

Outro fato destacado é que a forma da progressão geométrica escolhida por ele, para alcançar sua meta inventiva, apresentada em seu Constructio, foi estabelecida de modo a facilitar a compreensão

de como os valores intencionados para os senos poderiam ser calculados. Neste sentido, Napier afirmava que tais progressões geométricas eram utilizadas apenas para facilitar o surgimento da operação como subtração de uma parte mais fácil a partir do número completo⁷”. Em seguida ele

explicava o que entendia por $\frac{1}{1000000}$ ou $\frac{1}{10000000}$, logaritmos. Quanto à importância dos seus estudos sobre o tema, somente o tempo foi primordial para mostrar o quão grandioso foi para o desenvolvimento da Matemática teórica bem como nas atividades práticas conectadas e aplicadas a outras ciências, bem como às tecnologias da informação e comunicação.

A FORMAÇÃO CONCEITUAL DOS LOGARITMOS

Nesta seção avançaremos mais as descrições e comentários sobre as elaborações conceituais dos logaritmos de Napier e o raciocínio sobre o qual se baseou para a realização de sua construção. Além disso, aprofundaremos um pouco mais nossos comentários sobre o trabalho de Briggs e Burgi e suas correlações com o trabalho de Napier, o qual foi a base para a conceituação dos logaritmos abordados sob três análises sob três olhares: o aritmético, o geométrico e o algébrico-funcional ampliando e complementando os estudos abordados pelos principais livros didáticos.

Sobre os aspectos essenciais para a construção dos logaritmos de Napier, a construção da ideia dos logaritmos é formulada a partir da ideia de três momentos específicos (Mendes; Soares, 2019):

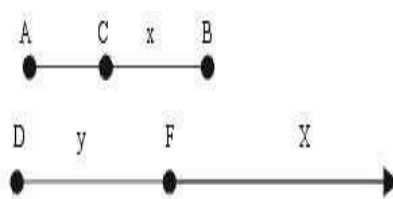
- 1º. Números multiplicativos deveriam ser expressos em adições contínuas;
- 2º. Quantidades progressivas dos números seriam representadas por meio de retas;
- 3º. Formulação conceitual de logaritmos representados por medidas constantes sobre as retas.

Esta última formulação foi a mais importante e conclusiva da vida de Napier, pois todas as vertentes propostas por Napier para a construção das tábuas logarítmicas comentadas anteriormente seriam revisadas e representadas por medidas propostas comparativamente sobre duas semi-retas. Estas duas semi-retas seriam representadas basicamente por duas progressões (aritmética e geométrica) que se deslocariam sobre partículas representadas por velocidades bifformes (Constante e variadas). Essas velocidades inicialmente representadas por Napier ajudaram a caracterizar uma das concepções dos logaritmos. No primeiro momento, como Napier definiu os logaritmos sobre uma representação de medida. A essa representação de medida definida por Napier chamaremos de *concepção geométrica dos logaritmos*. Vejamos como Napier definiu essa experiência prática e como funcionava e como se relacionava essa ideia em termos numéricos.

Assim, Napier propôs sua primeira análise a respeito do logaritmo através de uma experiência prática e de acordo com Eves (1997), em linguagem moderna, concebeu os seus logaritmos da seguinte maneira:

Imaginemos os pontos C e F percorrendo respectivamente o segmento AB e a semi-reta DX (como mostra a Figura 6 a seguir), partindo ao mesmo tempo do ponto A e do ponto D, com a mesma velocidade inicial, admitamos ainda que, numericamente, a velocidade de C seja dada sempre pela medida de CB e que a velocidade de F seja constante; nessas condições Napier definiu como logaritmo de $x = CB$ o número $y = DF$. Assim, explicitamente, nesse conceito não intervém a idéia de base. (EVES, 1997, p. 243)

Figura 6: Imagem do livro



Fonte: Eves (1997)

De acordo com Miorim e Miguel (2002, p.50-53) estas trajetórias foram consideradas, respectivamente, como um segmento de reta de comprimento fixo igual a 10^7 (Números este que Napier atribuía à medida do raio de uma circunferência e ao longo do qual eram determinados outros seguimentos menores representativos dos senos de certos ângulos multiplicativos por 10^7) é uma semirreta (ao longo do qual eram fornecidos os logaritmos dos senos desses ângulos). Assim sendo, a semirreta AB representava numericamente os números dos senos dos ângulos de 0° a 90° multiplicados por 10^7 . Enquanto que semirreta DX representava os logaritmos dos senos dos ângulos de 0° a 90° .

Ao descrevermos a experiência de Napier acerca de uma sequência original numérica sobre a base fixa, interpretamos que o comprimento do segmento AB era igual a 10^7 ; o coeficiente de desaceleração na velocidade do ponto C era de $(1 - 10^{-7})$ e os intervalos de tempos considerados para tornar discretos os movimentos contínuos dos pontos C e F, eram de 10^{-7} .

As relações das ordens e grandezas numéricas representadas sobre a reta estavam sendo direcionadas por progressões contínuas. Os fatos ocorridos historicamente não comprovam como Napier chegou a uma relação precisa entre as progressões e quem auxiliou neste tal método. Sabemos que seu trabalho em termos práticos foi desenvolvido por meio de uma ideia comparativa entre duas relações

matemáticas chamadas de progressões aritméticas e geométricas. Subentende-se que tivesse conhecimento desse método. Esse método era conhecido, como relações de Stifel, nome designado ao matemático e inventor Michael Stifel (1487-1567). As relações de Stifel consistem em observar que era possível associar os termos de uma progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, \dots, b^m, \dots, b^n, \dots$$

com as de uma progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n, \dots$$

A sua primeira observação foi que ao produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ de dois termos da progressão geométrica está associada uma soma $m + n$ dos termos correspondentes da progressão aritmética.

Essa imaginável tábua de calcular abrangiam ângulos cujas medidas – expressas por números inteiros ou não de unidades de medida – estivessem bastante próximas, seria conveniente que dois termos sucessivos quaisquer da PG a ser construída estivessem o mais próximo. Desse modo, a PA e a PG construídas em seu sistema de logaritmos foram as seguintes:

PG:	10^7	$10^7(1 - 10^{-7})$	$10^7(1 - 10^{-7})^2$	$10^7(1 - 10^{-7})^3$	$10^7(1 - 10^{-7})^4$	$10^7(1 - 10^{-7})^5$
PA:	0	1	2	3	4	5

Sem utilizar a notação de exponencial para aprimorar os seus cálculos, uma vez que ainda não havia sido oficializada na época, para manter os termos da progressão geométrica, suficientemente próximos, de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos, escolheu um número próximo de 1, conhecido como fator de medida 1 (Mendes; Soares, 2019). Por

isso, Napier fixou esse valor em $(1 - \frac{1}{10^7})$, que é igual a 0,9999999, e para evitar muitas casas decimais, ele o multiplicava por 107. Então, sendo N um número e L o respectivo Logaritmo, Napier assim o definia:

$$N = 10^7 \times (1 - \frac{1}{10^7})^L, \text{ ou seja, } N = 10^7 \times [(1 - \frac{1}{10^7})^{10^7}]^{\frac{L}{10^7}}$$

Olhando para dentro do colchete e detendo a atenção na grandeza do expoente, $(1 - \frac{1}{10^7})^{10^7}$, percebe-se que quanto mais se aumenta o valor na potência de dez, mais próximo N está de um certo valor. Esse valor fixo designado por Napier caracteriza uma sequência que só é representada sob essa abordagem no século XVIII com o surgimento da álgebra.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

Em termos práticos, tem-se:

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Observe:

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} = 0,3660, \quad \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 0,3677 \quad e \quad \left(1 - \frac{1}{10000000}\right)^{10000000} = 0,3679$$

Desse modo, aumentando-se a potência, chega-se a um valor aproximado a 0,3679 que seria exatamente o inverso do neperiano. Isto é a base fixa de Napier. Agora, vejamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{x}\right)\right]^x \quad \text{seja } n = -x \Rightarrow x = -n, \text{ tem-se}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Olhando para dentro do colchete e detendo-se na sequência, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Esse conceito de logaritmos apresentado por Napier o fez interessar-se cada vez mais pelo estudo significativo desse instrumento de cálculo. A sequência apresentada acima não convém ser demonstrada, pois ela funciona como suporte teórico para representar o significado do número e . Essa análise construtiva o levou adiante na primeira ideia do que fosse o número e , e no século XVIII e fosse demonstrada por Leonard Euler a seguinte relação:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Observe, em termos práticos:

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 1,01^{100} = 2,704813... \quad \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 1,001^{1000} = 2,7146023 ...$$

$$\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000} = 1,0000001^{1000000} = 2,718280..$$

Baseado na aplicação dos termos numéricos, Euler chamou esse valor encontrado de **número de Euler**, sendo reconhecido pelos principais estudiosos como Neperiano ou número **e**. Para Hobson (1914) entende-se que Napier considerou que o raio consistia em 10^7 unidades e, portanto, o seno de 90° , chamado de seno inteiro, é 10^7 ; os senos de ângulos menores diminuindo deste valor para zero. A tabela é, portanto, um dos logaritmos de números entre 10^7 e 0, não são números equidistantes, mas os números correspondentes a ângulos equidistantes. É importante observar que os logaritmos nas tabelas de Napier não são conhecidos agora sob o nome de logaritmos neperianos, ou seja, logaritmos naturais ou logaritmos na base e. Seus logaritmos estão mais intimamente relacionados aos da base $1/e$, conforme já detalhamos anteriormente ao fundamentar a base fixa de seus cálculos logaritmos.

Ainda nos séculos XVII e XVIII com o avanço da matemática e de métodos algébricos, além da formulação do cálculo infinitesimal e com base na experiência adotada por Napier foi possível provar

que $y = 10^7 \log_{1/e} \left(\frac{x}{10}\right)$. A potência 10^7 surge aí porque Napier considerava $AB = 10^7$ pela figura 6. Sabendo que $AB = 10^7$, temos que $AC = 10^7 - x$. Como C parte de A, ao longo da linha com mesma velocidade inicial, mas só alcança velocidade numericamente constante quando:

$$\text{Velocidade de C} = CB = \frac{-dx}{dt} = x,$$

$$\frac{-dx}{dt} = x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dt$$

que é dado pela derivada da equação AC de x em relação ao tempo(t), isto é,

Integrando em ambos os termos, tem-se:

$$\int \frac{dx}{x} = \int -dt \Rightarrow \ln x = -t + C$$

Pelo cálculo da constante de integração, ou seja, fazendo $t = 0$, obtém-se:

$$\ln x = -0 + C \Rightarrow \ln x = C.$$

Por outro lado, quando a velocidade de C alcança AC ao longo da linha, ou seja, quando velocidade de C = AC, não é constante, Napier considerou essa velocidade desprezível, então, velocidade de:

$$C = AC = 0.$$

Portanto, temos

$$AC = 10^7 - x = 0 \Rightarrow x = 10^7.$$

Logo,

$$\ln x = C \Rightarrow C = \ln 10^7.$$

Pelo que se viu anteriormente,

$$\ln x = -t + C \Rightarrow \ln x = -t + \ln 10^7 \Rightarrow t = \ln 10^7 - \ln x$$

Ao longo da outra semi-reta DX, F define-se a partir de D com velocidade nitidamente uniforme, ou seja, temos que velocidade de $DF = \frac{dy}{dt} = y$ (que foi obtido extraíndo a derivada de y em relação a t).

Assim, a velocidade inicial que parte de F é a mesma que C, ou seja,

$$DF = CB \Rightarrow x = y = 10^7.$$

Então, tem-se $\frac{dy}{dt} = 10^7 \Rightarrow dy = 10^7 dt$. Integrando em ambos os termos resulta:

$$\int dy = \int 10^7 dt \Rightarrow y = 10^7 t.$$

Substituindo o valor de t, na equação, tem-se:

$$y = 10^7 t \Rightarrow y = 10^7 (\ln 10^7 - \ln x) \Rightarrow 10^7 \cdot \ln \left(\frac{10^7}{x} \right) = 10^7 \log_{1/e} \left(\frac{10^7}{x} \right).$$

Então, partindo da ideia do que Napier chegou, observa-se que

$$\log_{1/e} \left(\frac{10^7}{x} \right) = y \Rightarrow \left(\frac{1}{e} \right)^y = \frac{x}{10^7} \Rightarrow e^y = \frac{10^7}{x} \text{ obtém-se:}$$

$$\ln e^y = \ln \left(\frac{10^7}{x} \right) \Rightarrow y \cdot \ln e = \ln \left(\frac{10^7}{x} \right). \text{ Considerando que } \ln e = 1,$$

então $y = \ln \left(\frac{10^7}{x} \right)$.

Logo, conclui-se que: $y = 10^7 \ln \left(\frac{10^7}{x} \right) = 10^7 \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right)$.

Nota-se que sobre uma sucessão de tempos iguais, x decresce em progressão geométrica enquanto y cresce em progressão aritmética. Então, de acordo com a relação obtida desse dispositivo, a base do logaritmo de Napier é $1/e$; expõe-se a seguir como chegou nesse resultado. De acordo com a igualdade do resultado obtido, temos:

$$\ln \left(\frac{10^7}{x} \right) = \log_{1/e} \left(\frac{x}{10^7} \right).$$

Isto resulta na seguinte proporção:

$$\ln x = \log_e x.$$

O e funciona nessa igualdade como a base do logaritmo natural, conforme abordam os livros didáticos e livros históricos de Matemática. Então, Napier desvendou os mistérios dos logaritmos e motivou os pesquisadores a estudarem cada vez mais sobre esse tema, sendo recebido muito bem pela comunidade científica. Apesar de ser uma descoberta nova, os logaritmos começaram logo e se expandiram para outros países da Europa.

Sendo assim, no século XIX os logaritmos começaram a ser notificados em termos algébricos por meio de exponenciais, devido ao estudo de função. Essa ideia explorada começa a aparecer em livros didáticos de Matemática pela necessidade do surgimento da álgebra e da lógica matemática, seguindo como referência os trabalhos de Napier e de outros autores. Sendo assim, essa nova concepção preponderou para um novo direcionamento de logaritmo, figurando sob a forma de representação simbólica e formal.

RECONFIGURAÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMOS DE NAPIER

Diante do que foi apresentado, reiteramos que Napier tornou-se o primeiro homem a inventar os logaritmos na forma mais aproximada ao que conhecemos atualmente. Sua análise lógica sobre esse procedimento operacional aritmético contribuiu sobremaneira para desenvolver melhor os cálculos aritméticos tornando-se útil para o desenvolvimento científico e técnico e para estudos posteriores nas diversas áreas de conhecimento que foram criadas no decorrer dos séculos XVIII, XIX e XX.

Um dos meios mais utilizados para se compreender o significado lógico dos logaritmos são as progressões geométricas e progressões aritméticas. Para desenvolver os logaritmos, Napier apropriou-se das progressões aritméticas e geométricas, estabelecendo uma relação entre elas, obtendo o que os livros didáticos chamam de conceito de logaritmo. Para entender o conceito de logaritmo ou em que consistem os logaritmos, ampliando o significado lógico dessa expressão apresentada nos livros didáticos, toma-se a ideia provinda de Napier obtida sobre as relações entre as progressões geométricas e progressões aritméticas. Pode-se observar:

2 4 8 16 32 64 128 256 512 (Progressão Geométrica)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (Progressão Aritmética)

A sua primeira observação apontou que o produto de dois termos da primeira progressão está associado com a soma dos dois termos correspondentes da segunda progressão. Por exemplo, na progressão aritmética, a soma de $2+3=5$. Enquanto na progressão geométrica corresponde a $4 \cdot 8 = 32$, conforme vimos anteriormente. Reescrevendo essa ideia na base 2, tem-se:

2^1 2^2 2^3 2^4 2^5 2^6 2^7 2^8 2^9 (Progressão Geométrica)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 (Progressão Aritmética)

A representação anterior nos coloca diante do conceito de logaritmo proposto por Napier, que envolve duas semi-retas, ou seja, os elementos postos na forma de progressão geométrica são os que saem com velocidade variada, enquanto os da progressão aritmética são os que partem com velocidade constante. Podemos, então, afirmar que os termos da progressão aritmética são os respectivos logaritmos da progressão geométrica. Observemos que:

$$2^1 = 2; 2^2 = 4; \dots; 2^9 = 512$$

O valor 2 é uma constante elevada aos valores 1, 2, 3, 4, ...9. Essa constante 2 denomina-se de base do logaritmo. Os valores dos resultados de cada potenciação 2, 4, 8, 16, ..., 512 denominam-se, por sua vez, de logaritmandos. E os logaritmos são os respectivos valores de cada expoente, que elevados à base encontram o logaritmando. De outra maneira, os logaritmos são os respectivos valores que acompanham os termos de uma progressão aritmética. Assim, por exemplo: $\log_2 64 = 6$; logo, $2^6 = 64$.

Reescrevendo de uma forma geral tem-se:

a a^2 a^3 a^4 ... a^m (Progressão Geométrica)

1 2 3 4 ... b (Progressão Aritmética).

Comparativamente podemos estabelecer que: $a^m = b$.

Reescrevendo a expressão na forma de logaritmo teremos então que: $\log_a b = m$.

Assim, constatamos que m é o logaritmo de b na base a , onde $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$ para quaisquer que sejam a , b e m reais.

Essa forma utilizada para expressão a noção de logaritmo não se encontra muito explicitada nos livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio. Na verdade, a progressão aritmética e a geométrica são tomadas nesta abordagem como uma das maneiras mais relevante para explicar e justificar a noção de logaritmo e que poderá contribuir para uma ampliação conceitual por parte do estudante, de modo a possibilitar-lhe exercitar cognitivamente diversas compreensões acerca de suas implicações em situações problemáticas que envolvem temas diversos em múltiplas áreas de conhecimento como a física, a química, a biologia, dentre outras.

Essa ideia proposta sobre a comparação entre duas progressões caracteriza uma melhor compreensão conceitual sobre os logaritmos, ampliando o conhecimento do professor, uma vez que os livros didáticos utilizados atualmente na Educação Básica não abordam mais este método explicativo para o assunto. Assim a proposição discutida por nós sobre a definição de logaritmos realizados anteriormente por meio de um exercício comparativo entre duas progressões pode ser denominada como *abordagem aritmética para o conceito de logaritmo*.

Portanto, essa caracterização dos logaritmos conduz para questionarmos em qual campo numérico os logaritmos são válidos. Observa-se inicialmente que é válido para qualquer valor real positivo. O que se evidencia aqui é a ampliação do conhecimento proposto por Briggs. Na verdade, a partir da abordagem apresentada até esta parte do livro fica claro que o logaritmo é válido para qualquer base maior que 1.

OS LOGARITMOS DE BRIGGS EM CORRELAÇÃO COM O TRABALHO DE NAPIER

A publicação em 1614 do sistema de logaritmos teve sucesso imediato, e entre seus admiradores, estava Henry Briggs, professor de Geometria em Oxford. Henry Briggs nasceu em 1561, Yorkshire, Inglaterra. Estudou na Universidade de Cambridge e formou-se em 1581. Prosseguiu nos estudos e obteve o doutorado em 1588. Foi professor de Geometria, na Universidade de Saint-Andrews e mais tarde em Oxford. Nesta última, iniciou as lições com a nova proposição do livro de Euclides. Foi o primeiro a reconhecer a importância dos logaritmos de Napier, tendo estabelecido contato com o mesmo para uma troca de ideias. Ele morreu em 26 de janeiro de 1631, na Inglaterra.

Em 1615 havia visitado Napier em sua casa na Escócia, e lá eles discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Entretanto, foi depois dessa visita que ocorreu uma mudança já até certo ponto esperada por Napier, a respeito de suas investigações, mas que ele não teve como fazer as modificações percebidas na sua criação matemática devido sua falta de tempo. Contudo, ao tomar essa conveniência lógica adquirida, os dois matemáticos decidiram construir uma nova organização para as tábuas dos logaritmos. Porém, no processo de reformulação dessas tábuas, Briggs já não contou com as contribuições de Napier, pois antes de ocorrer um novo encontro entre eles para planejar a construção dessa tábua, Napier veio a falecer, em 1617.

Afinal, qual foi exatamente a diferença entre os logaritmos de Napier e as modificações sugeridas na carta de Briggs? A diferença era simplesmente que o logaritmo de $r/10$, onde r denota o raio ou seno total, deve ser 10000000000 ou 10^{10} em vez do número embaraçoso 23.025.842, como estava posto no sistema de Napier. A proposta foi, portanto, em essência, a mesma como foi indicada por Napier na "Advertência" inserida no Livro I, Capítulo IV, conforme está na tradução do *Descriptio por Wright*¹⁰. Devemos particularmente observar que é a condição *inteira do seno*, não a unidade, e a proposta de Briggs era de um número cujo logaritmo poderia ser zero; a menos que este elemento da proposta pudesse ser notado – e Briggs chama a atenção específica, pois para ele é fácil uma interpretação equivocada da passagem completa. É provável que Briggs tivesse a intenção de fazer inteiramente o seno 10^{10} , em vez de 10^7 como no *Descriptio*. Os logaritmos propostos por Briggs foram, portanto, determinados pelas condições seguintes:

$$\log r = \log 10^{10} = 0 \dots (1), \log r/10 = \log 10^9 = 10^{10} \dots (2).$$

Em notação moderna (que concede uma simplicidade enganosa para o problema), se x é originado de Napier e z , Briggs propôs o logaritmo do número y , as relações entre x , y e z , são fornecidos pela equação:

$$y = 10^7 e^{-x/10^7} \dots \dots \dots (3), y = 10^{10} e^{-z/10^{10}} \dots \dots \dots (4);$$

$$\text{ou } x = 10^7 (7 \log 10 - \log_e y) \dots \dots \dots (3a), z = 10^{10} (10 - \log_{10} y) \dots \dots (4a).$$

A vantagem prática do sistema proposto por Briggs sobre o de Napier reside na simplicidade da relação entre o logaritmo de a e os logaritmos de $10a$, $100a$, $\dots a/10$, $a/100$. A adição ou subtração de 23025842 e seus múltiplos é substituído pela adição ou subtração de 10^{10} e seus múltiplos. Mas o sistema é bastante diferente do *Arithmetica Logarithmica*, e não sua mera mudança de sinal iria converter um sistema em outro; apenas em um sentido restrito da frase "Logaritmos decimal" o sistema proposto poderia ser chamado de logaritmos decimais, e o termo 'característico' teria uma definição bastante diferente daquele concedido para a sua obra *Arithmetica Logarithmica*.

Em 1619, ano da publicação da mais nova obra de Napier, Briggs conseguiu fazer uma tábua dos logaritmos compreendidos entre 1 e 1.000, baseado no método anteriormente apresentado. Assim, esses logaritmos tornaram-se reconhecidos tanto quanto os logaritmos de Napier. Nesse contexto, os livros didáticos se apoiam na proposta de Briggs e desvendam os seus logaritmos em forma de exercícios teóricos, mas não exploram tanto esse lado construtivo.

Alguns livros adotam essa ideia só para mostrar como funcionava esse logaritmo. Assim, propõe-se neste trabalho, uma síntese mais construtiva de modo que ajude o professor a entender melhor a origem desses logaritmos e de como foram construídos, diferenciando-se daqueles apresentados nos livros didáticos.

Esse método não é explorado pelos livros didáticos. Para entender melhor como foram construídos os logaritmos briggsianos, utilizou-se o método da aproximação de modo que auxilie o professor na sua compreensão:

- Sabendo que $2^{10} = 1024$, achar n tal que $10^n = 2$.

De imediato $10^0 < n < 10^1$. Isto significa que logaritmo de dois na base dez, está entre 0 e 1.

Partindo dessa ideia, utilizou-se uma aproximação para o valor $2^{10} = 1024$. Com um erro de apenas de 2,4%, $2^{10} \cong 10^3$, ou seja, 1024 é aproximadamente 1000. Assim, obtém-se:

$$2^{10} \cong 1000$$

$$2^{10} \cong 10^3$$

Dividindo ambos os expoentes por 10, obtém-se:

$$2^{10/10} \cong 10^{3/10}$$

$$2^1 \cong 10^{0,3}$$

$$2 \cong 10^{0,3}$$

Então, o valor de n encontrado é 0,30, que é aproximadamente o $\log 2$.

Portanto, $\log 2 \cong 0,30$.

- Sabendo que $3^9 = 19.683$, achar n tal que $10^n = 3$.

De imediato, $10^0 < n < 10^1$. Isto significa que logaritmo de três na base dez, está entre 0 e 1.

Partindo dessa ideia, utiliza-se uma aproximação para o valor $3^9 = 19.683$, com um erro de apenas de 3,4%, $3^9 \cong 20.000$, ou seja, 19.683 é aproximadamente 20.000. Assim, obtém-se:

$$3^9 \cong 20.000$$

$$3^9 \cong 2 \times 10.000$$

$$3^9 \cong 2 \times 10^4$$

Dividindo ambos os expoentes por 9, obtém-se:

$$3^{9/9} \cong 2^{1/9} \times 10^4$$

$$3^1 \cong 2^{0,111} \times 10^{0,444}$$

Sabendo que $10^{0,3} = 2$, tem-se:

$$3^1 \cong (10^{0,3})^{0,111} \times 10^{0,444}$$

$$3 \cong 10^{0,033} \times 10^{0,444}$$

Usando a propriedade da multiplicação de mesma base, tem-se:

$$3 \cong 10^{0,033} \times 10^{0,444}$$

$$3 \cong 10^{0,033 + 0,444}$$

$$3 \cong 10^{0,477}$$

Então, o valor de **n** encontrado é 0,477, que é aproximadamente o $\log 3$.

Portanto, aproximando o valor encontrado, tem-se $\log 3 \cong 0,48$ em duas casas decimais.

Essa proposta usada por Briggs para descrever os logaritmos auxiliou na caracterização dos primeiros logaritmos decimais, que ficaram reconhecidos como logaritmos de base dez. Esse estudo foi fundamental para encontrar determinadas relações objetivas do logaritmo. Essas relações objetivas receberam um nome especial, reconhecida como *propriedades dos logaritmos*, cuja abordagem aparece nos livros didáticos sobre análise algébrica e formal. A demonstração dessas propriedades é difícil de ser compreendida devido ao uso algébrico e simbólico abordado pelos livros didáticos. Quanto ao seu uso prático, não são bem exploradas.

Para facilitar a compreensão dessas propriedades e o seu uso específico, procuraremos desenvolver em termos práticos as propriedades dos logaritmos, seguindo como referência o estudo realizado por Briggs sobre logaritmo de base dez.

Observe como encontrá-las em termos práticos, usando os logaritmos decimais:

- Vamos determinar o $\log 4$, ou seja, encontrar um n tal que $10^n = 4$.

Sabendo que $\log 2 \cong 0,3010$ e $\log 3 \cong 0,477$.

$$10^n = 4 = 2 \cdot 2 = 10^{0,3010} \cdot 10^{0,3010} = 10^{0,3010+0,3010} \Rightarrow n = 0,3010+0,3010 \Rightarrow$$

$$\log 2 + \log 2 \Rightarrow 2 \cdot \log 2 = 2 \cdot 0,3010 = 0,6020.$$

Portanto, $\log 4 = \log (2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2$ ou

$$\log 4 = \log 2^2 = \log 2 + \log 2 = 2 \cdot \log 2$$

Portanto, o $\log 4 = 0,6020$.

- Para determinar $\log 5$, ou seja, encontrar um n tal que $10^n = 5$,
- sabendo que o $\log 10 = 1$ e $\log 2 = 0,3010$, tem-se:

$$10^n = 5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0,3010}} = 10^{1-0,3010} \Rightarrow n = 1 - 0,3010 = 0,6990.$$

$$10^n = 10^{1-0,3010} \Rightarrow n = 1 - 0,3010 \Rightarrow \log 10 - \log 2, \text{ ou seja,}$$

$$\log 5 = \log \left(\frac{10}{2} \right) = \log 10 - \log 2.$$

Portanto, o $\log 5 = 0,6990$.

Desses dois exemplos, podemos citar três propriedades básicas encontradas através dos $\log 4$ e $\log 5$, que são:

- ✓ O produto transforma-se em adição;
- ✓ A potenciação transforma-se em multiplicação;
- ✓ A divisão transforma-se em subtração.

Ou seja, reescrevendo de uma forma geral, tem-se:

- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y$

- $\log_a x^z = z \cdot \log_a x$.

onde, $a > 0$ e $a \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$.

A AMPLIAÇÃO CONCEITUAL COM OS LOGARITMOS DE BURGI

De acordo com Naux (1966) e Knott (1915), Jobst Burgi nasceu em 28 de fevereiro de 1552, à Lichtensteig, uma aldeia do cantão de WS-Esfoladura, Suíça, e morreu em 31 de janeiro de 1632 em Kassel (atualmente Alemanha). Considerado um matemático amador e auto-didata que soube chamar a atenção dos grandes cientistas de sua época pelos seus feitos importantes como: a fabricação de relógios astronômicos, os trabalhosos cálculos apresentados na astronomia e pela publicação de suas tábuas de logaritmos (*Arithmetische und geometrische Progress – Tabulen*), em 1620, uma data que não trouxe muita repercussão ao seu trabalho porque Napier já havia feito sua publicação sobre os logaritmos.

Nunca chegou à universidade e não publicou nenhum livro, exceto as tábuas de logaritmos. A falta de cultura literária e o seu domínio do latim foram dois de seus principais empecilhos quanto às suas invenções e publicações, pois era a língua oficial da época. Alguém acreditou nele e Kepler teve uma relação bastante comum com suas descobertas; essa amizade possa ter sido o ponto chave para suas publicações. Referente as divulgações de seu trabalho, resta-nos apenas dois manuscritos: um está sendo conservado na biblioteca de Dantzig, que necessariamente comenta sobre sua vida e suas ideias; enquanto o outro, cuja existência não foi assegurada teria sido divulgado por Kepler em seus jornais astronômicos. Finalmente, não sabemos o que resta de suas obras.

Em 1579, quando tinha apenas 27 anos, ele era adjunto do astrônomo Rothman e unificando um contrato com ele como relojoeiro de Guillaume IV, Landgrave de Hesse, em Cassel (25 julho de 1579). Este último, em uma carta a Tycho Brahe, 14 de abril de 1586, foi considerado *como o substituto de Archimedes* pelo o valor de sua pesquisa.

Como um relojoeiro, ele tem seus dispositivos postos no museu incluindo ainda algumas peças. Dentre esta obra de arte, globos, impulsionado por uma mola interior, em torno de um dos seus eixos, sendo estes da terra ou da esfera celeste; apêndices fornecem mecanismos de informações adicionais astronômicos, no estilo dos relógios astronômicos das catedrais; os outros dispositivos são projetados principalmente para medir o tempo astronômico.

Burgi foi o primeiro homem a propor os logaritmos, comparando duas progressões: uma aritmética e outra geométrica. Seus logaritmos ficaram conhecidos como *logaritmos naturais*. Quando concebeu

essa ideia, dedicou-se a esse estudo, mas não foi como Napier tão reconhecido apesar de seus logaritmos serem úteis. Quando ele divulgou o seu trabalho foi um pouco tarde, seis anos após a publicação dos logaritmos de Napier. Essa foi uma das implicações por que o seu trabalho não teve tanto êxito quanto o de Napier. As ideias propostas eram quase as mesmas. O que diferenciava eram as bases que foram tomadas por valores diferentes. Os logaritmos de Burgi eram mais difíceis de ser compreendidos, principalmente no que se refere à construção lógica de suas tábuas.

A construção dos logaritmos foi um esforço próprio baseado nas relações de Nicolas Chuquet e Michael Stiffel, e suas tábuas compreendiam sete páginas e meia, apresentadas na forma de progressões aritméticas e geométricas. Partindo inicialmente de uma progressão aritmética de primeiro termo 0, razão 10, e último termo 32 000, cujos elementos chamou de números vermelhos (pela cor com que os imprimiu). A progressão geométrica correspondente começa com 10^8 e sua razão é $1 + 10^{-4}$ (notação atual) – seus termos são chamados números negros.

A partir daí construiu o que na verdade é, na terminologia atual, uma tábua de antilogaritmos: os números vermelhos (logaritmos) eram escritos na primeira linha e na coluna da esquerda e os pretos correspondentes distribuídos pelas demais linhas e colunas. A escolha de 1,0001 como razão da P.G, objetivava fazer com que suas potências ficassem muito próximas entre si; e começar essa progressão 10^8 era um procedimento para evitar números decimais. Observe a primeira coluna da tábua (quadro 1), a seguir:

Quadro 1

	0	500	1000
0	100000000	100501227	101004966
10	100010000	100511277	101015067
20	100020001	100521328	101015108
30	100030003	100531380	101035271
40	100040006	100541433	101045374
50	100050010	100551487	101055407
60	100060015	100561543	101065584
70	100070021	100571599	101076691
80	100080028	100581656	101085799
210	100010210	100512491	101017289
220	100020231	100522562	101027411
230	100030253	100532634	101037533
240	100040276	100542707	101047657
250	100050300	100552787	101057782
260	100060325	10056285	1010679
270	100070351	100572933	101078095
280	100080378	100583011	101088162
290	100090400	100593180	101098291

O título da tábua tem os seguintes dados:

Todos os números vermelhos são 230 270 022

Todos os números pretos são 1000.000.000

Traduzindo os dados conclusivos propostos na referida tábua, ela nos conduz a verificar plenamente que $\log 1 = 0,230\ 270\ 022$, sendo que esta hipótese não pode ser confirmada, pois em um comentário, houve uma indicação 230 270 022; o pequeno círculo de coroação da sexta casa pode marcar o lugar das unidades, devendo-se ler 230 270,022.

Fazendo uma síntese, observa-se que o preenchimento das lacunas foi dado pela razão fixa $1 + 10^{-4}$, então, multiplicando as potências por 10^8 e seus índices por 10, obtém-se:

$$N = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4} \right)^{10L} \Rightarrow$$

onde, chamava 10L o número *vermelho* correspondente ao número *preto* N. Logo,

$$N = \left[\left(1 + \frac{1}{10^4} \right)^{10^4} \right]^{\frac{10L}{10^4}}.$$

Fixando o olhar para dentro do colchete e aumentando a potência de dez, o N está próximo de um certo valor. Isso significa que:

$$\left(1 + \frac{1}{10^4} \right)^{10^4} = \left(1 + \frac{1}{10^n} \right)^n = e.$$

$$n \rightarrow +\infty$$

Observa-se que foi exatamente Burghi quem primeiro estabeleceu a sequência que no século XVII é demonstrada, e em uso prático chegou a um valor que nesse trabalho convencionou-se chamar de número **e**. De imediato, esse número **e** recebe o nome de número de Euler, pois foi quem primeiro provou por meio de uma sequência matemática esse número. Pelo que se pôde ver, a sequência adotada por Napier gera o termo $1/e$, que é o inverso do número **e**. No entanto, o número fixo adotado por Burghi gera a sequência que prova a origem desse número. Se a descoberta do cálculo infinitesimal tivesse ocorrido no século auge do logaritmo, Burghi teria se tornado o primeiro homem a demonstrar matematicamente esse número, pois foi ele quem iniciou um estudo sobre logaritmos que gerou a respectiva sequência.

Pode-se dizer que Burgi teve uma visão mais detalhista do que Napier, tornando-se o primeiro homem a usar o termo *logaritmo*, que perdeu nome por apenas publicar em 1620, seis anos depois da publicação de Napier. Mas isso não vem ao caso, pois das particularidades de Napier pode-se constatar que Burgi soube decifrar em textos a visão que estudiosos e pensadores tinham da Matemática daquele século.

NOTA FINAL

Ao longo deste capítulo, utilizamos informações históricas para compreender e explicar como foram construídas epistemologicamente as noções, conceitos, propriedades, relações e operações que envolvem logaritmos, visando explorar sua potencialidade para uma abordagem didática e conceitual que pode ser conjugada com suas aplicações práticas, que consideramos essenciais e significantes no processo de ensino e aprendizagem desse tema matemático na Educação Básica e no curso de licenciatura em Matemática. Isto porque compreendemos que há um desdobramento epistemológico em suas implicações conceituais no ensino e na aprendizagem de outros temas matemáticos como função logarítmica e exponencial, estudos sobre juros compostos, compreensão de alguns conceitos relacionados à Física, à Química e à Biologia, à Geografia, dentre outros saberes disciplinares relacionados às Ciências Sociais e Estatística. Conforme foi abordado por Mendes e Soares (2019).

Por compreendermos algumas dificuldades conceituais enfrentadas pelos estudantes com relação aos estudos direta ou indiretamente ligados aos logaritmos, neste capítulo apresentamos uma síntese de uma investigação realizada sobre aspectos histórico-epistemológicos relativo aos logaritmos, a fim de possibilitar ao leitor uma visão geral da gênese da invenção dos logaritmos à sua formulação conceitual, com vistas a contribuir para uma abordagem conceitual e didática esclarecedora de muitos aspectos que se apresentam nebulosos nos livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

BRIGGS, Henry. *Logarithmorum Chilias Prima*. Londres, 1617.

COLLETTE, Jean-Paul. *Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI, 1985.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução Higino H. Dmingues. São Paulo: Editora da UNICAMP, 1997.

GU, Wenyuan. The Latice Method Used in Teaching Multiplication with Whole Numbers and Decimals to Students with Learning Disabilities. 2001. Disponível em: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED457000.pdf>. Acessado em: 03/09/2010.

HOBSON, Ernest William. *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614*. Cambridge: at the University Press, 1914.

HORSBURGH, Ellice Martin. *Modern instruments and methods of calculation: a handbook of the Napier tercentenary exhibition*. Edinburg: Royal Society of Edinburgh, 1914.

KNOTT, Cargill Gilston. *Napier tercentenary memorial volume*. Edinburg: Royal Society of Edinburgh, 1915.

MENDES, Iran Abreu; SOARES, Evanildo Costa. *Logaritmos (Números da razão): enfoques históricos, epistemológicos e escolares*. São Paulo: Livraria da Física, 2019.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. *Os logaritmos na cultura escolar brasileira*. Natal: SBHMat, 2002.

NAPIER, John. (1550–1617). *Rabdologiae, Libre duo*. Edinburgh, 1617.

SOARES, Evanildo Costa. *Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula*. Dissertação (Mestrado Profissionalizante). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

NAUX, Charles. *Historie des logarithmes de Neper a Euler*. Paris: Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1966, tome I.

NOTAS

¹Trata-se de uma obra de Arquimedes que significa o contador de areia, na qual o autor deixava evidente seu objetivo de contar todos os grãos de areia contidos no universo. Com este trabalho Arquimedes pretendia demonstrar que podia enumerar qualquer quantidade, por maior que fosse. Para tal intento propôs um sistema para contar números altos e chegou à conclusão que 8×10^6 grãos encheriam o universo.

²O Triparty(tripartido) na ciência dos números foi publicado de acordo com o manuscrito do Fondo Francês de no 1346, da Biblioteca Nacional de Paris, e foi precedido por uma nota de Aristide Marre.

³Michael Stifel é considerado um dos maiores algebristas alemães do século XVI.

⁴Prosthaphaeresis era um algoritmo usado no final do século XVI e início do XVII para aproximar um produto usando fórmulas da trigonometria. 25 anos antes da invenção dos logaritmos, em 1614, esta era a única maneira conhecida que podia ser largamente utilizada para aproximar o resultado de uma multiplicação rapidamente. Seu nome origina-se do grego prosthesis e apharesis que significam adição e subtração, tomados como dois passos do processo.

⁵Método para cálculos elementares, com auxílio de pequenos bastões nos quais se inscrevem números simples. Este processo foi organizado e publicado por Napier em 1617 em um livro intitulado *Rabdologiae*, de modo que o processo também se chama *Rabdologia*. Existem dez barras (ossos) correspondentes aos dígitos 0-9, e um décimo primeiro osso especial usado é o multiplicador. O osso multiplicador é simplesmente uma lista dos dígitos 1-9 dispostos verticalmente para baixo. (Mais esclarecimentos podem ser encontrados ao longo do livro).

⁶Para maiores detalhes consultar PINTO, Estêvão (1943). *Maxarabis e balcões*. In: *Arquitetura Civil II. Textos Escolhidos da Revista do IPHAN*. São Paulo: FAUUSP e MEC-IPHAN, 1975.

⁷*Constructio*, Appendix, p. 27.

⁸*Descriptio*, Appendix, Parte III.

⁹Appendix, *Descriptio*, Plate V.

¹⁰Edward Wright (c. 1558-1615) traduziu este livro para a língua inglesa, cuja versão foi publicada em 1618

Capítulo 2



10.37423/231008299

PROPOSTA DE AÇÃO DIDÁTICA: EXPLORANDO A CONSTRUÇÃO DOS LOGARITMOS

Walter Martins Rodrigues

UFERSA

José Eduardo Colle

Docente da rede privada de ensino básico e acadêmico da Univesp

William Rodrigues da Silva

Secretaria Municipal de Educação de SP

Elmer Rolando Llanos Villarreal

UFERSA



Apresentação: Neste capítulo trataremos de um enfoque do tema logaritmo, e discutimos possíveis propostas que tragam uma abordagem mais contextualizadas e que incorpore mais aspectos da construções e das propriedades essenciais dos logaritmos. Partindo do princípio que é um assunto que muitas vezes o estudante não domina bem, há dificuldades sérias de aprendizagem deste assunto.

Desta forma, nossa proposta é mais dialógica, ou seja, a gente não parte das definições e vamos diretamente trabalhando as propriedades e proposições.. Vamos partir da discussão dessa dificuldade que há no tocante ao ensino e aprendizagem do conceito, ao passo que também entendemos ser muito importante uma profundidade no trabalho com o conceito.

Nossa experiência em sala de aula, como professores de matemática no ensino básico e superior, aponta que os estudantes dominam bem os conceitos de progressões aritmética (PA) e geométrica (PG). Por conseguinte, pode ser interessante iniciar o tratamento do tema a partir de PA e PG, destacando alguns elementos da história. Feito isto a gente trata problemas de logaritmos do ENEM e outros exames, mostrando que após superar o obstáculo da interpretação dos símbolos, não há dificuldades maiores.

1 INTRODUÇÃO:

Os documentos oficiais de orientação de conteúdos para o ensino de matemática do ensino médio prescreve que devem ser ensinados no 1º ano do Ensino Médio o assunto “Logaritmos”, o ensino deste tema, muitas vezes, se baseia em sequências de resoluções de equações e inequações, focado no rigor operacional algébrico, e por vezes descontextualizados.

Neste capítulo objetivamos contribuir com o trabalho do docente que atua no ensino deste tema, no sentido de dar suporte ao Professor de Matemática no Ensino dos Logaritmos. A ideia é propor um ensino das propriedades, definições e caracterizações das Funções Exponenciais e Logarítmicas de modo que estejam mostradas através do estudo variacional das grandezas envolvidas que modelam os fenômenos naturais e situações problemas onde existe uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente em um dado instante.

É sempre interessante destacar que o essencial, no tocante ao ensino de dos Logaritmos atualmente, não é saber fazer uso de sua ferramenta de cálculo aritmético e sim entender que as Funções Exponenciais modelam fenômenos onde a variável dependente cresce ou decresce muito rapidamente enquanto as Funções Logarítmicas modelam fenômenos onde a variável dependente cresce ou decresce muito lentamente, sendo as variações de ambas as funções proporcionais à variável independente.

Entendemos que conhecer a origem do conceito e as motivações gerais que permitiram que os logaritmos fossem desenvolvidos é interessante, mesmo sem tratar especificamente de um aprofundamento histórico em aulas. Ou seja, ao nosso ver não é necessário que o professor seja um especialista para utilizar História da Matemática em suas aulas, trazendo inúmeros benefícios aos estudantes.

Por outro lado, a realidade que se impõe no trabalho cotidiano dos professores é de pouco tempo para estudos, em decorrência da quantidade de aulas e dos deslocamentos que precisa realizar, assim a maioria dos docentes se apoia apenas nos livros didáticos, a grande maioria ignora essa tendência metodológica.

REFLEXÕES SOBRE A APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS

Na UFERSA a ementa da disciplina cálculo 1 prevê uma revisão sobre o conteúdo de funções, em particular as funções exponenciais e logarítmica, bem como a operabilidade com logaritmos, dado que em muitos problemas envolvendo cálculo diferencial desempenha papel chave. Vamos iniciar a

reflexão a partir da fala de alunos, que na verdade é um sentimento que a maioria dos professores de matemática sabe é muito realista em nosso dia a dia. O professor depara frequentemente com frases de estudantes no seguinte sentido:

“Eu não me dou bem com a matéria porque tenho dificuldade de entender, principalmente na hora de aplicar. “

“.Eu posso até entender o que o professor fala, mas se eu vou fazer sozinha(o), já tenho certa dificuldade.”

Após anos de estudo e convivência com essa dificuldade, sentimos que um dos problemas está relacionado à falta de afinidade com as operações envolvendo números. A linguagem matemática as vezes é desafiante, e o contexto auxilia na melhor compreensão dela. Não é novidade que o “ensino básico de matemática” esteja em crise, temos bons documentos orientadores, por exemplo os PCNs, que sugerem um ensino voltado para formar os cidadãos, que possam ler notícias na internet, fazer trabalhos de pesquisa, que possam usar as ferramentas da matemática no seu cotidiano. Claro que um mundo em que a tecnologia de comunicação alterou tanto nossa forma de gerar informações e de nos informar, é lamentável termos que conviver com esse déficit de ensino e aprendizagem de matemática no Brasil.

Para a boa formação do cidadão é necessário um conhecimento básico de matemática, por ser uma ciência que fornece ferramentas lógicas para interpretar problemas, quanto para tratar de questões salariais, ver se as contas estão certas na hora de ser despedido ou admitido. Dados do Instituto Nacional de Pesquisas em Ensino (Inep) indicam que o aproveitamento na matéria cai ao longo da vida escolar. Enquanto os estudantes de 4ª a 5ª série do Ensino Fundamental conseguem 32,6% de aproveitamento, no 8º e 9º, ano o índice cai para 14,8, e no 3º do Ensino Médio, para 11%. As dificuldades com a matemática começam no início do Ensino Fundamental. Em um trabalho realizado em 2011, mostrou-se que apenas 42% das crianças aos 8 anos dominavam as atividades adequadas para aquela fase da etapa escolar. Tudo isso mostra que é preciso lidar melhor com o ensino e aprendizagem em Matemática. por outro lado sabemos que, em geral, o aprendizado depende muito da consolidação de aprendizados anteriores, particularmente na Matemática esse é um fato notório.

Em nossas reflexões sobre a melhor maneira de lidar com essa difícil questão de melhorar o ensino, principalmente para os adolescentes, entendemos que “ao trazer o dia a dia para dentro da sala de aula”, em estratégias que pode envolver interdisciplinaridade, como por exemplo, trabalhar a matemática junto com a disciplina de informática, pode contribuir na melhor compreensão dos conceitos por parte dos estudantes. Ao nosso ver utilizar o computador é interessante, porque é uma coisa do dia a dia deles, que eles gostam bastante. Aí pode-se trabalhar a matemática com gráficos e tabelas de Excel. Compras, mercados, tudo que eles fazem diariamente.

Focando na questão do ensino de logaritmos, de antemão pode não parecer fácil tornar um “assunto muito interessante”, e esse é um desafio que tem sido difícil para os professores resolverem. Os logaritmos é definido sendo a função inversa da função exponencial, de modo que logaritmo de x na base b é n , se e somente se b elevado a n resulta x :

$$\log_b(x) = n \Leftrightarrow b^n = x$$

Muitos alunos conhecem a definição, e as vezes até o manejo da simbologia, mas acham que não é algo que fica muito claro, como fazer, dado que, por exemplo, para se ter $\log_3(15)$ teria que se conhecer um número n para o qual 3 elevado a n resultasse 15. No fundo a definição cobra que tenhamos uma ideia da continuidade da função exponencial e de que está é injetora. De fato não algo tão elementar, se olharmos por esse ângulo. Muitas vezes o ensino-aprendizagem de matemática fica muito vinculado a uma dependência de um domínio pleno do manejo das operações algébricas e carregado de uma linguagem simbólica, às vezes não interpretados com mais profundidade. Nesse trabalho buscamos do assunto relevando os aspectos históricos e dando variadas interpretações do cálculo de logaritmos, dessa forma o manejo das operações algébricas deixam de ter um significado hermético, e o estudante passa a dominar sua operabilidade.

Um trabalho que traz propostas de abordagens dos logaritmos muito interessantes e discute bem essa questões de ensino e aprendizagem deste assunto é (SOARES, 2004). Os livros didáticos de Matemática deste século, seguem o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), o qual define como devem ser trabalhados, distribuídos e selecionados nos campos da matemática. Mas a aprendizagem está também muito associada aos recursos metodológicos empregados. Ao nosso ver, o ensino de logaritmos sendo mais relacionada em atividades interdisciplinares ou resoluções problemas, permite novos olhares por parte do aluno, e de certo modo afasta da forma mecânica, é um ganho que se pode ter com a contextualização. De certa forma, em consonância com o que propõe (SOARES, 2004). Entendemos

que a concepção adotada por grande parte dos livros didáticos usados no ensino médio são, essencialmente focados no caráter algébrico-funcional. A proposta deste livro, e em particular deste capítulo é difundir propostas para um ensino de logaritmos mais rico e significativo, pois o conceito de logaritmo é uma das ferramentas fundamentais que deve ser utilizada no ensino de matemática nos dias atuais. Nesse sentido, é importante o trabalho com textos que valorizam aspectos históricos e/ou contextualizados na construção de propostas didáticas sobre esse tópico o assunto..

LOGARITMOS, NAS FORMA MAIS TRADICIONAS DE ABORDAGEM

Em geral a função logarítmica é definida como o inversa da função exponencial, naturalmente no aspecto lógico está perfeitamente adequado. A questão é que trabalhar desta forma exige o domínio da operabilidade com a composição de funções, temos que fortalecer estes elementos e discutir esse fato com os estudantes, encontramos a definição desta forma:

Seja $a > 0$ um número real distinto de da unidade e considere b um número real qualquer. Define-se o logaritmo de b na base a é o número real x tal que a elevado a x resulta exatamente b .

De forma simbólica: $\log_a(b) = x \Leftrightarrow b = a^x$

A definição está indicando que se fixarmos uma base a , e tomarmos um número real b o cálculo de $\log_a(b)$ exige que eu possa determinar qual o expoente x tal que $a^x = b$. A Figura a seguir aponta as denominações dos elementos envolvidos na definição de logaritmo.

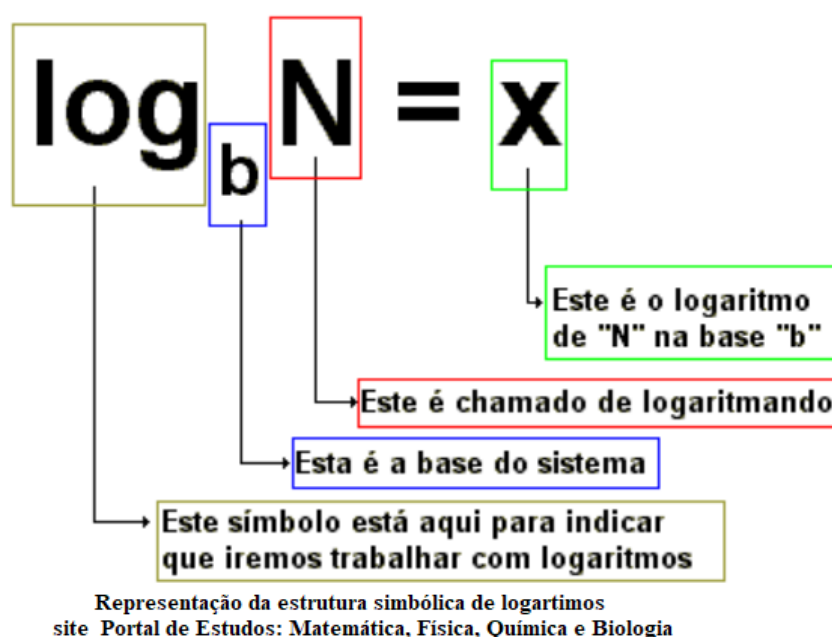


Figura 1: Estrutura simbólica de logaritmos.

Claro que para um estudante com um bom domínio de matemática, e que sabe utilizar com desenvoltura os conceitos de função inversa, fica tranquilo a definição de logaritmos. Entretanto, o professor que atua no ensino médio de nossa rede básica trabalha que possuem muitos estudantes sem tais habilidades bem aprimoradas, e diversos estudantes podem ficar para trás nesse momento. De acordo com D'Ambrosio (1986), devemos ter em mente que a matemática é uma linguagem, mais fina e precisa que a linguagem natural, e ela permite-nos comunicarmos sobre fenômenos naturais.

A Matemática, como linguagem, tem o caráter de universalidade, assim a arte e outras manifestações culturais. Essa universalidade da linguagem matemática mostra a sua utilidade na comunicação. Por outro lado, este rigor, que é parte da linguagem matemática, o que não significa por si que tal rigor cause a dificuldade. Mas, com certeza, exige que se compreenda o vocabulário dessa linguagem, e como já destacou IMENES e LELIS, os símbolos são os elementos de comunicação da matemática.

Destacamos também trabalho (VIALI, 2007), em que se verificou que o aluno levará adiante os problemas de comunicação e linguagem enfrentados nos níveis anteriores. As vezes os erros cometidos por alunos do Ensino Médio dependem de conteúdos que foram apenas vistos, mas não compreendidos. No caso do conteúdo de logaritmos, ao resolver um problema, o aluno usará a simbologia matemática, que é bastante complexa se a pessoa não tem uma clara ideia do conceito. A simbologia é a ferramenta, de linguagem e não o conceito, sua forma de expressar uma maneira de

pensar, que só é bem usada se esses símbolos e regras são compreendidos e interpretados em um contexto claro para tratar uma expressão ou equação.

Sempre bom lembrar que quando a sociedade não dispunha de calculadoras eletrônicas em uso cotidiano os logaritmos desempenhava papel de suporte de cálculo numéricos, e eram as bases para as réguas de cálculo, e o estudante percebia isto rapidamente. Hoje, a situação é bem distinta, devemos destacar a importância histórica que teve o logaritmo para o trabalho do engenheiro, e o trabalho com as funções logarítmicas em problemas contextualizados são interessantes, mostram a importância atual dos logaritmos. Nesse contexto, o artigo (LUIZ & , Lancillotti, 2014), as autoras fazem um estudo tem por objetivo estabelecer a análise de um compêndio de Álgebra, a saber, "Elementos de Álgebra", de Cristiano Benedito Ottoni, adotado nos Programas de Ensino do Colégio Pedro II, no período de 1856-1870. A análise é norteada pela categoria *organização do trabalho didático*, que permite apreender, historicamente, o papel dos instrumentos didáticos no interior das atividades desenvolvidas em âmbito escolar e apontar as funções assumidas por estes compêndios na relação educativa. O artigo discute de forma mais profunda o trabalho de Ottoni: "**Theoria dos Logarithmos**", no qual o tema logaritmos aparece no último capítulo da obra, e destaca que todo o conteúdo de base, necessário ao ensino dos logaritmos encontra-se nos itens anteriores. Além do que sempre que julga necessário, o autor retoma itens anteriores ou mesmo problemas propostos anteriormente. O artigo nos informa também que Ottoni foca na aplicabilidade de logaritmos, relacionando a problemas envolvendo juros compostos. Novamente apresenta o conteúdo com exemplos algébricos para chegar às fórmulas de juros compostos e de desconto composto, aí sim propõe um exemplo numérico para calcular o tempo de aplicação de uma quantia cuja solução dá-se pela aplicação de logaritmos.

4) UMA CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO DOS LOGARÍTMOS

Recentemente em um trabalho com turmas de Cálculo 1 da UFRSA o professor Walter Martins Rodrigues relata que um estudante se mostrou realmente bem incomodado em ter uma clara interpretação para o logaritmo, o aluno disse: “.. até entendo que $\log_2(15) = x \Leftrightarrow 15 = 2^x$, mas de forma alguma isso parece me ajudar a calcular $\log_2(15)$ pois não sei pensar num número x que $15 = 2^x$, como podemos entender mais essa construção?”. A partir da inquietação do estudante o professor organizou o trabalho de revisão fazendo uma abordagem com mais enfoque na história. Além disso, em parceria com os professores José Eduardo Colle, William Rodrigues da Silva,

Jackson Jonas da Costa e Elmer R. Llanos Villanueva organizaram uma série de apresentações, atendimentos diretos no laboratório de matemática e vídeo aulas sobre matemática básica.

Vimos que introduzir o conceito de logaritmo a partir do estudo de PA e PG, a ideia construtiva de Napier. John Napier (1550 – 1617). O conceito difundido a partir da publicação da primeira tabela de logaritmos de Napier se mostrou uma invenção muito significativa para a ciência, além de auxiliar os astrônomos na simplificação dos cálculos trigonométricos daquela época ajudou no desenvolvimento computacional bem como na invenção da calculadora. Vale lembrar que Joost Bürg (1552 -1632), em uma pesquisa independente construiu uma tabela de logaritmos antes de Napier, mas terminou por publicar posteriormente. Também é importante lembrar que os trabalhos de Henry Briggs (1561 – 1630) foram decisivos nesse assunto, ele redefiniu e configurou os logaritmos, que são conhecidos nos nossos dias como logaritmos de base dez.

A importância do ensino de logaritmos, notada sua conexão com outros conteúdos da matemática, este fazendo-se necessário como forma de continuidade para os conteúdos seguintes, facilitando o progresso da aprendizagem. Dar destaque também a suas principais aplicações, tais que estão presentes no dia a dia da população, o que leva a necessidade do conhecimento do trabalho com logaritmos. Muitas vezes as dificuldades de aprendizagem estão de certa forma relacionadas, tanto com o distanciamento dos estudantes com a matemática, por considerá-la complexa, quanto pelo fato da simples memorização de definições. Em nosso ponto de vista, ensinar logaritmos não é tarefa fácil de se conseguir, pois tal conteúdo é tido pelos discentes como um tema de enorme complexidade. Sabendo que os logaritmos podem ter uma abordagem construtiva a partir da ideia da identificação de uma associação entre progressão aritmética e geométrica, esta conexão de logaritmos a estes dois conteúdos, que em geral os estudantes compreendem melhor, permite que o estudante familiarizar mais o conceito de logaritmos, dominar as operações e as interpretações gráficas.

Entendemos que quando o professor trabalha com visão do cuidado com a aprendizagem, e consegue desenvolver um processo seja significativo na construção do conhecimento do estudante, acaba fazendo muita diferença para que o estudante tenha uma compreensão mais profunda e consistente. Desta forma uma boa ferramenta para o docente pode ser o uso de metodologias inovadoras, junto com o conhecimento adequado dos documentos que regem o processo de educação, o trabalho em sala de aula pode ser proveitoso com relação a qualquer conteúdo ministrado em sala de aula, em particular logaritmos. Em sintonia com a proposta de (EVES, 2008), entendemos que o ensino de logaritmo pautado como instrumento de cálculo não é mais utilizado na escola, a função logarítmica

e a função exponencial permanecerão sempre uma parte importante do ensino da Matemática, pois as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise.

Vale lembrar que as Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2006) recomendam que a abordagem do tema logaritmo seja enfatizada um trabalho mais dinâmico e que valorize o trabalho junto aos estudantes de situações-problema que ilustram o modelo exponencial e logarítmico.

Hipoteticamente, podemos compor o estudo de logaritmo com um estudo de história a partir da proposta de uma peça teatral, em que todos passam a viajar um pouco na história, perceber as dificuldades existentes, as necessidades de ferramentas ao menos teóricas para efetuar cálculo mais precisos... Assim, fica mais claro que o conhecimento das propriedades de logaritmos, permitem o conhecimento aproximado de logaritmos de valores muito maiores ou muito menores a partir de uma tabela fixada, e essa tabela tem uma construção com interpretação bem clara, obtida inicialmente da combinação de uma PA e uma PG, e novos pontos obtidos pela interpolação linear entre os pontos da PA e estes associados à média geométrica dos respectivos pontos da PG associados aos interpolantes da PA.

Como se pode construir uma tabela de logaritmos ?

Hoje podemos construir uma tabela de logaritmos de muitas formas, dado que temos muita tecnologia ao nosso favor. Mas uma proposta de valorizar elementos históricos pelo respeito às ideias dos antepassados. Inicialmente os professores podem refletir sobre o fato de PA e PG serem matérias que o aluno domina bem, e que por exemplo os juros compostos são bons exemplos de PG. Pode-se considerar um problema envolvendo inserção de meios em PG, para resolver uma questão de quando um valor a certa taxa vai duplicar o valor inicial. A gente discute o fato que para determinar a solução desta maneira as vezes é preciso inserir meios, varias vezes consecutivas, tornando muito moroso o processo, apesar de claro.

Neugebauer e Sachs em 1945, descobriram em Tabletes antigos da babilônia problemas envolvendo potências sucessivas de um dado número, semelhantes às nossas tabelas de logaritmos, ou mais propriamente, de antilogaritmos. A questão posta em um problema, a que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado, equivale à nossa: qual o logaritmo de um número dado em um sistema com um certo número como base ?

Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os babilônicos não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. Um exemplo prático desse

costume é explicitado em um problema para saber quanto tempo levaria para uma quantia em dinheiro dobrar o valor inicial, estando sujeito a uma correção de 20 por cento ao ano.

No sistema decimal $(1,2)^3 = 1,728$ e $(1,2)^4 = 2,0736$, note que deve ser um número entre 3 e 4, deve se inserir meios na PG.

$$\begin{cases} 1,728 = 3a + b \\ 2,0736 = 4a + b \end{cases}$$

Descobre $a = 0,3456$ e $b = 0,6912$, a aproximação linear por $y = ax + b$, com $y = 2$, se descobre $x = 3,78703$.

(é importante notar que $\log_{1,2} 2 = 3,801784$, ou seja o método babilônica aproximou bem do valor exato, entretanto em alguns casos esses erros aumentam significativamente)

Não temos conhecimento de como eles conseguiam perceber que está era uma forma de interpolação linear, na linguagem de hoje, com todo o nosso conhecimento de geometria analítica é fácil explicar o sistema acima, trata da reta $y = ax + b$ que passa pelos pontos A(3 , 1.728) e B(4 , 2.0736), os coeficientes da reta são determinados exatamente pelo sistema linear acima, após determinar estes coeficientes, substituindo y por 2, eles calculavam o valor de x, que era uma solução aproximada do que seria na linguagem de hoje $\log_{1,2}(2)$. De fato, impressionante resultado. Mas dado que a função logarítmica não é linear, essa metodologia pode levar a muitos erros. Entretanto, podemos entender que os babilônios chegaram bem próximos à criação dos Logaritmos.

Os logaritmos propriamente dito, tem surgiram na transição do Renascimento para a Modernidade, que segundo Boyer [9] vai aproximadamente de 1540 a 1690 houve a necessidade da simplificação de cálculos aritméticos e medidas geométricas para que a população, John Napier não era matemático profissional, era dono de terras na Escócia, ativista religioso e habilidoso na Engenharia Mecânica e preocupado com questões militares. Na Matemática, seu interesse maior era em cálculos numéricos e na trigonometria para ajudar em seus projetos mecânicos. Napier então visava transformar operações complicadas em operações mais simples. Obviamente, é muito mais fácil somar e subtrair que multiplicar e dividir. Note que para calcular 452×28 devemos fazer duas multiplicações e uma soma e para calcular $452 + 28$ fazemos apenas uma soma.

Exemplo 1: Considere o seguinte problema: Se uma pessoa deposita R\$5000,00 em um fundo cuja correção anual é feita a uma taxa fixa de 15,14% ao ano. Quanto tempo deve decorrer, de modo que o valor obtido seja duas vezes e meia o valor inicial? Soluções de problemas deste tipo são feitas com

logaritmos, na literatura. Mas, sem dúvida uma maneira bem pragmática de pensar o problema é construir uma PG que descreve o comportamento dos valor investido ao longo do tempo, vide Tabela

1. Será uma PG de valor inicial 5000 e razão 1,1514, teremos:

Tempo ano	0	1	2	3	4	5	6	7
valor	5000	5757	6628,6	7632,2	8787,7	10118	11650	13414

Tabela 1: Progressão geométrica relativa de valor inicial 500 e razão 1,1514

Note que antes do sexto ano o valor não chega a 2,5 vezes o inicial, e que em 7 anos já passa disso. Assim trata-se de um tempo entre 6 e 7 anos. Vamos considerar essa parte da PG e inserir um termo intermediário:

Tempo	6	6,5	7
valor	11650	?	13414

Tabela 2: Posicionamento do termo intermediário

Para obter o valor associado a 6,5 anos, como ilustra a Tabela 2, podemos identificar por x , como os valores estão em PG

$$\frac{x}{11650} = \frac{13414}{x} \Rightarrow x^2 = 156271915,4 \Rightarrow x = 12501$$

Portanto associado ao tempo de 6,5 anos deve se ter um valor aproximado de 12501 reais..

Resolvendo o problema do Exemplo 1, com uso de logaritmos: Como esse problema é resolvido usualmente. Sabendo que o valor futuro do investimento em tempo de y anos a partir do presente é:

$V := 5000(1,1514)^y$, sendo, que $\frac{V}{5000} = 2,5$, o valor V é 2,5 vezes o valor inicial

$$\frac{V}{5000} = (1,1514)^y \Rightarrow 2,5 = (1,1514)^y \text{ aplicando logaritmo na base 10 temos}$$

$$\log(2,5) = \log((1,1514)^y) = y \cdot \log(1,1514)$$

$$\text{Como } \log(2,5) = 0,39794 \text{ e } \log(1,1514) = 0,061226$$

$$\text{Temos que } y = \frac{\log(2,5)}{\log(1,1514)} = 6,499 \approx 6,5 \text{ anos}$$

Naturalmente, a solução usando logaritmo é mais curta, mas ficam diversas coisas que não são elementares de saber, como por exemplo, porque os valores de log são estes?

Nesse sentido a solução anterior é mais longa, mas mais simples de compreensão. Pois PG é um assunto que os alunos dominam... Na verdade é muito importante saber lidar com logaritmos, por isso a gente pode entender melhor, aprendendo log usando PG.

É importante destacar que por mais que tenhamos habilidade inserir meios na PG, pode ser difícil determinar certos logaritmos com esse método. A ideia é que a partir da inserção de meios a pessoa pode obter uma aproximação de $\log_b(x)$, mas é um processo que pode ser muito lento. O que podemos ressaltar é que o procedimento de aproximar $\log_b(x)$ a partir da inserção de meios na PG é mais intuitivo, e contribui para que o estudante maneje as operações.

5) LOGARITMOS EM CONEXÃO COM PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

O trabalho de Napier na construção dos logaritmos foi baseado no conhecimento das progressões aritméticas e geométricas, estabelecendo uma relação entre elas, obtendo o que os livros didáticos chamam de conceito de logaritmo. Para entendermos o conceito de logaritmo ou em que consistem os logaritmos, ampliando o significado lógico dessa expressão apresentada nos livros didáticos, tomamos a ideia provinda de Napier, obtida pela as relações entre as progressões geométricas e progressões aritméticas. O interessante, é que as progressões são conceitos que os alunos dominam bem. Vamos trabalhar no sentido entender a ideia básica do conceito de logaritmos, por uma construção com base em exemplos, e posterior formalização algébrica.

Vamos iniciar dando a interpretação de $\log_2(x)$, em situações que x é potência de 2.

Considere abaixo, a PA de valor inicial 0 e razão 1 emparelhada com a PG de valor inicial 1 e razão 2

Progressão Aritmética: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

Progressão Geométrica: 1 2 4 8 16 32 64 128 256

Assim se o logaritmo de x_i na base 2, é exatamente r_i . Ou seja

$\log_2 1 = 0$, nesse caso $x_i = 1$ o respectivo $r_i = 0$;

$\log_2 8 = 3$, nesse caso $x_i = 8$ o respectivo $r_i = 3$;

$\log_2 128 = 7$, nesse caso $x_i = 128$ o respectivo $r_i = 7$.

Assim por diante. Além disso a tabela pode ser estendida:

PA ...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
PG ...	$1/32$	$1/16$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	16	32	64	128	...

$\log_2(1/16) = -4$, nesse caso $x_i = 1/16$ o respectivo $r_i = -4$;

$\log_2(1/32) = -5$, nesse caso $x_i = 1/32$ o respectivo $r_i = -5$;

Além disso verifica-se facilmente que para estes elementos tabelados fica claros as propriedades de logaritmos:

$$\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$$

$$\log_2(x/y) = \log_2(x) - \log_2(y)$$

ou seja, os logaritmos na base b relacionam um PG de razão b com uma PA de razão 1

Exemplo 2: Na Tabela 3 relacionamos uma PG de razão 3 com logaritmos na base 3, os valores de $\log_3(x)$ estão representados por números decimais com quatro casas decimais. Note que a imagem da PG pela função $\log_3(x)$ é exatamente uma P.A. de razão 1:

P.G de razão 3		logaritmos na base 3
6		1,63093
18		2,63093
54		3,63093
162		4,63093
486		5,63093
1458		6,63093
4374		7,63093
13122		8,63093
39366		9,63093
118098		10,63093

Tabela 3: Ação da função $\log_3(x)$ sobre uma PG de razão 3

A ideia básica é que inserindo uns termos intermediário na PG de razão 3 (lado esquerdo do quadro acima), entre os números 162 e 486, o qual sabemos que é a média geométrica entre estes números, e vamos inserir o valor médio na PA do quadro acima, ou seja a média aritmética entre 4,63093 e

5,63093, assim a gente consegue um logaritmos mais próximo do que queremos, mas pode não se exatamente ele. Vamos calcular,

Logaritmo na base 3	4,63093	Y	5,63093
Termo da PG de razão 3	162	X	486

Tabela 4: Inserção de meios na tabela 3

Vamos fazer o cálculo do valor intermediário: De imediato temos que

$$Y = \frac{4,63093 + 5,63093}{2} = 5,13093$$

Para obter o valor associado a 4,25 anos , que será X, como os valores estão em PG

$$\frac{X}{162} = \frac{486}{X} \Rightarrow X^2 = 78732 \Rightarrow X = 280,59$$

Na Tabela 5 a seguir inserimos um termo intermediária nos dados da Tabela 3.

6	1,63093
18	2,63093
54	3,63093
162	4,63093
280,5922	5,13093
486	5,63093
1458	6,63093
4374	7,63093
13122	8,63093
39366	9,63093
118098	10,63093

Tabela 5: Inserção “linha na Tabela 3”

Realmente é um fato muito relevante, que esse tipo de raciocínio para construir respostas para problemas envolvendo juros, com construção de uma progressão geométrica era conhecido na antiga Babilônia. De acordo com Boyer, eles dispunham de grandes tabelas de potencias e sabiam bem usar esse princípio de inserção de meios na PG para resolver esse tipo problema. Segundo Boyer [9] , os Babilônios, que viveram no quarto milênio antes de Cristo eram uma população de alto nível cultural, tinham alto desenvolvimento na área de matemática, eles tinham um sistema numérico posicional na base 60(quer dizer as mesmas estratégias de operações básicas nossa era válida no sistema numérico deles), ou seja o sistema de base sexagesimal, que ainda empregado atualmente nas unidades de tempo e medida dos ângulos, apesar da nossa sociedade adotar o sistema decimal como padrão. Um dos primeiros a descrever o conteúdo dessas tabelas dispostas em tabletes foram Neugebauer e Sachs

em 1945, Além da notação e da linguagem, as principais diferenças entre as tabelas antigas evidenciando que as nossas são as lacunas entre os números, que são bem maiores que as nossas atuais; o uso de vários números como base em algumas situações e o uso que faziam dessas tabelas que eram bem específicos como por exemplo, para cálculo de juros compostos, áreas e volumes e não para cálculo de operações no geral. Apesar das grandes lacunas em suas tabelas exponenciais, os babilônicos não hesitavam em interpolar por partes proporcionais para obter valores intermediários aproximados. Um exemplo prático desse costume é explicitado em um problema para saber quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar a 20 por cento ao ano, no tablete de argila o problema é resolvido usando a estratégia de interpolação de meios na PG que descrevemos anteriormente, eles faziam uma PG de valor inicial, igual ao valor inicial do investimento, criavam uma PG com quantos termos fossem necessários até superar o dobro do valor inicial, ao perceber que o dobro do valor inicial estava entre os valores A e B que seriam o terceiro e o quarto termo sucessor do primeiro termo respectivamente, eles determinavam a interpolação a partir da solução do sistema linear.

$$\begin{cases} A = 3x + b \\ B = 4x + b \end{cases}$$

Claro que eles faziam isso, não de forma algébrica, mas para específicos valores de A e B, além do que a representação de um sistema linear deles não era dessa forma, mas de acordo com os historiadores da Matemática Neugbauer e Sachs que tiveram contato com os históricos tabletes de argila da Babilônia é nítido que eles dominavam a solução de sistema lineares, e a solução obtida com o método deles, é muito próximo ao que fizemos interpolando termos na PG, por média geométrica.

Os logaritmos na forma que conhecemos hoje se originou no trabalho de Napier. Na transição do Renascimento para a Modernidade, que segundo Boyer vai aproximadamente de 1540 a 1690 houve a necessidade da simplificação de cálculos aritméticos e medidas geométricas para que a população, na sua maioria analfabeta, conseguisse participar das transações comerciais da época, havendo uma maior preocupação por parte dos matemáticos com os cálculos aritméticos. John Napier não era matemático profissional, era dono de terras na Escócia, ativista religioso e habilidoso na Engenharia Mecânica e preocupado com questões militares. Na Matemática, seu interesse maior era em cálculos numéricos e na trigonometria para ajudar em seus projetos mecânicos.

O trabalho de Napier tinha o título muito interessante, que em português quer dizer “Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos”, no caso o trabalho foi escrito em Latim (***Mirifici logarithmorum***

canonis descriptio) de 1614. No trabalho, destaca-se que as operações básicas da potenciação tinha sido recentemente descobertas por Stiffel, isso foi fundamental no trabalho de Napier.

Assim Napier percebe que poderia representar uma PG, como a exemplifica de valor inicial 6 e razão 3 na forma:

$$6.1, \quad 6.3^1, \quad 6.3^2, \quad 6.3^4, \quad 63^5, \quad \dots$$

Sem precisar realizar os produtos, apenas representando, e que se fizesse o produto do termo 6.3^n por 6.3^m resultava 363^{m+n} , pela propriedade de Stiffel. Assim se ele fizesse uma PG iniciando em 1, que continha a PG acima, facilitava a operação:

$$1, \quad 2.3, \quad 2.3^2, \quad 2.3^3, \quad 2.3^4, \quad 23^6, \quad \dots (PG)$$

Napier define o logaritmo na base 3 de um número x sendo o expoente, digamos y , sendo y de tal modo que $3^y = x$. Ou seja na notação de hoje seria:

$$\log_3 x = y \Leftrightarrow 3^y = x$$

A ele teria que $\log_3(A.B) = \log_3 A + \log_3 B$, desta forma se ele tivesse o logaritmo de 2 na base 3, obteria o logaritmo de qualquer termos da PG-Napier acima. Claro que para obter dava trabalho para ele obter $\log_3(2)$, ele o fazia por interpolação de termos, exatamente como fizemos no início, ou seja nossa construção veio por meio da compreensão do que ele fazia para resolver este problema.

Expoente	0	X	1
Termos	1	Y	3

É importante destaca que Napier conhecia bem a representação geométrica das médias aritmética e geométrica, ele conhecia fundamentos das construções geométricas. Assim ele sabia que se $0 < x < y$, então a média aritmética de x e y é maior que média geométrica de x e y , além disso elas coincidem somente se $x = y$.

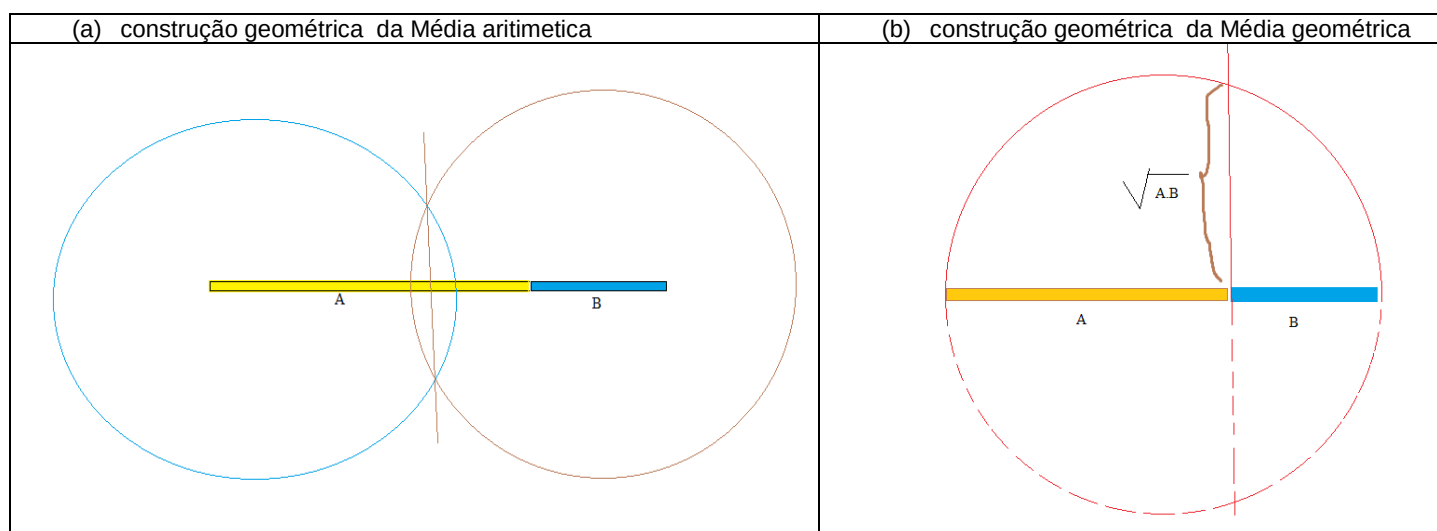
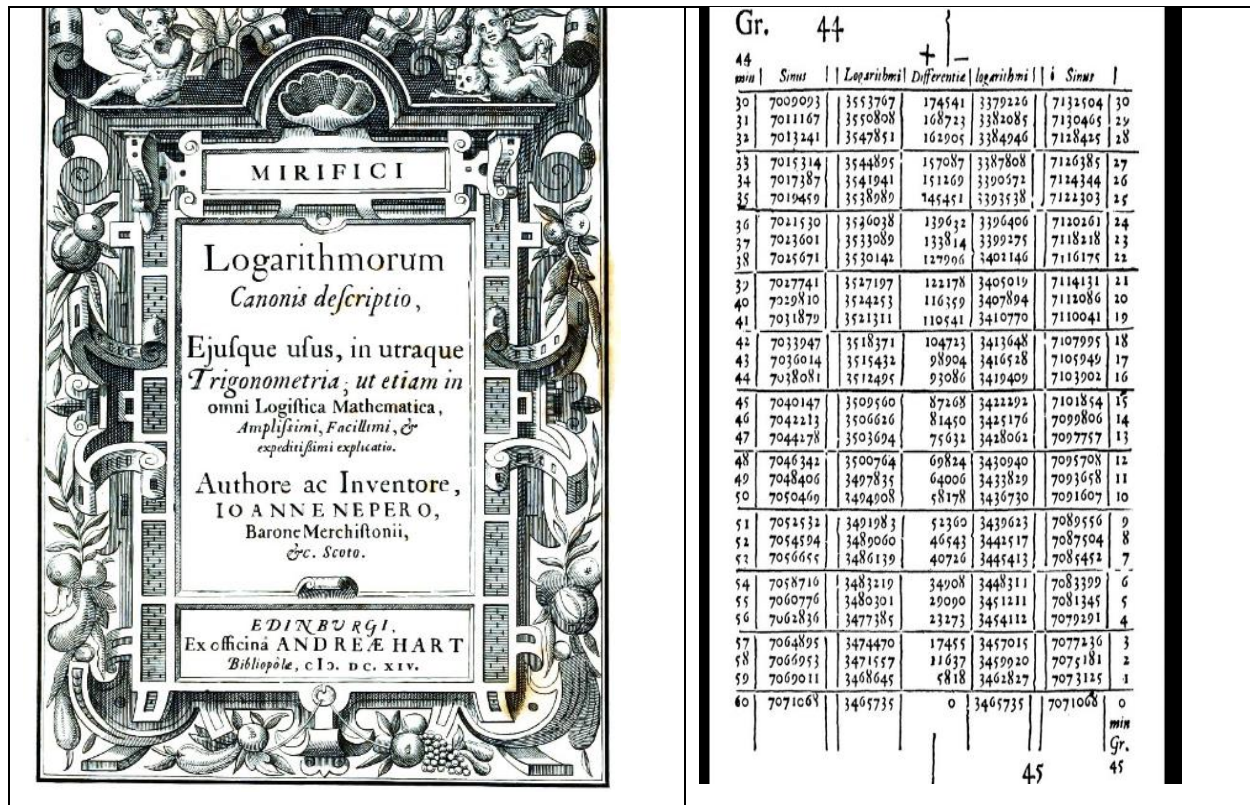


Figura 2: Construção com régua e compasso da média aritmética (a) e geométrica (b)

Observe que a interpretação geométrica da média aritmética permite dar interpretação prática para o processo de aproximação de logaritmo de um número real x em uma base b , onde $b > 0$ e distinto da unidade. Tendo domínio de uma ideia destas Napier pode construir uma tabela de logaritmos usando a base 0,9999999, vide Figura 3, a ideia dele era utilizar uma base próxima de 1 para que o distanciamento entre termos consecutivos fosse próximos.

O trabalho dos logaritmos foi Napier publicado no ano de 1614, e toda a comunidade científica ficou encantada pela rapidez e eficiência que agora essa ferramenta de cálculo poderia imprimir em seus trabalhos. Principalmente os astrônomos, que para traçarem rotas marítimas, tinham que fazerem uso da trigonometria, tornando os cálculos extraordinariamente enormes, complicados e passíveis ao erro (MAOR, 2008).

Na época em que o trabalho de Napier foi publicado, um professor de matemática de Londres, de nome Henry Briggs, achou interessante a ideia e percebeu que poderia fazer sugestões a Napier, deslocou-se para a Escócia ao encontro de Napier propôs modificações em seus logaritmos, para que esses se tornassem mais conveniente, sugeriu o uso da base dez. A sugestão foi bem aceita por Napier. Briggs colaborou com a confecção de novas tabelas, que davam os logaritmos de base 10 para todos os inteiros.



The image shows the title page of John Napier's work, 'Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio', and a portion of the logarithm table. The title page is ornate, with a central text box containing the title and author information. The table to the right is a grid of numbers, organized into columns for 'Sinus', 'Logarithmi', 'Differentia', 'Logarithmi', and 'Sinus'.

Gr. 44

min	Sinus	Logarithmi	Differentia	Logarithmi	Sinus
30	7009093	3553767	174541	3379226	7132504
31	7011167	3550808	168723	3382085	7130465
32	7013241	3547851	162905	3384946	7128425
33	7015314	3544895	157087	3387808	7126385
34	7017387	3541941	151269	3390672	7124344
35	7019459	3538989	145451	3393538	7122303
36	7021530	3536038	139632	3396406	7120261
37	7023601	3533089	133814	3399275	7118218
38	7025671	3530142	127996	3402146	7116175
39	7027741	3527197	122178	3405019	7114131
40	7029810	3524253	116359	3407894	7112086
41	7031879	3521311	110541	3410770	7110041
42	7033947	3518371	104723	3413648	7107995
43	7036014	3515432	98904	3416528	7105949
44	7038081	3512495	93086	3419409	7103902
45	7040147	3509560	87268	3422292	7101854
46	7042213	3506626	81450	3425176	7099806
47	7044278	3503694	75632	3428062	7097757
48	7046342	3500764	69814	3430940	7095708
49	7048406	3497835	64006	3433829	7093658
50	7050469	3494908	58178	3436730	7091607
51	7052532	3491983	52360	3439623	7089556
52	7054594	3489060	46543	3442517	7087504
53	7056656	3486139	40726	3445413	7085452
54	7058716	3483219	34908	3448311	7083399
55	7060776	3480301	29090	3451211	7081345
56	7062836	3477385	23273	3454112	7079291
57	7064895	3474470	17455	3457015	7077236
58	7066953	3471557	11637	3459920	7075181
59	7069011	3468645	5818	3462827	7073125
60	7071069	3465735	0	3465735	7071068

45

Figura 4: Tabela de logaritmos de J. Napier

Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier

O trabalho *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* consumiu 20 anos de sua vida e John Napier é lembrado até hoje não por suas obras religiosas nem pela invenção de suas máquinas e sim por causa dos logaritmos introduzidos nessa importante obra. O fato é que Napier tinha uma conceituação geométrica dos logaritmos, ele dava uma interpretação construtiva, mais ligada a uma experiência prática. John Napier teve reconhecimento universal e sua invenção foi adotada rapidamente por cientistas de toda Europa e até mesmo da China e um dos primeiros a utilizar os logaritmos com grande sucesso em cálculos complicados das órbitas planetárias foi Johannes Kepler.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EVES, H. Introdução à história da matemática. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Programa Nacional do Livro Didático. Guia de livro didático. 5a a 8a séries. Matemática. Brasília: MEC/ PNLD, 2008. (Material em PDF).

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio. Catálogo do Programa Nacional do Ensino Médio. Brasília: MEC/ SEB/ PNLEM, 2009. (Material em PDF).

D'AMBRÓSIO, U. (1997). Educação Matemática: da teoria à Prática. 2 ed. Campinas, SP, Papirus (Coleção Perspectiva em Educação Matemática)

IMENES, L. M., LELLIS, M. Microdicionário de matemática. São Paulo: Scipione, 1998.

MAIOR, Eli. e: A história de um número. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro – RJ: Editora Record, 2008

MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Os logaritmos na cultura escolar brasileira. Natal: SBHMat, 2002.

OTTONI, C. B. Elementos de Álgebra . 4. ed. Correcta e Augmentada. Rio de Janeiro: Nicolau Alves e E & H. Laemmert, 1879

SOARES, F. dos S. Ensino da Matemática no Século XX da Reforma Campos à Matemática Moderna. In: DASSIE, B. A.; ROCHA, J. L. da; São Paulo: Horizontes, 2004.

VIALI, L., A linguagem matemática como dificuldade para alunos do ensino médio, IX ENEM: encontro nacional de educação matemática, 2007

LUIZ, E. C., LANCILLOTTI, S.S.P., “Elementos de Álgebra” de Cristiano Benedito Ottonni: Análise de um instrumento didático do século XIX. Revista HISTEDBR On-line, Campinas, nº 60, p.21-37, dez. 2014 – ISSN: 1676-2584

Capítulo 3



10.37423/231008279

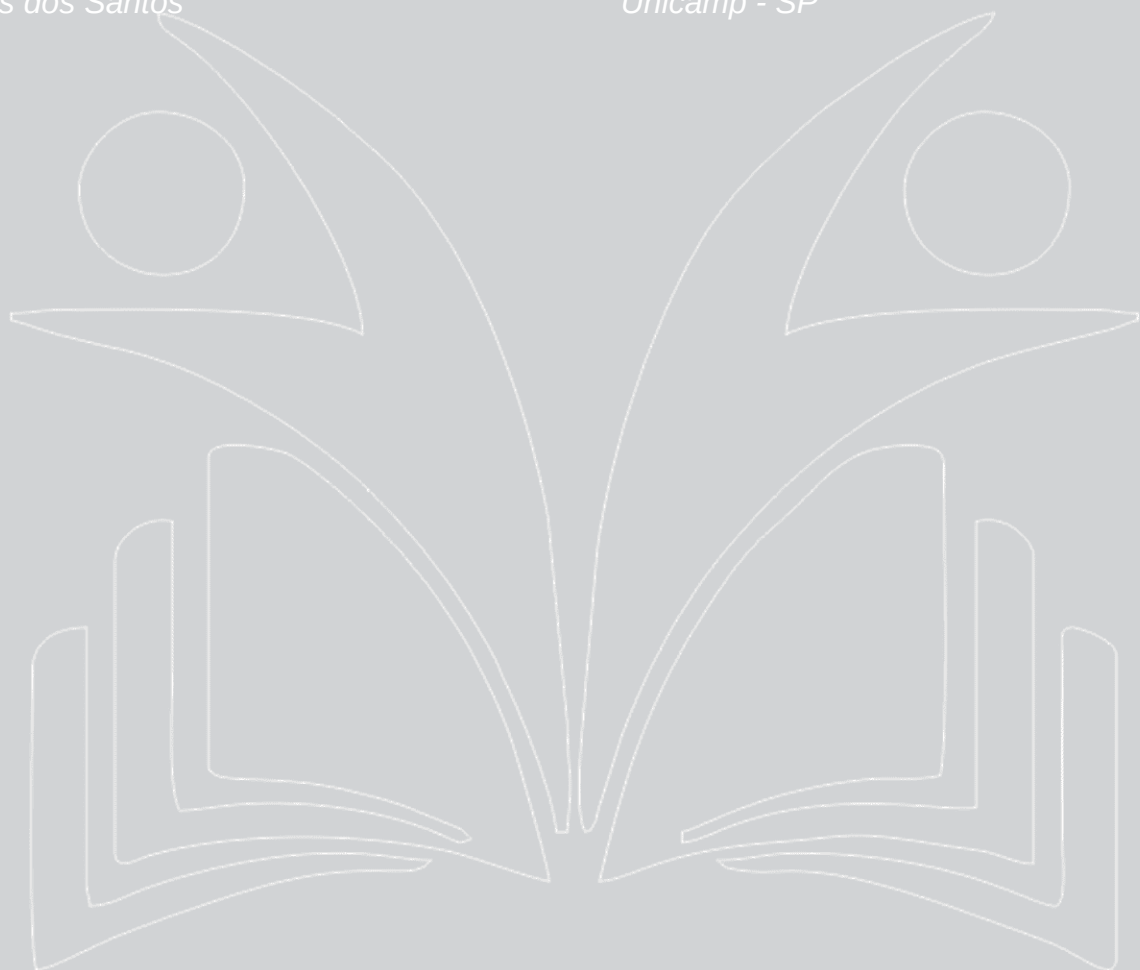
LOGARITMOS : HISTÓRIA, APLICAÇÕES E VÍDEOS ANIMADOS

Renato Mucciato

Unicamp - SP

Lúcio Tunes dos Santos

Unicamp - SP



APRESENTAÇÃO

Durante os seminários de estudos de logaritmos organizados pelos professores Walter Martins Rodrigues e Elmer R. Llanos Villarreal tivemos contato com um excelente trabalho de dissertação realizado pelo professor Renato Mucciato, em mestrado profissional sob orientação do Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos, vide Figura 1. Por isso, os convidamos a contribuir com um capítulo nesse livro de coletânea de trabalhos focando “ História da Matemática e estratégias interdisciplinares no ensino de Logaritmos”.



Figura 1: Imagem de parte da página do Profmat / Unicamp – SP

1.1 INTRODUÇÃO

A dissertação "Logaritmos : história, aplicações e vídeos animados" tinha como objetivo explorar o tópico a respeito de logaritmos, provendo informações sobre contexto histórico, aplicações e formas de conceituá-los, sempre tendo em vista a viabilidade, por conta disso foram trazidas alternativas de atuação e flexibilidade para uso de cada proposta. Neste capítulo, repassaremos o que foi trabalhado, trazendo uma versão mais condensada das propostas.

Tratar de logaritmos no Ensino Médio requer dos alunos uma gama considerável de habilidades, o que já é um desafio, ficando mais difícil devido a grande defasagem dos alunos, conforme apontado pelo PISA. Deste modo, para atrair a atenção do aluno e compensar parte da defasagem, são importantes outras formas de abordar assuntos como esse.

De acordo com (ROQUE,2012), o que torna a matemática abstrata aos alunos é a forma pela qual são ensinados, focando-se em dar os conceitos na forma como o material didático, buscando responder às perguntas apenas contidas no livro. Isto torna a matemática maçante e sem significado. A respeito de tornar a matemática mais concreta, a autora defende que a busca não é apenas por aplicações imediatas do que é aprendido, mas também de relacionar com outros conceitos que deem sentido ao que se está aprendendo.

Portanto, apresentar aplicações, passado histórico e relacionar com outros conceitos matemáticos, provê significado ao que é ensinado.

A presença de multimídia foi amplificado nos últimos anos por conta das redes sociais, mas é algo que pode ser um bom aliado se usado com parcimônia para ilustrar e animar conceitos que podem ser difíceis de perceber utilizando apenas lousa.

Assim, foram explorados aspectos históricos que podem ajudar na introdução, provendo contexto do que será ensinado, bem como uma abordagem teórica associando potências, raízes e logaritmos, buscando relacionar o que foi aprendido com o novo conteúdo, fazendo isso por meio de perguntas-chave. Além disso, propomos uma notação complementar, na forma de triângulo, capaz de representar essas três operações. Entre as propostas didáticas, foram produzidos vídeos animados de curta duração perpassando pelo que foi abordado nas outras propostas. Ademais, foram elaboradas propostas de aulas sobre alguns tópicos pouco explorados e sugestões de alguns experimentos. Também propomos as "pitadas matemáticas", que consistem em curiosidades que podem ser citadas brevemente durante as aulas.

1.2 COMENTÁRIOS SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Os dados da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico ---(OCDE,2019) referente ao PISA 2018 (*Programme for International Student Assessment*), apontam que o aprendizado em matemática da educação básica no Brasil apresenta grandes defasagens. Como pode ser visto na Figura 1.1 , o país se encontra bem abaixo da média da OCDE em leitura, matemática e ciências.

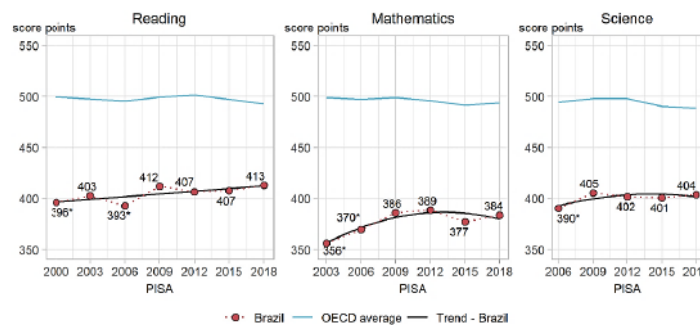


Figura 1.1: Desempenho em leitura, matemática e ciências.
Fonte: OCDE (2019, p.4).

No PISA existem seis níveis de proficiência na matemática. No Brasil, apenas cerca de 32% dos alunos atingem nível dois ou superior, enquanto a média da OCDE é de 76%. Nesse nível, é esperado que o aluno seja capaz extrair informações relevantes e empregar algoritmos, fórmulas e procedimentos ou convenções básicas para resolver problemas, como comparar distâncias percorridas entre duas rotas possíveis ou converter valores monetários. O que é extremamente preocupante para o desenvolvimento dos alunos, pois o PISA é realizado com estudantes de quinze anos que, normalmente, estão entre o 9º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. Pela Figura 1.2, é possível notar que 41% dos alunos não atingem sequer o nível 1, no qual o aluno é capaz de lidar com contextos familiares, identificar informações e executar procedimentos rotineiros, em suma. Uma defasagem tão grande compromete sobremaneira cursar um bom ensino médio. Por conta disso, quaisquer práticas que possam facilitar ou recuperar parte da defasagem sem comprometer o escasso tempo em sala de aula, são bem-vindas.

1.3 DESENVOLVIMENTO DOS LOGARITMOS

Os séculos XVI e XVII foram marcados por uma grande expansão do conhecimento científico em diversos campos e também do comércio, o que ocasionou grande aumento nos cálculos numéricos e também uma atenção maior aos juros compostos. (BOYER & MERZBACH,2012), (MAOR,2008), (ROONEY,2012).

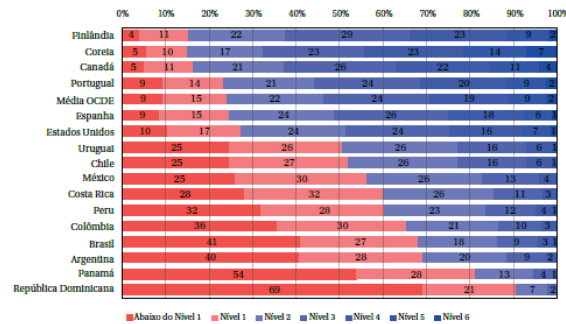


Figura 1.2: Percentual de estudantes por nível de proficiência nos países selecionados.
Fonte: *Relatório Brasil no PISA 2018* (2019, p. 111).

Durante essa época existam alguns métodos ágeis, como os quadrados dos meios e a prostaférese, que utilizavam produtos notáveis e propriedades trigonométricas para transformar operações mais complexas (multiplicações e divisões) em mais simples (adições e subtrações). No entanto, são nos logaritmos que ocorre um salto, permitindo grande avanço nas descobertas, que, segundo Kepler, economizou 50 anos de vida dos astrônomos, sendo fundamental para a dedução de sua terceira lei.



Figura 1.3: John Napier.
Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/pictdisplay/>
Acesso em 12 set. 2021

John Napier, Barão de Merchiston, (c. 1550 -- 1617) nasceu no castelo de Merchiston, próximo a Edimburgo, Escócia. Sua área de interesse inicialmente era a religião, sendo forte opositor ao papa e chegou a calcular uma data do dia do julgamento final. Além disso, Napier também fez planos para construção de aparatos bélicos, sugerindo a James VI da Escócia algo similar a um tanque. Também inventou os chamados "Ossos de Napier", que eram um instrumento mecânico para fazer multiplicações e divisões. (MAOR,2008), (ROONEY,2012).

No entanto, foram os logaritmos que o colocou na história, consumindo 20 anos de sua vida para finalizar sua obra. Em 1614, Napier lançou a obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* e Johannes Kepler foi um dos primeiros astrônomos a utilizá-los, sendo importantes para os em seus cálculos sobre as órbitas planetárias, divulgando-os na Alemanha, assim como outros matemáticos divulgaram

por toda a Europa, se espalhando rapidamente e chegando até mesmo à China e ao Japão (MAOR,2008).

A ideia de logaritmos começou com o matemático alemão Michael Stifel (1487 -- 1567) que formulou a relação entre as progressões aritméticas e as progressões geométricas, mas levando em consideração apenas números inteiros. A multiplicação de dois termos quaisquer de uma progressão geométrica como $(1, q, q^2 \dots)$ terá o mesmo resultado da potência da soma dos expoentes de cada termo, funcionando para valores positivos e negativos, bastando definir que $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$. Inspirado nessa ideia, Napier estendeu o raciocínio para uma faixa contínua de valores. Assim, seria possível simplificar operações para quaisquer números.

Para tanto, restava escolher uma base que não crescesse nem rápido, nem devagar demais. Um bom candidato seria um número próximo de 1. Por influencia da trigonometria, Napier escolheu o número 0,9999999 ou $1 - 10^{-7}$, por seguir uma prática utilizada na época de dividir o raio de um círculo unitário em 10^7 partes (MAOR,2008). Também optou por usar subunidades, de modo a evitar o uso de frações decimais. A notação com números decimais era incipiente na Europa e Napier só foi utilizá-la no livro *Rhabdologia* de 1617. Uma vez escolhida a base, era necessário realizar os cálculos para construir a sua tábua de logaritmos.

É importante mencionar que Napier não possuía o conceito de base que se tem atualmente e a definição de logaritmo era dada geometricamente, como era comum na época (ROQUE,2012). Boyer e Merzbach descrevem a definição dada por Napier da seguinte maneira:

“Consideremos dados um segmento de reta AB e uma semirreta CDE... Suponhamos que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável, decrescendo em proporção com sua distância a B; durante o mesmo tempo, suponhamos que um ponto Q parte de C e se move ao longo de CDE... com velocidade uniforme igual à velocidade inicial de P. Napier chamava esta distância CQ de logaritmo da distância PB.” (BOYER & MERZBACH, 2012, p. 222).

Veja a Figura 1.4 para uma ilustração da definição de logaritmo de Napier.

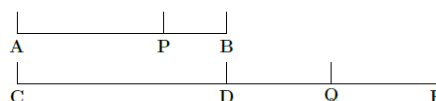


Figura 1.4: Definição geométrica de Napier.

Para realizar a construção de sua tabela, Napier notou que se fizesse $a = 0,9999999 = 1 - 10^{-7}$ teria

$$a^2 = a(1 - 10^{-7}) = a - \frac{a}{10^7}$$

daí, $a^2 = 0,9999999 - 0,00000009999999 \approx 0,9999998$.

Todavia, ele multiplicou toda a sua tabela por 10^7 , obtendo valores inteiros nas suas aproximações.

Assim, para um número $n = 10^7 (1 - 10^{-7})^L$, L é o logaritmo de n que indicaremos por $L = \text{Naplog } n$.

Desse modo, definindo $\text{Naplog } 10^{-7} \cdot (1 - 10^{-7}) = 1$, têm-se

$$\text{Naplog } 9999998 \approx \text{Naplog } 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2 = 2$$

$$\text{Naplog } 9999997 \approx \text{Naplog } 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^3 = 3$$

$$\text{Naplog } 9999996 \approx \text{Naplog } 10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^4 = 4,$$

procedendo dessa maneira para a construção da tábua de logaritmos (RAMOS,2015), (ROEGEL,2010a), (SAMPAIO,2010), (SILVA,2016).

Inicialmente, produziu três tabelas para calcular o logaritmo de outros números por interpolação (LEMOS,2012). Veja um trecho na Tabela 1.1.

Naplog a	a
0	$10^7 = 10.000.000$
1	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7}) = 9.999.999$
2	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^2 = 9.999.998$
3	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^3 = 9.999.997$
$\vdots$	$\vdots$
98	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{98} = 9.999.902$
99	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{99} = 9.999.901$
100	$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^{100} = 9.999.900$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1.1: Tabela de Logaritmos de Napier.

O termo logaritmo vem da ideia de "número proporcional", o que casa com a definição geométrica dada por Napier (BOYER & MERZBACH, 2012), (MAOR,2008), (MORAES,2018). Já a definição moderna foi dada por Leonhard Euler (1707 -- 1783), sendo: se $y = bx$, em que b é qualquer número positivo diferente de 1, então $x = \log_b y$, lendo-se como "logaritmo de y na base b" (MAOR,2008).

Henry Briggs (1561 -- 1631), professor de geometria do Colégio Gresham em Londres, ficou muito interessado nos logaritmos que se encontrou com Napier em pessoa para discutir sobre como poderiam melhorá-los. Decidiram, então, utilizar a base 10 e fazer o logaritmo de 1 ser igual a 0, criando então os logaritmos decimais, também conhecidos por logaritmos Briggsianos (MAOR,2008).

Napier foi bem receptivo às ideias, porém não tinha mais a mesma disposição para elaborar novas tabelas por conta da sua idade. Dessa forma, Briggs ficou responsável por construir uma nova tábua. Em 1624, ele publicou a obra *Arithmetica logarithmica* com os logaritmos de 1 até 20.000 e de 90.000 a 100.000.

Henry Briggs notou que números reais positivos escritos na forma $x = a \cdot 10^n$, com $1 \leq a < 10$ e n um inteiro positivo, teriam um logaritmo decimal na forma $\log_{10} x = \log_{10}(a \cdot 10^n) = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = n + \log_{10} a$, em que $\log_{10} x$ é o logaritmo de x na base 10.

Assim, bastava conhecer os logaritmos dos números entre 0 e 10. Ele usou os termos característica e mantissa¹ para designar a parte inteira e fracionária, respectivamente, de um logaritmo de um número real. (ÁVILA, 1994), (MAOR, 2008), (SAMPALHO, 2010).

Briggs utilizou várias estratégias para determinar os logaritmos, como primeiro descobrir os logaritmos dos números primos e, a partir destes, determinar os logaritmos dos números compostos. Para tal, obteve as aproximações dos logaritmos primos por meio de extrações sucessivas de raízes quadradas, começando pelo número 10, chegando a extrair 54 vezes a raiz quadrada até chegar em um número muito próximo de um (LEMO, 2012), (ROEGEL, 2010a). Ao longo desse processo, ele percebeu que $\log_{10}(1+x) \approx \alpha x$ para um x bem pequeno, chamando α de "regra de ouro".

Assim, para um n suficientemente grande, temos $\sqrt[n]{x} = 1+r$, com r sendo um valor bem próximo de 0, e, portanto,

$$\log_{10}(1+r) \approx \alpha r \rightarrow \log_{10} x \approx \frac{1}{n} \cdot \alpha r.$$

Desse modo, ele seria capaz de calcular o logaritmo de números primos usando raízes quadradas e essa aproximação, podendo construir a sua tabela (ROEGEL, 2010b).

1.4 O NÚMERO DE EULER E A ÁREA SOB A CURVA DA HIPÉRBOL

Desde a Mesopotâmia já existem registros que mencionam a cobrança de taxas sobre empréstimos, como um tablete de argila datado de 1700 AEC AEC², há um problema sobre qual o tempo necessário para uma quantia de dinheiro dobrar a uma taxa de 20% ao ano. Os babilônios chegaram a 3,7870 que é bem próximo do correto, de 3,8018. (BOYER & MERZBACH, 2012) (MAOR, 2008).

Em (MAOR, 2008) aponta que o período do início do século XVII foi marcado por um grande crescimento comercial internacional e aumento das transações financeiras, de modo que foi dada

bastante ênfase à lei dos juros compostos, propício para o reconhecimento de uma constante presente nos juros contínuos.

Os Bernoulli eram uma família de mercadores que tiveram grandes nomes na matemática. Um deles, Jakob Bernoulli, lançou e resolveu o problema de analisar o crescimento de uma dívida em 1683. Partindo de uma dívida, por exemplo, de R\$ 1,00 a juros de 100% ao ano, ao fim de um ano, o valor da dívida será de R\$. Se for estreitado o período de capitalização em partes cada vez menores e dividir os 100% de juros igualmente ao longo desse período, o valor da dívida cresce. Capitalizando semestralmente teria-se R\$ 2,25; trimestralmente, R\$ 2,44140625 e assim sucessivamente.

Foi então que Jakob imaginou sobre o que aconteceria se estreitasse esse período cada vez mais: por mês, por dia, por segundo. Na notação atual, poderíamos expressar a situação por

$$C_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

em que n é o período da capitalização e C a capitalização. Veja a Tabela 1.2.

n	$C_n = (1 + 1/n)^n$
10^0	2,000000
10^1	2,593742
10^2	2,704813
10^3	2,716923
10^4	2,718145
10^5	2,718268
10^6	2,718280
10^7	2,718281
10^8	2,718281

Tabela 1.2: Capitalização contínua.

Pelos cálculos percebemos que o valor não cresce infinitamente, mas converge para um certo número, o qual é denotado por e , sendo aproximadamente 2,72. Assim, se um banco capitalizasse uma dívida instantaneamente, o fator de aumento seria essa constante.

O símbolo foi escolhido e difundido por Leonhard Euler, que teve inspiração na letra inicial da palavra expoente. Ele foi o primeiro a encarar os logaritmos como expoentes e , em sua homenagem, esse número passou a ser conhecido como número de Euler (BOYER & MERZBACH, 2012).

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

em que n é o período da capitalização. Quando n tende ao infinito, e é o limite da expressão.

Uma relação bastante interessante e curiosa ocorre entre o número de Euler e a área sob a curva da hipérbole equilátera.

A área sob a curva de hipérboles generalizadas, isto é, na forma $y = x^{-n}$, foi determinada por Pierre de Fermat (1601 -- 1665) a partir de algumas mudanças no seu método de calcular parábolas generalizadas. Contudo, o método falhava para uma curva em especial, aquela que gerava toda a família de hipérboles: $y = \frac{1}{x}$ (MAOR,2008).

Essa hipérbole, também conhecida como hipérbole retangular, por possuir assíntotas perpendiculares, guarda uma relação muito interessante com os logaritmos: considerando a parte da curva contida no primeiro quadrante do plano cartesiano, é possível deduzir que a área sob a curva é dada por uma função logarítmica.

Os matemáticos Grégoire de Saint-Vicent (1584 -- 1667) e Alphonse Antonio de Sarasa (1618 -- 1667) foram os primeiros a perceber que os retângulos com bases em progressão geométrica, usados para aproximar a área sob a curva, possuíam a mesma área.

Saint-Vicent provou que se tomarmos pontos sobre o eixo das abscissas em progressão geométrica e delimitarmos faixas sob a curva pelo eixo horizontal e por retas paralelas à ordenada que passam por esses pontos da progressão, têm-se faixas com áreas iguais, como ilustrado na Figura 1.5.

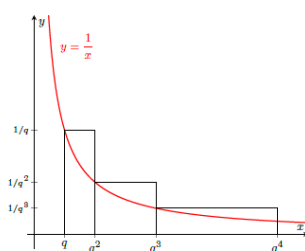


Figura 1.5: Aproximação da hipérbole por retângulos de bases em progressão geométrica.

Atribui-se a invenção dos logaritmos hiperbólicos a Sarasa, pois foi ele que escreveu explicitamente a relação entre a área sob a curva com os logaritmos, em uma época que estes eram apenas considerados uma ferramenta de cálculo (BURN,2001), (GONZÁLEZ,2018), (MAOR,2008).

Restava determinar a base, que seria o número determinava a área sob a curva com uma unidade de área (MAOR,2008). O número em questão não é nada menos do que o número de Euler. Aos logaritmos calculados nessa base chamamos de logaritmos naturais de x e utilizamos a notação $\ln x$ para nos referirmos a ela. Obviamente, é um resultado que pode ser provado --- confira o trabalho original (MUCCIACITO, 2021).

1.5 LOGARITMO NATURAL E O LOGARITMO NEPERIANO

Existe uma confusão de entre o logaritmo natural e logaritmo neperiano como sinônimos. O neperiano é aquele criado por Napier, de base $1-10^7$, embora o conceito de base ainda não existisse na época, enquanto o logaritmo natural, como já mencionamos, é aquele de base e .

A primeira tradução da obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier foi de Edward Wright. Na segunda edição da tradução, William Oughtred adicionou um apêndice contendo uma tabela de logaritmos na base e , mas sem explicitar a base (MAOR,2008), (GONZALEZ, 2018). Com isso, pode-se supor que o equívoco de chamar o logaritmo natural de neperiano advém dessa situação.

1.6 ESPIRAL LOGARÍTMICA

A espiral logarítmica tem a propriedade de que cada linha reta que passa pelo centro atravessa a espiral com o mesmo ângulo, por isso também é conhecida por espiral equiangular. Outra característica é de que qualquer par de linhas traçadas passando pelo centro, com um ângulo fixo entre elas, corta seções semelhantes. Em coordenadas polares, pode ser expressa em termos de logaritmos, daí o seu nome. Ela ocorre com mais frequência na natureza que qualquer outra curva, como crescimento de conchas, chifres, presas e girassóis.



Figura 1.6: Corte da concha de um Nautilus — uma espiral logarítmica.

Fonte: usuário Chris 73, 2009.

Licenciado sob CC BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons.
Disponível em: <<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/08/NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg/1280px-NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg>>. Acesso em 28 ago. 2021.

Jakob Bernoulli realizou diversas descobertas sobre a espiral logarítmica, até mesmo batizando-a de *spira mirabilis*, ou seja, "curva maravilhosa".

A espiral de Arquimedes, também conhecida como espiral linear, tem, a cada volta sucessiva, a distância em relação ao centro aumentada por uma diferença constante, enquanto a logarítmica tem uma taxa constante de crescimento (MAOR,2008).

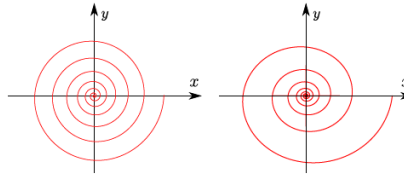


Figura 1.7: Espiral de Arquimedes (esquerda) e Espiral Logarítmica (direita).

1.7 CATENÁRIA: A CORRENTE SUSPensa

Catenária é o nome da curva que uma corrente suspensa assume entre dois pontos de apoio que vem do latim *catena* que significa corrente. Segundo (REFATTI & BELTRAME,2004), foi Leibniz quem a batizou. Galileu imaginava que essa curva se tratava de uma parábola, mas Christian Huygens (1629 - 1695), aos dezessete anos, provou que a catenária não poderia ser uma parábola. Até o momento, ninguém sabia como encontrar a curva, mas na edição de maio de 1690 do jornal *Acta eruditorum* --- fundado por Leibniz em 1682 --- Jakob Bernoulli propôs o problema de determinar a curva que é formada por um fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos.

Um ano após a publicação, o jornal publicou três soluções corretas: a de Huygens, agora com sessenta e dois anos, Leibniz e Johann Bernoulli, irmão de Jakob. Por meio de abordagens diferentes, todos chegaram à mesma solução. Johann ainda afirmou que a catenária é transcendental, enquanto a parábola é algébrica (MAOR,2008).

Por meio do cálculo diferencial foi possível chegar, em notação moderna, a

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$$

em que a é uma constante que depende da densidade linear e da tensão da corrente --- uma demonstração pode ser vista em (BLASJO,2016).

Essa notação, entretanto, não existia na época, então a equação estava implícita na construção da curva. O pensamento predominante no século XVII era de provar resultados por construções. Desse modo, fazia mais sentido tornar a catenária uma curva básica para construção, análoga à régua e ao compasso, e tornar ex em uma aplicação. Embora Leibniz e seus contemporâneos tenham descoberto a relação entre a catenária e a função exponencial, nunca escreveram a equação da curva. Não por falta de familiaridade, mas sim por não julgarem útil (BLASJO,2016).

Leibniz chegou a sugerir que a catenária poderia ser usada para calcular logaritmos, bastando utilizar uma corrente para isso, inclusive propondo um método para calcular logaritmos com uma corrente em mãos, o que pode ser visto em detalhes no trabalho original (MUCCIACITO, 2021).

A Figura 1.8 ilustra o passo a passo. Para visualizar como a corrente de fato assume essa curva, veja o vídeo produzido neste link: https://youtu.be/QwHP-i3_gBs?t=410 em 6 min 50 s.

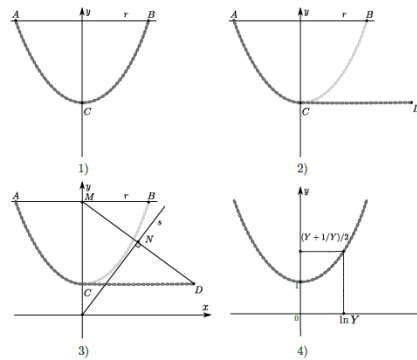


Figura 1.8: Passo a passo de Leibniz para determinar logaritmos com uma catenária.
Fonte: Adaptado de Blåsjö (2016).

Pode-se encontrar a catenária em diversos contextos, como no perfil de um ovo, fios de alta tensão, cordas suspensas por duas hastes, como encontradas em bancos e supermercados para organizar filas; em barracas de acampamento e até mesmo em teias de aranha (TALAVERA,2008), (REFATTI & BELTRAME,2004). Além disso, as covinhas de uma bola de golfe podem ser feitas pela revolução de uma catenária (DALTON,2004).

As pontes pênsis, embora possam se parecer com uma catenária, possuem a forma de uma parábola. Segundo (TALAVERA,2008), a ponte pênsil é um dos sistemas estruturais mais antigos utilizados pelo homem, com a descrição de pontes de correntes de ferro já em 206 AEC na China.

Na ponte pênsil, a carga é distribuída uniformemente ao longo do vão da ponte, ou seja, na distância horizontal entre dois pontos, de modo que, ao variar a carga por ela, com a passagem de caminhões e outros veículos, há uma mudança na parábola, assim, os fios formam uma família de parábolas. Para que formassem uma catenária, a distribuição da carga deveria ser uniforme ao longo da extensão dos fios, suspensos por dois pontos fixos de mesma altura, como as linhas de alta tensão, por exemplo (TALAVERA,2008).

O arquiteto espanhol Antonio Gaudí (1852 -- 1926), investigou a catenária para aplicar em suas obras. A catenária invertida é uma excelente forma para construção de arcos que se sustentem pelo próprio peso, utilizadas em muitas obras arquitetônicas. A maior construção desse tipo é o Arco do Portal em

Saint Louis em Missouri, com 192,15 metros de altura, apresentada na Figura 1.9, que é quase uma catenária perfeita (TALAVERA,2008).



Figura 1.9: Arco do Portal em Saint Lois em Missouri.

Fonte: Dirk Beyer, 2005.

Licenciado sob CC BY-SA-3.0, via Wikimedia Commons.

Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gateway_Arch#/media/Ficheiro:St_Louis_Gateway_Arch_1916.jpg. Acesso em 25 jun. 2020.

1.8 DEFININDO LOGARITMOS COM FOCO NO ENSINO MÉDIO

1.8.1 DEFINIÇÃO

É necessário conceituar inicialmente potências e, a partir delas, conceituar logaritmos. No entanto, para tornar este capítulo mais objetivo, trataremos diretamente de logaritmos, por isso recomendamos a leitura do trabalho original (MUCCIACITO, 2021) para aprofundamento. Assim, partindo da operação de potência definida para números reais positivos, podemos lidar com equações exponenciais, que são aquelas que possuem incógnita no expoente, como $a^x = b$, com incógnita em x .

Para resolver esse tipo de equação recorreremos a manipulações algébricas que nos permitam escrever $b = a^q$ com q racional, nos levando a concluir que $x = q$. Em situações em que isso não for possível, faremos uso de outra ferramenta para expressar a solução de equações desse tipo.

Para isso, vamos relacionar alguns pontos interessantes entre a potenciação e a radiciação e, a partir desse raciocínio, definir logaritmo. Considere $a^b = c$, com a e c reais positivos, $a \neq 1$ e b um número real. Se c é a incógnita, temos a operação de potenciação, em que chamamos a de base, b de expoente e c de potência. Assim, temos a base e o expoente e queremos descobrir a potência. Podemos associar essa operação à pergunta “ a elevado a b é igual a quanto?”

Agora, se a incógnita fosse a , teríamos uma radiciação, representada simbolicamente por $\sqrt[b]{c} = a$, em que a passa a ser chamado de raiz, b de índice e c de radicando. Contudo, pensando como uma potenciação, nós temos a potência e o expoente e queremos a base. Mais uma vez, podemos associar a uma pergunta: “que número elevado a b é igual a c ?”

Até o momento, nossa incógnita ocupou duas posições diferentes. Agora, se colocarmos a incógnita em b , vamos ter, pensando em relação à potenciação, a base e a potência e queremos descobrir o expoente. Outra vez podemos associar a uma pergunta: "a qual número devo elevar c para obter a ?"

A partir desse raciocínio, podemos definir uma nova operação, a qual chamamos de logaritmo.

Definição 1. Dados os números reais a, b e c , com a e c positivos e $a \neq 1$, de modo que $a^b = c$, chamamos a de base, c de logaritmando e b de logaritmo. Simbolicamente, $\log_a c = b$.

A partir da definição, é possível concluir algumas propriedades:

- $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$.
- $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$.
- $\log_b b^c = c$, pois $b^c = b^c$.
- $b^{\log_b a} = a$, pois $b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a$.

É comum escrevermos $\log x$ no lugar de $\log_{10} x$, por ser uma base de uso muito comum. Retomando a equação exponencial, $a^x = b$, com incógnita em x , a sua solução será dada por $x = \log_a b$.

1.8.2 PROPRIEDADES

As propriedades dos logaritmos podem ser obtidas por demonstrações simples que partem das propriedades das potências. Contudo, para abordar essas propriedades com alunos é recomendável fazer o raciocínio com exemplos numéricos, pois facilitará o entendimento deles.

Proposição 1. *Seja $b^x = a$ e $b^y = c$, de modo que $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, com $b > 0$ e $b \neq 1$. Por definição, $x = \log_b a$ e $y = \log_b c$. Assim, vale*

- 1) *Logaritmo do Produto:* $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$;
- 2) *Logaritmo do Quociente:* $\log_b \left(\frac{a}{c} \right) = \log_b a - \log_b c$;
- 3) *Logaritmo da Potência:* $\log_b a^y = y \cdot \log_b a$.

Muitas vezes a mudança de base é apenas apresentada aos alunos como uma fórmula pronta. Porém, ao se fazer isso, não se aborda uma ideia importante: os logaritmos são iguais a menos de uma constante multiplicativa. Isto é, a partir de um logaritmo em uma dada base, podemos obter outro logaritmo em qualquer base bastando multiplicar por uma constante. A seguir proporemos um caminho que aborda essa relação e termina com a fórmula da mudança de base.

Proposição 2 (Mudança de Base). *Sejam $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, com $a, b \neq 1$ e $a, b > 0$, tal que $a^x = b^y = c$. Então*

$$\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b.$$

Com o que foi desenvolvido, podemos, ainda, caracterizar as funções exponenciais e logarítmicas, o que pode ser encontrado no material original (MUCCIACITO, 2021).

1.8.3 SUGESTÃO DE NOTAÇÃO: TRIÂNGULO DA POTÊNCIA

Uma proposta interessante é a do Triangle of Power, ("Triângulo da Potência", em tradução livre), sugerida por Alex Jordan em um post <https://math.stackexchange.com/questions/30046/alternative-notation-for-exponents-logs-and-roots> (JORDAN, 2012) de troca de informações matemáticas do *StackExchange* e divulgada por (SANDERSON, 2016) no seu canal do YouTube. Cada vértice de um

triângulo representa a base, o expoente e a potência, de modo que $a \triangle^b c$ equivale a equação $a^b = c$, podendo tornar algumas ideias mais claras.

A título de curiosidade, vamos explorar um pouco essa notação conforme com o que foi apresentado por *3blue1brown*. Para facilitar a exposição, considere que as expressões a seguir estão bem definidas. As operações podem ser representadas no triângulo suprimindo o vértice daquilo que se quer calcular. Por exemplo, a^b é representado por

$$a \triangle^b, \sqrt[b]{c} \text{ por } \triangle_c^b \text{ e } \log_c a \text{ por } {}_c\triangle_a.$$

Fazendo uso desse triângulo, podemos representar operações inversas de maneira simples e intuitiva:

- $x^{\log_x z} = z \Leftrightarrow x \triangle^{\log_x z} z;$
- $\log_x x^y = y \Leftrightarrow x \triangle^y y;$
- $\sqrt[y]{x^y} = x \Leftrightarrow \triangle_x^y x;$
- $(\sqrt[y]{z})^y = z \Leftrightarrow \triangle_z^y z.$

Além dessas quatro, podemos pensar em outras como:

- $\triangle_z^y z = y \Leftrightarrow \log_{\sqrt[y]{z}}(z) = y;$
- $\triangle_z^{\log_x z} x \Leftrightarrow (\log_x z) \sqrt[y]{z} = x.$

Além dessas quatro, podemos pensar em outras como:

- $\triangle_z^y z = y \Leftrightarrow \log_{\sqrt[y]{z}}(z) = y;$
- $\triangle_z^{\log_x z} x \Leftrightarrow (\log_x z) \sqrt[y]{z} = x.$

1.9 APLICAÇÕES

Neste capítulo, apresentaremos diversas aplicações que os logaritmos têm na modelagem de diversos fenômenos naturais, os quais podem ser trabalhados em sala de aula. As informações presentes neste

capítulo foram baseadas em (ALVES,2014), (DE SÁ & DE PAIVA, 2012), (LIMA,2013), (MALTHUS,1996), (MORATORI,2019), (PECORARI, 2013), (RAMOS,2015) e (SILVA,2016).

1.9.1 JUROS CONTÍNUOS

Um capital inicial C_0 aplicado a uma taxa r ao ano, renderá, ao final de um ano, a quantia $r \cdot C_0$ de juros e o capital se tornará $C_0 \cdot (1 + r)$. Em dois anos, se tornará $C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$. Prosseguindo dessa maneira, em t anos, o capital será $C_0 \cdot (1 + r)^t$.

Se tomarmos uma fração $\frac{1}{n}$ do ano, é esperado que os juros obtidos correspondam a $\frac{rC_0}{n}$ e o capital se torne $C_0 \cdot (1 + \frac{r}{n})$. Passado mais $\frac{1}{n}$ do ano, obtemos $C_0 \cdot (1 + \frac{r}{n})^2$. Dessa maneira, ao final de um ano, teremos

$$C_0 \cdot (1 + \frac{r}{n})^n$$

É possível mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot (1 + \frac{r}{n})^n = C_0 \cdot e$$

mas não nos entenderemos a tanto neste capítulo.

Perceba que se fizermos n tender ao infinito, isto é, capitalizar os juros continuamente e denotar $n=kr$, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot (1 + \frac{r}{n})^n = \lim_{k \rightarrow \infty} C_0 (1 + \frac{1}{k})^{kr} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot ((1 + \frac{1}{k})^k)^r = C_0 \cdot e^r$$

o que chamamos de Juros Contínuos.

Assim, um capital de R\$ 1.000,00 aplicado a juros contínuos de 100% ao ano, se tornará 1.000e reais ao final de um ano, que é aproximadamente R\$ 2.718,28.

Se a taxa de juros é r ao ano, então um capital C_0 aplicado a essa taxa será transformado em t anos em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot (1 + \frac{rt}{n})^n = C_0 \cdot e^{rt}.$$

Disso, obtemos a função

$$C(t) = C_0 \cdot e^{rt}.$$

Se ao invés de acréscimos tivermos perdas contínuas a uma taxa r ao ano em um período de t anos e denotarmos $n = -krt$, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 - \frac{rt}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-krt} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right)^{-rt} = C_0 \cdot e^{-rt}.$$

ou seja, a função

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-rt}.$$

1.9.2 CRESCIMENTO POPULACIONAL

Um dos primeiros estudiosos a analisar o crescimento populacional foi Thomas Robert Malthus (1766 -- 1834), um economista inglês. Em seus estudos, afirmava que crescimento da produção de alimentos crescia segundo uma progressão aritmética, enquanto a população humana crescia segundo uma progressão geométrica. Assim, é possível modelar esse crescimento por uma função do tipo exponencial, dado que o aumento é proporcional à população no instante inicial de medição, uma característica desse tipo de função.

Assim, de maneira análoga ao caso dos Juros Contínuos, uma população qualquer $P(t)$ em função de um tempo t a uma taxa α de crescimento, se comporta segundo a lei

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(0) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = P_0 \cdot e^{\alpha t},$$

1.9.3 DECAIMENTO RADIOATIVO

A radioatividade é um fenômeno natural em que os elementos radioativos podem emitir radiação, que é uma transmutação espontânea e não controlada do núcleo atômico. Foi descoberto pelo físico francês Antoine-Henri Becquerel (1852 -- 1908) em 1896. Alguns exemplos de elementos radioativos são: o urânio-235, o cézio-137 e o plutônio-239. Os átomos desses elementos naturalmente se desintegram, emitindo partículas e gerando substâncias que não são radioativas.

Cada tipo de substância radioativa tem sua própria constante de decaimento, a qual denotaremos por α , que é determinada experimentalmente.

É possível expressar esse fenômeno matematicamente. Seja M_0 a massa de uma substância radioativa. Como o fenômeno ocorre continuamente, sabemos que a massa $M(t)$ no tempo t será dada por

$$M(t) = M_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = M_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

visto que esse comportamento é característico de uma função do tipo exponencial.

Além disso, é comum expressar a constante α em função do tempo de *meia-vida*, isto é, o tempo necessário para que a substância desintegre metade de sua massa a partir de um dado momento. Dependendo da substância, esse tempo varia de alguns minutos até bilhões de anos. Assim, sendo t_m o tempo de meia-vida, teremos

$$M(t_m) = \frac{M_0}{2} = M_0 \cdot e^{-\alpha t_m} \leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\alpha t_m}$$

Daí, aplicando logaritmos, vem

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha t_m \leftrightarrow \alpha = \frac{\ln 2}{t_m}$$

o que nos permite escrever ainda

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t} = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{t_m}\right) \cdot t} = M_0 \cdot \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{t_m}} = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t_m}}$$

1.9.4 DATAÇÃO POR CARBONO-14

O carbono-14, denotado por ^{14}C , é um isótopo radioativo do carbono, então ele decai com o tempo. Ele é formado na atmosfera por conta do bombardeio de raios cósmicos que a Terra sofre e tem essa numeração porque apresenta massa atômica 14, ou seja, apresenta dois nêutrons a mais no seu núcleo que seu isótopo estável de carbono-12.

A técnica de datação por carbono-14 ou radiocarbono foi descoberta em 1949 pelo químico Willard Frank Libby (1908 -- 1980), ganhador de um Nobel de química por sua descoberta. Ao longo do tempo de vida de um organismo, a quantidade de carbono-14 se mantém constante porque o decaimento é compensado pela produção. Os vegetais o criam durante a fotossíntese e os animais absorvem-no direta ou indiretamente, mas uma taxa constante é mantida.

Essa técnica possui grande valor para a arqueologia, pois quando um organismo morre, a absorção para e a quantidade existente de ^{14}C passa a decair continuamente. Por conta disso é possível determinar a idade de um fóssil ou algum objeto antigo por meio da comparação da quantidade de carbono-14 presente nos objetos antigos com materiais do mesmo tipo existentes atualmente. Por exemplo, compara-se a quantidade de carbono-14 existente em uma peça de madeira antiga com uma

peça de madeira de mesmo tamanho e massa atual. Sabendo-se a constante α de decaimento, somos capazes de determinar a idade do pedaço de madeira. Como a meia-vida do ^{14}C é de 5.730 anos, ou seja, $\alpha = \frac{\ln 2}{5.730}$, temos

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{5.730}\right)t} = M_0 \cdot 2^{-\left(\frac{t}{5.730}\right)},$$

em que M_0 é a massa inicial de ^{14}C e $M(t)$ a massa em função do tempo t .

Com um pouco de manipulação algébrica, podemos chegar a

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5.730}t} \leftrightarrow t = 5.730 \cdot \log_2 \left(\frac{M(t)}{M_0} \right).$$

No entanto, a técnica do carbono-14 para a datação só pode ser aplicada à amostras que tenham no máximo 40 mil anos, pois após esse período a quantidade de carbono-14 passa a ser difícil de se detectar.

1.9.5 RESFRIAMENTO DE UM CORPO

Uma situação similar a do decaimento radioativo é o resfriamento de um corpo. Quando um objeto aquecido é colocado em ambiente mais frio, como o ar ou a água, ele passa a se resfriar enquanto a temperatura ambiente permanece a mesma. Isso ocorre porque a massa do objeto é muito menor do que o meio que se encontra.

Assim, a Lei do Resfriamento de Newton afirma que, nessas condições, a diferença de temperatura D entre o objeto e o meio que o contém decresce com uma taxa de variação proporcional a essa própria diferença, o que caracteriza uma função exponencial.

Como D decresce continuamente, dada uma diferença de temperatura inicial do corpo com o meio no instante $t = 0$, denotada aqui por D_0 , teremos

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

em que α é uma constante que depende do material que constitui a superfície do corpo, mas pode ser influenciado por fatores como a umidade do ambiente e o arejamento.

Um exemplo interessante é determinar a hora da morte de uma pessoa em uma investigação forense e, nesse contexto, o esfriamento também é influenciado pela temperatura do corpo no momento da morte, o tipo de vestuário, a posição do cadáver, entre outros.

1.9.6 NÍVEL DE INTENSIDADE SONORA

A intensidade sonora é a quantidade de energia que as ondas sonoras transferem durante um intervalo de tempo, popularmente chamada de volume do som.

A percepção da intensidade do som não é feita de forma linear, mas de forma logarítmica. Isto é, só são percebidas variações sonoras se a amplitude da onda variar exponencialmente.

Para realizar a medição da intensidade sonora, utiliza-se uma unidade logarítmica, o decibel (dB) que é um submúltiplo do bel (B). O nome dessa unidade é em homenagem ao cientista britânico Alexander Graham Bell (1847 -- 1922) que realizou estudos com o som, linguagem gestual e surdez.

A menor intensidade detectável pelo ouvido humano é de $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ (watts por metro quadrado) e é usada como ponto de referência. O nível de som L que corresponde a uma intensidade I em W/m^2 é dado por

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}.$$

O limiar da dor ocorre no nível de 120 dB, mas qualquer som com nível acima de 85 dB pode causar perda de audição. Uma conversa normal, por exemplo, tem nível por volta de 50 dB.

1.9.7 ESCALA RICHTER

O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, que provém do choque entre duas placas tectônicas, o que libera uma grande quantidade de energia, ocasionando os tremores.

Por meio de um sismógrafo é possível medir a magnitude de um terremoto na escala Richter que foi desenvolvida em 1935 pelo sismólogo estadunidense Charles Richter (1900 -- 1985) e pelo alemão Beno Gutenberg (1889 -- 1960). A escala é logarítmica e foram dados valores próximos de zero aos terremotos mais fracos registrados até aquele momento.

A magnitude M é calculada pela relação

$$M = \log_{10} \frac{I}{I_0},$$

em que I é a intensidade do terremoto e I_0 é a intensidade de um terremoto padrão como valor de referência.

Assim, é possível classificar o tipo de terremoto e elencar os seus possíveis efeitos de acordo com a sua magnitude M .

- $M < 3$: tremores pequenos, geralmente não perceptíveis e apenas registrados por aparelhos;
- $3 < M < 5,9$: abalos perceptíveis, porém pouco destruidores, sendo capazes de derrubar objetos e trincar paredes.
- $6 < M < 8,9$: terremoto destrutivo que pode gerar danos severos às construções e provocar grandes rachaduras no solo.
- $M \geq 9$: terremotos muito fortes, causando quase destruição total.

1.9.8 ESCALA DE PH

O Potencial Hidrogeniônico, denotado por pH em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Sören Peter Mauritz Sørensen (1868 -- 1939), consiste num índice da acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer por meio da concentração de íons de hidrogênio em mol/L. Ele segue uma escala logarítmica de 0 a 14, em que uma solução aquosa a 25°C pode ser classificada em ácida ($\text{pH} < 7$), neutra ($\text{pH} = 7$) ou básica ($\text{pH} > 7$). Por exemplo, a água tem 1 íon-grama de H^+ para cada 10^7 litros, ou seja, a razão é $\frac{1}{10^7}$ e seu pH é 7.

A escala é definida como o logaritmo decimal do inverso da concentração de íons de hidrogênio, ou seja,

$$\text{pH} = \log_{10} \left(\frac{1}{[H^+]} \right) = -\log_{10}[H^+],$$

em que $[H^+]$ é o número de mols de íons de hidrogênio por litro (mol/L).

O pH tem grande aplicação na indústria e na agronomia, pois permite adequações em processos como fermentações, produção de vacinas, leite e derivados e também na análise do solo. Dessa forma, o pH não se limita a químicos, podendo ser utilizado por farmacêuticos, geólogos e agrônomos.

1.9.9 ESCALAS MUSICAIS

Desde a antiguidade, gregos já estudavam a relação entre a matemática e a música, em especial os pitagóricos que notaram relação entre intervalos musicais e razões trigonométricas. Utilizando um monocórdio, que é um instrumento com apenas uma corda, Pitágoras testou vibrar a corda solta e comparando os sons emitidos quando pressionava em alguns pontos, como na metade. Quando

reduzia a corda à metade do comprimento original, o som produzido era o mesmo, mas com outra frequência. O matemático percebeu que quanto mais reduzia o tamanho da corda vibrada, maior era a frequência, o que explicava a produção de sons diferentes. A partir de experimentos, um sistema musical foi criado, o qual fracionava o intervalo entre dois sons iguais em sete notas musicais: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. As frequências são crescentes e quando chegasse ao final, repetimos as notas, mas numa frequência maior, o que se denominou uma oitava acima.

Já no final do século XVII foi criada a escala temperada, composta por 12 notas, nesta ordem: dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si. Nesta escala, a distância entre as notas é sempre a mesma.

Desse modo, ao se multiplicar a frequência de uma nota dó por $2^{\frac{1}{12}}$, obtém-se dó#. Assim, a partir de uma nota de referência a qual se sabe a frequência, denotada aqui por f_0 , podemos determinar quantas oitavas acima ou abaixo e, conseqüentemente, a nota que corresponde qualquer frequência. Para isso, utilizamos a equação

$$o = \log_2 \frac{f}{f_0},$$

em que f é uma frequência qualquer e o quantas oitavas acima ou abaixo se está a partir da nota de referência.

1.9.10 ESCALAS GRÁFICAS

Em muitos contextos, para representar melhor os dados, são utilizadas escalas gráficas com uso de logaritmos. Existem as escalas *semi-log*, na qual o eixo horizontal é linear enquanto o vertical é logarítmico, e *log-log*, na qual ambos os eixos são logarítmicos, ilustrados na Figura 1.10. As equações na forma $y = a \cdot b^x$ são expressas como uma reta, uma vez que $\log_b y = \log_b a + x$.

1.9.11 PRESSÃO ATMOSFÉRICA

A pressão atmosférica é o peso de uma coluna de ar vertical que se encontra a uma altura h em relação ao nível do mar e possui uma base inferior horizontal com uma unidade de área. Conforme a altura h aumenta, a pressão atmosférica diminui, pois o ar torna-se mais rarefeito e, conseqüentemente, pesa menos. É possível medi-la diretamente por um instrumento chamado barômetro.

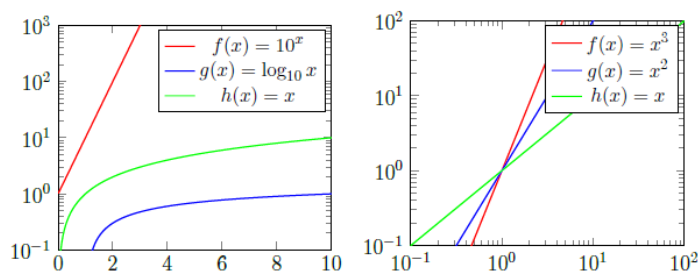


Figura 1.10: Gráficos em escala semi-log (esquerda) e log-log (direita).

Por meio da Lei de Boyle, que diz que dado um sistema fechado com a temperatura constante, a massa de gás ocupa um volume inversamente proporcional a sua pressão, é possível provar que se p_0 é a pressão atmosférica ao nível do mar, então a pressão a uma altitude h é $p(h) = p_0 \cdot e^{-\alpha h}$, em que α é uma constante.

Conhecendo-se a pressão em dois pontos de altitudes h_1 e h_2 , é possível determinar a constante α . Para isso, sejam $p(h_1)$ e $p(h_2)$ as pressões atmosféricas das altitudes h_1 e h_2 . Pela função anterior, temos

$$\frac{p(h_1)}{p(h_2)} = \frac{p_0 \cdot e^{-\alpha h_1}}{p_0 \cdot e^{-\alpha h_2}} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{p(h_1)}{p(h_2)} \right) = \alpha(h_2 - h_1) \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \ln \left(\frac{p(h_1)}{p(h_2)} \right).$$

Agora, conhecendo a constante α e tendo um barômetro, é possível determinar a altitude h de um avião a qualquer instante. De $p = p_0 \cdot e^{-\alpha h}$, temos

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\alpha h} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{p}{p_0} \right) = -\alpha h \Leftrightarrow h = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln \left(\frac{p_0}{p} \right),$$

com p_0 sendo a pressão ao nível do mar e p é a pressão medida pelo barômetro.

1.9.12 LEI DE NEWCOMB-BENFORD

A Lei de Newcomb-Benford é uma ferramenta importante na análise de números contábeis para detecção de contas com indícios de fraude. Ela foi descoberta pelo canadense Simon Newcomb (1835 -- 1909), um matemático, astrônomo e escritor de economia e ficção científica. Ele percebeu que o primeiro dígito de números de um dado contexto não ocorrem na mesma frequência. Ao analisar tábuas de logaritmos, notou que as primeiras folhas eram mais desgastadas do que as últimas. Disso, percebeu que as pessoas buscavam mais logaritmos com primeiro dígito igual a 1 do que igual a 9. Contudo, essa lei caiu no esquecimento até ser redescoberta de forma independente por Frank Albert Benford Jr. (1887 -- 1948) em 1938, um engenheiro elétrico e físico. Ele verificou a ocorrência do fenômeno em mais de 20 mil observações em áreas de rios, pesos atômicos e até em edições da revista *Readers Digest* (CELLA & RECH,2017), (FOSTER,2006), (TAM CHO & GAINES, 2007).

Embora seja um pensamento comum supor que a aparição dos dígitos se dê de maneira uniforme, ou seja, cada um com probabilidade $\frac{1}{9}$, Newcomb e Benford perceberam que a probabilidade decai para cada dígito segundo a lei

$$P(D = d) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{d} \right),$$

em que P é a probabilidade, D é a variável primeiro dígito e d é o valor do primeiro dígito de um número, ou seja, $d \in \{1, \dots, 9\}$. A Figura 1.11 compara o logaritmo dos dígitos com uma curva logarítmica. Este resultado foi posteriormente demonstrado.

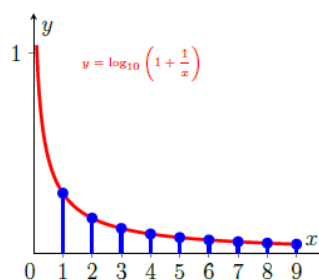


Figura 1.11: Gráfico da probabilidade de cada dígito.

Como as pessoas tendem a distribuir os primeiros dígitos uniformemente, a análise da Lei de Newcomb-Benford sobre um conjunto de dados ajuda identificar possíveis adulterações. No entanto, é importante destacar que ela sozinha não é determinante em um caso de fraude, mas apenas dá indícios. Testes de Hipóteses e Testes Qui-Quadrado podem mostrar que um conjunto de dados não é fraudulento embora a Lei de Newcomb-Benford aponte variações em alguns dígitos (FOSTER,2006).

A título de exemplo, vamos testar se a Lei de Newcomb-Benford aplica-se ao primeiro dígito do número de habitantes de cada município brasileiro. Para isso, coletamos os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (Estimativas da População Residente nos Municípios Brasileiros com Data de Referência em 1o de Julho de 2020, 2020) referente a estimativa de habitantes por município em 1º de julho de 2020. Ao analisar os dados de 5.570 municípios, construímos a Tabela 1.3 com a distribuição de frequências dos primeiros dígitos e, ao calcular a frequência de cada um, obtivemos os valores conforme apresentados na Tabela 1.4 e na Figura 1.12, que se aproximam bastante do modelo.

Primeiro Dígito (d)	Número de Observações
1	1.642
2	1.022
3	733
4	585
5	456
6	377
7	312
8	263
9	180
Total	5.570

Tabela 1.3: Número de observações do primeiro sítio.

Primeiro Dígito (d)	Frequência	Probabilidade
1	0,29479	0,30103
2	0,18348	0,17609
3	0,13160	0,12494
4	0,10503	0,09691
5	0,08187	0,07918
6	0,06768	0,06695
7	0,05601	0,05799
8	0,04722	0,05115
9	0,03232	0,04576

Tabela 1.4: Distribuição de frequências do primeiro dígito.

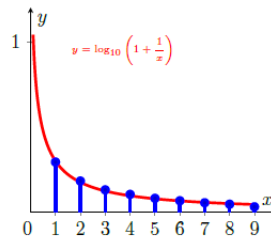


Figura 1.12: Comparação da Distribuição de Frequências entre o dados e a probabilidade esperada.

1.9.13 PERCEPÇÃO SENSORIAL

Segundo (SILVA & MACEDO, 1982), é possível estabelecer uma relação entre a magnitude subjetiva e a magnitude física, chamada de Lei de Steven. Em outras palavras, podemos relacionar como um sujeito percebe um estímulo, como intensidade sonora, brilho etc. por uma função-potência

$$R = KE^n,$$

em que R é a magnitude da percepção da pessoa, E é o valor físico do estímulo, K uma constante escalar e n é um expoente que depende do estímulo.

O valor de n indica como nossos órgãos sensoriais interpretam a variação de intensidade de certos estímulos. Se $n = 1$, a percepção e o estímulo são diretamente proporcionais. Se $n < 1$, o aumento do estímulo é percebido de maneira inferior e se $n > 1$, de maneira superior. Os pesquisadores exemplificam que estímulos com grande variação de energia, como na visão e na audição, tendem a ter expoentes baixos, de modo que os órgãos sensoriais agem como um compressor. Já estímulos

como o choque elétrico apresentam um expoente maior do que 1, ou seja, percebemos o aumento da intensidade elétrica maior do que realmente é.

Contudo, existem críticas sobre a validade dessa lei. Apesar disso, é possível utilizá-la para fazer um experimento e cálculos simples capazes de verificar se essa lei se aplica ao contexto escolhido, o que pretendemos sugerir em uma das atividades. Os autores descrevem três métodos para o cálculo do expoente: o da estimação da magnitude, o da estimação de razão e o método de fracionamento. Optaremos em tratar deste último, pois será usado para uma proposta de atividade prática. No método de fracionamento, o observador tem de estimar uma dada fração, geralmente $\frac{1}{2}$, de uma série de estímulos-padrão que lhe é apresentada pelo experimentador. Daí, a partir dos dados coletados, estima-se o valor de n . Para isso, note que ao aplicar logaritmo à função-potência, obtemos $\log_{10} R = n \log_{10} E + \log_{10} K$, que é uma função afim. Desse modo, obtendo a reta dos quadrados mínimos dos logaritmos dos valores coletados, obtemos n .

Vamos dar um exemplo do cálculo de n e para isso usaremos os dados da situação proposta por (SILVA & MACEDO, 1982) de estimar a percepção que as pessoas têm da distância. No experimento, o experimentador marca uma distância d em relação a um ponto de referência e cabe ao observador encontrar um ponto que divida o intervalo em duas partes iguais. Ou seja, estimar a metade da distância apresentada. Assim, pela Lei de Stevens, E é a distância avaliada, pois é o estímulo dado, e R é a distância avaliada como metade, pois é a resposta ao estímulo. A Tabela 1.5 apresenta os dados dos autores e o cálculo do logaritmo na base 10.

Distância física em metros (E)	Metade avaliada em metros (R)	$\log_{10} E$	$\log_{10} R$
1,60	0,81	0,204120	-0,091515
3,20	1,52	0,505150	0,181844
6,40	3,18	0,806180	0,502427
12,80	5,81	1,107210	0,764176
25,60	12,58	1,408240	1,099681
51,20	24,42	1,709270	1,387746
102,40	52,09	2,010300	1,716754

Tabela 1.5: Média da distância avaliada como metade pelo método de fracionamento.

Fonte: adaptada de J. A. d. Silva e Macedo, 1982, p. 41.

Poderemos fazer a Regressão Linear agora utilizando o método dos quadrados mínimos, obtendo a reta de regressão $y = 1,001x - 0,313$, em que $x = \log_{10} E$ e $y = \log_{10} R$. Portanto, concluímos que $n \approx 1,001$, indicando que as pessoas do experimento estimam distâncias com valores bem próximos da distância real. Veja o gráfico exibido na Figura 1.13.

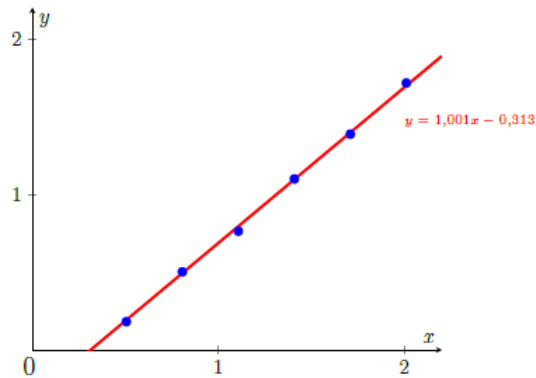


Figura 1.13: Gráfico da Regressão Linear.

1.10 PROPOSTAS DIDÁTICAS

Na dissertação apresentamos três propostas e um banco de questões. A primeira é sobre vídeos animados que foram produzidos para acompanhar as aulas dos professores. A segunda são planos de aula independentes entre si sob tópicos os quais acreditamos ter o que contribuir. Já a terceira proposta são curiosidades que podem ser inseridas rapidamente durante as aulas normais para despertar o interesse no assunto e como ele se relaciona com outros temas. A essa coletânea demos o nome de "pitadas matemáticas" para dar mais sabor às aulas. A fim de não estender demasiadamente este capítulo, faremos um resumo das propostas.

1.10.1 VÍDEOS ANIMADOS

Deixaremos os links de todos os vídeos produzidos.

- <https://www.youtube.com/watch?v=E0ZvIUldcHE> Origem Histórica dos Logaritmos: de onde vem os logaritmos?

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=E0ZvIUldcHE>

- <https://www.youtube.com/watch?v=wG1INM8PlpE> O que são Logaritmos?

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=wG1INM8PlpE>

- <https://www.youtube.com/watch?v=ZjoFv443v5M> Quais são as Propriedades dos Logaritmos?

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=ZjoFv443v5M>

- <https://www.youtube.com/watch?v=EEzZ8zLk514> Mudança de Base dos Logaritmos.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=EEzZ8zLk514>

- <https://www.youtube.com/watch?v=Gg-xMSMI4VY> O que são Funções Exponenciais e Logarítmicas?

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=Gg-xMSMI4VY>

- <https://www.youtube.com/watch?v=8Es6fYNeiKA> Número de Euler.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=8Es6fYNeiKA>

- <https://www.youtube.com/watch?v=SzufmrsSXLc> Logaritmos Naturais.

Link: <https://www.youtube.com/watch?v=SzufmrsSXLc>

- https://www.youtube.com/watch?v=QwHP-i3_gBs Onde usamos Logaritmos? Aplicações de Funções Logarítmicas e Exponenciais.

Link: https://www.youtube.com/watch?v=QwHP-i3_gBs

1.10.2 PROPOSTAS DE AULA

Nesta seção, propomos algumas atividades que podem ser trabalhadas em aula. Cada tópico é independente e aborda assuntos que nem sempre são bem desenvolvidos nos materiais didáticos. Confira o material original para o encaminhamento completo de cada aula (MUCCIACITO, 2021).

A primeira aula refere-se ao desenvolvimento histórico dos logaritmos, apresentando um exemplo como

$$\frac{5,6234 \cdot 17,7828}{1,7783}$$

e resolvê-lo sem calculadora como no século XVI, mas sem fazer as contas no papel. Nesse momento serão apresentadas tabelas com potências, mostrando o que Stifel e Napier perceberam. Desse modo, será possível calcular a expressão anterior por meio dos dados das tabelas.

A segunda aula trata da função logarítmica como inversa da exponencial, utilizando o *GeoGebra* para agilizar as construções. Para encaminhamento da aula, utilizaremos os seguintes problemas.

Problema 1. Em uma cidade S do interior, os casos de uma doença viral C tem duplicado a cada 17 dias, em média. O primeiro caso confirmado é tratado como dia zero da doença na cidade. Supondo que a taxa de transmissão se mantenha ao longo de um ano, esboce o gráfico que representa o número de casos ao longo do tempo e determine quantos casos são esperados após 3 meses da epidemia.

Problema 2. Partindo da situação anterior, após quanto tempo é esperado que haja 10 mil casos da doença?

Ao final, propomos a construção do gráfico das funções como ilustrado na Figura 1.14.

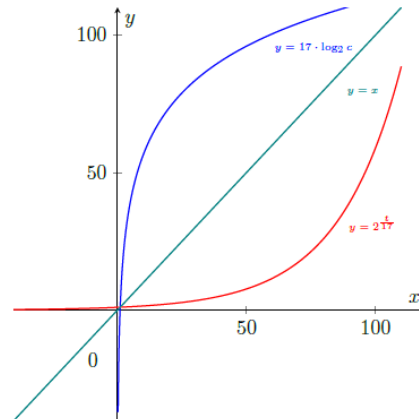


Figura 1.14: Funções Inversas.

A terceira aula aborda o número de Euler e os logaritmos naturais, partindo da capitalização contínua para apresentar o primeiro e a relação dos logaritmos com a área sob a curva da hipérbole $y = \frac{1}{x}$ para a última. Durante as aulas são construídas algumas tabelas, que podem ser feitas com amparo de planilhas eletrônicas. A primeira tabela é feita para mostrar o surgimento do número de Euler enquanto as demais são feitas por meio do cálculo da área sob a curva utilizando aproximações por trapézios, como mostra a Figura 1.15.

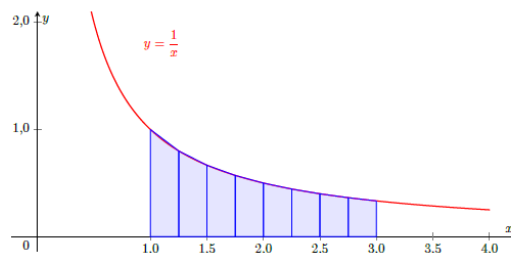


Figura 1.15: Aproximações da área por trapézios com altura de 0,25 u.c.

Na última aula são apresentadas sugestões de experimentos que envolvem Lei de Newcomb-Benford para encontrar indícios de fraudes, Lei de Stevens para relacionar a percepção de uma pessoa com um estímulo físico, a relação da catenária com os logaritmos e também das escalas musicais.

1.10.3 PITADAS MATEMÁTICAS

As pitadas matemáticas são curiosidades para apresentar durante as aulas normais. As informações apresentadas aqui foram coletadas de (EBBINGHAUS,1885), (GOMES,2021), (PERGHER&STEIN,2003),

(TEIXEIRA, 2016), (VERITASSIUM,2021) e (VIANA,2021) Entre elas, podemos destacar o caminho que um falcão-peregrino faz para capturar sua presa, que é uma espiral logarítmica, a curva do esquecimento, a dimensão dos fractais dada por logaritmos e mais algumas, que convidamos o leitor a conhecê-las no material original (MUCCIACITO,2021).

1.11 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste capítulo foi apresentar os principais pontos sobre o trabalho original a respeito de logaritmos, passando por questões históricas, conceituais, aplicações e sugestões de aulas.

Acreditamos que, acima tudo, qualquer obra cujo objetivo auxiliar o professor em sala de aula deve ser viável e compatível com a realidade do Ensino Médio. Por conta disso, as ideias apresentadas foram estruturadas de forma que possam ser trabalhadas pontualmente. Assim, é possível apenas mostrar os vídeos, comentar aspectos históricos ou as "pitadas matemáticas", bem como usar as ideias para definir os logaritmos ou alguma das aulas sugeridas.

Como visto na Seção 1.2, os problemas de aprendizado que os alunos enfrentam já ocorrem nos fundamentos da matemática, o que compromete muito o desenvolvimento de um bom Ensino Médio. Assim, o que podemos fazer é tentar trazer mais significado em uma apresentação didática, sempre relacionando com aspectos históricos e com fenômenos que podem ser modelados pelas ferramentas matemáticas. Esperamos com este trabalho contribuir de alguma forma na formação destes alunos e no enriquecimento das aulas dos colegas professores, contando com eles para tirarem o melhor proveito deste material.

BIBLIOGRAFIA

- ALVES, W. B. (2014). Sobre a Datação por Decaimento Radioativo. Connection Line-Revista Eletrônica do UNIVAG, (5).
- ÁVILA, G. (1994). Como se Constrói uma Tábua de Logaritmos. Revista do Professor de Matemática-RPM, (26).
- BLA' SJO', V. (2016). How to Find the Logarithm of Any Number Using Nothing but a Piece of String. The College Mathematics Journal, 47 (2), 95–100.
- BOYER, C. B., & MERZBACH, U. C. (2012). História da Matemática (H. Castro, Trad.; 3ª ed.). Blucher.
- BURN, R. P. (2001). Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. Historia Mathematica, 28 (1), 1–17. <https://doi.org/10.1006/hmat.2000.2295>
- CELLA, R. S., & RECH, I. J. (2017). Caso Petrobras: a Lei de Benford Poderia Detectar a Fraude? Revista de Gestão, Finanças e Contabilidade, 7 (3), 86–104. <https://doi.org/10.18028/rgfc.v7i3.3665>
- DALTON, J. L., & BISSONNETTE, L. (2004). Golf Ball Dimples with a Catenary Curve Profile (US6796912B2) [US Patent 6,796,912].
- DE SÁ, I., & DE PAIVA, A. (2012). O que é a Escala Richter? Como se Mede um Terramoto? Educação e Matemática, (116), 46–48.
- EBBINGHAUS, H. (1885). Memory: A Contribution to Experimental Psychology (H. Ruger & C. Bussenius, Trad.) [Acessado em: 12 set. 2021]. Teachers College, Columbia University. Estimativas da População Residente nos Municípios Brasileiros com Data de Referência em 1º de Julho de 2020 (rel. técn.).(2020).IBGE.RiodeJaneiro.https://ftp.ibge.gov.br/Estimativas_de_Populacao/Estimativas_2020/POP2020_20201030.pdf
- FORSTER, R. P. (2006). Auditoria Contábil em Entidades do Terceiro Setor: uma Aplicação da Lei Newcomb-Benford.
- GOMES, A. M. D. (2021). O Falcão e a Espiral Logarítmica [Acessado em: 6 set. 2021]. MEC.
- GONZÁLEZ, R. R. (2018). El Lenguaje de las Matemáticas: Historias de sus Símbolos (1ª ed.).Fondo de Cultura Economica.
- JORDAN, A. (2012). Alternative notation for exponents, logs and roots? [Acessado em: 25 set. 2021].
- LEMOS, C. M. (2012). Os Logaritmos e as suas Aplicações nas Ciências Náuticas – um Apontamento Histórico (L. Saraiva, Ed.). Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.
- LIMA, E. L. (2013). Números e Funções Reais (1ª ed.). SBM.
- MALTHUS, T. R. (1996). Princípios de Economia Política e Considerações sobre sua Aplicação Prática: Ensaio sobre a População (R. de Castro Andrade, D. de Abreu Azevedo & A. A. Cury, Trad.). Nova Cultural.

- MAOR, E. (2008). e: a História de um Número (J. Calife, Trad.). Record.
- MORAES, D. C. d., Filho. (2018). Manual de Redação Matemática. SBM.
- MORATORI, J. L. R. (2019). Funções Exponenciais e Logarítmicas (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do ABC. Santo André.
- MUCCIACITO, R. (2021). Logaritmos: história, aplicações e vídeos animados (Dissertação de Mestrado). UNICAMP. Campinas.
- OCDE. (2019). PISA2018CountryNoteBrazil (rel. técn.). https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf
- PECORARI, M. (2013). Logaritmos e Aplicações (Dissertação de Mestrado). UNESP. Rio Claro.
- PERGHER, G. K., & STEIN, L. M. (2003). Compreendendo o Esquecimento: Teorias Clássicas e seus Fundamentos Experimentais. Psicologia USP, 14, 129–155.
- RAMOS, S. S. A. (2015). Logaritmos: uma Abordagem Didática (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Paraná. Curitiba.
- REFATTIR, L., & BELTRAME, A. M. (2004). Funções Hiperbólicas e Cabos Pendentes. Disciplinarum Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, 5 (1), 139–162.
- RELATÓRIO BRASIL NO PISA 2018 (rel. técn.). (2019). MEC. Brasília. http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf
- ROEGEL, D. (2010a). Napier's Ideal Construction of the Logarithms (rel. técn.). <https://hal.inria.fr/inria-00543934/document>
- ROEGEL, D. (2010b). A Reconstruction of the Tables of Briggs' Arithmetica Logarithmica (1624) (rel. técn.).
- ROONEY, A. (2012). A História da Matemática - Desde a Criação das Pirâmides até a Exploração do Infinito (M. Fecchio, Trad.). M. Books do Brasil.
- ROQUE, T. (2012). História da Matemática: uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas. Zahar.
- SAMPAIO, J. C. V. (2010). John Napier, Henry Briggs e a Invenção dos Logaritmos. <http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF>
- SANDERSON, G. (2016). Triangle of Power [Acessado em: 30 ago. 2021]. Youtube.
- SILVA, F. V. (2016). Logaritmo: uma Abordagem Geométrica (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Campinas. Campinas.
- SILVA, J. A. d., & MACEDO, L. d. (1982). A Função-Potência na Percepção: Significado e Procedimentos de Cálculo do Expoente. Arquivos Brasileiros de Psicologia, 34 (4), 27–45.
- TALAVERA, L. M. B. (2008). Parábola e Catenária: História e Aplicações. (Dissertação de Mestrado). Universidade de São Paulo. São Paulo.

TAM CHO, W. K., & GAINES, B. J. (2007). Breaking the (Benford) Law. *The American Statistician*, 61 (3), 218–223. <https://doi.org/10.1198/000313007X223496>

TEIXEIRA, A. C. (2016). Lei de Benford e aplicações [Acessado em: 12 set. 2021]. Instituto de Matemática e Estatística da USP. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~abe/lista/pdf/r6aqDSXtbC.pdf>.

VERITASSIUM. (2021). The Simplest Math Problem No One Can Solve - Collatz Conjecture [Acessado em: 12 set. 2021]. Youtube.

VIANA, M. (2021). O que Casamento tem a ver com Logaritmos? [Acessado em: 5 set. 2021]. Folha de São Paulo.

Capítulo 4



10.37423/231008289

LOGARITMOS: HISTÓRIAS DE UM CONCEITO VIVO

Walter Martins Rodrigues

UFERSA

Jackson Jonas da Silva Costa

UFERSA

José Eduardo Colle

Professor da Rede particular de ensino e graduando na UNIVESP

William Rodrigues da Silva

Sec. Educação da Prefeitura Municipal de São Paulo



Apresentação: Este capítulo é voltado para divulgação de uma construção coletiva, de pesquisa dos autores. Entendemos que o conceito de logaritmo é muito dinâmico e atual, apesar de sua história de mais de 350 anos. Logaritmos: Histórias de um Conceito Vivo é o tema de reflexões de dois anos de trabalho, ação que também compõe parte do projeto Estudos de História da Matemática e estratégias interdisciplinares no ensino de Matemática básica, ação de pesquisa da UFERSA-RN coordenada pelo Prof. Dr Walter Martins Rodrigues.

O capítulo contempla três partes, na primeira trata-se um Contexto histórico e valorização de aplicações na diversificação de estratégias no ensino e aprendizagem das funções Logarítmicas. Assim tem por objetivos como os logaritmos tem uma parte histórica e como o uso de escalas é importante para o estudo do ensino médio. A segunda tratamos de aplicações das funções logarítmicas e exponencial, e destacamos o vídeo público do Prof. Ms. José Eduardo Colle. Na terceira parte tratamos de aplicações das funções logarítmicas e exponencial, e destacamos o vídeo público do Prof. William Rodrigues da Silva.

Palavras-chaves: logaritmos, ensino médio, ENEM.

1.1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Neste capítulo trataremos de alguns aspectos diretamente relacionados com as funções logarítmicas, e de aspectos integrativos que a história da matemática proporciona. As referidas funções são de muita importância para estudo de fenômenos físicos, químicos, biológicos, geográficos e econômicos. Um fato muito presente no ensino de matemática, é que por vezes as pessoas utilizam um pensamento inicial com certas características de utilitarismo, ou seja, centram o foco apenas na utilidade e terminam por não se preocupar com generalizações. Esta perspectiva, em extremo, pode implicar na mera busca resolução de cada problema com base em apenas exemplos, tratando apenas de modo particular e geralmente sem buscar entender com maior profundidade os conceitos. Nesse sentido que a história da matemática se mostra fundamental na comunicação mais profunda que leva a reflexões e dão espaço a um estudo menos utilitarista, ao mesmo tempo que valoriza as aplicações. Não há dúvidas que as aplicações em Matemática são essenciais, pois refletem o brilho e significado do estudo. A pesquisa foi em base as referências bibliográficas a seguir Roballo (2014), Dante (2010), Iezzi (2013), Borges (2010).

... Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar os estudos, por vezes áridos, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe.
(LIMA, 1999)

Em particular, pode-se tratar da modelagem matemática para a previsão do número de casos da COVID 19 no Brasil, que é última pandemia que marcou muito todo o mundo. Podemos também ter outras aplicações, tais como: intensidade sonora, a escala Richter de terremotos, modelos financeiros, entre outros.

1.2 LOGARITMOS: HISTÓRIAS DE UM CONCEITO VIVO

Estas funções surgiram da necessidade de simplificar cálculos aritméticos trabalhosos e cansativos, tais como; multiplicações, divisões, potenciações e radiciações no final do século XVI. OS Logaritmos foram inventados, de maneira independente, por John Napier (1550-1617), barão escocês, teólogo e matemático e por Jost Bürgi (1552-1632), suíço, matemático e fabricante de instrumentos astronômicos. Segundo os historiadores, sem que nenhum tivesse conhecimento do outro, as tabelas de logaritmos de Napier foram publicadas em 1614 e a de Joost Bürgi em 1620, nesse sentido destacamos um trecho de (BOYER, 1996)

Na teoria dos logaritmos, as contribuições iniciais foram dadas por John Napier (1550 a 1617), que se interessava por operações aritméticas e trigonometria, e do fabricante de instrumentos astronômicos J. Burgi (1552 a 1632), que também era matemático, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tabelas dos logaritmos, isto é, a tábua de logaritmos. (BOYER, 1996)

Logaritmos é um assunto muito trabalhado nas escolas de Ensino Médio e ensino Superior de diversas áreas. Inicialmente os logaritmos foram importantes ferramentas para cálculos numéricos, inclusive tanto Napier quanto Bürgi procuravam resolver o problema de simplificar as longas operações de multiplicação e divisão que vinham exigindo os recentes desenvolvimentos da Astronomia e da Navegação, tanto envolvendo números muito grandes como frações decimais muito pequenas. Para elaborar suas tabelas de logaritmos eles utilizaram uma mesma ideia básica, com diferentes bases. Numa publicação de 1544, Michael Stiel havia colocado lado a lado uma PA e uma PG no seu livro “Aritméca Íntegra” para observar uma relação interessante entre elas: a multiplicação de termos numa PG corresponde à adição de termos da PA.

PA: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10...

PG: 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024...

Por exemplo, considerando a relação posicional entre a PA e a PG acima podemos efetuar alguns cálculos de modo muito simples. Note que para obter o resultado de 16×64 , basta ver que: Note que o valor 16 está na 2ª linha e corresponde a 4 que está acima. Ao passo que o valor 64 está na 2ª linha e corresponde a 6, que está na 1ª linha.

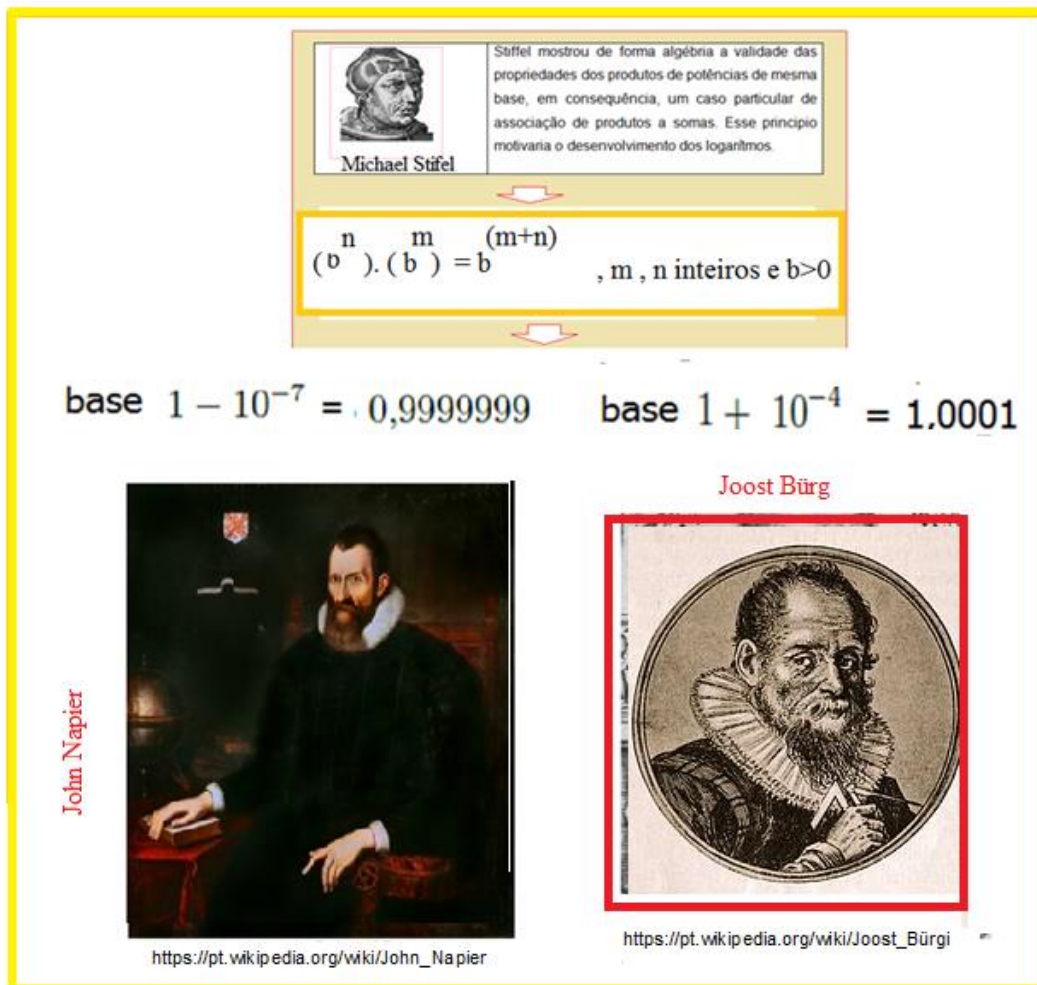


Figura 1: conexão de ideias no surgimento dos logaritmos

Fonte: Imagens de Stifel, Bürg e Napier obtidas no site Wikipedia

Fonte: Construído a partir de imagens dos matemáticos disponibilizadas no site Wikipedia

Ao efetuarmos a soma $4 + 6 = 10$, temos que o valor 10 está na 1ª linha corresponde a 1024 na 2ª linha. Portanto, uma vez que $16 \times 64 = 1024$, a operação produto fica reduzida à soma que é uma operação bem mais simples. Portanto, uma vez que $16 \times 64 = 1024$, a operação produto fica reduzida à soma que é uma operação bem mais simples.

A Figura 1 retrata a conexão entre os trabalhos de Stifel, Napier e Bürg. Stifel mostrou a validade da propriedade das operações de produto de potências de mesma base, e que restrito ao conjunto das potências de uma mesma base, se tem um sistema eficiente que transforma produtos em somas. A partir do trabalho de Stifel, sobre o assunto, a comunidade passou a buscar uma forma de expandir essas propriedades operativas de potências em mesma base para o conjunto dos reais positivos, o passo inicial havia sido dado e apontava, o que seria uma direção promissora, mas havia um sério

obstáculo é o aumento (respectivamente decrescimento) contínuo das distância entre termos consecutivos de um progressão geométrica de razão b maior do que um (respectivamente $0 < b < 1$). Tanto Napier quanto Bürg tiveram a ideia de contornar o problema da variação e monotônica das distâncias de termos consecutivos da PG de base b , escolhendo uma “próxima de de 1”, no caso Napier trabalhou com a base $b = 1 - 10^{-7} = 0,9999999$ e Bürg trabalhou com a base $b = 1 + 10^{-4}$. Ambos construíram uma tabela de logaritmos que permitia descrever diretamente e de forma exata milhares logaritmos entre 1 e b , e de forma aproximada logaritmos de todos os números entre 1 e b . Para calcular o logaritmos de qualquer número real $y > b$, se y fosse potência de b , ou seja $y = b^n$, então o logaritmo de y na base b seria n . No caso em que y não fosse potência de b , tanto Napier quanto Bürg perceberam que poderia fazê-lo procedendo da seguinte forma:

- 1) Identificava n (inteiro) tal que $b^n < y < b^{n+1}$
- 2) Determinava H tal que $y = Hb^n$, onde $1 < H < b$
- 3) Teria logaritmo de y sendo exatamente n adicionado ao logaritmo de H

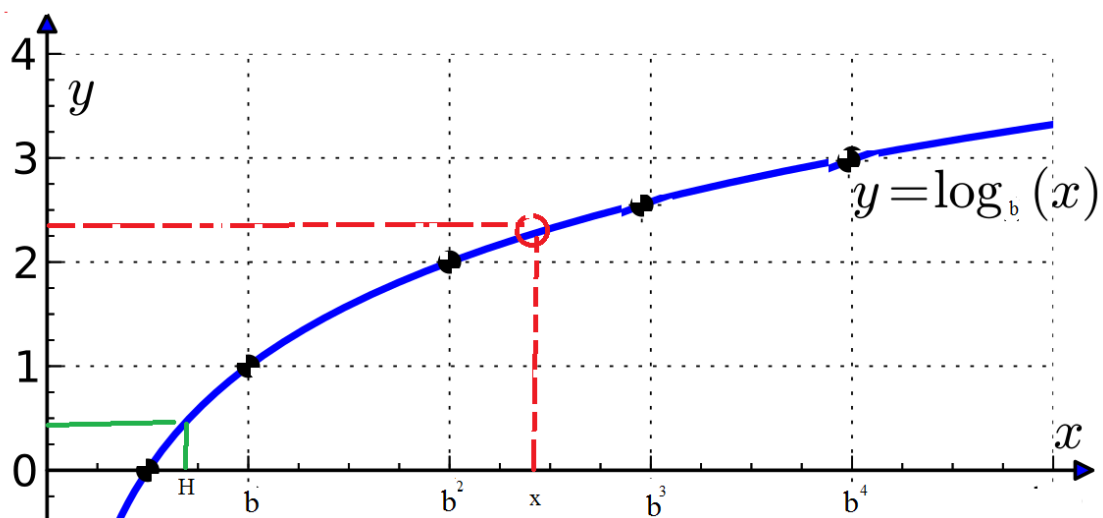


Figura 2: Esboço gráfico da estratégia de Bürg e Napier

Vale a pena destacar que o trabalho de Bürg e o de Napier de gerar uma tabela que pertia descrição com boa precisão de $\log_b(H)$, $1 < H < b$, a partir desta poderia obter $\log_b(x)$, utilizava o fato de logaritmo ser construído de modo que leva produto em somas, logo para calcular o logaritmo de x na base b toma-se a representação, que é sempre possível de obter, da forma $x = Hb^n$, onde $H < b$, e fica claro que $\log_b(x) = \log_b(H) + \log_b(b^n)$, a primeira parcela se obtinha na tabela (Bürg ou de Napier), vide representação de H no gráfico da Figura 2 e a segunda parcela é exatamente n , por se tratar de uma potência de expoente inteiro de b .

E como obtiveram as tabelas de logaritmos? Mais uma vez tanto Bürg quanto Napier exploraram o mesmo fato conhecido. Ambos usaram o processo de interpolação de meios (termos intermediários) na PA associada às potências e a PG de razão b . Certamente foi um trabalho muito exigente, que exigiu esforços de anos de trabalhos destes brilhantes matemáticos, na seção 1.3 vamos detalhar melhor essa construção.

$$\begin{array}{ccc} \text{PA:} & 0 & 1/2 & 1 \\ \text{PG:} & 1 & \sqrt{b} & b \end{array}$$

Discutir sobre essa construção deixa mais claro o conceito, ao nosso ver. A história contribui para que possamos compreender o processo que levou ao desenvolvimento dos logaritmos é muito importante.

Nesse sentido, os autores deste livro participaram de um seminário apresentado na **rede Verbo** com o tema: *Logaritmos: Histórias de um Conceito Vivo*, o vídeo de livre acesso em <https://youtu.be/xMYGAzo1HYo>, apresentado pelo Prof. Dr Walter Martins Rodrigues, como ilustra a Figura 3, esse seminário fez parte do projeto divulgação de ciência, coordenado pelo Prof. Ms. Jackson Jonas da Silva Costa.

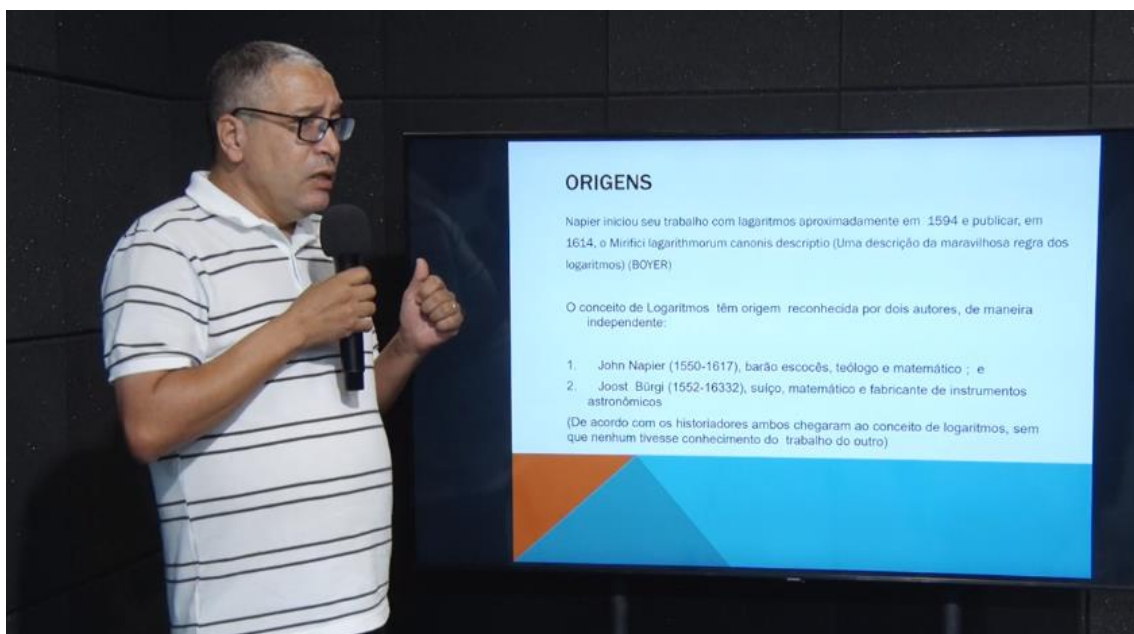


Figura 3: Prof. Walter M. Rodrigues : Logaritmos: Histórias de um Conceito Vivo.

Os logaritmos inicialmente foram estruturas fundamentais do ponto de vista de simplificador de operações para viabilizar cálculos numéricos diretos. Esse aspecto tinha grande importância do

ensino dos logaritmos, até por volta de 1970, era uma das principais ferramentas com utilização como instrumento de cálculo.

Atualmente, todavia, com o advento dos computadores, das calculadoras científicas de baixo custo e dos aparelhos celulares, os logaritmos perderam essa importância. Mas, vale dizer que a perda de importância dos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético não tornou-se obsoleto. Naturalmente, antes havia muito interesse em operar bem com logaritmos decimais, e ter um bom manuseio das tábuas logarítmicas, o uso de termos como característica, mantissa, antilogaritmo. No quadro atual a importância dos logaritmos está na importância da compreensão de suas propriedades e da possibilidade de transformar dados em tratamentos estatísticos, de que as funções logarítmicas descrevem importantes fenômenos naturais etc, portanto os logaritmos dão ricas contribuições para nossa compreensão do mundo atual. De forma que, hoje a justificativa maior para o ensino do logaritmo reside em seu aspecto funcional, isto é, no fato de ser o logaritmo uma função.

Naturalmente, o estudo das funções logarítmicas, juntamente com as suas inversas, as exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante

Por isso é que, mesmo com o advento e o uso universal das máquinas calculadoras, e a consequente perda de interesse nos logaritmos como instrumento de cálculo aritmético, a importância científica dos mesmos não diminuiu nos dias de hoje e podemos afirmar sem exageros, que enquanto houver Ciência haverá aplicações das funções logarítmicas e exponenciais. Em consequência disso, é preciso que seu ensino se adapte a esta nova realidade. Deve ser considerado, sem preconceitos, logaritmos em qualquer base, tendo em conta, porém, o grande destaque dos logaritmos naturais, aqueles que têm por base o número e , bem como a função exponencial correspondente

Uma importante aplicação dos logaritmos encontra-se na escala Richter que mede a magnitude de terremotos. Em 1935, mais de três séculos depois que Napier iniciou a criação dos logaritmos, os sismólogos Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter que é uma escala logarítmica. Na ocorrência de terremotos, a energia liberada vem em forma de ondas. A escala Richter está associada ao valor do logaritmo da medida da amplitude máxima de onda, amplitude essa medida usando-se aparelhos denominados sismógrafos.

Os logaritmos são usados também na física, uma das aplicações está na escala de decibéis que mede a intensidade de sons suportáveis pelo ouvido humano. Existe um valor mínimo de intensidade de

som, abaixo do qual é impossível o ouvido humano percebê-lo e existe também uma intensidade máxima de som suportável pelos nossos ouvidos. A escala de decibéis também é uma escala logarítmica.

1.3 ELEMENTOS DE ESCALAS E OPERAÇÕES INICIAIS PARA CONSTRUÇÃO DOS LOGARITMOS

Uma escala aritmética é qualquer segmento de uma reta demarcada por distância igualmente espaçada, os quais estão em correspondência com valores ordenados de uma grandeza.

Em outras palavras, uma escala aritmética é aquela em que podemos listar os números onde, partindo do zero, o próximo número será sempre o anterior mais a soma de uma constante que podemos definir para a nossa escala. Por exemplo, se quiséssemos construir uma escala aritmética onde a partir do zero nós somássemos 1 a cada número teríamos a seguinte representação na reta:

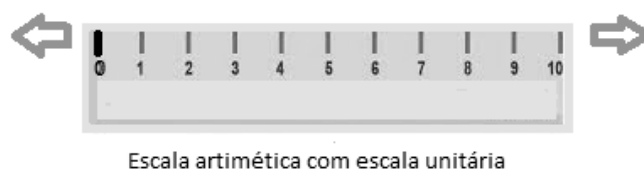


Figura 3: A escala aritmética é usualmente a mais usada para execução de gráficos.

O ensino das ciências, aparentemente inquestionável, está sendo analisado nas suas metodologias e essência, o ensino da matemática, em particular o conteúdo de Logaritmo, não poderia ficar alheio a esse processo, que busca romper com uma visão autoritária, meramente transmissora de informações, para uma relação democrática e construtora de representações.

A ideia básica do conceito de logaritmos pode se exemplificada através da construção de progressões aritméticas e geométricas. Lembramos que as progressões são conceitos que os estudantes costumam ter facilidade em dominar.

Vamos iniciar dando a interpretação de $\log_2 x$, em situações que x é potência de 2.

Considere abaixo, a PA de valor inicial 0 e razão 1 emparelhada com a PG de valor inicial 1 e razão 2

P.A.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
P.G.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...

Assim se o logaritmo de x_i na base 2, é exatamente r_i , conforme abaixo:

$$\log_2 1 = 0, \text{ nesse caso } x_i = 1 \text{ o respectivo } r_i = 0;$$

$$\log_2 8 = 3, \text{ nesse caso } x_i = 8 \text{ o respectivo } r_i = 3;$$

$$\log_2 128 = 7, \text{ nesse caso } x_i = 128 \text{ o respectivo } r_i = 7.$$

Assim por diante. Além disso a tabela pode ser estendida:

P.A.	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P.G.	...	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	...

$$\log_2 \frac{1}{16} = -4, \text{ nesse caso } x_i = \frac{1}{16} \text{ o respectivo } r_i = -4;$$

$$\log_2 \frac{1}{32} = -5, \text{ nesse caso } x_i = \frac{1}{32} \text{ o respectivo } r_i = -5;$$

Além disso verifica-se facilmente que para estes elementos tabelados fica claros as propriedades de logaritmos:

$$\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$$

$$\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \log_2(x) - \log_2(y)$$

ou seja, os logaritmos na base b relacionam um PG de razão b com uma PA de razão 1

Na Tabela 1 a seguir relacionamos uma PG de razão 3 com logaritmos na base 3, notamos que a imagem resulta numa P.A. de razão 1:

P.G de razão 3	Logaritmos na base 3
6	1,63093
18	2,63093
54	3,63093
162	4,63093
486	5,63093
1458	6,63093
4374	7,63093
13122	8, 63093
39366	9, 63093
118098	10, 63093

Tabela 1: Cálculo aproximado de alguns logaritmos na base 3

Fonte: autores

1,4 MUDANÇA DE ESCALA: TRANSFORMAÇÃO LOGARÍTMICA COM PROGRAMAÇÃO ELEMENTAR

A construção de uma escala logarítmica corresponde à divisão de um determinado segmento de reta em partes proporcionais aos valores dos logaritmos dos números numa determinada base (no nosso exemplo utilizaremos a base 10), vide (COLLE, RODRIGUES e SILVA, 2020). Dada uma função potencial $y(x) = C \cdot x^k$ na escala aritmética, vamos verificar como fica sua representação na escala bi logarítmica, ou seja, numa escala em que tanto o eixo das abscissas quanto das coordenadas são ambos em escala logarítmica. A representação de $y(x)$ será dada por uma reta da forma

$$Y = AX + B, \text{ onde } B = \log(C) \text{ e } A = k$$

Exemplo: Assim, ao consideramos uma função, por exemplo $f(x) = 2x^2$ sua representação numa escala logaritmo é uma reta, vide Figura 4 a seguir. Aplicando logaritmos em ambos os membros da igualdade, temos:

$$\log(f(x)) = \log C \cdot x^k$$

$$\log(f(x)) = \log C + k \cdot \log x$$

fazendo $\log(f(x)) = Y$, $\log C = B$, $k = A$ e $\log x = X$, segue a equação da reta $Y = B + A \cdot X$ que representa $y(x)$ a escala logarítmica é exatamente $Y = \log 2 + 2 \cdot X$.

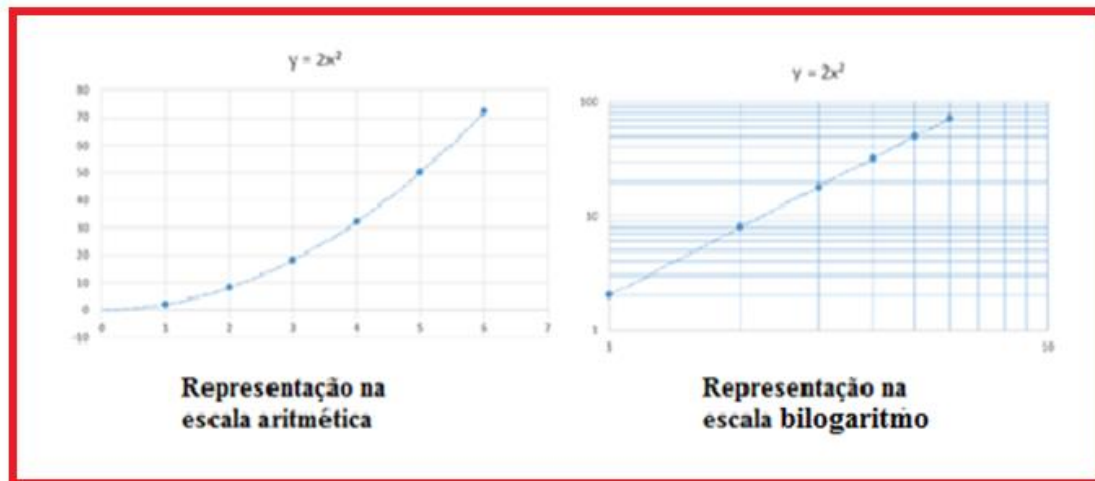


Figura 4: Representações de uma parábola em escala bilogarítma

Figura 4: Representações de uma parábola em escala bilogarítma

Na representação acima o segmento de reta é dado por $y = Ax + B$, onde

$$A = \frac{\log(50) - \log(8)}{\log(5) - \log(2)} = 2$$

$$B = \log(8) - 2 \cdot \log(2) = \log\left(\frac{8}{4}\right) = \log(2) \approx 0,301$$

As escalas logarítmicas são ótimas para revelar mais detalhes nas informações do gráfico de uma função. Um exemplo do uso das escalas logarítmicas é a Escala Richter, que mede a intensidade de terremotos e movimento da crosta terrestre. Se a Escala Richter fosse orientada por uma escala aritmética, então não seriam capazes de revelar diversos detalhes que são observados na logarítmica.

De modo geral, para ter representação de uma função potencial $y = Cx^k$ na forma de reta, use a representação gráfica em um plano com escala bi logarítmo. (ambos os eixos, de abscissas e das coordenadas em escala logarítmo). Para obter a representação de uma função exponencial $y = ab^x$, use a representação logarítmica (eixo das coordenadas em escala logarítmo e eixo das abscissas em escala aritmética). A implementação de um programa computacional que permite a representação gráfica de funções de tipo exponencial $y = ab^x$, e de tipo potencial $y = ax^b$, as quais possuem representações gráficas bem mais simples em um plano com escala logarítmica e bi logarítmico, respectivamente.

Para tanto, pode-se utilizar a linguagem Python a fim de estudar o comportamento das curvas com simulação computacional como metodologia, que nos permite identificar uma função exponencial, onde, ao modelarmos, percebemos que envolve crescimento muito rápido em um curto espaço de tempo, assim, ao transformarmos uma função exponencial em um plano com escala logarítmica facilita a análise. Python é uma linguagem de altíssimo nível orientado a objetos, de tipagem dinâmica e forte, interpretada e interativa, um software de código aberto (com licença compatível com a General Public Licence (GLP), menos restritiva, permitindo ser incorporado em produtos proprietários). A Linguagem foi criada em 1990 por Guido Van Rossum, no Instituto Nacional de Pesquisa para Matemática e Ciências da Computação da Holanda, focada intensamente em uso científico para pesquisa acadêmica e trabalhos aplicados. A versão do Python utilizada foi 3.7.6 com a IDE PyCharm e os parâmetros utilizados nos gráficos foram os quais chegamos com o estudo dos dados.

Inicialmente é necessário a importação de algumas bibliotecas: numpy é um pacote que inclui array, matrix e várias funções auxiliares; matplotlib, cujo pacote têm dois módulos principais: matplotlib que é um módulo de abstração orientada a objetos aos recursos do pacote; pylab que é um módulo que oferece coleção de comandos que se assemelha ao matlab, e é mais adequado para o uso interativo. Essas bibliotecas e a sintaxe de Python permitem que seus programas façam mais com menos linha de código, se comparados ao que muitas outras linguagens exigiriam.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

Em seguida, o usuário introduz o intervalo do domínio das funções:

```
inicial = float(input('Digite o valor inicial do domínio da função: '))
fim = float(input('Digite o valor final do domínio da função: '))
```

Neste bloco o usuário coloca os valores para os parâmetros a e b :

```
pA = float(input('Digite o valor do parâmetro A da função: '))
pB = float(input('Digite o valor do parâmetro B da função: '))
```

Implementa a variável x percorrendo o domínio da função exponencial $y = ab^x$ que será criado uma lista com o valor inicial e ao final acrescentado uma unidade, pois a contagem inicia do 0 e irá pular de uma em uma unidade.

```
x = np.arange(inicial, (fim+1), 1)
f = ((pA)*(pB)**x)
```

Os dados do domínio e da imagem da função serão impressos.

```
print("Os dados de x são: ", x)
print("Os dados de f(x) são: ", f)
```

O gráfico da função exponencial será plotado na tela.

```
plt.plot(x, f)
plt.show()
```

Nesta linha, transformamos a função exponencial em escala logarítmica: $y = \log a + x \log b$.

```
y = math.log10(pA) + (x*(math.log10(pB)))
```

Aqui o gráfico na escala logarítmica é plotado na tela.

```
plt.scatter(x, y)
plt.show()
```

Para transformarmos a função potencial em bi logarítmica tivemos que criar uma lista vazia que recebesse os dados da função potencial e transformar cada dado x em um $\log(x)$

```
log_x = []
for i in xP:
    log_x.append(math.log10(i))
log_y = []
for i in fP:
    log_y.append(math.log10(i))
```

Os dados do domínio e da imagem em escala bi logarítmica serão impressos.

```
print("Os dados de log x são: ", log_x)
print("Os dados de log y são: ", log_y)
```

O gráfico da escala bi logarítmica será plotado na tela.

```
plt.plot(log_x, log_y)
plt.show()
```

Essa condição será executada se o usuário inserir o valor inicial de x maior que

```
else:
    xP = np.arange(inicial, (fim+1), 1)
    fP = ((pA)*(xP)**(pB))

    print('Os dados de x são: ', xP)
    print('Os dados de f(x) potencial são: ', fP)
    plt.plot(xP, fP)
    plt.show()
    log_x = []
    for i in xP:
        log_x.append(math.log10(i))
    log_y = []
    for i in fP:
        log_y.append(math.log10(i))
    print('Os dados de log x são: ', log_x)
    print('Os dados de log y são: ', log_y)
    plt.plot(log_x, log_y)
    plt.show()
```

O algoritmo supra descrito permite tratar de situações em que a função exponencial descreve o modelo de solução, ou problemas envolvendo progressões geométricas de modo geral podem ser resolvidos e interpretados a partir do mesmo.

A ideia de propor uma abordagem de ensino que utiliza as linguagens de programação Python, em uma situação bastante elementar, mas com bons elos de aplicação. A opção pela linguagem Python, se justifica por tratar de uma estrutura em que são utilizadas linhas de códigos com uma sintaxe simples e organizada. Para apoiar a aplicação da abordagem, há uma diversidade material instrucional de boa qualidade a respeito do Python. Uma avaliação preliminar da abordagem proposta, juntamente com o uso do material instrucional, tem tido uma boa aceitação por parte dos alunos em relação às linguagens adotadas e um relativo ganho no ensino-aprendizagem dos estudantes que estão iniciando o estudo de programação, mas com certeza o simples manejo de planilha eletrônica permite as construções tratadas no trabalho, podendo se rumar outra possibilidade ao docente. Vale lembrar, que o professor pode fazer uso do material concreto (folhas monolog e di-log) para melhor engajamento da turma.

2.1 MODELOS MATEMÁTICOS EM PROBLEMAS REAIS

O professor José Eduardo Colle disponibiliza no vídeo:

<https://www.youtube.com/watch?v=Qiy6kYrMvgQ>, vide Figura 5, para o público em geral na plataforma YouTube.

Trabalho em que realiza uma aplicação da função logarítmica no estudo de problemas sonoros. Uma vez que a poluição sonora traz tanto impacto para nossa saúde, uma abordagem do tema logaritmos com uma aplicação dessa natureza pode ser muito interessante para os estudantes do ensino médio.



Figura 5: Professor Colle apresenta uma aplicação de logaritmos

O professor José Eduardo Colle trata de diversos aspectos interessantes no referido vídeo, destacamos a fala a respeito dos conceitos físicos do problema de mensurar a intensidade sonora, inclusive trouxe para o vídeo um efeito especial pertinente ao problema de poluição sonora.

O professor José Eduardo Colle trata de outra aplicação interessante, no mesmo vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=Qiy6kYrMvgQ>, vide Figura 6 uma imagem do professor Colle tratando do PH. Essa é uma aplicação da função logarítmica que é fortemente utilizada, o estudo do PH é uma aplicação que permite uma ação interdisciplinar com a física, e também com a questão ambiental, dado que o PH é muito importante em diversas questões práticas.

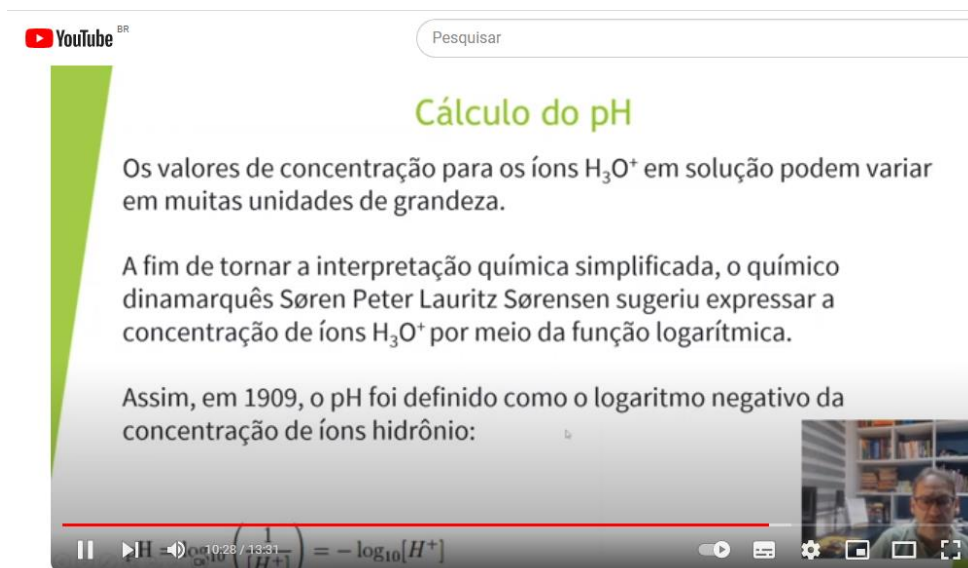


Figura 6: Professor Colle fala sobre o cálculo de PH

3.1 FUNÇÃO LOGARÍTMICA NA MODELAGEM DE PROBLEMAS

De modo geral é importante aplicar diferentes estratégias no ensino de logaritmos. a melhor abordagem depende do perfil da turma e do método de trabalho adotado, por ser um assunto que grande parte dos alunos tem dificuldades. Entendemos que há maior eficácia na utilização de uma seqüência didática que explore resolução de problemas, para o estudo de logaritmos, partindo de problemas relacionados com o cotidiano dos alunos e com o propósito de auxiliá-los a construir seus próprios conhecimentos. O professor William Rodrigues da Silva, disponibiliza no vídeo https://www.youtube.com/watch?v=AgrRqb_aQol&feature=youtu.be. vide Figura 7, em que trata de uma importante aplicação que pode ser aplicada em turmas de do Ensino Médio.

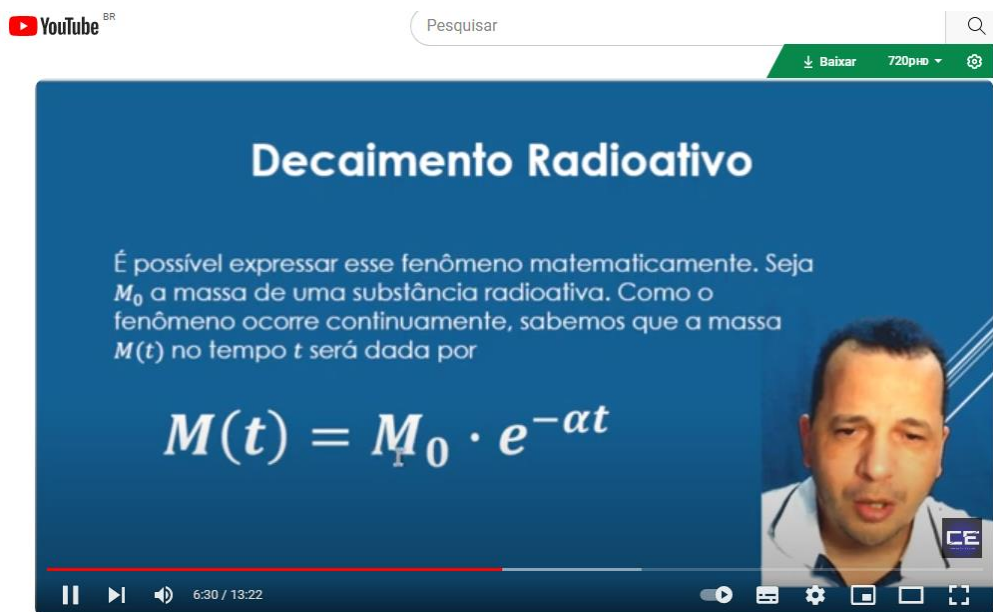


Figura 7: Professor William R. Silva trata do decaimento radioativo

As situações problema elaboradas privilegiaram situações diversas, envolvendo várias áreas do conhecimento. Também é importante valorizar a História da Matemática para mostrar a origem e evolução do conceito de logaritmo, e a utilização desse conceito na construção e aplicações de escalas logarítmicas na interpretação de fenômenos da natureza.

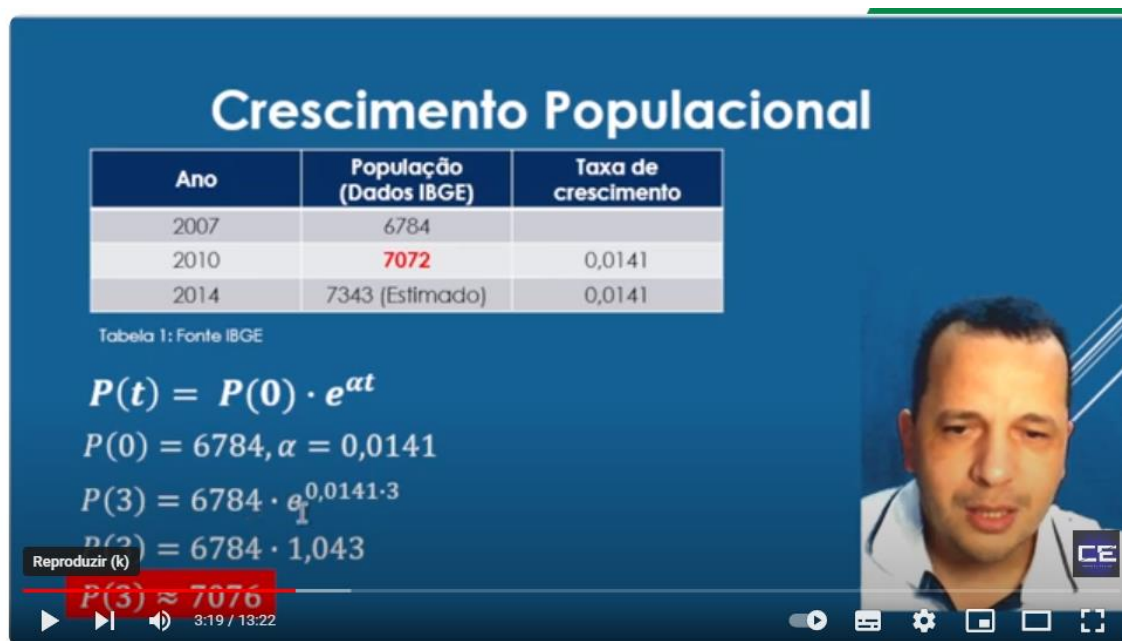


Figura 8: Professor William R. Silva: Um modelo de crescimento populacional

O professor William R. Silva aborda no vídeo aplicações envolvendo problemas de crescimento exponencial, a Figura 8 é uma foto de tela da apresentação do professor William Rodrigues da Silva

em um momento que está tratando de um exemplo. O uso de logaritmos na resolução de problemas associados.

Em particular foca a questão de crescimento populacional que em vertentes similares pode ser exploradas em sala de aula. Bem como, o problema de decaimento radiativo que tem muitos elos com outras áreas do conhecimento como a química geral, na datação por carbono é muito útil para mensuração da idade de objetos históricos encontrados em sítios arqueológicos o que permite construção de projetos interdisciplinares envolvendo matemática com diversas áreas. Nesse tipo de aplicação o importante é a compreensão do conceito da função logarítmica e da função exponencial, usa-se as propriedades gerais dos logaritmos e da exponencial mas não foca em cálculo meramente numéricos, inclusive os cálculos em questão podem ser realizados com o apoio de uma calculadora científica ou de computador.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BORGES, Luiz Eduardo. Python para Desenvolvedores – 2ª Edição, Rio de Janeiro, 2010.
- BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.
- DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contextos & Aplicações - Volume 1. São Paulo: Editora Ática, 2011.
- IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar – Volume 4: São Paulo: Editora Atual, 2013.
- LIMA, Elon Lages. Conceituação, manipulação e aplicações: Os três componentes do ensino da matemática. Revista do professor de matemática.
- ROBALLO, Murilo Sérgio. Aplicações de Funções Exponenciais e Logarítmicas. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Brasília, Brasília, 2014.
- COLLE, J. E., RODRIGUES, W.M, SILVA, W. R.; Funções exponencial e logarítmica: aplicação das escalas gráficas na modelagem matemática da Covid-19 no Brasil. Capítulo 7 do livro Matemática e Ciências na Sala de Aula, organizado por Maria Isabel D’Andrade de Sousa Moniz, Rodrigo Rafael Gomes e Rubens Pantano Filho - Salto (SP): FoxTablet, 2020.

Capítulo 5



10.37423/230908262

APLICAÇÕES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA EM TRANSFORMAÇÃO DE DADOS NA ESTATÍSTICA

Walter Martins Rodrigues

UFERSA

Elmer Rolando Llanos Villarreal

UFERSA

Janilson Pinheiro de Assis

UFERSA

Roberto Pequeno de Sousa

UFERSA

Joelma de Assis França

UFRN

Robson Pequeno de Sousa

UEPB

Paulo César Ferreira Linhares

UFERSA



APRESENTAÇÃO

O assunto transformação de dados estatísticos com uso da função logarítmica será neste capítulo. Em geral esse assunto é pouco explorado na literatura. Trata-se de um tema extremamente importante para auxiliar o pesquisador na aplicação correta de ferramentas de análise estatística dentre elas a chamada análise de variância (ANOVA) aplicada em seus dados muitas vezes obtidos através de levantamentos amostrais ou em pesquisas planejadas, muitas vezes em de medidas repetidas..

Além disso, o trabalho com ajuste de modelos na regressão linear ou não linear, em técnicas univariadas ou multivariadas, na análise de sobrevivência, na aderência de distribuições teóricas ou especiais de probabilidade muitas vezes precisam de funções logarítmicas ou exponenciais no tratamento de dados com conjuntos de variáveis aleatórias, etc.. Dado que este livro visa tratar de diversos aspectos envolvendo o conceito de logaritmos, esse capítulo vem a trazer essa contribuição sobre o assunto.

Esperamos assim que o leitor encontre motivação para aprofundar os conhecimentos sobre logaritmos e suas aplicações, principalmente no ponto de vista de explorar funções logaritmos aplicada na estatística. O trabalho com análise estatística de dados é um ramo muito importante na ciência de dados atualmente. Finalmente esta obra tem como objetivo fornecer a teoria dos mais diferentes métodos de transformações de dados.

A transformação de variáveis no planejamento experimental permite mais precisos levantamentos amostrais nas diversas áreas do conhecimento humano, é um fator fundamental para proporcionar ao pesquisador o uso de técnicas de inferência estatística clássica tais como os testes de hipóteses e os intervalos de confiança. E a função logarítmica é uma ferramenta essencial no trabalho de transformação de dados.

TRANSFORMAÇÕES LOGARÍTMICAS NA ESTATÍSTICA: UM CASO CLÁSSICO

As Transformações logarítmicas em dados estatísticos é realizada aplicando uma função logarítmica, por exemplo $\ln(x)$ ou $\log(x)$, é aplicada a conjunto de dados positivos analisados Y obtendo um novo conjunto de dados X obtido pela imagem da referida função logarítmica sobre o conjunto Y . Por exemplo, se for usada a função $\ln(x)$ ou $\log(x)$, teremos $X = \ln(Y)$ ou $X = \log(Y)$ respectivamente. No caso em que o conjunto Y de dados possui elementos nulos utiliza-se $X = \ln(Y + 0,5)$ ou $X = \log(Y + 0,5)$.

Segundo Demétrio (1978), a proporcionalidade entre a média e o desvio padrão é encontrado geralmente quando os efeitos são multiplicativos em lugar de aditivos. Nessa situação, a transformação $\log x$ ou $\ln x$, além de estabilizar a variância produz aditividade nos efeitos, e tende a normalizar a distribuição dos erros. Ainda segundo Demétrio, (1978), a base 10 para o logaritmo é mais usada, por conveniência, contudo qualquer base é satisfatória, e recomendada que a transformação seja usada para números inteiros positivos que cobrem uma grande amplitude, sendo que, não pode ser usados quando os valores estiverem numa faixa abaixo de 10. Nesse caso, a transformação mais indicada é $\log (X + 1)$.

É importante destacar que a aplicação desta estratégia de transformar dados a partir da função logarítmica desempenha papel importante na ciência a muito tempo. Um trabalho clássico das ciências agrárias publicado no importante boletim científico de São Paulo, especializado em ciências agrárias, trata do uso da transformação logarítmica, onde as operações de conversão eram realizadas com usa da tabela de logaritmos. Referimos ao artigo (CONAGIN, A 1955). Nesse trabalho o autor realiza uma análise estatística de dados nas ciências agrárias e retrata de forma muito clara estratégia de aplicar a transformação de dados, pela função logartimos em conjunto de dados experimentais. A Figura 1 retrata a parte inicial do artigo (CONAGIN, A 1955)..



Figura 1: Face inicial do artigo (CONAGIN, A 1955)

No referido artigo Armando CONAGIN ilustra o processo de uso da transformação logarítmica em dados de forma bem clara, a partir de um conjunto de dados, a Figura 2 retrata essas tabelas, e destacamos os quatro primeiros tratamentos em um retângulo tracejado.

QUADRO 1.—Ensaio de época de plantio de milho. Dados de produção em peso de grãos por canteiro

Tratamento	Blocos					Total	Médias	Desvio Padrão
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º			
	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg	
D ₁ -----	6,50	7,10	8,50	4,25	1,85	28,20	5,64	2,61
D ₂ -----	15,40	21,70	14,65	10,30	8,00	70,05	14,01	5,28
C ₁ -----	5,60	5,90	4,55	6,30	2,75	25,10	5,02	1,42
C ₂ -----	10,50	12,20	12,90	13,95	5,70	55,25	11,05	3,24
B ₁ -----	3,30	2,75	3,35	1,75	2,55	13,70	2,74	0,65
B ₂ -----	3,50	4,50	5,80	5,05	5,05	23,90	4,78	0,85
A ₁ -----	0,70	1,10	0,75	0,25	0,45	3,25	0,65	0,32
A ₂ -----	0,70	0,80	1,55	1,65	1,25	5,95	1,19	0,43

Figura 2: Ilustração de parte dos dados relativos ao artigo (CONAGIN, 1955)

Observe que o conjunto de dados tem a característica de que há uma correlação linear forte entre as médias e os desvios padrões, para ilustrar vamos focar na parte destacada no retângulo interno

destacado na Figura 2, a tabela 1 foi obtida inserindo os dados de (CONACIN1 1955) em uma planilha eletrônica:

	Blocos						media	desvio padrão
	1	2	2	4	5			
D1	6,5	7,1	8,5	4,25	1,85		5,64	2,615
D2	15,4	21,7	14,65	10,3	8		14,01	5,276
D3	5,6	5,9	4,55	6,3	2,75		5,02	1,425
D4	10,5	12,2	12,9	13,95	5,7		11,05	3,243
B1	3,3	2,75	3,35	1,75	2,55		2,74	0,652
B2	3,5	4,5	5,8	5,05	5,05		4,78	0,852
A1	0,7	1,1	0,75	0,25	0,45		0,65	0,322
A2	0,7	0,8	1,55	1,65	1,25		1,19	0,429

Tabela 1: Dados referentes a Figura 1, em planilha eletrônica

A seguir vamos evidenciar a forte correlação entre as variações das médias e dos desvios padrões dos dados da Tabela 1, a partir da representação da reta de regressão dos dados que relacionam médias dos diversos tratamentos e respectivos desvios padrões.

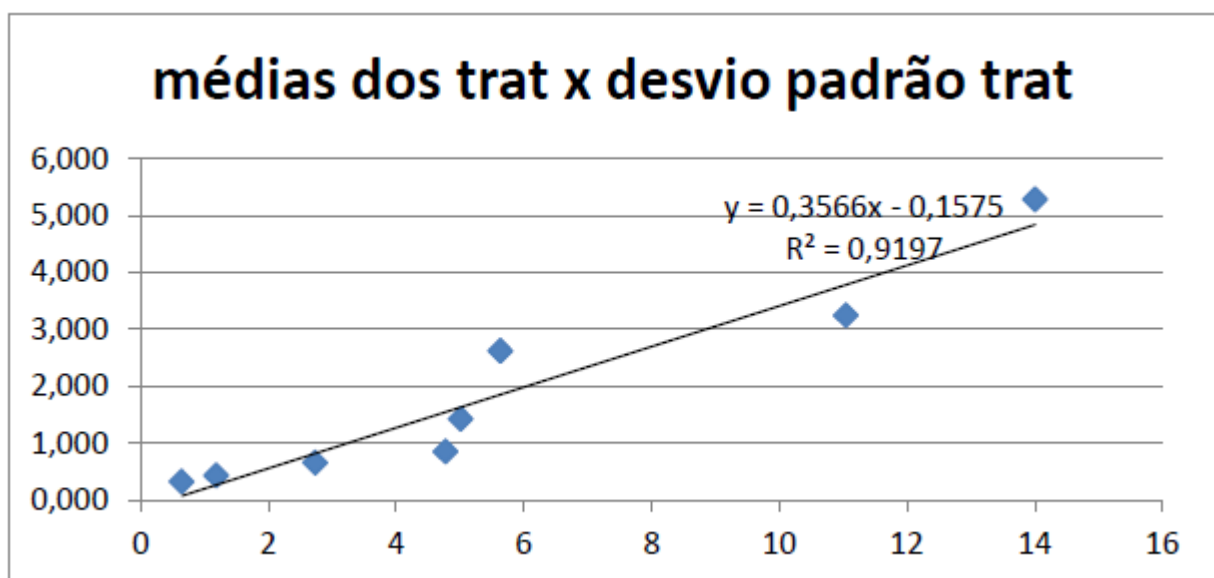


Figura 3: Gráfico da relação desvio padrão e médias dos tratamentos originais

O gráfico apresentado na Figura 3 evidencia a forte correlação linear entre as variações dos desvios padrões e médias. Observe que o R-quadrado (R^2) é bem alto, indicando que os dados tendem a ficar bem próximos dos pontos da reta de ajuste. O fator de haver baixa dispersão em torno da reta de ajuste que melhor ajusta os dados, pelo método dos mínimos quadrados.

Aplicando a função $\log(x)$, logaritmo na base dez, no conjunto de dados originais, e os dados que se obtém-se deixa de ter uma correlação linear forte entre desvios padrões e médias dos tratamentos.

No trabalho de (CONAGIN 1955) a transformação e dados foi realizada de forma muito clara, apesar do significativo trabalho em realizar o trabalho com uso da tabela de logaritmos, e naturalmente, hoje podemos fazer com grande facilidade usando planilha eletrônica.

Tratamento	Blocos					Totais
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	
D ₁	0,81291	0,85126	0,92941	0,62839	0,26717	3,48915
D ₂	1,18752	1,33646	1,16584	1,01284	0,90309	5,60575
C ₁	0,74810	0,77085	0,65801	0,70934	0,43933	3,41572
C ₂	1,02119	1,08636	1,11059	1,14457	0,75585	5,11856
B ₁	0,51851	0,43933	0,52534	0,24304	0,40654	2,13246
B ₂	0,54407	0,65321	0,76343	0,70329	0,70329	3,30729
A ₁	-0,15490	0,04139	-0,12494	-0,60206	-0,34679	-1,18730
A ₂	-0,15490	-0,09691	0,19033	0,21748	0,09691	0,25291
Totais	4,52259	5,08195	5,21772	4,14689	3,22539	22,19434

Figura 4: Representação evidenciada em CONAGIN 1955

O conjunto de dados transformados é submetido a uma análise de variância. É muito importante notar que a transformação logarítmica relacionou o conjunto de dados iniciais a um novo conjunto de dados em que há independência entre as médias dos tratamentos e os respectivos desvios padrões. Para evidenciar este fato foquemos na imagem dos dados da tabela 2 pela transformação logarítmica, Vide Tabela 3.

dados após aplicação de $\log(x)$					media	desvio padrão
0,8129	0,8513	0,9294	0,6284	0,2672		
0,8129	0,8513	0,9294	0,6284	0,2672	0,69783	0,265
1,1875	1,3365	1,1658	1,0128	0,9031	1,121149	0,167
0,7482	0,7709	0,6580	0,7993	0,4393	0,683145	0,146
1,0212	1,0864	1,1106	1,1446	0,7559	1,023718	0,156
0,5185	0,4393	0,5250	0,2430	0,4065	0,426494	0,114
0,5441	0,6532	0,7634	0,7033	0,7033	0,673458	0,082
-0,1549	0,0414	-0,1249	-0,6021	-0,3468	-0,23746	0,246
-0,1549	-0,0969	0,1903	0,2175	0,0969	0,050583	0,168

Tabela 2: Imagem dos dados em planilha eletrônica da transformação $\log(x)$

Os dados das médias dos tratamentos versus os desvios padrões dos mesmos, na tabela dos dados transformados não possuem relação de dependência linear entre eles. Como aponta a representação gráfica a seguir.

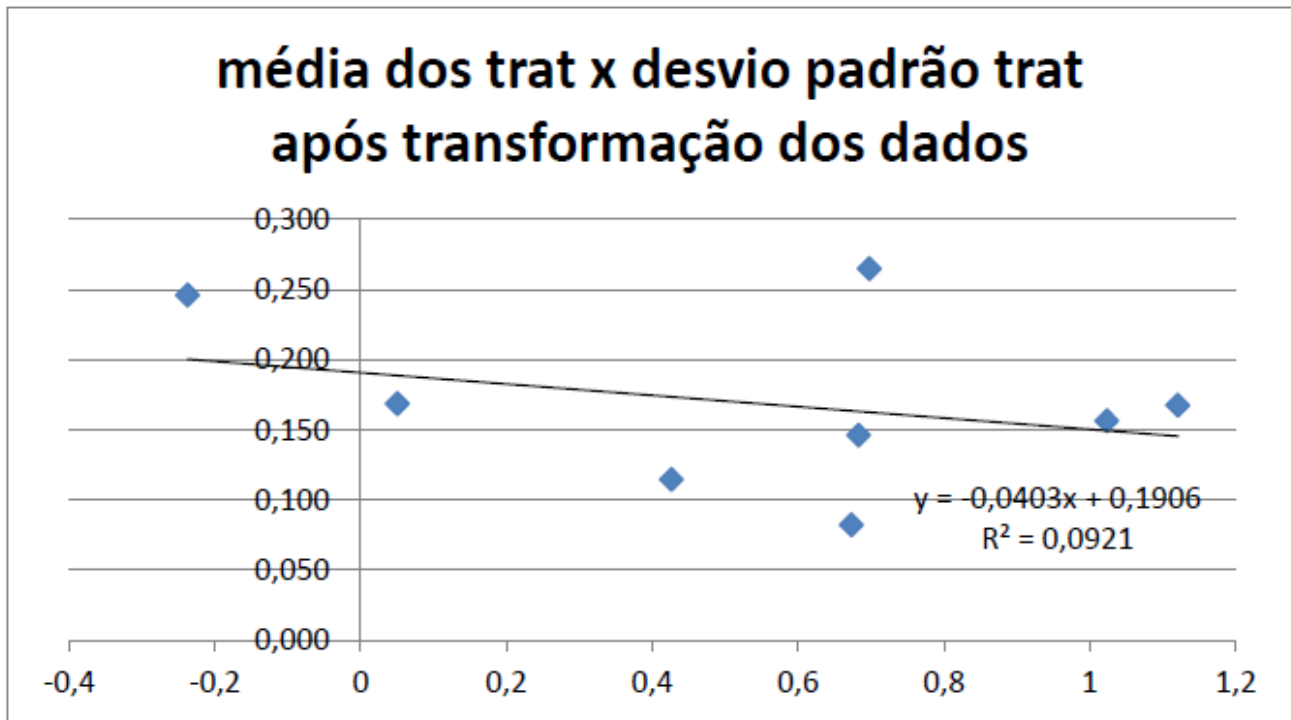


Figura 5: Gráfico da relação desvio padrão e médias dos tratamentos após transformação de dados

Observe que a Figura 5 ilustra o fato de que foi obtido, a partir da transformação logarítmica, um conjunto de dados em que não há correlação entre as médias e os desvios padrões, o que pode ser facilmente observado a partir do baixo valor do coeficiente de R-quadrado, indicando alta dispersão em torno da reta de ajuste, e do fato desta ter coeficiente baixo.

Uma vez que os dados transformados apresenta independência entre as médias de tratamentos e os desvios padrões respectivos, passamos a ter um conjunto de dados, transformados pela função logarítmica, em que é plenamente válido a análise de variância.

TRANSFORMAÇÕES LOGARÍTMICAS: REFLEXÕES SOBRE O USO

É importante destacar que a transformação logarítmica em questão foi na base 10, mas se fosse usada outra base como 2, 3 ou neperiana obter-se-ia resultados similares. A transformação logarítmica permite transformar um conjunto de dados como o representado na Figura 6, em um conjunto de dados mais adequado para análise de variância.

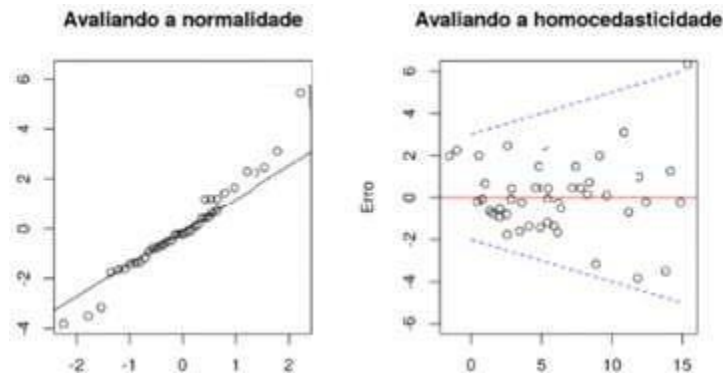


Figura 6: Dados hipotéticos de análise de normalidade e momodedasticidade

Ao aplicar a transformação $\log(x)$ no conjunto de dados representados na Figura 6, obtemos um padrão bastante distinto, a Figura 7 retrata bem a mudança de padrão que pode ocorrer em conjunto de dados, similar ao representado na Figura 6.

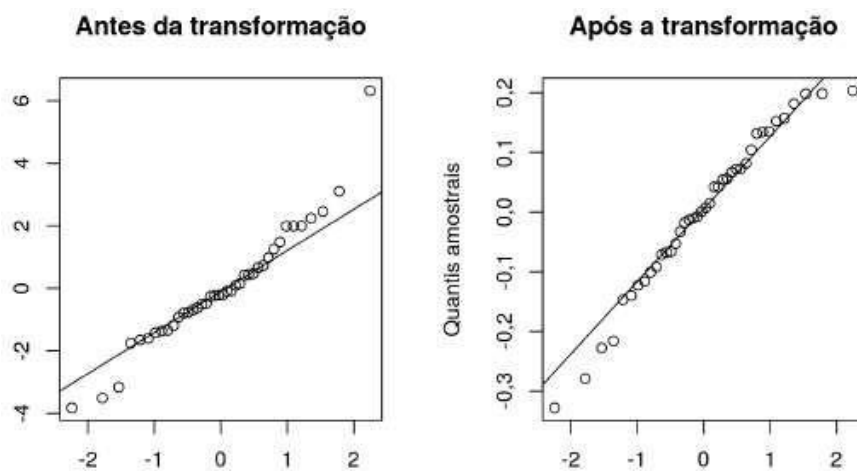


Figura 7: Dados antes e após a transformação logarítmica

O uso de planilhas eletrônicas permite que tenhamos uma boa visualização do erro, em relação as retas de ajustes antes e depois da aplicação da transformação logarítmica nos dados, vide Figura 8.

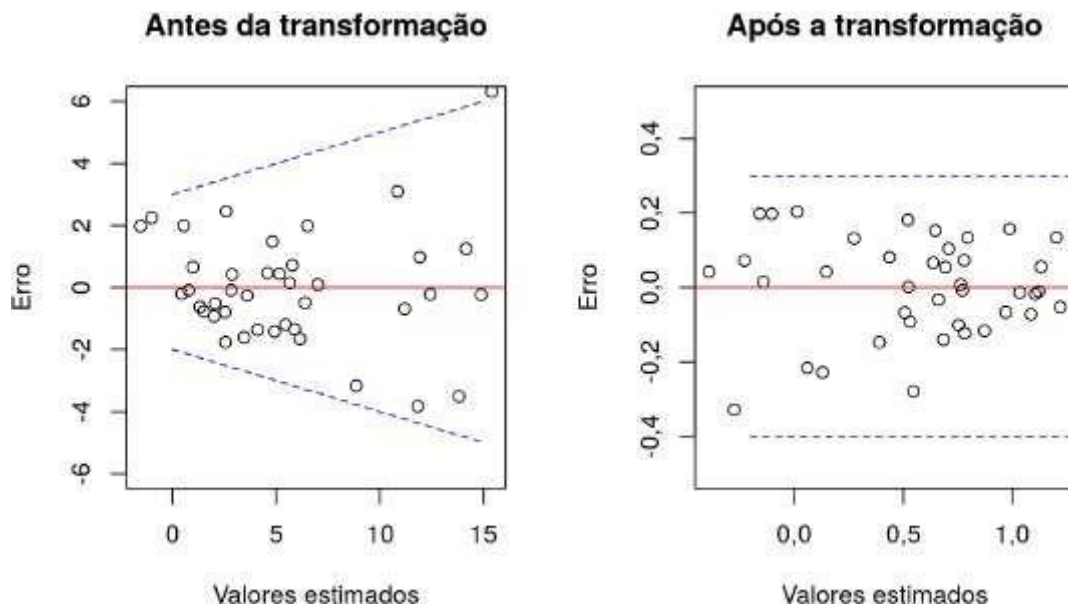


Figura 8: Erros mensurado antes e após aplicação da transformação $\log(x)$

De fato as Transformações de dados podem ser entendidas ferramenta cognitiva. Já que muitas vezes as transformações são úteis para converter curvas de comportamento mais complexos em seguimentos de linhas retas. Naturalmente, relações lineares são mais fáceis de entender e muitas vezes têm melhores propriedades estatísticas. Quando duas variáveis são relacionadas uma com a outra por funções multiplicativas ou exponenciais, a transformação logarítmica é uma das transformações de dados mais úteis.

Podemos destacar, por exemplo. Se medirmos o número de espécies em uma ilha e plotarmos contra a área da ilha, os dados com frequência seguem uma função de potência simples. Considera a equação:

$$S = cA^z \quad (1)$$

Onde S é o número de espécies, A é a área da ilha, e c e z são constantes ajustadas aos dados., assim uma transformação de dados pela função logarítmica lineariza os dados. No trabalho de (**Preston, 1962**), temos que o número de espécies de plantas encontradas em cada uma das ilhas de Galápagos parece seguir uma relação assintótica. Se plotarmos os dados brutos, o número de espécies S em função da área A , veremos que a maioria dos pontos está agrupada à esquerda da figura (pois a maioria das ilhas são pequenas). Como um primeiro passo para a análise, poderíamos tentar ajustar uma linha reta para essa relação:

$$S = \beta_0 + \beta_1 A, \quad (2)$$

Onde β_0 representa o intercepto da linha e β_1 , o coeficiente angular da reta.

No entanto, a linha não se ajusta muito bem aos dados. Em particular, observe que a inclinação da linha de regressão parece ser dominada pelos dados de Albermarle, a maior ilha do conjunto de dados. O ajuste da linha aos dados não captura bem a relação entre a riqueza de espécies e a área das ilhas. Se a riqueza de espécies e a área das ilhas estão relacionadas a partir de uma função potencial. Note que a Equação (1) temos $S = cA^z$, pode ser transformada via função logaritmos, ou seja calculando os logaritmos em ambos os membros da equação (1) lados:

$$\log(S) = \log(cA^z) \text{ e } \log(S) = \log(c) + z \log(A).$$

Após realizar a aplicação da transformação logarítmica nos dados, pode-se ter a vantagem em relação ao tratamento estatístico de dados, em consequência de suas propriedades operativas. A primeira destas propriedade é que o logaritmo de um produto de dois números é igual à soma de seus logaritmos:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b).$$

A segunda propriedade dos logaritmos, útil no processo, é que o logaritmo de um número a elevado a uma potência s , é igual à potência multiplicada pelo logaritmo do número:

$$\log(a^b) = b \log(a)$$

Podemos reescrever a Equação:

$$\log(S) = \log(cA^z),$$

Representando os valores transformados logaritmicamente como símbolo:

$$S^* = c^* + zA^*.$$

Assim, tomamos uma equação exponencial (Equação $S = cA^z$) e a transformamos em uma equação linear (Equação $S^* = c^* + zA^*$). Quando plotamos o logaritmo dos dados, a relação entre riqueza de espécies e a área das ilhas agora é muito mais clara e os coeficientes têm uma interpretação simples (ELLISON e GOTELLI, 2010).

Atualmente o uso das transformações matemáticas, não apenas via a função logarítmica, de dados experimentais aleatórios seguem muito úteis para uma boa análise estatística, em geral as transformações podem realizadas para homogeneizar as variâncias e/ou normalizar a distribuição de variáveis respostas, conforme **Brito (2014)**. Em geral, as hipóteses são testadas nas variáveis transformadas através de testes não paramétricos, mas, se não for conveniente apresentar os dados na nova variável transformada, as médias podem ser transformadas de volta para a medida original. Brito também afirma que entre as transformações desenvolvidas para homogeneizar as variâncias, e que podem também conduzir a normalização da variável, a seguir vamos destacar cinco destas transformações, que estão associadas com função logarítmica e com a função raiz quadrada, devido ao forte elo com o conceito de logaritmos, em sintonia com a proposta deste livro, veja Tabela 4. Mas destacamos também que a tabela completa, com todas as transformações estatísticas de dados usadas em trabalhos científicos em Mossoró-RN pode ser encontrada em (ASSIS, J. P. et all :2023).

Alguns Tipos de transformações e exemplos de aplicações, Mossoró, RN, 2023.

Tipo de Transformação	Aplicar quando
$\sqrt{Y}$	Os valores dos Y_i forem contagens de números pequenos
$\sqrt{Y+Y+1}$	Os valores dos Y_i forem contagens e alguns Y_i forem iguais a zero
$\text{Log}(Y)$	A dispersão dos Y_i é elevada, e as variâncias proporcionais às médias
$\text{Log}(Y+1)$	A dispersão dos Y_i é elevada e alguns valores dos Y_i forem iguais a zero

Tabela 4: Principais transformações estatísticas usadas em Mossoró-RN

Vale destacar que a não aditividade presente nos dados resulta em heterogeneidade das contribuições das observações para variância residual, não sendo esta, portanto, uma estimativa eficiente da variância comum. Desta forma, a expectância não se verifica. De modo que a variância do erro é geralmente maior do que a que seria obtida se o modelo fosse aditivo. Enquanto o modelo linear aditivo pressupõe que os efeitos de tratamentos são aditivos. Uma forma comum de não aditividade ocorre quando os efeitos são multiplicativos.

A transformação logarítmica que segundo **Steel et al. (1997)** citado por **Dias e Barros (2009)** é aquela que é útil quando o efeito de um tratamento é a mudança percentual, instalando um modelo multiplicativo ao invés do aditivo, como exemplo os autores citam o conjunto de dados de produção de frutos de cacaueiros tomados ao acaso e deles acrescentam 50%, nas escalas normal e logarítmica,

onde se observa que os dois conjuntos de dados têm a mesma variância na escala logarítmica e que a média do controle, nesta mesma escala, corresponde á média geométrica dos dados originais e não propriamente ao $\log$ de 46,4, que é a média original ou de controle. Basicamente a transformação logarítmica comum ou natural estabiliza a variância e remove a assimetria da distribuição dos dados. De forma sintética podemos afirmar que se um conjunto de dados Y , após ação da transformação logarítmica se obtem $X = \log(Y)$ com distribuição normal, veja Tabela 5, dizemos que Y tem distribuição lognormal.

Dados		Aplicando log	
	1,86		0,620576
	2		0,693147
	1,79		0,582216
	1,74		0,553885
	1,77		0,57098
	1,77		0,57098
	1,74		0,553885
	1,65		0,500775
	1,9		0,641854
	1,81		0,593327
	1,54		0,431782
	1,63		0,48858
	1,67		0,512824
	1,74		0,553885
	1,75		0,559616
	1,73		0,548121
	1,8		0,587787
media	1,758235	media	0,562601
variância	0,011253	variância	0,003633

Tabela 5: Conjunto de dados antes e após aplicação de $\log(x)$

Por outro lado, a transformação logarítmica estabiliza a variância quando o desvio padrão na escala original varia diretamente com a média, ou seja, o coeficiente de variação é constante de tratamento para tratamento. Esse tipo de relação entre média e desvio padrão é encontrado geralmente quando os efeitos são multiplicados em lugar de aditivos. Nessa situação, tal transformação, além de estabilizar a variância, produz aditividade nos efeitos e tende a normalizar a distribuição dos erros.

A base 10 para o logaritmo é a mais usada, por conveniência, contudo, qualquer base é satisfatória. Essa transformação é usada para números inteiros positivos que cobrem uma grande amplitude, sendo que não pode ser usada diretamente quando ocorrem zeros ou quando alguns dos valores são

menores que 10. Neste caso, é necessário ter-se uma transformação que equivale à transformação associada a função raiz quadrada, ou seja, partindo do conjunto de dados X , obter o conjunto de dados $Y = \sqrt{X}$, equivale a aplicação $Y = \log(X)$ para valores grandes de X .

TRANSFORMAÇÕES RAIZ QUADRADA: REFLEXÕES SOBRE O USO

Já a transformação **raiz quadrada**, é realizada aplicando a função raiz quadrada para transformar um conjunto de dados Y em um conjunto de dados de função de transformação $X = \sqrt{Y}$ ou $X = \sqrt{Y+C}$, esta transformação é recomendada para dados oriundos de contagem, supostamente distribuição de Poisson.

Nesse caso, a transformação raiz quadrada estabiliza a variância, ou seja, tem-se $E(Y) = V(Y) = \mu$, independentemente da média. Recomenda-se a soma de $C = 0,5$ ou $1,0$ à raiz quadrada do dado original se faz necessária em presença de zeros foi proposta para tratar dados de proporção, supostamente distribuídos conforme a binomial. Exemplo disso é a proporção de sementes germinadas, registradas em um intervalo de 0 a 1. Neste caso, o intervalo de proporções entre 0,3 e 0,7 dispensa transformação.

Em síntese a Transformação Raiz Quadrada:

$$\sqrt{y+K}, K \geq 0.$$

Freqüentemente utilizada em dados provenientes de contagens, que geralmente seguem uma distribuição de Poisson, na qual a média é igual à variância. Enquanto a Transformação Logarítmica :

$$\text{Log}(y+K) \text{ ou } \ln(y+K), K \geq 0.$$

Recomendada quando é constatada uma certa proporcionalidade entre a média e a variância. É muito usada em estudos biológicos, em estudos de efeito de drogas e também utilizada para se obterem relações lineares.

Conforme Silva (2013), a transformação **raiz quadrada** pode ser aplicada numa situação onde a análise preliminar de certos dados pode revelar que as amplitudes de variação dos tratamentos e as médias desses tratamentos não são independentes, mas que as variâncias dos tratamentos são proporcionais às respectivas médias. É usual transformar tais dados calculando a raiz quadrada dos valores observados e analisar essas raízes quadradas. Essa transformação é apropriada para dados descritos

pela distribuição de Poisson, assim chamada em homenagem ao matemático Siméon Denis **Poisson**, que a descreveu, que acontece quando se trata do número de ocorrências de certo evento, com um número muito grande de observações e a probabilidade de que ele ocorra em uma observação é pequena. Por exemplo, o número anual de suicídios em uma população humana, o número de parafusos defeituosos produzidos por uma indústria etc.

Na experimentação com plantas, a distribuição de Poisson ocorre na contagem de árvores doentes em pequenas áreas e no número de determinado tipo de frutos encontrados em uma árvore. Quando essa contagem atinge 50 ou mais, para cada unidade considerada, não há necessidade de qualquer modificação no método normal de análise. Entretanto, contagens inferiores a 50 podem indicar uma distribuição de Poisson sendo, por isso, aconselhável extrair a raiz quadrada da contagem. Quando ocorrem valores iguais a zero, ou quando a maioria das contagens é menor do que 20 (ou 10), a transformação da raiz quadrada tende a corrigir excessivamente os dados e, nesses casos, é costume adicionar $1/2$ ou $3/8$ cada valor, antes de se extrair a raiz quadrada. Então, se X obedece à distribuição de Poisson, $V(X) = f(m) = m$, e a transformação apropriada é $Y = \sqrt{X}$.

Portanto, podemos sintetizar que a transformação raiz quadrada é utilizada quando os dados originais são de contagem e cuja distribuição é do tipo de Poisson, veja Figura 9. Muitos trabalhos das ciências agrícolas relativas a estudos são variáveis como o número de ovos produzidos por metro quadrado (m^2) de uma granja, ou o número de carrapatos de em determinada área do corpo de animais, ou o número de vezes que o gado vai ao cocho, etc. Para uma variável aleatória Y , mensurada por unidade de observação, tem-se $X = \sqrt{Y}$ representa os dados transformados a partir da transformação raiz quadrada. Caso há zeros no conjunto de dados mensurados pela variável Y , de forma prática define-se $X = \sqrt{0,5 + Y}$. A Figura XX representa o aspecto operativo da pela transformação raiz quadrada em um conjunto de dados para o qual essa transformada é eficaz.

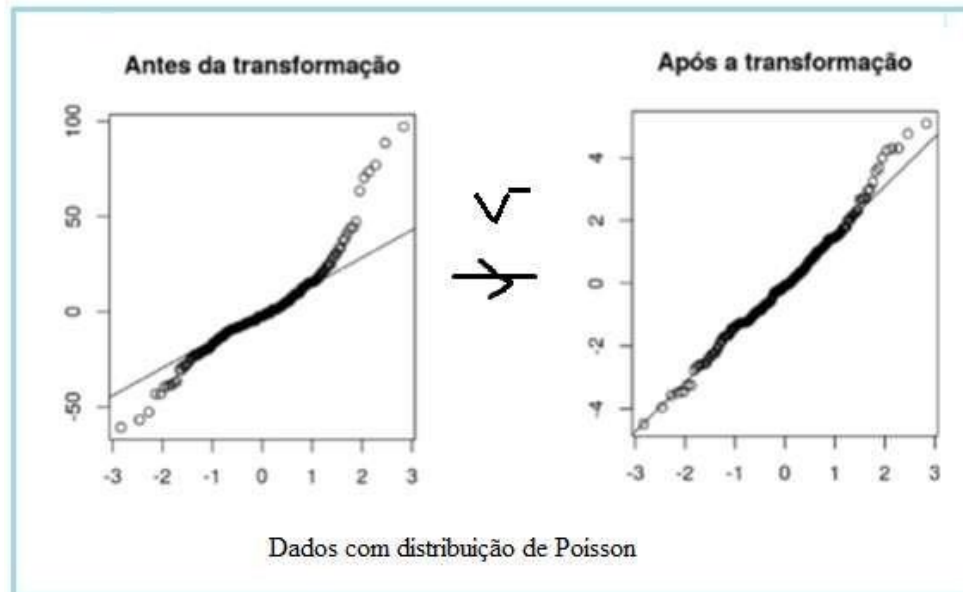


Figura 9: Aplicação da transformação raiz quadrada em dados

A Figura 10 a seguir representa o erro entre os valores estimados pela reta de regressão linear dos dados, antes e após a aplicação da transformação raiz quadrada.

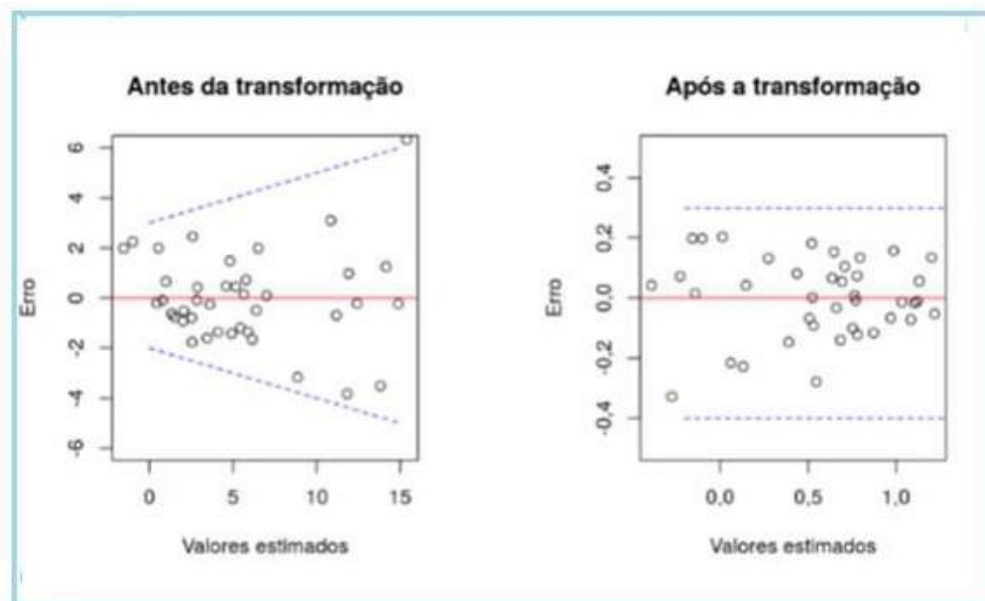


Figura 10: Medida de Erros nos dados X, antes e após aplicação de $\sqrt{X}$

Se considerarmos a aplicação da transformação raiz quadrada ao dados brutos de (CONAGIN 1955), obtemos um conjunto de dados com baixa correlação entre as médias e os desvios padrões, como ilustra a Tabela 6 a seguir.

Imagem da transforção razi aos

Dados de CONACIN					media	desvio padrão
2,54951	2,664583	2,915476	2,061553	1,360147	2,310254	0,615
3,924283	4,658326	3,827532	3,209361	2,828427	3,689586	0,704
2,366432	2,428992	2,133073	2,50998	1,658312	2,219358	0,344
3,24037	3,49285	3,591657	3,73497	2,387467	3,289463	0,536
1,81659	1,658312	1,830301	1,322876	1,596872	1,64499	0,206
1,870829	2,12132	2,408319	2,247221	2,247221	2,178982	0,200
0,83666	1,048809	0,866025	0,5	0,67082	0,784463	0,208
0,83666	0,894427	1,24499	1,284523	1,118034	1,075727	0,203

0 5 10 15 0,0 0,5 1,0

Tabela 6: Transformação raiz quadrada aplicada em CONACIN

A correlação entre médias e desvios padrões tem sensível alteração após aplicação da transformação raiz, a Figura 11 traz a representação gráfica da relação entre médias dos tratamentos e os respectivos desvios padrões.

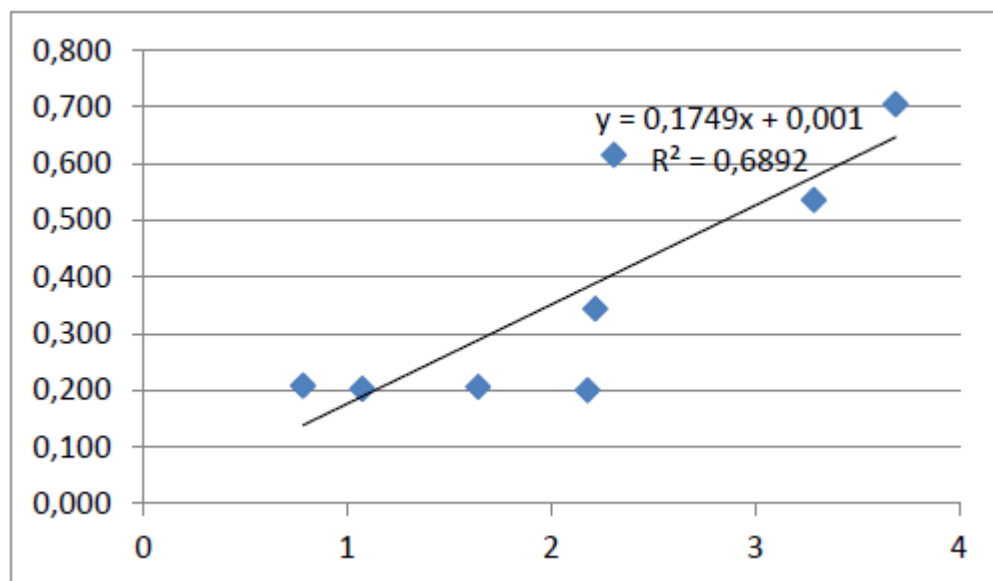


Figura 11: Relação entre médias e desvios padrões

Vale notar que as médias obtidas após aplicação da transformação $\log(x)$ tem uma relação linear com as médias obtidas via transformação raiz. Já os desvios padrões ficam não correlacionados linearmente após a aplicação das transformação $\log(x)$ e transformação raiz aos dados brutos de CONACIN.

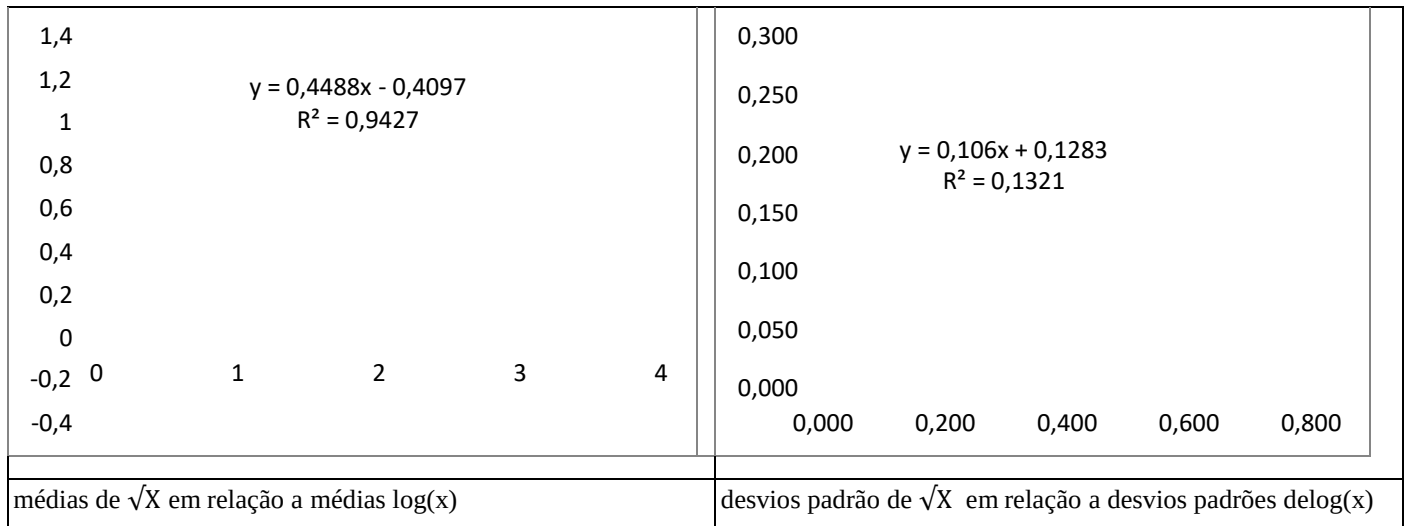


Figura 2: Relação entre médias e desvios após aplicar $\log(x)$ e $\sqrt{x}$

Segundo Zimmermann (2004), alguns exemplos de dados de observação que seguem a distribuição raiz quadrada dada por são as contagens de números de plantas daninhas ou de insetos de uma dada espécie por unidade de área, por exemplo, onde as contagens são sempre em números inteiros ou baixos. Dados em porcentagem baseados em contagem e com denominador comum, situados entre 0 % e 20% ou entre 80% e 100%, também podem ser transformados por raiz quadrada. Segundo este autor a constante k adicionada ao dado pode, usualmente, assumir três valores, 0, 0,5 e 1. Quando os valores são muito pequenos e, principalmente, se zeros estão presentes, a simples raiz quadrada ($k = 0$) tende a corrigir e, portanto, $k = 0,5$ ou $k = 1$ devem ser empregados.

De acordo com Bussab (1986) e Weisberg (1980), em estudos de ajuste de equações de regressão, logo após o pesquisador identificar a ausência de homogeneidade nos dados, se faz necessário o uso de métodos alternativos que atendam a esta demanda, e que felizmente, na maioria dos casos a variabilidade segue algum padrão identificável. Com grande frequência esta é uma função da variável preditora, ou de uma outra variável independente, e para resolver esta questão o investigador tem que procurar remover a heterocedasticidade através de transformação da variável resposta y , ou da variável preditora x , ou então de ambas, são as chamadas transformações estabilizadoras da variância. A seguir será apresentado algumas transformações mais usadas nestes casos segundo aquele autor, bem como algumas recomendações de quando utilizá-las. A transformação raiz quadrada

$(\sqrt{y})$ recomendada quando a variância do erro isto é $Var(e_i)$ cresce proporcionalmente em relação a variável independente x_i . Por outro lado a transformação logarítmica $(\log y)$, é sugerida o

seu uso quando o crescimento da variância do erro $\text{Var}(e_i)$ é mais acentuado do que o caso anterior, isto é, a variância cresce proporcional ao valor x_i^2 .

Bussab e Morettin (2002), mostram como comparar coeficientes de correlação de duas populações através de mudanças de variáveis. Isto é, suponha que ρ_1 e ρ_2 sejam os coeficientes de correlação de duas populações, dos quais retiramos duas amostras independentes, de tamanho n e m , respectivamente. Quando o pesquisador detectar a heterogeneidade da variância, a transformação de dados apropriada para ser usada depende do tipo específico de relacionamento entre a variância e a média. Os tipos de transformações são as seguintes: i) transformação raiz quadrada ($\sqrt{y}$), a qual é apropriada para estabilizar as variâncias das observações da distribuição de Poisson, frequentemente usada para dados de contagens, onde a variância é igual a média. É apropriada também para dados consistindo de números inteiros pequenos, dados de contagem provenientes de, por exemplo: número de ervas daninha por parcela, números de colônias de bactérias por lâmina, número de insetos capturados em armadilha luminosa, número de insetos por folha, número de bactérias em uma placa de Petri, número de sementes germinadas por parcela, número de plantas infestadas, número de parasitas por animal, etc. Esta transformação também é apropriada para dados provenientes de uma escala de notas que também devem ser transformados, como por exemplo, apropriada ocasionalmente para dados de percentagem oriundos de dados de contagem. Se as percentagens estiverem entre 0 e 30% ou 70 e 100%, mas não em ambas, a transformação raiz quadrada é recomendada. As percentagens entre 70% e 100%, devem ser preferencialmente subtraídas de 100, antes de se fazer a transformação. A transformação raiz quadrada é, ainda, indicada no caso de percentagens, fora dos limites acima considerados, quando as observações estão claramente numa escala contínua.

A transformação raiz quadrada $Y = \sqrt{y}$ terá uma variância constante $\sigma_y^2 = 0,25$ para todos os valores μ_y . Se a média é pequena, $\mu_y < 3$, então a transformação $Y = \sqrt{y + \frac{3}{8}}$ é superior a $\sqrt{y}$ para estabilizar as variâncias.

Quando ocorrem zeros ou valores abaixo de 10, usar $\sqrt{y + 0,5}$ ou $\sqrt{y + 1,0}$ lugar de $\sqrt{y}$.

TRANSFORMAÇÕES DE ESCALAS NO ENSINO MÉDIO

Para estudantes do ensino médio pode-se trabalhar o uso das transformações raiz quadrada e raiz na leitura e interpretação de dados estatísticos. Diversas propostas relacionando estudos com dados divulgados de acompanhamento e monitoramento da Covid-19 tem sido implementada como estratégia de tratar da aprendizagem de estatística básica no ensino básico de forma contextualizada.

Um bom exemplo deste trabalho que explora bem os potenciais da função logarítmica como ferramenta de apoio a interpretação de dados da Covid-19 pode ser encontrado no site de “Thiago Valentin”, <https://www.thiagovalentim.me/post/avaliacao-da-evolucao-da-covid-19-via-grafico-log-log/>.

Diversas dissertações de mestrados e trabalhos de TCC(s) também trazem importantes propostas do uso da função logarítmica na análise de dados, inclusive com uso de dados disponíveis da Covid-19.

Em particular destacamos a dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, por Cláudio Prado P. Valle, trabalho orientado pela Profa. Dra. Kélem Gomes Lourenço. A dissertação de (VALLE, 2021), no trabalho em que é apresentada uma modelagem matemática para interpretar a propagação do COVID-19 no estado de Goiás, como um recurso para o processo. Na seção 4.6 da dissertação é realizado o ajuste de curvas com uso da função exponencial e relacionado com os logaritmos para descrever de forma mais clara o comportamento dos dados da Covid-19 usados na proposta, e na seção seguinte é feita a análise de dados. Desta forma identifica que estas análises de dados realizadas ponto a ponto pode levar os alunos a entenderem o comportamento de cada função. Nesta etapa o aluno também pode melhorar a compreensão dos cálculos de percentuais, aumentando a abrangência da integração dos conteúdos.

Considere o conjunto de dados referente a Covid-19, divulgado no site xxx, no período de 30 dias consecutivos da Áustria, dados disponíveis no site HDX <https://data.humdata.org/dataset/ecdc-covid-19>. Na Tabela 7 apresentamos os dados em planilha eletrônica. e as duas últimas colunas identificadas como “aplic Raiz” e “aplic log” . A ideia é que um conjunto de dados dessa grandeza é suficiente para o estudante do ensino médio entender a aplicação da transformação de dados obtida via função raiz quadrada e via função logarítmica, não com interesse em análise científica rigorosa, mas como estratégia que permite uma melhor interpretação do conjunto de dados observados.

x	day	month	year	cases	deaths	iesAndTeri	geold	ryterritori	acumulado	aplic Raiz	aplic log
1	17	4	2020	78	17	Austria	AT	AUT	17	4,12311	2,83321
2	16	4	2020	136	9	Austria	AT	AUT	26	5,09902	3,2581
3	15	4	2020	191	16	Austria	AT	AUT	42	6,48074	3,73767
4	14	4	2020	106	18	Austria	AT	AUT	60	7,74597	4,09434
5	13	4	2020	130	13	Austria	AT	AUT	73	8,544	4,29046
6	12	4	2020	247	18	Austria	AT	AUT	91	9,53939	4,51086
7	11	4	2020	312	24	Austria	AT	AUT	115	10,7238	4,74493
8	10	4	2020	279	22	Austria	AT	AUT	137	11,7047	4,91998
9	9	4	2020	329	30	Austria	AT	AUT	167	12,9228	5,11799
10	8	4	2020	343	23	Austria	AT	AUT	190	13,784	5,24702
11	7	4	2020	314	16	Austria	AT	AUT	206	14,3527	5,32788
12	6	4	2020	217	18	Austria	AT	AUT	224	14,9666	5,41165
13	5	4	2020	241	18	Austria	AT	AUT	242	15,5563	5,48894
14	4	4	2020	396	10	Austria	AT	AUT	252	15,8745	5,52943
15	3	4	2020	418	12	Austria	AT	AUT	264	16,2481	5,57595
16	2	4	2020	529	18	Austria	AT	AUT	282	16,7929	5,64191
17	1	4	2020	564	20	Austria	AT	AUT	302	17,3781	5,71043
18	31	3	2020	805	22	Austria	AT	AUT	324	18	5,78074
19	30	3	2020	522	18	Austria	AT	AUT	342	18,4932	5,83481
20	29	3	2020	594	0	Austria	AT	AUT	342	18,4932	5,83481
21	28	3	2020	668	16	Austria	AT	AUT	358	18,9209	5,88053
22	27	3	2020	1141	18	Austria	AT	AUT	376	19,3907	5,92959
23	26	3	2020	606	4	Austria	AT	AUT	380	19,4936	5,94017
24	25	3	2020	796	5	Austria	AT	AUT	385	19,6214	5,95324
25	24	3	2020	855	9	Austria	AT	AUT	394	19,8494	5,97635
26	23	3	2020	607	8	Austria	AT	AUT	402	20,0499	5,99645
27	22	3	2020	375	2	Austria	AT	AUT	404	20,0998	6,00141
28	21	3	2020	453	0	Austria	AT	AUT	404	20,0998	6,00141
29	20	3	2020	550	2	Austria	AT	AUT	406	20,1494	6,00635
30	19	3	2020	314	1	Austria	AT	AUT	407	20,1742	6,00881
31	18	3	2020	316	0	Austria	AT	AUT	407	20,1742	6,00881
32	17	3	2020	156	2	Austria	AT	AUT	409	20,2237	6,01372
33	16	3	2020	205	0	Austria	AT	AUT	409	20,2237	6,01372

Tabela 7: Dados da Covid e uso das transformações $\log(x)$ e $\sqrt{x}$

Fonte: Geographic distribution worldwide <https://data.humdata.org/dataset/ecdc-covid-19>

A seguir representamos graficamente os dados pertinentes ao número de mortes acumulada ao longo dos 30 dias consideradas, em forma bruta, vide lado esquerdo da Figura XX e após aplicação das transformações logarítmica e também da transformação raiz quadrada, vide lado direito da Figura XX

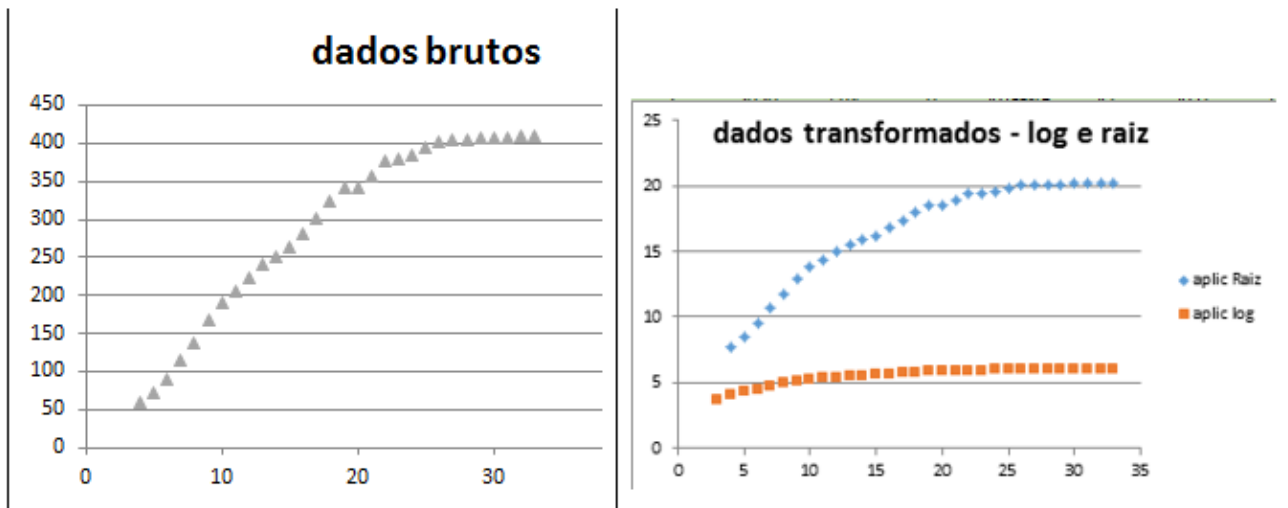


Figura 13: Aplicação das transformações $\log(x)$ e $\sqrt{x}$

Note que ambas as transformações reduzem a amplitude do intervalo dos dados, e a transformação logarítmica realiza uma redução consideravelmente maior. Importante notar que na região em que há o maior taxa crescimento da quantidade de mortes acumulada, a imagem pela transformação log gera um conjunto de dados que tem excelente ajuste linear. Já a função raiz quadrada gera um conjunto de dados que claramente admite um excelente ajuste quadrático. Quando se transformam variáveis aplicando as transformações raiz quadrática ou logarítmica, por não serem lineares, os resultados a que se chega para as variáveis transformadas, em muitos casos, não se podem converter facilmente para as variáveis originais. Consequentemente, muitas vezes, as conclusões a retirar são relativas às variáveis transformadas e isso deve ficar bem explícito nos trabalho em que é apresentada a análise.

REFERÊNCIAS

- ASSIS, J.P.; LIMA, I. R.P.; FRANÇA, J.A.; SOUSA, R.P.; LINHARES, P.S.F.; CUSTODIO, T. N.; RODRIGUES, W.M., SOUSA, R.P.; Transformações de dados aplicados à Estatística; Nova Xavantina-MT: Pantanal, 2023. 131p.
- BRITO, M. Metodologia da investigação agrária. Escola Superior Agrária – Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Portugal. 70p. Acesso em 27/11/2014. <www.ci.esapl.pt/mbrito/metodologia%20da%20investigação%20agraria.pdf>
- BUSSAB, W. O. ; MORETTIN, P. A. Estatística Básica. São Paulo: SARAIVA, 5.ed. 2002, 526p.
- CONAGIN, A., Transformações de dados experimentais. Boletim Técnico do Instituto Agrônômico do Estado de São Paulo – Bragantia, No 15, 1955.
- CUNHA, D. F.; SERAFIN, J. C.; ZIMMERMANN, F. J. P.; S. Efeitos das transformações de dados sobre o coeficiente de variação. Revista de Agricultura, Piracicaba, V. 75, fasc. 3, 2000
- DEMÉTRIO, C.G.B. Transformação de dados. Efeitos sobre a análise da variância. Piracicaba, SP, ESALQ, 1978. 113 P. (Dissertação de mestrado).
- DIAS; L. A. S.; BARROS, W. S. Biometria experimental. Universidade Federal de Viçosa - UFV. Viçosa, MG. 2009. 408 p.
- ELLISON, A. M.; GOTELLI, N. J. Princípios de Estatística em Ecologia. Artmed Editora, São Paulo, SP. 2010. 532 p.
- HDX(TheHumanitarianDataExchange)GeographicDistribution of COVID-19, <https://data.humdata.org/>
- PRESTON, F. W. The canonical distribution of commonness and rarity: Part I. Ecology. v. 43, n. 2. 1962, p. 185–215.
- SILVA, P. S. L. Métodos para pesquisas com plantas. Mossoró: Editora da Universidade federal do Semi-Árido – Edufersa. 2013. 264 p.
- SILVA, W.J. Variabilidade do número de internódios e altura da espiga em linhagens e híbridos de milho. Bragantia, v. 22, n.8, p. 81-89, set. 1963.
- STEEL, R.G.D.; TORRIE, J.H.; DICKEY, D. A. Principles and procedures of statistics: a biometrical approach. 3º ed. New York: Mc –Graw Hill, 1997. 633 p.
- (Valentin,Thiago;AvaliaçãodaevoluçãodaCovid19viagráficologlogSite:<https://www.thiagovalentim.m e/post/avaliacao-da-evolucao-da-covid-19-via-grafico-log-log/> (acesso em 30/08/23)
- VALLE, C. P.P.; Uma sugestão de modelagem no ensino básico para a COVID- 19 em Goiás; Dissertação demestradoorientadopelaProfa.DraKélemGomesLourenço;GoiâniaGO,2021(https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/287/o/TCC Claudio_Prado_12_01.pdf)
- WEISBERG, S. Applied Linear Regression. New York, John Wiley and Sons, 1980. 283 p.

Capítulo 6



10.37423/231008321

ALGUMAS REFLEXÕES A RESPEITO DO ENSINO DE LOGARITMOS HOJE E AGRADECIMENTOS

Walter Martins Rodrigues

UFERSA

Jackson JonasSilva Costa

UFERSA

Santos Demétrio Miranda Borjas

UFRN

Antônio Ronaldo Gomes Garcia

UFERSA

Franceliza Monteiro da Silva Dantas

UFERSA



APRESENTAÇÃO

Neste capítulo vamos fazer algumas reflexões sobre de algumas possibilidades de explorar a definição do conceito de logaritmos a partir da noção (LIMA, 1973), da possibilidade de fazer uma conexão com a exploração da ideia de limite a partir do uso dos fundamentos utilizados por Arquimedes no trabalho de quadratura da parábola (SANTOS, 2014), adaptando à curva associada a função $f(x) = \frac{1}{x}$, restrita ao conjunto dos números reais positivos.

Na última seção vamos destacar também elementos relativos à exploração de recursos gráficos e computacionais empregados no ensino de logaritmos, vide (PEREIRA, 2010). Uma vez que é muito importante estudar o comportamento gráfico e o conceito das Funções Logarítmicas, quanto às características próprias, que as distingue das demais funções elementares usuais, nesse sentido os recursos tecnológicos são fortes aliados, permitindo trabalhar em maior profundidade propriedades dos logaritmos com uso de representação gráfica seja em situações bem contextualizadas.

Ao final vamos apresentar nossos agradecimentos aos principais colaboradores que participaram de nossas ações de estudos sobre os logaritmos e contribuíram para construção deste livro.

LOGARITMOS: EXPLORANDO A NOÇÃO DE ÁREA

Em 2013 o mestrando Carlos Luiz da Silva Brener, do programa nacional de mestrado profissional em Matemática no Instituto de Matemática Pura e Aplicada, fez um excelente trabalho de mestrado tratando do tema logaritmos e o uso do Geogebra, o trabalho de título “OBJETOS DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS E EXPONENCIAIS”, vide (BRENER, 2013), foi orientado pelo ilustre Prof. Dr Elon Lages Lima. No trabalho Carlos Brener trabalha com a definição de funções logarítmicas definidas a partir de faixas de áreas abaixo dos gráficos de funções do tipo $f(x) = \frac{M}{x}$, onde $0 < x < \infty$ e M é uma constante positiva, vide Figura 1. Trata-se de uma estratégia muito interessante para lidar com o conceito de logaritmos, por ter uma interpretação geométrica bem clara e permitir demonstrar todas as propriedades das funções logarítmicas de forma bem elegante, mais detalhes a respeito da abordagem de logaritmos sob esse ponto de vista pode ser encontrada em (LIMA, 1973) e (LIMA, 1998).

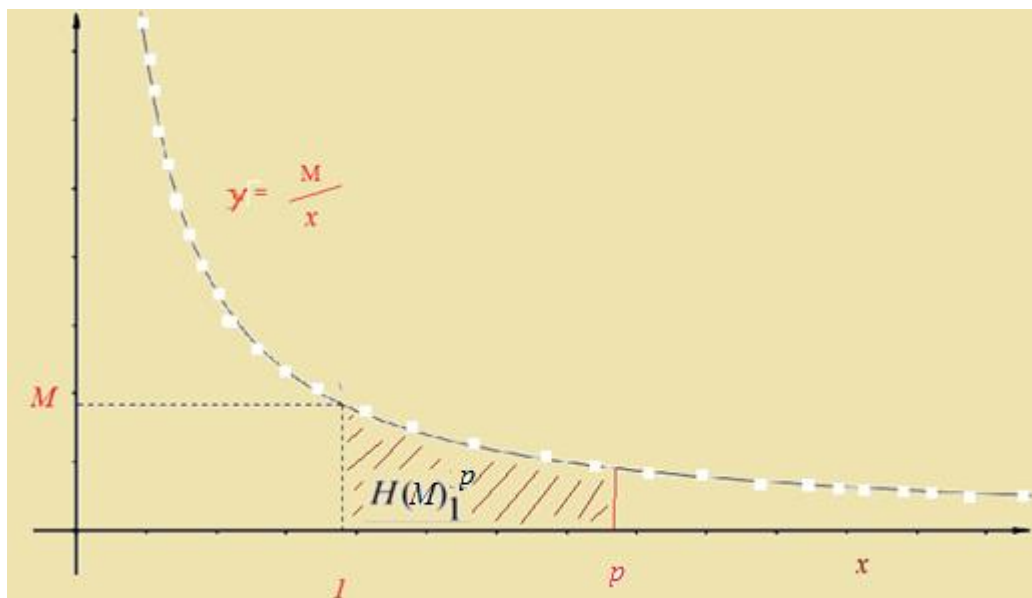


Figura 1: Representação gráfica da função $f(x) = \frac{M}{x}$.

Na Figura 1 a área $H(M)p$ delimitada pelo eixo das abcissas, pelo ramo positivo da hipérbole $f(x) = \frac{M}{x}$ e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = p$. A partir da representação desta área, e em correspondência com função $f(x)$ define-se a função logarítmica da seguinte forma:

$$\log(x) = H(M)x - 1 \quad \text{se } 1 \leq x$$

$$\log(x) = -H(M)x - 1, \quad \text{se } 0 < x < 1$$

No caso particular em que $M = 1$, se tem a função logaritmo natural, representada por $\ln(x)$.

Neste capítulo vamos explorar essa a noção de área para tratarmos do estudo de logaritmos, mas a ideia é fazer uso de planilhas eletrônicas e não o software Geogebra, como tratado em (BRENER, 2013). No caso o software Geogebra gera de forma imediata as áreas delimitadas, portanto, os valores dos logaritmos associados, enquanto nas planilhas eletrônicas não tem esse tipo de facilidade em sintonia com a proposta de (BRENER, 2013), entendemos que a abordagem de um conteúdo matemático está muito baseado em três pilares: conceituação, manipulação e aplicações. Entendo que a conceituação é o conjunto de fundamentos lógicos necessários o trabalho com o conceito, nesse sentido as representações algébricas ou geométricas desempenham importante papel. As manipulações são representadas nas atividades que permitem uma aproximação e um maior domínio da utilização do conceito, essa etapa traz mais confiança / segurança de que sabemos utilizar com certa destreza o conceito. As atividades que permitem a concretização desta fase pode ser organizadas a partir de um conjunto de atividades de natureza algébrica ou geométrica, cujo objetivo é exercitar o que foi definido.

Nossa proposta é utilizar a noção de limite, a partir de raciocínio análogo ao famoso método da exaustão usado por Arquimedes no trabalho da quadratura da parábola. Sendo utilizadas planilhas eletrônicas para efetivação dos cálculos necessários. Ademais focaremos apenas no estudo da função logaritmo natural $\ln(x)$, vide Figura 2 onde foca-se na abordagem da função $f(x) = \frac{1}{x}$ restrita ao domínio $0 < x < \infty$.

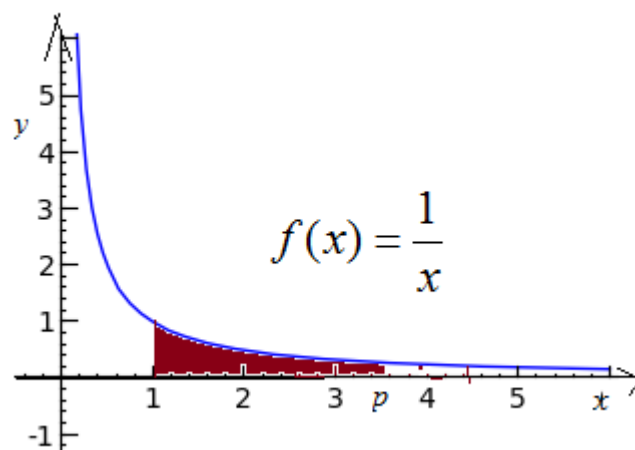


Figura 2: Gráfico do ramo positivo função $f(x) = 1/x$, $0 < x < \infty$.

O cálculo da área colorida demarcada na Figura 2, pode ser obtida a partir de uma sequência de triângulos, como ilustra a Figura 3.

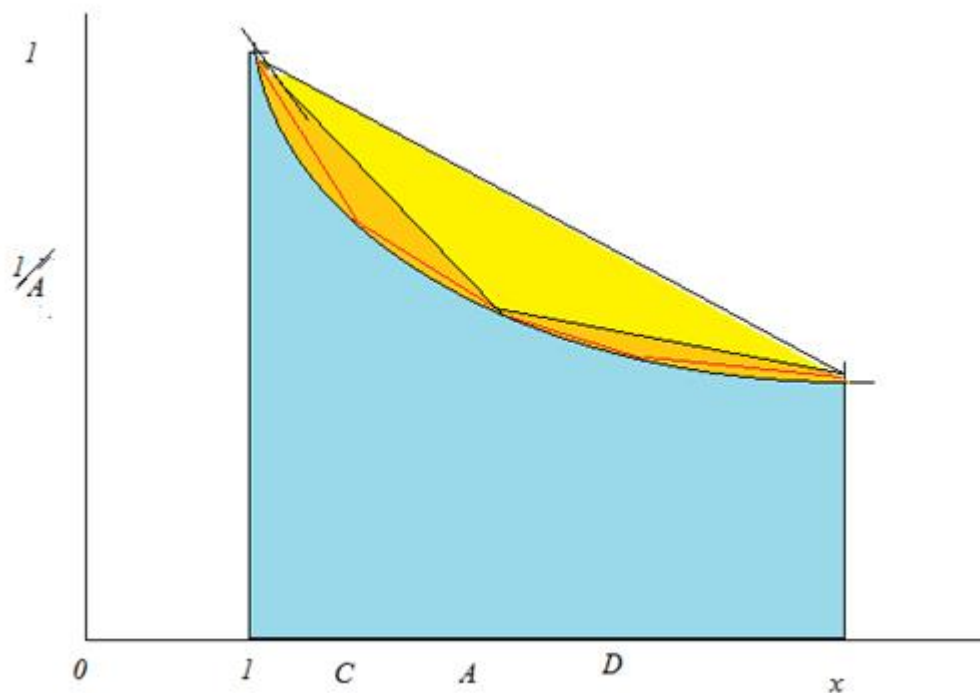


Figura 3: Representação de estimativa da área $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ em duas iterações.

Em 2014 o mestrando Josieldes Marques dos Santos, fez um trabalho de dissertação de mestrado no programa nacional de mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) com o título “ QUADRATURA DA PARÁBOLA: UMA ABORDAGEM POSSÍVEL PARA O ENSINO DE SOMAS INFINITAS”. Trabalho realizado sob orientação do ilustre Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana. Em nossa proposta, a ideia não é realizar a soma infinita, dado que estamos trabalhando com planilhas eletrônicas, a ideia é trabalhar aproximações obtidas, e poderemos visualizar o fato de que mais iterações no processo, permite soluções melhores. A Tabela 1 apresenta estimativas de $\ln(x)$ para oito valores, estimativa foi construída usando a estratégia ilustrada na Figura 3.

x	soma das áreas triangulares	área trapezio	estimativa de $\ln(x)$	$\ln(x)$ ofic
1,09	0,001566515	0,086284404	0,084717889	0,086178
1,12	0,001681753	0,113571429	0,111889676	0,113329
1,5	0,011056204	0,416666667	0,405610463	0,405465
1,74	0,026220864	0,582643678	0,556422814	0,553885
1,93	0,043322316	0,705932642	0,662610326	0,65752
2	0,050697962	0,75	0,699302038	0,693147
2,3	0,088374392	0,932608696	0,844234304	0,832909
2,5	0,118510736	1,05	0,931489264	0,916291

Tabela 1: Estimativas de $\ln(x)$ com partição de 3 iterações.

Na ilustração da Figura 4 representamos os sete triângulos relativos a aplicação do método da quadratura da $f(x) = \frac{1}{x}$ relativa ao segmento de reta que passa pelo pontos $(1,1)$ e $(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$, ou seja a reta $y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$, sendo que o processo foi truncado na terceira iteração.

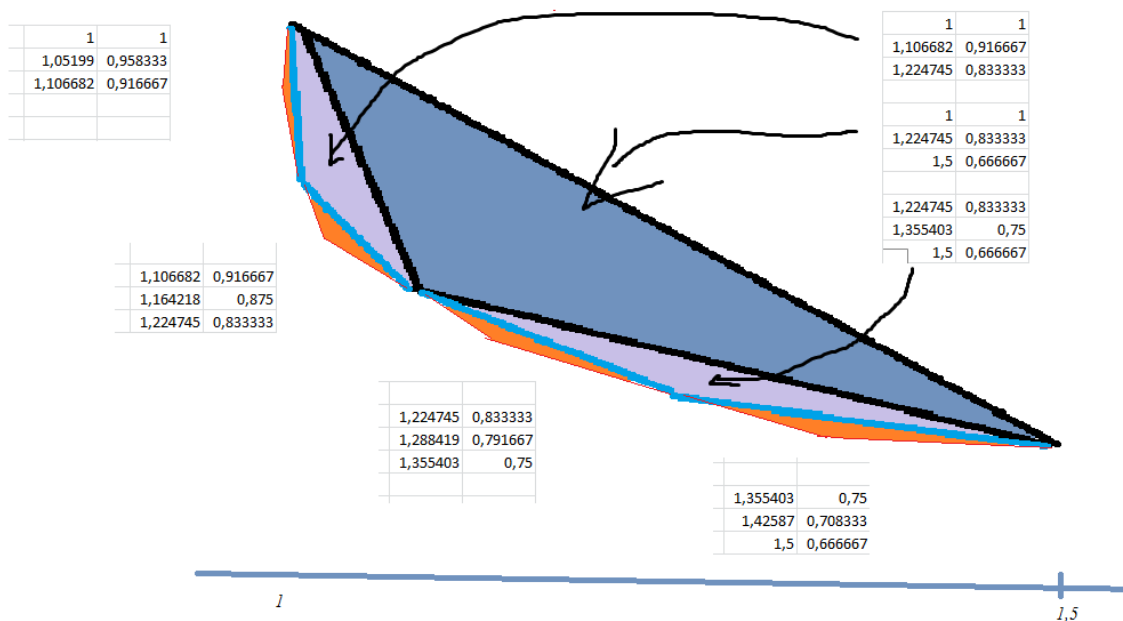


Figura 4: Representação geométrica de três iterações na quadratura de $f(x) = \frac{1}{x}$.

QUADRATURA DA PARÁBOLA NA APROXIMAÇÃO DE LOGARITMO

Considere o problema de obter uma aproximação polinomial de grau menor ou igual a quatro, que gera que aproximação de $\ln(x)$, $1 < x < e$. Nesse sentido, obtivemos o polinômio

$$y = -0,257x^4 + 0,2507x^3 - 1,0084x^2 + 2,3475x - 1,5622 \quad (1)$$

O polinômio (1) foi obtido da seguinte forma: Dado p um número real $1 < p < e$ podemos obter uma aproximação, por uma parábola $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, da hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $1 < x < p$, naturalmente os parâmetros A, B e C dependem de p.

valores de p	A	B	C
2,5	0,2286	-1,2	1,9714
2	0,33	-1,5	2,16667
1,8	0,3968	-1,6667	2,2698
1,5	0,533	-2	2,4667
1,45	0,563	-2,069	2,506
1,3	0,6689	-2,3077	2,6388
1,25	0,7111	-2,4	2,6889
1,2	0,7576	-2,5	2,7424

Tabela 2: Valores dos parâmetros A, B e C de $g(x)$ em função de p

Ao analisar o comportamento de cada um dos parâmetros A, B e C em função de p obtemos as seguintes identificações:

$$A(p) = 0,2786p^2 - 1,4252p + 2,055 ;$$

$$B(p) = -0,5512p^2 + 3,0164p - 5,304 ; \quad (2)$$

$$C(p) = 0,2759p^2 - 1,604p + 4,26064$$

Na Figura 5 está representado o gráfico com as representações das curvas de ajustes, relativas à Tabela 2, que permitiu obter as expressões de (2), por ajuste polinomial, na inserção de linha de tendência na planilha eletrônica.

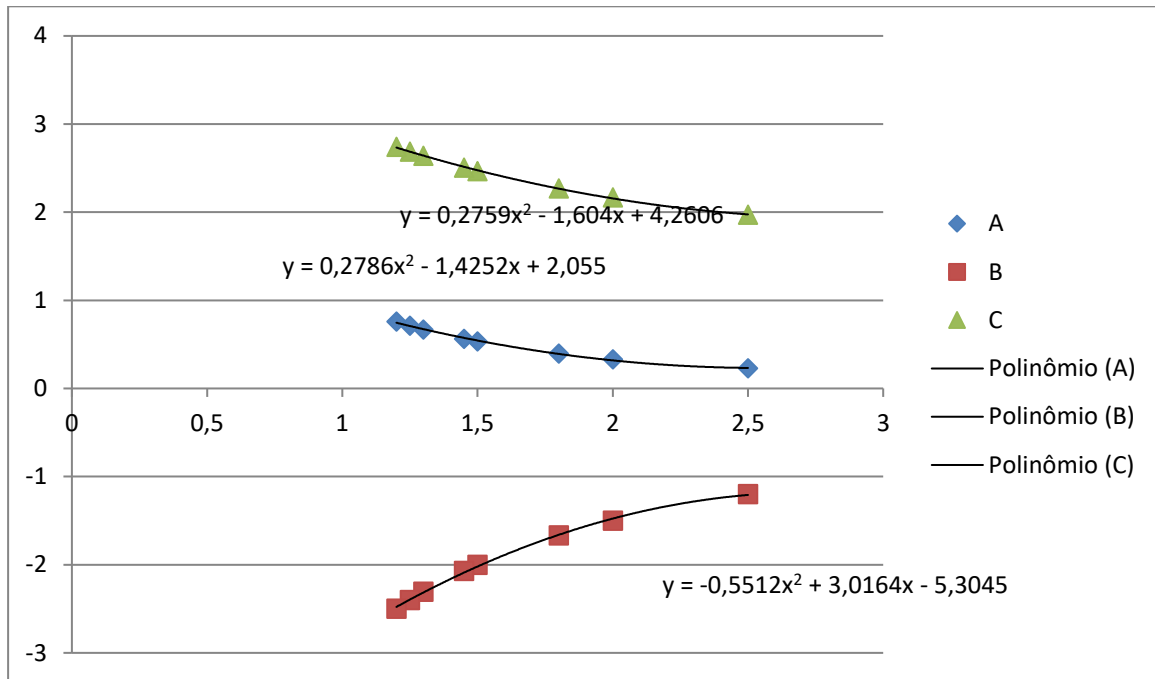


Figura 5: Gráficos dos parâmetros A, B e C em função de p.

Na Figura 6 representa a curva de ajuste polinomial para aproximação estimativas de $\ln(x)$, no intervalo $1 < x < e$, gerados a partir do conjunto de valores de entrada, identificados a seguir:

Valores de p	1	1,06 3	1,125	1,18 8	1,25	1,31 3	1,37 5	1,43 8	1,5	1,56 3	1,62 5	1,68 8
--------------	---	-----------	-------	-----------	------	-----------	-----------	-----------	-----	-----------	-----------	-----------

Valores de p	1,87 5	1,93 8	2	2,06 3	2,12 5	2,18 8	2,25	2,31 3	2,37 5	2,43 8	2,5	2,56 3
--------------	-----------	-----------	---	-----------	-----------	-----------	------	-----------	-----------	-----------	-----	-----------

Tabela3: Valores p para os quais foram aplicadas as equações (2).

Para cada valor de p se estima os valores dos parâmetros A, B e C, com uso das equações de (2). Assim para cada p se tem uma parábola que melhor aproxima da hipérbole da $f(x) = \frac{1}{x}$, com $1 < x < e$, Usando o resultado final da quadratura da parábola, pode-se estimar $\ln(x)$. No caso, o cálculo é realizado relativo ao segmento de reta que passa pelos pontos (1,1) e $(x, \frac{1}{x})$, vide Figura 6. Note que usando a quadratura da parábola, temos que a área identificada por H é dada por $\frac{4}{3}$ da área do triângulo de vértices $(1,1)$, $(p, \frac{1}{p})$ e $(D, g(D))$,

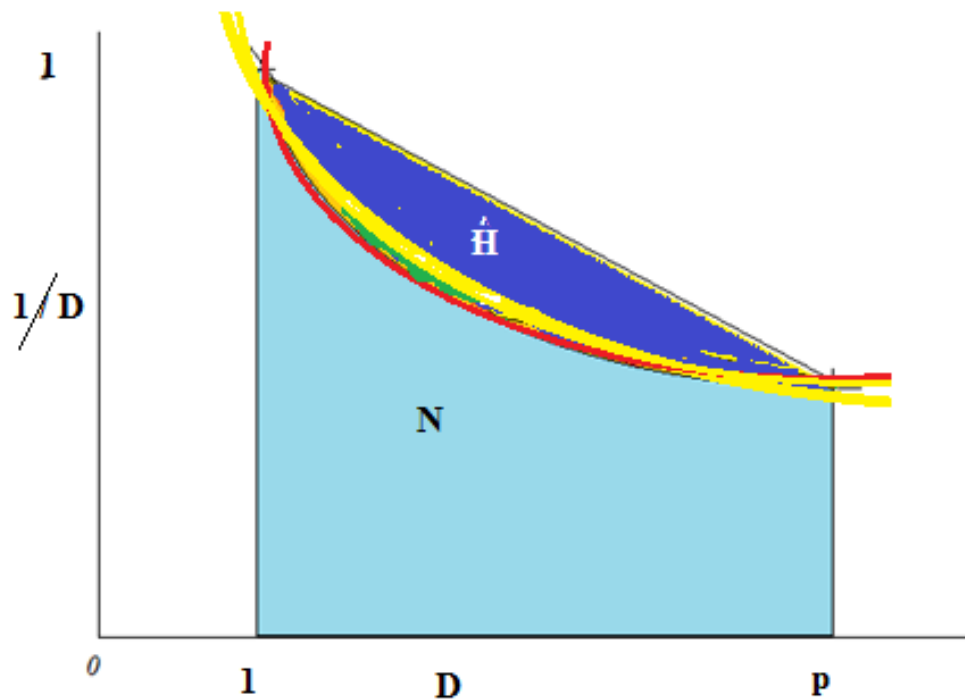


Figura 6: Representa diferença entre $g(x)$ e $f(x)$ para $1 < x < p$.

Na Figura 6, hipoteticamente a curva amarela refere a parábola $g(x)$ enquanto a curva em vermelho está associada a hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$, para $1 < x < p$.

Ao efetuarmos o cálculo da área da faixa delimitada entre a hipérbole $f(x) = \frac{1}{x}$, e o segmento de reta que passa por $(1,1)$ e $(p, \frac{1}{p})$, com uso da integral obtemos:

$$\text{área faixa} = \frac{p^2 - 1}{2p} - \ln \ln(p) \quad (*)$$

ao passo que a área do triângulo de maior área com vértices $(1,1)$ e $(p, \frac{1}{p})$, e $(x, \frac{1}{x})$ para $1 < x < p$, é exatamente:

$$\text{área triângulo maior} = \frac{(1-p)(2\sqrt{p} - 1 - p)}{2p} \quad (**)$$

Vale notar que os cálculo apontam um que a razão entre $(**)$ e $(*)$ dão um quociente entre a áreas que depende de $\ln(p)$. Assim não se pode esperar obter uma relação facilitadora na quadratura da hipérbole como ocorre com a parábola, dado que $(*)$ é não um número algébrico construtível a partir de p , enquanto $(**)$ pode ser transcendente, vide (PINTO & COSTA, 2018). Tal transcendência está associada com a caracterização dos números irracionais pela representação decimal infinita não-

periódica. Portanto, conhecer um polinômio de bom ajuste da função $\ln(x)$ permite um contorno parcial do problema.

Ao considerar as estimativas de $\ln(x)$ obtidas a partir da aplicação de $g(x)$, onde os parâmetros A, B e C foram estimados com os dados da Tabela 3. Desta forma, obtivemos estimativas bem satisfatórias para $\ln(x)$, todos os cálculos foram determinados diretamente na planilha eletrônica (ver figura 7.).

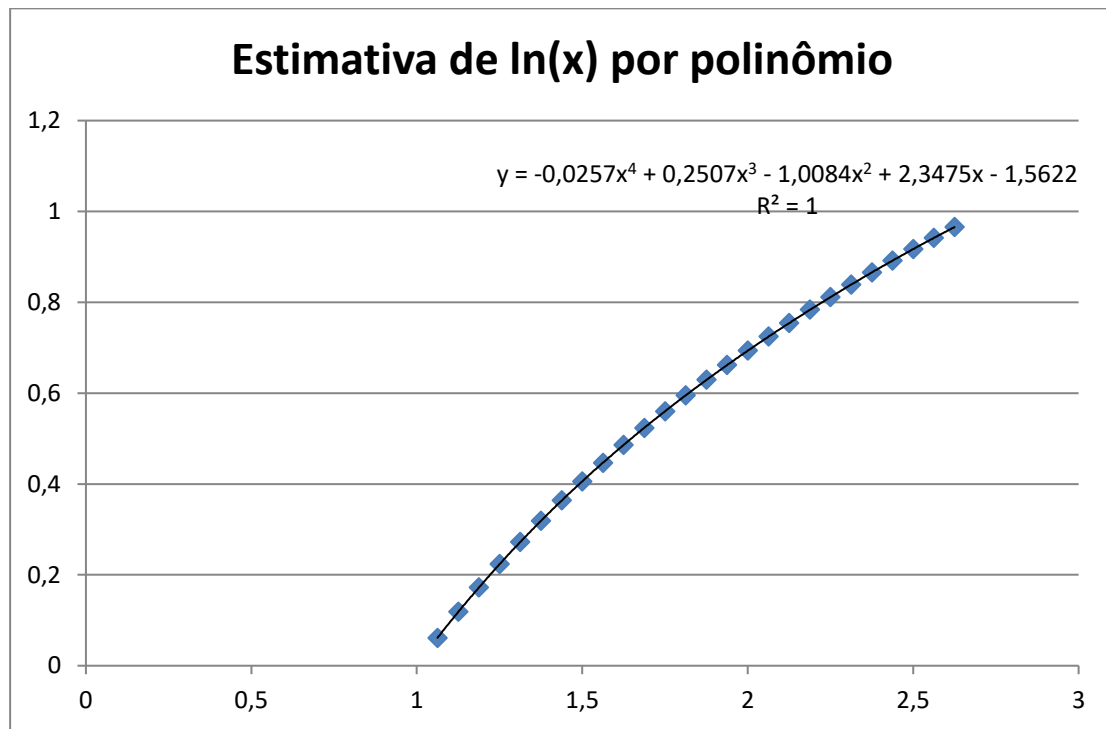


Figura 7: Um polinômio de quarto grau que ajusta $\ln(x)$, $1 < x < e$.

A partir da obtenção do polinômio ajuste à curva $\ln(x)$, $1 < x < e$, dado por

$$q(x) = -0,0257x^4 + 0,2507x^3 - 1,0084x^2 + 2,3475x - 1,5622$$

Destacamos que $q(x)$ foi obtido com dados provindo diretamente do uso da quadratura da parábola de Arquimedes, algo que pode ser trabalhado no ensino básico perfeitamente. A Tabela 4 ilustra, em valores essa proximidade entre a função logaritmo natural e $q(x)$ no intervalo em questão.

x	Estimativa de $\ln(x)$ em 5 iterações	$\ln(x)$ ofic.	Erro
1,0625	0,060923072	0,06062 5	0,00029 8
1,125	0,118358299	0,11778 3	0,00057 5
1,1875	0,172227906	0,17185	0,00037 8
1,25	0,223518406	0,22314 4	0,00037 5
1,3125	0,272407594	0,27193 4	0,00047 4
1,375	0,319064549	0,31845 4	0,00061 1
1,4375	0,363649635	0,36290 5	0,00074 4
1,5	0,4055145	0,40546 5	4,94E- 05
1,5625	0,446402076	0,44628 7	0,00011 5
1,625	0,48564658	0,48550 8	0,00013 9
1,6875	0,523373512	0,52324 8	0,00012 5
1,75	0,559699656	0,55961 6	8,39E- 05
1,8125	0,594733082	0,59470 7	2,6E-05
1,875	0,629373143	0,62860 9	0,00076 4
1,9375	0,662110475	0,66139 8	0,00071 2
2	0,693827	0,69314 7	0,00068
2,0625	0,724595924	0,72391 9	0,00067 7
2,125	0,753824736	0,75377 2	5,29E- 05
2,1875	0,783540211	0,78275 9	0,00078 1
2,25	0,811018406	0,81093	8,82E- 05
2,3125	0,838554664	0,83832 9	0,00022 5
2,375	0,865378611	0,86499 7	0,00038 1
2,4375	0,891511158	0,89097 3	0,00053 8
2,5	0,9169645	0,91629 1	0,00067 4

	2,5625	0,941742115	0,94098 3	0,00075 9	
	2,625	0,965838768	0,96508 1	0,00075 8	

Tabela 4: Comparativo entre valores estimas e observados de $\ln(x)$, $1 < x < e$.

Importante notar que a estimativa de $\ln(x)$ pelo polinômio $q(x)$ tem um erro oscilante, mas os valores de $q(x)$ tende a ser superiores aos de $\ln(x)$, em alguns pontos o erro foi inferiores a 0,00001 e os maiores erros próximos a 0,0076.

REFLEXÕES SOBRE O USO DE RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE LOGARITMOS

Uma vez que uma das principais tarefas do ensino de matemática é tratar em profundidade da compreensão conceitual dos conceitos previstos nos programas de ensino (MIRANDA & LAUDARES, 2007). torna-se muito interessante dar ênfase às estratégias de estudo, as quais se fazem com abordagens variadas, sejam elas descritivas, explicativas e/ou analíticas, valendo de maior diversidade de metodologias do tipo algébrica, numérica ou geométrica, seja também no tratamento do conceito matemático, .

Dominar um conceito matemático a ponto de se ter destreza em usá-lo, pode ser bem difícil, mas é algo valioso. Pensando por esse lado, vemos a necessidade de trabalhar o raciocínio heurístico na elaboração conceitual,(POLIA,1995) viabiliza um suporte cognitivo mais consistente. Dispor de estratégias de ensino que promovam mais reflexões sobre saberes, em acertos e nos erros, e gerar ambientes que traz uma mobilização de ideias conjecturas e hipóteses sobre os temas estudados.

Em certas situações, o simples fato da pessoa compreender melhor a noção de gráficos e das propriedades dos logaritmos pode ser um fator interessante na aprendizagem do conceito. O professor Alberton Fagno Valle do IFRN destacou, nos seminários de logaritmos que ao relacionar o cálculo de raiz n -ésimas de um dado número real com as propriedades dos logaritmos com uso de uma representação gráfica, alguns alunos que estavam com a compreensão do conceito “meio turva”, disseram que a relação destacada despertou curiosidade, dado que “sempre calculamos raízes com a calculadora”, e saber desse poder dos logaritmos foi importante para eles Nesse sentido, representações geométricas podem ser importantes também. Por exemplo, a Figura 8 representa o famoso problema em Tales calcula a altura da pirâmides de Queops, usando semelhanças de triângulos, e partindo do princípio que os raios solares deslocam paralelamente quando em nossa atmosfera.

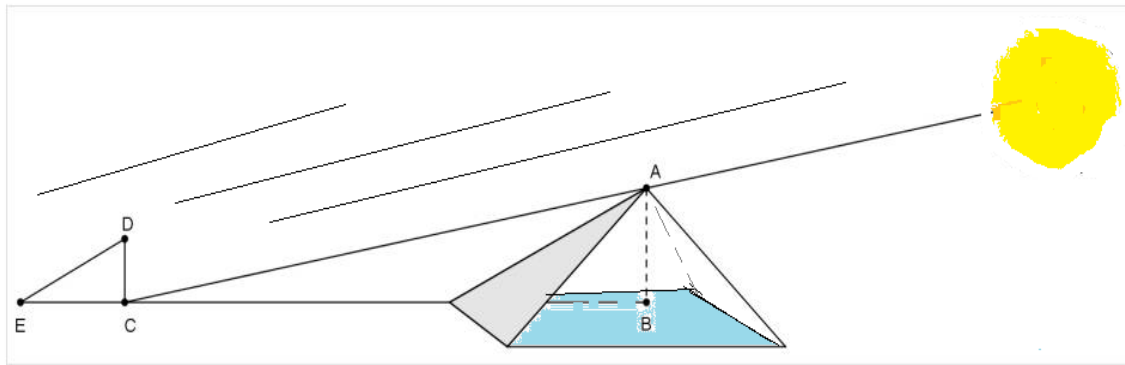


Figura 8: Representação da estratégia de Tales.

Procedendo de forma bem similar podemos dar uma interpretação para raiz quadrada de um número real positivo. Dado um número real positivo, podemos associar a ele o comprimento de um seguimento de reta PC, qual deve ser a distância do ponto Q ao ponto P, onde PQ representa uma haste vertical, de modo que, a sombra da aste PQ atinge C no mesmo instante em que a sombra de AB atinge M, sendo que a distância de A até B é um metro e a distância de A até M coincide com a distância de P a Q (ver figura 9).



Figura 9: semelhança de triângulos.

A partir de semelhança de triângulos teremos:

$$\frac{1}{X} = \frac{X}{d(P, C)} \rightarrow d(P, C) = \sqrt{X}$$

A obtenção da raiz quadrada a partir da função logarítmica é francamente difundida, e decorre diretamente das propriedades do logaritmo que se se o logaritmo de $x = d(P, C)$ em uma base b for y, o logaritmo da raiz quadrada de x será exatamente metade do valor de y,

$$y = \log_b(x) \text{ implica } \left(\frac{y}{2}\right) = \log_b(x^{(1/2)})$$

Portanto, obtemos o valor da raiz de x , elevando b a $\frac{y}{2}$, ou seja $x^{(1/2)} = b^{(y/2)}$.

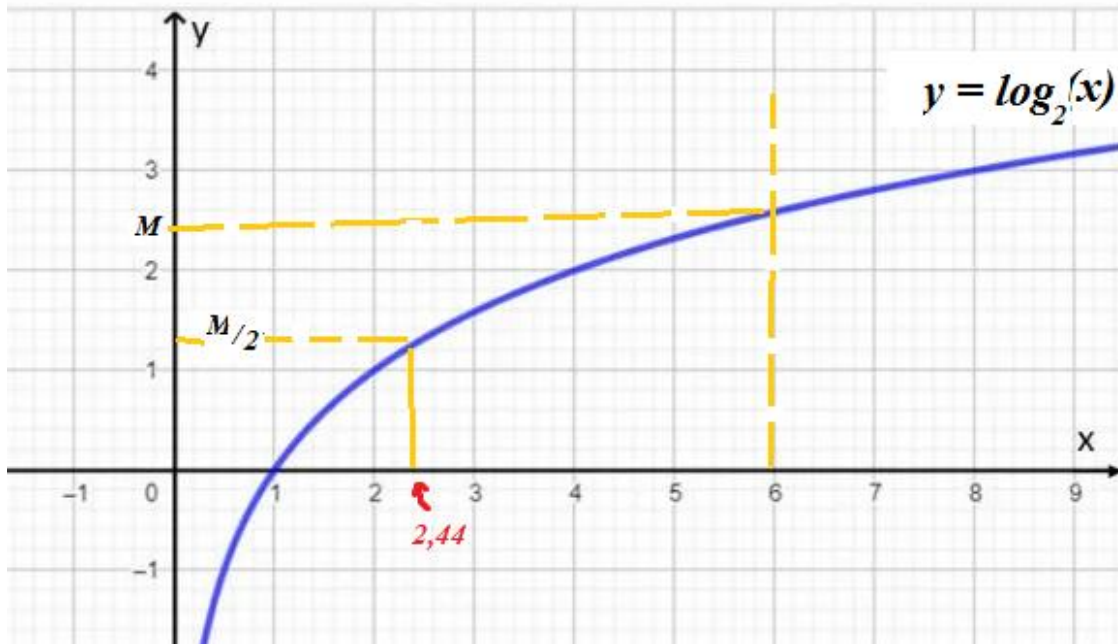


Figura 10: Exemplificação do cálculo de raiz quadrada.

A título de exemplificação podemos calcular raiz quadrada de 6, usando a representação gráfica da função logaritmo na base dois. Conhecendo $M = \log_2(6)$, que é aproximadamente $M = 2,5849625$, deve se localizar na imagem da função logaritmo na base dois o valor $\frac{M}{2}$, o valor de x associado a este, no caso x é aproximadamente 2,44948974, é raiz quadrada de 6.

O estudo das funções logarítmicas e exponenciais pode ser desenvolvidas explorando mais elementos da Geometria analítica, nesse sentido uma sugestão é construir um algoritmo que permite trabalhar a translação e rotação do gráficos a partir de sua equação geral, os quais podem ser implementado através de uma interface gráfica do software MATLAB fazendo uso da função GUIDE, vide (HANSELMAN & LITTLEFIELD, 2000). Trabalhos como (BRENER, 2013), (AZEVEDO, 2013) e (AZEVEDO & ARANTES, 2017) mostram que quando se trabalha o conceito de logaritmos a partir de uma sequência didática tem como foco a utilização dos objetos de aprendizagem, usando softwares como o Geogebra, obtém-se bons resultados de aprendizagem, ou seja os estudantes mostraram avanços na aprendizagem, mensurados em através de testes posteriores a abordagem. Claro que a valorização da interpretação gráfica ou geométrica associada à utilização dos objetos de aprendizagem é plenamente viável de aplicar no ensino médio. Vale destacar que a valorização da história dos

logaritmos, de sua construção e dos fundamentos básicos relacionados a origem do conceito, foi vem retratada em cada um dos trabalhos (BRENER, 2013), (AZEVEDO, 2013) e (AZEVEDO & ARANTES, 2017), o que consola com proposta deste livro, de valorizar a história da Matemática na abordagem de um tema tão rico e desafiante, ao saber mais sobre a herança cultural do conceito, enriquece o diálogo e, possivelmente pode aumentar o interesse dos discentes pela conteúdo. De modo que essa tendência em educação Matemática se mostra muito flexível e dinâmica podendo servir tanto ao ensino quanto à pesquisa, também influencia na formação do pensamento humano e em reflexões que permitem termos uma visão mais ampla da matemática e das tecnologias com as quais lidamos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AZEVEDO, L. X. , Logaritmos - Construção da definição geométrica com o uso do GeoGebra, Dissertação(mestrado), Universidade Estadual de Maringá, Profmat, 2013.
- AZEVEDO, L. X. ; ARANTES, L. P. G. ; Construção da definição geométrica de logaritmos com o uso do GeoGebra. *Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática*. Vol 1, ed. 2, 2017
- BRENER, C. L. S. , Objetos de aprendizagem par ao ensino de logaritmos e exponenciais. Dissertação de mestrado IMPA-RJ / RJ, 2013.
- HANSELMAN, D., LITTLEFIELD, B. R., "Mastering MATLAB 6", Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- LIMA, E. L. A Matemática do Ensino Médio (3ª Edição ed., Vol. 1). (S.B.Matemática, Ed.) Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.
- LIMA, E. L. Logaritmos. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil, 1973.
- MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B.; Informatização no Ensino da Matemática: Investindo no Ambiente de Aprendizagem. *Zetetiké*, Campinas - SP, v.15, n. 27, jan., jun., p. 71- 88, 2007.
- PEREIRA, J. G. A.; Abordagem das funções exponencial e logarítmica numa perspectiva conceitual e gráfica no ensino médio. Dissertação apresentada ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. 2010.
- PINTO, R; , COSTA, L. A irracionalidade e transcendência de certos logaritmos. Professor de Matemática Online - Revista da Sociedade Brasileira de Matemática, V.6 , n. 1, 2018.
- POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1995.
- SANTOS, J. M., Quadratura da parábola: Uma abordagem possível para o ensino de somas infinitas Dissertação de mestrado – UFRN – Natal /RN, 2014.

AGRADECIMENTOS AOS COLABORADORES

A equipe organizadora da COLETÂNEA DE TRABALHOS SOBRE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ESTRATÉGIAS INTERDISCIPLINARES NO ENSINO DE LOGARITMOS à UFERSA por possibilitar a realização deste trabalho, que dá acesso direto a comunidade escolar à importantes trabalhos realizados no programa de mestrado profissional em Matemática PROFMAT/UFERSA. Bem como a colaboração e empenho dos profissionais que enviaram trabalhos que viabilizaram a construção deste material, em reflexões e apresentações dos seminários de logaritmos e / ou seminário reflexões sobre o ensino básico de matemática.

EQUIPE DE COLABORADORES

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues – UFERSA

Prof. Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal - UFERSA

Prof. Ms. Jackson Jonas Silva Costa - UFERSA

Profa. Dra. Franceliza Monteiro da Silva Dantas - UFERSA

Prof. Dr. Santos Demetrio Miranda Borjas - UFRN

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes - UFPA

Prof. Dr. Evanildo Costa Soares – Rede Pública de ensino básico - RN

Prof. Ms. Renato Mucciaccito - Educação Básica na Secretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo, SP

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos UNICAMP - SP

Prof. Ms. José Eduardo Colle - Rede Privada de ensino básico - SP

Prof. William Rodrigues da Silva - Rede Pública de ensino básico - SP

Prof. Dr. Janilson Pinheiro de Assis – UFERSA

Prof. Dr. Roberto Pequeno de Sousa—UFERSA

Prof. Ms. Joelma de Assis França- Professora do ensino fundamental do estado do Rio Grande do Norte RN

Prof. Dr. Paulo Cesar Ferreira Linhares – UFERSA

Prof. Dr. Robson Pequeno de Sousa-UEPB

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E ESTRATÉGIAS INTERDISCIPLINARES NO ENSINO DE LOGARITMOS

Walter Martins Rodrigues
Elmer Rolando Llanos Villarreal

 conhecimentolivre.org/home

 contato@conhecimentolivre.org

 [editoraconhecimentolivre](https://www.instagram.com/editoraconhecimentolivre)

